F 1812

1504

54

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul VIII (XII)

FASC. 1 – 2

1962

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul VIII (XII)

FASC. 1 – 2

1962

F
1812

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. D. ATANASIU, prof. C. CALISTRU, conf. Gh. CHIRIȚĂ,
prof. TOMA FĂRCAȘ, prof. TIBERIU GOLGOȚIU,
prof. ILIE MATEI, membru corespondent al Academiei R.P.R.,
prof. D. MANGERON, conf. AUREL MARCHIȘ,
prof. D. RUSU, prof. GH. VASILIU.

Redactor responsabil: prof. CRISTOFOR SIMIONESCU,
membru corespondent al Academiei R. P. R.

Secretar: lector HUGO ROSMAN

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
TOMUL VIII (XII), fasc. 1—2 1962

SUMAR

Pag.

REDACŢIONALE XV

*** Academicianul prof. dr. I.G. Murgulescu la împlinirea a 60 de ani de viaţă XVII

AL. CLIMESCU, Programarea algebrică (I) 1

AL. CLIMESCU, Programarea algebrică (II) 5

ADOLF HAIMOVICI şi ŞARLOTA RIMER, Asupra unei probleme de programare liniară generalizată 9

T. G. EZROHI, Asupra unei teoreme a lui Schild-Lewandowski . . 15

ERWIN KREYSZIG, Elaborarea teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip eliptic pe baza teoriei funcţiilor de variabilă complexă . . 19

D. MANGERON, Tehnica programării dinamice în rezolvarea unei noi clase de probleme pe contur pentru ecuaţii cu „derivate totale" . 47

R. B. DINGLE, Dezvoltări asimptotice şi factori de convergenţă . . 53

N. F. CETVERUHIN, Perechi de triunghiuri în spaţiu şi teorema lui Desargues 61

VIOREL MURGESCU, Observaţii asupra spaţiilor cu conexiune afină, cu tensor recurent 65

I. N. SLEZINGER, Ecuaţiile fundamentale ale teoriei elasticităţii neliniare exprimate în deplasări 71

G. BRADISTILOV şi G. BOIADJIEV, Asupra cazului general de mişcări periodice relative ale unui pendul fizic dublu situat într-un plan supus la rotaţie 75

M. K. JAIN, Scurgerea forţată a unui fluid nenewtonian avînd ca obstacol un disc în rotaţie 83

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, Despre percusiunea picăturilor asupra pereţilor rigizi 93

V. D. KUCIN, Asupra teoriei interacţiunii radiaţiei cu substanţa . . 97

M. E. POZIN şi B. A. KOPÎLEV, Asupra vitezei şi mecanismului de descompunere a fosfaţilor acizilor sulfuric şi fosforic . . . 107

VIRGIL ARMEANU şi POLIXENIA COSTINESCU, Determinarea fluorometrică a galiului cu rodamina *B* în subprodusele industriei zincului 123

Pag.

ŞT. IVĂŞCANU, Contribuţii la studiul stabilirii condiţiilor de obţinere a policromaţilor prin electroliza cromatului de sodiu . . . 129

TEODOR SĂVEANU şi RADU TUDOSE, Fenomenul de înec în curgerea peliculară lichid-gaz în contracurent (I) 141

GH. BOTEZ şi LONGIN ENESCU, Sulfamidele acizilor fenoxiacetici (III) 153

V. KUBELKA, Unele probleme relative la mecanizarea şi automatizarea întreprinderilor de pielărie 163

CRISTOFOR SIMIONESCU şi EMANUEL POPPEL, Utilizarea substanţelor cation active drept agenţi de coagulare a dispersiei de încleiere a hîrtiei 177

MIŞILIM GRINDEA şi SAVEL IFRIM, Contribuţii la studiul influenţei agenţilor alcalini asupra lînii 189

D. BĂRBULESCU, Circuite cu reactanţe semicompensate . . . 201

AUREL POPOVICI, GH. ŞERBAN, I. SUCHAR şi VITALIE VASILACHE, Un cîmp magnetic alternativ sinusoidal radial cu repartiţie sinusoidală monopolară 215

N. V. BOŢAN, V. PRISĂCARU, BORIS PONOMAREV şi LORIN CANTEMIR, Consideraţiuni experimentale asupra funcţionării unui motor asincron în scurtcircuit, cu statorul alimentat cu tensiuni asimetrice 229

R. A. NELEPIN, Influenţa frecării uscate asupra dinamicii unor sisteme de reglaj automat cu acţiune indirectă 239

HUGO ROSMAN şi ALFRED BRAIER, Asupra transmisiei cu factor de putere optim a energiei active prin sisteme electrice (II) . . 267

ALFRED BRAIER, Metodă grafică pentru studierea unor noi tipuri de sisteme neliniare neautonome cu un grad de libertate . . 279

D. MANGERON şi D. KATAMADZE, Aplicarea geometriei cinematice tangenţiale la studiul mecanismelor şi maşinilor . . . 289

STEFAN MILLER, Curbe de bielă cu puncte duble 295

D. I. MANGERON şi P. A. LEBEDEV, Algoritm de formare a ecuaţiilor algebrice a curbelor de bielă, de înfăşurare liniară, generate de mecanisme plane 317

EMIL GAIGINSCHI, MIRCEA ZUGRĂVEL, MIRCEA GUTMAN şi AL. BIRJOIANU, Semnificaţia şi proprietăţile centrului termodinamic al ciclului izocor 322

C. CRUSSARD, J. PLATEAU, G. HENRY şi J. VOELTZEL, Studiul unor cazuri de segregaţie intergranulară în metale 333

A. FARLÍK şi VL. OSINA, Folosirea energiilor mari în prelucrarea metalelor 341

N. G. POPINCEANU, M. D. GAFIŢEANU şi M. D. PĂUN, Încercări pe un dispozitiv de turaţie înaltă 349

AUREL RĂILEANU şi DAN NICOLESCU, Determinarea parametrilor forţei principale de aşchiere în procesul de strunjire longitudinală la oţelurile romîneşti (VIII) 355

Pag.

K. K. PONOMAREV, Calculul cadrelor prin metoda matricială . . 357

PLACIDO CICALA, O teorie a învelişurilor elastice subţiri, cu privire specială asupra muchiilor ascuţite 373

ANTON ŞESAN, DANIEL DIACONU şi I. CIONGRADI, Cercetări experimentale privind calculul seismic al construcţiilor din panouri mari 379

VICTOR BAUŞIC şi D. HORBANIUC, Contribuţii la studiul cablurilor de oţel 383

IU. M. KEMNITZ, Deviaţia direcţiei într-o fotografie aeriană plană făcută sub un unghi α 387

VLADIMIR BOGHIAN, DANIEL DIACONU, LUIZA TANASACHE şi MIRCEA MANOLOVICI, Folosirea calcarelor cochilifere ca agregate pentru betoane obişnuite şi de marcă superioară . . 391

GH. GANJULA şi ZAHARIA SALINIUC, Consideraţiuni asupra unor proprietăţi ale betoanelor asfaltice şi asupra modului lor de determinare în laborator 405

I. ŞTEFĂNESCU, AUREL MARCHIŞ, OLIMPIA MARCHIŞ şi MARIA OANCEA, Studiu asupra caracteristicilor peliculelor de agregat pe bază de amidon şi influenţa acestora asupra caracteristicilor firelor de urzeală 419

I. VLAD, Cercetări referitoare la influenţa proceselor tehnologice asupra elasto-plasticităţii unor materiale textile 435

G. V. LIVÎI, A. G. HRIPIN şi M. A. BRAGHINSKI, Agregat pentru prelucrarea dinamică a feţelor de piele în timpul uscării . . 445

P. MÎLCOMETE, C. NICOLICIOIU, I. MATEI, MIRCEA BOŢA, I. ADUMITRĂCESEI, GEORGETA MACARIE, MARIA POPA, ISPAS MOŢIU şi G. MEDRIHAN, Politica P. M. R. de creare şi dezvoltare a bazei economice a socialismului în R. P. R. . . 453

RECENZII 463

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ

Том VIII (XII), выпуск 1—2 1962 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОТ РЕДАКЦИИ XV

* * * К 60-тилетию академика проф. д-ра И. Г. Мургулеску . . XVII

АЛ. КЛИМЕСКУ, Алгебраическое программирование (I) . . . 1

АЛ. КЛИМЕСКУ, Алгебраическое программирование (II) . . . 5

АДОЛЬФ ХАЙМОВИЧ и ШАРЛОТА РИМЕР, Об одной задаче обобщенного линейного программирования 9

Т. Г. ЭЗРОХИ, Об одной теореме Шильда-Левандовского . . . 15

ЕРВИН КРАЙСИГ, Построение теории эллиптических уравнений в частных производных на основе теории функций комплексных переменных . 19

Д. МАНЖЕРОН, Техника динамического программирования нового класса граничных задач в „полных производных“ 47

Р. Б. ДИНГЛ, Асимптотические разложения и факторы сходимости . 53

Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН, О парах треугольников и теореме Дезарга . . 61

ВИОРЕЛ МУРДЖЕСКУ, О пространствах аффинной связности с рекуррентной кривизной 65

И. Н. СЛЕЗИНГЕР, Основные уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях. 71

Г. БРАДИСТИЛОВ и Г. БОЯДЖИЕВ, Общий случай относительных периодических движений двойного физического маятника, лежащего в подверженной ротации плоскости 75

М. К. ДЖЕЙН, Принудительное течение неньютоновской жидкости имеющей как препятствие вращающийся диск 83

ШТ. И. ГЕОРГИЦЭ, Об ударе капель на твердые стенки . . . 93

В. Д. КУЧИН, К теории взаимодействия излучения с веществом . . 97

М. Е. ПОЗИН и Б. А. КОПЫЛЕВ, О скорости и механизме разложения фосфатов серной и фосфорной кислотами 107

ВИРДЖИЛ АРМЯНУ и ПОЛИКСЕНИЯ КОСТИНЕСКУ, Флуорометрическое определение галлия родамином *B* 123

Стр.

ШТ. ИВЭШКАНУ, Изучение условий получения полихроматов электролизом хромата натрия 129

ТЕОДОР СЭВЯНУ и РАДУ ТУДОСЕ, Явления захлебывания в пленочном течении жидкость-газ в противотоке (I) 141

Г. БОТЕЗ и ЛОНГИН ЕНЕСКУ, Сульфамиды фенокси-уксусных кислот (III) 153

В. КУБЕЛКА, Некоторые вопросы механизации и автоматизации кожевенных предприятий 163

КРИСТОФОР СИМИОНЕСКУ и ЭМАНУЕЛ ПОППЕЛ, Использование катион-активных веществ как коагулирующее средство для клеящих дисперсии бумаги 177

МИШИЛИМ ГРИНДЯ и САВЕЛ ИФРИМ, К вопросу о влиянии щелочных агентов на шерсть 189

Д. БЭРБУЛЕСКУ, Электрические цепи с полукомпенсирующими реактансами 201

АУРЕЛ ПОПОВИЧ, Г. ШЕРБАН, И. СУХАР и ВИТАЛИЕ ВАСИЛАКЕ, Переменное синусоидальное магнитное поле с однополюсным синусоидальным распределением 215

Н. В. БОЦАН, В. ПРИСЭКАРУ, БОРИС ПОНОМАРЕВ и ЛОРИН КАНТЕМИР, Экспериментальные соображения в связи с поведением короткозамкнутого асинхронного двигателя питаемого несимметричными напряжениями в статоре 229

Р. А. НЕЛЕПИН, Влияние сухого трения на динамику некоторых систем автоматического регулирования непрямого действия . . . 239

ГУГО РОСМАН и АЛЬФРЕД БРАЙЕР, О передаче с наилучшим коэффициентом мощности активной энергии через электрические системы (II) 267

АЛЬФРЕД БРАЙЕР, Графический метод для изучения некоторых новых типов нелинейных неавтономных систем с одной степенью свободы 279

Д. МАНЖЕРОН и Д. КАТАМАДЗЕ, К применению кинематической геометрии в тангенциальных координатах к исследованию механизмов и машин 289

ШТЕФАН МИЛЛЕР, Шатунные кривые с двойными точками . . 295

Д. И. МАНЖЕРОН и П. А. ЛЕБЕДЕВ, Алгоритм составления алгебраических уравнений линейно огибающих шатунных кривых плоских механизмов 317

ЭМИЛ ГАЙДЖИНСКИЙ, МИРЧА ЗУГРЭВЕЛ, МАРЧЕЛ ГУТМАН и АЛ. БЫРЖОЯНУ, Значения и свойства термодинамического центра изохорического цикла 321

К. КРЮССАР, Ж. ПЛАТО, Г. АНРИ и Ж. ВЁЛЦЕЛЬ, Исследование некоторых случаев интергрануляционной сегрегации в металлах . 333

А. ФАРЛИК и ВЛ. ОСИНА, Использование больших энергий в обработке металлов 341

Н. Г. ПОПИНЧЯНУ, М. Д. ГАФИЦЯНУ и М. Д. ПЭУН, Испытания на приспособлении для максимального числа оборотов . . . 349

АУРЕЛ РЭИЛЯНУ и ДАН НИКОЛЕСКУ, Определение параметров главной режущей силы румынской стали в процессе продольной резки (VIII) 355

Стр.

К. К. ПОНОМАРЕВ, Расчет рам матричным методом . . . 357

ПЛАЧИДО ЧИКАЛА, Относительная теория о тонких упругих оболочках с особой заметкой относительно острых ребер 373

АНТОН ШЕСАН, ДАНИЕЛ ДЬЯКОНУ и И. ЧОНГРАДИ, Экспериментальные исследования по сейсмическим расчетам для крупнопанельных зданий 379

ВИКТОР БАУШИК и Д. ГОРБАНЮК, К исследованию стальных канатов 383

Ю. М. КЕМНИЦ, Искажение направления планового аэроснимка за угол α 387

ВЛАДИМИР БОГЯН, ДАНИЕЛ ДЬЯКОНУ, ЛУИЗА ТАНАСАКИ и МИРЧЯ МАНОЛОВИЧ, Обычные бетоны и бетоны повышенных марок с заполнителем из известняка-ракушкина 391

Д. ГАНЖУЛА и ЗАХАРИЯ САЛИНЮК, К вопросу о некоторых свойствах асфальтобетонов и о способе их определения в лаборатории . . 405

И. ШТЕФЭНЕСКУ, АУРЕЛ МАРКИШ, ОЛИМПИЯ МАРКИШ и МАРИЯ ОАНЧА, Исследование физико-механических характеристик клеящих пленок, основанных на крахмале и их влияние на характеристики хлопчатобумажных нитей для основы 419

И. ВЛАД, Исследование влияния технологических процессов на эластичность и пластичность некоторых текстильных материалов . . 435

Г. В. ЛИВЫЙ, А. Г. ХРИПИН и М. А. БРАГИНСКИЙ, Агрегат для динамической обработки мягких кож на участке сушки . . . 445

П. МЫЛКОМЕТЕ, К. НИКОЛИЧОЮ, И. МАТЕЙ, МИРЧА БОЦА, И. АДУМИТРЭЧЕСЕЙ, ДЖОРДЖЕТА МАКАРИЕ, МАРИЯ ПОПА, ИСПАС МОЦИУ и Г. МЕДРИГАН, Политика Румынской Рабочей Партии о создании и развитии экономической базы социализма в Румынской Народной Республике 453

РЕЦЕНЗИИ 463

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES

Vol. VIII (XII), Fasc. 1—2 1962

CONTENTS

Pag.

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS XV

*** Au 60-ième anniversaire de l'Académicien Prof. Dr. I. G. Murgulescu XVII

AL. CLIMESCU, La programmation algébrique (I) 1

AL. CLIMESCU, La programmation algébrique (II) 5

ADOLF HAIMOVICI et ŞARLOTA RIMER, Sur un problème de programmation linéaire généralisée 9

T. G. EZROHI, Sur un théorème de Schild-Lewandowski 15

ERWIN KREYSZIG, Über den Aufbau der Theorie elliptischer partieller Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage . 19

D. MANGERON, A technique of dynamic programming concerning a new class of boundary value problems with „total derivatives" . . 47

R. B. DINGLE, Asymptotic expansions and converging factors . . 53

N. F. TSCHETWERUCHIN, Die Dreieckpaare im Raum und der Satz von Desargues 61

VIOREL MURGESCU, Sur les espaces à connexion affine, à courbure récurrente 65

I. N. SLEZINGER, The principal equation of the nonlinear theory of elasticity expressed in the displacements 71

G. BRADISTILOV et G. BOYADJIEV, Cas général des mouvements périodiques relatifs d'un pendule physique double situé dans un plan soumis à rotation 75

M. K. JAIN, Forced flow of a non-newtonian liquid against a rotating disk 83

ŞT. I. GHEORGHIŢĂ, On the impact of drops on rigid walls . . 93

V. D. KUCHIN, On the theory of interaction of the radiation with a solid 97

M. E. POZIN and B. A. KOPYLEV, Decomposition rate and mechanism of the phosphates of sulphuric and phosphoric acids . . 107

VIRGIL ARMEANU and POLIXENIA COSTINESCU, Fluorometric determination of galium with rhodamine *B* 123

Pag.

ŞT. IVĂŞCANU, Contribution à l'étude des conditions pour l'obtention des polychromates par l'électrolyse du chromate de natrium . 129

TEODOR SĂVEANU und RADU TUDOSE, Der Stauzustand in Rieselfilm in Gegenwart eines in Gegenstrom wirkendes Gases (I) . 141

GH. BOTEZ et LONGIN ENESCU, Sulfamides des acides phénoxiacétiques (III) 153

V. KUBELKA, Einige Probleme der Mechanisierung, bzw. Automatisierung der Gerbereien 163

CRISTOFOR SIMIONESCU und EMANUEL POPPEL, Die Verwendung von kationaktiven Stoffen als Ausflockungsvermittler der Papierleimdispersionen 177

MIŞILIM GRINDEA et SAVEL IFRIM, Contributions à l'étude de l'influence des agents alcalins sur la laine 189

D. BĂRBULESCU, Circuits électriques à réactances sémicompensées 201

AUREL POPOVICI, GH. ŞERBAN, I. SUCHAR et VITALIE VASILACHE, Un champ magnétique alternatif sinusoïdal à distribution sinusoïdale monopolaire 215

N. V. BOŢAN, V. PRISĂCARU, BORIS PONOMAREV et LORIN CANTEMIR, Considérations expérimentales sur le fonctionnement d'un moteur asynchrone en court-circuit alimenté par des tensions asymétriques 229

R. A. NELEPIN, Effect of dry friction on dynamics of some indirect control systems 239

HUGO ROSMAN et ALFRED BRAIER, Sur la transmission à facteur de puissance optimum de l'énergie active par des systèmes électriques (II) 267

ALFRED BRAIER, Méthode graphique pour l'étude de certains systèmes nouveaux non-linéaires, non-autonomes, à un seul degré de liberté 279

D. MANGERON et D. KATAMADZÉ, Application de la géométrie cinématique tangentielle à l'étude des mécanismes et des machines . 289

STEFAN MILLER, Koppelkurven mit Doppelpunkten . . . 295

D. I. MANGERON e P. A. LEBEDEV, L'algoritmo di deduzione delle equazioni algebriche delle curve di biella linearmente inviluppate spettanti ai meccanismi piani 317

EMIL GAIGINSCHI, MIRCEA ZUGRĂVEL, MARCEL GUTMAN et AL. BÎRJOIANU, Signification et propriétés du centre thermodynamique du cycle isochore 321

C. CRUSSARD, J. PLATEAU, G. HENRY et J. VOELTZEL, Étude de quelques cas de ségrégation intergranulaire dans les métaux . 333

A. FARLÍK and VL. OSINA, High energy rate in the forming of metals 341

N. G. POPINCEANU, M. D. GAFIŢEANU und M. D. PĂUN, Versuche auf einer Vorrichtung mit hoher Drehzahl 349

AUREL RĂILEANU et DAN NICOLESCU, Détermination des paramètres des forces de coupe concernant les aciers roumains soumis au tournage longitudinal (VIII) 355

Pag.

K. K. PONOMAREV, Le calcul des portiques par la méthode matricielle 357

PLACIDO CICALA, A theory for elastic thin shells and edge effects . 373

ANTON ŞESAN, DANIEL DIACONU et I. CIONGRADI, Recherches expérimentales concernant le calcul séismique des constructions à grands panneaux 379

VICTOR BAUŞIC et D. HORBANIUC, Contributions à l'étude des câbles d'acier 383

IU. M. KEMNITZ, Distorsions of directions on the plane aerial photographs owing an angle α 387

VLADIMIR BOGHIAN, DANIEL DIACONU, LUIZA TANASACHI et MIRCEA MANOLOVICI, Bétons usuels et de marques supérieures à calcaires coquilliers 391

D. GANJULA et ZAHARIA SALINIUC, Considérations sur certaines propriétés des bétons asphaltiques et sur leurs méthodes de détermination dans le laboratoire 405

I. ŞTEFĂNESCU, AUREL MARCHIŞ, OLIMPIA MARCHIŞ und MARIA OANCEA, Untersuchungen über die physisch-mechanischen Eigenschaften der Stärkeschlichtefilme und ihr Einfluss auf die Charakteristiken der Baumwollkettfäden 419

I. VLAD, Reaserches about the influence of the technological processes upon the elasto-plasticity of some textile materials . . . 435

G. V. LIVYI, A. G. HRIPIN und M. A. BRAGINSKI, Aggregat für die dynamische Bearbeitung des Oberlederes während des Trocknens . 445

P. MÎLCOMETE, C. NICOLICIOIU, I. MATEI, MIRCEA BOŢA, I. ADUMITRĂCESEI, GEORGETA MACARIE, MARIA POPA, ISPAS MOŢIU et G. MEDRIHAN, La politique du Parti Ouvrier Roumain de création et de développement de la base économique du socialisme dans la République Populaire Roumaine . . . 453

BOOK REVIEWS 463

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

REDACŢIONALE

ОТ РЕДАКЦИИ

EDITORSCHIP'S ANNOUNCEMENTS

Articole ale colaboratorilor străini primite la redacţia revistei *Buletinul Institut ului politehnic din Iaşi*

Статьи иностранных сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

Papers received from abroad by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

ГЕЙТА Л. и ВАНАГ Г., (Академия Наук Латв. ССР, Рига СССР), *Производные циклопропана из геминальных дииндандионилалканов.*

МАХАЛДИАНИ В. В., (Академия Наук Гр. ССР, Тбилиси, СССР), *Новые формулы для приведения к нормальным атмосферным условиям показателей карбюраторного двигателя.*

КАРТВЕЛИШВИЛИ Ю. Л., КИПИАНИ Т. Т., КИКНАДЗЕ Н. А., ГОЗАЛИШВИЛИ Г. А., КОБАХИДЗЕ Ш. В., (Грузинский политехнический институт им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР), *Ударные испытания отвала бульдозера.*

ЦИЦИШВИЛИ Г. В., АНДРОНИКАШВИЛИ Т. Г., (Академия Наук Гр. ССР., Тбилиси, СССР), *Новые перспективные тонкопористые сорбенты — синтетические цеолиты.*

ШЕСТОПАЛ А. Ф., (Академия Наук УССР, Киев, СССР), *Метод отражений и его применение к задачам математической физики.*

KOŽEŠNÍK J., (Academy of Sciences, Prague, Tchekoslovak Socialist Republic), *Flexural vibrations of a rotating shaft with a flywheel.*

BOGUSZ WL., (Academy of Mines, Krakow, Polish People's Republic), *Nonoscillatory problem for nonlinear single degree of freedom systems.*

SINHA D. K., (Jadavpur University, Calcutta, India), *Note on longitudinal vibrations of a semi-infinite elastic bar in a magnetic field with a prescribed force at one end.*

TONDL A., (Staatliches Forschungsinstitut für Wärmetechnik, Prag, Tchechoslovakische Sozialistische Republik), *Hauptresonanzen nichtlinearer Systeme mit mehreren Freiheitsgraden.*

PLANDER I. and GRUSKA J., (Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Tchekoslovak Socialist Republic), *Programme for calculating forced vibrations in torsional vibrating systems by an automatic computer.*

БЕЛЕНЬКИЙ И. М., (Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, СССР), *Приложение метода гидромеханической аналогии к задачам классической механики.*

БЛАГА К., (Научно-исследовательский технико-экономический институт химической промышленности, Прага, ЧССР), *Использование электронной автоматической счетной машины Урал при решении задач в химической промышленности ЧССР.*

МОЗГОВАЯ Л. И., (Киевский политехнический институт, СССР), *Об одном классе функций, однолистных в круге.*

ЧЕРНОПЯТОВ Н. И., (Челябинский институт механизации и электрификации сельского хозяйства, СССР), *Групповая схема работы трехфазных двигателей в однофазной сети.*

АРЕШИДЗЕ Х. И. и ХЕЧИНАШВИЛИ Е. П., (Академия Наук Гр. ССР, Тбилиси, СССР), *Исследование н-парафиновых углеводородов сацхенисской нефти с помощью карбамида.*

БЕЛЕЦКИЙ В. Я., (Одесский технологический институт им. М. В. Ломоносова, СССР), *К синтезу приближенных направляющих механизмов с заданным движением чертящей точки.*

ШЕСТОПАЛ А. Ф., (Академия Наук УССР, Киев, СССР), *Разложение функций Грина линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа по их фундаментальным решениям в некоторых многоугольных областях.*

ЭЗРОХИ Т. И., (Киевский политехнический институт, СССР), *Об одном классе функций, регулярных в многосвязной круговой области.*

АГАМИРЗЯН Л. С., (Грузинский политехнический институт им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР), *Волочение пластической полосы сквозь жесткую матрицу.*

ТОМАШЕВИЧ Ф. В., (Радиотехнический институт, Таганрог, СССР), *О дифференциальных уравнениях векторных линий гармонического поля.*

GODEAUX LUCIEN., (Académie Royalle des Sciences, Bruxelles, Belgique), *Surfaces dont les directrices de Wilczynski ont des foyers confondus.*

GOLEBIOWSKI ZIGMUNT, (Technische Hochschule Szczecin, Polnische Volksrepublik) *Ist eine Herabsetzung des Sicherheitskoeffizienten bei Ziegelmauerkonstruktionen möglich?*

ЛЕБЕДЕВ П. А., (Ленинградский текстильный институт, СССР) и МАНЖЕРОН Д. (Ясский политехнический институт, РНР), *Алгоритм образования подер линейно-огибающих шатунных кривых в тангенциальных координатах.*

КРИВОШЕЙН Л. Е., (Киргизский государственный университет, Фрунзе, СССР), и МАНЖЕРОН Д., (Ясский политехнический институт, РНР), *Приближенные методы отыскания решений граничных задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка.*

КРИВОШЕЙН Л. Е., (Киргизский государственный университет, Фрунзе, СССР) и МАНЖЕРОН Д., (Ясский политехнический институт, РНР), *Апостериорные и априорные оценки погрешностей решений краевых задач для некоторых типов интегро-дифференциальных уравнений.*

ШЕСТОПАЛ А. Ф., (Академия Наук УССР, Киев, СССР) и МАНЖЕРОН Д., (Ясский политехнический институт, РНР), *Разложение функций Грина по фундаментальным решениям граничных задач для неэллиптических уравнений (I).*

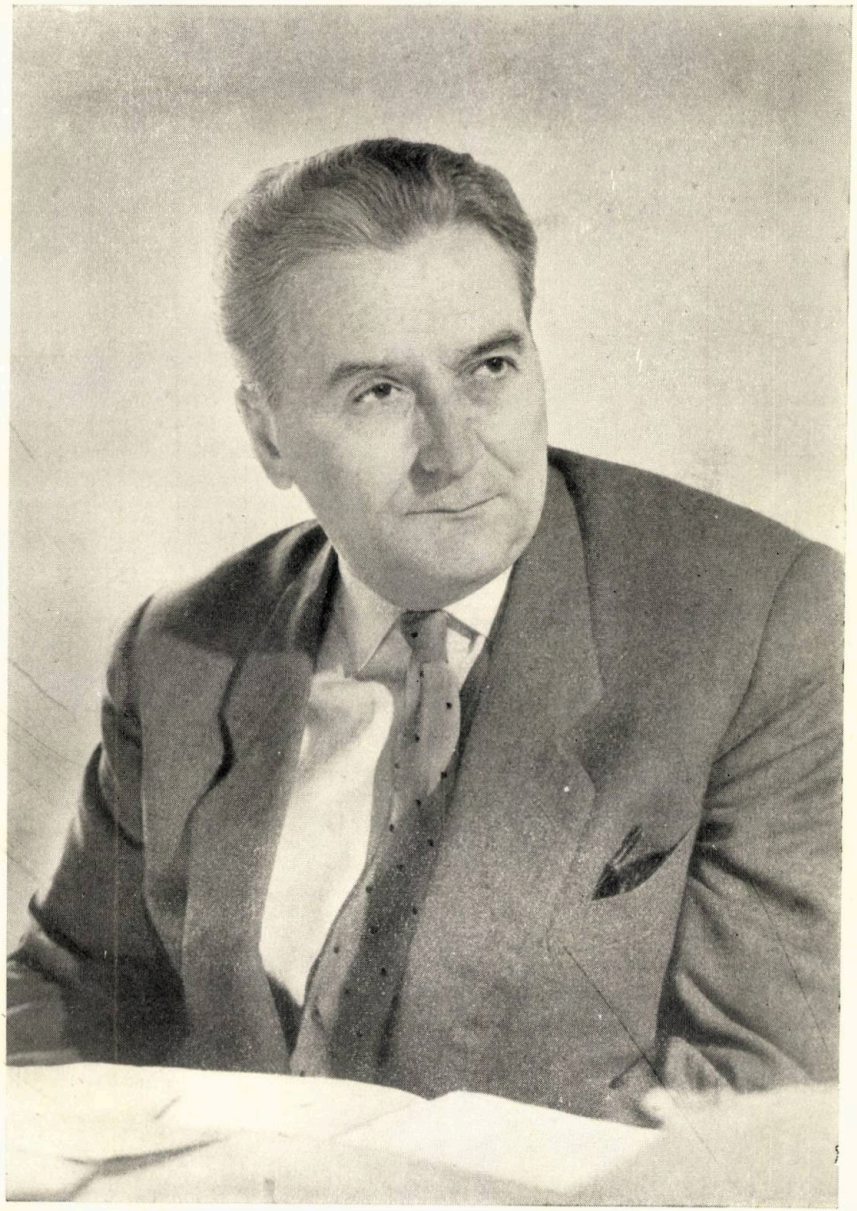
ГАМРЕКЕЛИ С., (Грузинский политехнический институт им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР) и МАНЖЕРОН Д., (Ясский политехнический институт, РНР), *Моделирующее устройство для синтеза и расчета стержневых механизмов.*

MILTZLAFF GERHARD, (Technische Hochschule „Otto v. Guericke", Magdeburg, DDR), *Über ein Verfahren zur Lösung einer allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung.*

KESAVA RAO B., (Arts and Science College, Warangal, India) and LARSHMINARAYANA G., (Regional Engineering College, Warangal, India), *On bending of an incompressible rectangular block.*

SARMA K. S., (Osmania University, Hyderabad, India), *Some problems in finite strains with perturbation constant (V).*

TOPENTCHAROFF V., (Institut d'Électrotechnique et de Mécanique, Sofia, R. P. Bulgarie) et MANGERON D., (Institut polytechnique de Jassy, R. P. Roumanie), *Généralisation des formules d'Euler-Lagrange-Somoff concernant la mécanique analytique.*



ACADEMICIANUL PROF. DR. ILIE G. MURGULESCU

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

ACADEMICIANUL PROF. Dr. I. G. MURGULESCU LA ÎMPLINIREA A 60 DE ANI DE VIAŢĂ

La 27 ianuarie 1962, prof. dr. I. G. Murgulescu, membru titular al Academiei R.P.R., şeful catedrei de chimie fizică de la Universitatea din Bucureşti, a împlinit 60 ani.

Personalitatea ştiinţifică a acad. prof. I. G. Murgulescu, contribuţia sa valoroasă la formarea unei şcoli moderne de chimie fizică în ţara noastră, ca şi activitatea sa multilaterală pe tărîmul învăţămîntului şi culturii este unanim recunoscută şi apreciată.

Academicianul I. G. Murgulescu s-a născut în comuna Cornu, regiunea Oltenia, şi a absolvit şcoala primară din comuna natală şi liceul din Craiova.

În timpul studiilor de chimie de la Universitatea din Cluj, a deprins munca asiduă de laborator şi bibliotecă, graţie căreia s-a distins curînd prin temeinicia informaţiei ştiinţifice şi ingeniozitatea de experimentator. Dincolo de ceea ce oferă în mod obişnuit un curs sau manual, încă de tînăr s-a antrenat în studierea clasicilor chimiei, a operelor ştiinţifice originale, şi în acest fel a cunoscut satisfacţiile pe care le produce priceperea procesului de dezvoltare a ştiinţei.

Însuşirea filozofiei marxist-leniniste îi orientează atît activitatea ştiinţifică cît şi adeziunea la cauza clasei muncitoare.

În 1931 cînd ocupă prin concurs postul de conferenţiar de chimie analitică şi fizicală la Şcoala politehnică din Timişoara, I. G. Murgulescu avea o concepţie politico-socială cristalizată, pusă în serviciul clasei muncitoare; în orientarea creaţiei ştiinţifice, activităţii didactice şi organizatorice, îşi însuşise metodologia materialist dialectică.

Formaţia sa profesional-ştiinţifică a început la facultatea de ştiinţe a Universităţii din Cluj, al cărei asistent era în anul 1928, cînd obţine cu distincţie licenţa şi în 1930 cînd susţine teza de doctor, tratînd despre Tiosulfaţii complecşi ai cuprului, *distinsă „Magna cum laude".*

Dezvoltat în ambianţa studioasă şi activă a şcolii de chimie de la Cluj, I. G. Murgulescu, foarte bine pregătit în chimie fizică, aduce substanţiale contribuţii prin utilizarea metodelor fizico-chimice de cercetare în elucidarea proceselor studiate.

Calităţile sale de cercetător, conturate în şcoala de chimie anorganică a acad. prof. Gheorghe Spacu din Cluj, şi le dezvoltă prin însuşirea domeniului fotochimiei, lucrînd în 1932—1933 sub îndrumarea prof. F. Weigert la Institutul de chimie fizică al Universităţii din Leipzig.

De la conferința de chimie analitică și fizică a Politehnicii din Timișoara este avansat profesor în 1941, iar în 1949 este transferat la catedra de chimie fizică a Universității din București, unde funcționează și în prezent.

Academicianul prof. I. G. Murgulescu desfășoară o intensă activitate de cercetare științifică, aducînd contribuții valoroase în elucidarea a numeroase probleme științifice de actualitate. Cercetările sale efectuate singur sau în colaborare, privesc multe domenii ale chimiei fizice, anorganice și analitice. Începînd cu studii asupra combinațiilor complexe, cu punerea în evidență a tipurilor de tiosulfați complecși ai cuprului și argintului cu amoniu, potasiu și sodiu, continuă cu măsurători spectrofotometrice, crioscopice și conductometrice, stabilind constituția sării lui Durrand, cu cercetări spectrofotometrice asupra sărurilor de cupru în soluție și urmărește prin studii în infraroșu natura legăturii de coordinație la oxalații complecși de crom, mangan, fier și cobalt.

El a cercetat de asemenea proprietățile refractometrice ale soluțiilor apoase de electroliți, elaborînd metode de calcul pentru redarea cantitativă a indicilor de refracție la amestecuri de electroliți ca și metode pentru determinarea refracțiilor ionice individuale.

Una din aceste metode a fost aplicată și pentru determinarea refracțiilor ionilor complecși fero- și fericianhidrici.

În domeniul fotochimiei a urmărit randamentul cuantic și mecanismul reacției fotochimice de descompunere a cobaltioxalatului de potasiu precum și a difenil-diazometanului în soluții, completînd-o cu studiul descompunerii termice a acesteia din urmă.

I. G. Murgulescu a efectuat investigații asupra cineticii reacției dintre clorura de benzil și izoamilatul de sodiu precum și a aceleia de descompunere a oxalatului de cobalt trivalent în soluție apoasă. A studiat cinetica descompunerii termice a metanului, iar în domeniul reacțiilor în fază solidă și la interfețe a cercetat cinetica deshidratării unor cristalohidrați, aceea a oxidării magneziului, zincului și cuprului și a nitrurării magneziului. S-a ocupat de asemenea de pasivarea anodică a unor oțeluri cu crom, nichel, mangan.

În domeniul termodinamicii chimice studiază disociația carbonatului de calciu, activitatea termodinamică a soluțiilor și aliajelor, precum și solubilitatea și energia liberă a cromatului de argint. Prin măsurători ebuliometrice determină constanta de disociație a alfa-nitrozobetanaftolului în soluție, iar calorimetric măsoară căldura de dizolvare a iodatului de sodiu anhidru și hidratat.

Un loc de seamă în studiile profesorului I. G. Murgulescu îl ocupă cercetările fizico-chimice asupra sărurilor topite. Se ocupă de proprietățile termodinamice ale amestecurilor de săruri topite, de căldura de amestecare, de proprietățile termodinamice de exces ale amestecurilor binare de săruri topite, precum și de metodele experimentale pentru determinarea activității termodinamice, a forțelor electromotoare și a potențialelor de electrod la lichidele ionice; studiază vîscozitatea, proprietățile refractometrice și conductibilitatea electrică a amestecurilor binare.

În chimia analitică prof. I. G. Murgulescu stabilește metode pentru dozarea mercurului, introduce acidul ortoclorbenzoic ca reactiv și aduce contribuții la utilizarea indicatorilor de absorbție în volumetrie; instituie metodele de titrare conductometrică a molibdaților și volframaților cu azotat de argint și a cianurilor complexe de fier, elaborează o metodă directă pentru analiza conductometrică și aduce contribuții la teoria proceselor de oxidoreducere folosite în metodele de analiză.

De asemenea a publicat studii privitoare la teoria stabilirii punctului de echivalență în titrimetrie și s-a ocupat de determinarea potențialelor normale de electrozi.

Contribuția substanțială și multilaterală în cercetarea științifică a profesorului I. G. Murgulescu a fost apreciată prin alegerea sa ca membru al Academiei R.P.R. în 1949. El își cîștigă importante merite și un prestigiu unanim recunoscut, care au condus la alegerea sa în funcțiunea de vice-președinte al acestui înalt for de știință și cultură.

Acad. I. G. Murgulescu desfășoară o neîntrecută activitate de profesor, împărtășind studenților și colaboratorilor săi cunoștințe formulate cu deosebită claritate și la un ridicat nivel de concepție.

Deplina punere în valoare a multiplelor resurse de care dispune acad. prof. I. G. Murgulescu a fost posibilă după eliberarea patriei noastre la 23 August 1944, dată de importanță istorică în viața poporului nostru.

Încredințîndu-i-se sarcini în munca de organizare a învățămîntului, ca rector la Școala politehnică din Timișoara, rector la Universitatea din București și apoi ca ministru al Învățămîntului, academicianul I. G. Murgulescu s-a dovedit un energic și fidel realizator al concepției partidului în politica de ridicare a școlii și de culturalizare a maselor.

În îndeplinirea sarcinilor încredințate, acad. prof. I. G. Murgulescu dovedește în permanență un înalt simț al datoriei. Stilul său de muncă stă exemplu viu pentru colaboratori ca și pentru toți slujitorii școlii. Dragostea sa pentru învățămînt si catedră i-a dat forțe spre a-și îndeplini conștiincios și fără întrerupere obligațiile didactico-științifice în tot timpul cît a avut și are funcții de răspundere în stat.

Revoluția culturală, inițiată și condusă în țara noastră de Partidul Muncitoresc Romîn, în cadrul căreia ridicarea învățămîntului de toate gradele și promovarea științei ocupă un rol important, are în profesorul I. G. Murgulescu un slujitor devotat, competent și tenace. Munca sa în această direcție se ilustrează prin inițiativă, studiu meticulos, activitate planificată și perseverență în îndeplinirea măsurilor hotărîte de către partid și guvern.

Schițînd aceste trăsături ale personalității academicianului I. G. Murgulescu, sîntem convinși că exprimăm sentimentele unanime ale oamenilor de știință și cultură din patria noastră, ale cadrelor didactice și tineretului studios, pentru care realizările sale constituie exemple mobilizatoare de cald patriotism, dorindu-i o viață îndelungată pusă în slujba marilor idealuri ale clasei muncitoare care desăvîrșește, sub conducerea Partidului Muncitoresc Romîn, construcția socialismului în patria noastră.

Comitetul de redacție

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 1—2, 1962

Математика, Теоретическая механика, Физика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 517.27

PROGRAMAREA ALGEBRICĂ

I. O METODĂ DIRECTĂ DE PROGRAMARE LINIARĂ [1])

DE

AL. CLIMESCU

1. Prin definiţie se va numi programare algebrică următoarea problemă:

Să se găsească $\sup_D F$, $\inf_D F$, unde $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie continuă în domeniul D definit prin condiţiile:

$$x_i \geqslant 0, \quad (i = 1,2,\ldots,n); \tag{1}$$

$$P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \quad (j = 1,2,\ldots,m), \tag{2}$$

P_j fiind polinoame de grade respective $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Vom simboliza prin $\Pi(F; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ această problemă şi prin $\Pi(k; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ cazul particular al ei cînd F este un polinom de grad k; cu această notaţie $\Pi(1; 1, 1, \ldots, 1)$ va fi obişnuita problemă de programare liniară, $\Pi(2; 1, 1, \ldots, 1)$ va fi problema programării pătratice etc.

Cu tot caracterul lor aparent restrîns, problema $\Pi(k; p_1, \ldots, p_m)$ şi chiar $\Pi(k; 1, 1, \ldots, 1)$ merită a fi studiate prin metode directe, atît din cauza importanţei lor practice, cît şi prin faptul că metodele directe permit să ne debarasăm de restricţia concavităţii, obişnuit admisă în problemele de programare neliniară.

De asemenea orice progres în problema $\Pi(k; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ duce aproape automat la un progres în problema $\Pi(F; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ cu ajutorul aproximaţiei funcţiei F prin polinoame.

Formularea problemei implică următorul program de lucru:

a) găsirea de metode directe pentru rezolvarea problemei $\Pi(k; p_1, p_2, \ldots, p_m)$;

b) adaptarea acestor metode pentru posibilitatea rezolvării numerice a problemelor concrete cu ajutorul maşinilor de calcul;

c) utilizarea rezultatelor obţinute pentru $\Pi(k; p_1, \ldots, p_m)$ în vederea rezolvării aproximative a problemei $\Pi(F; p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

2. În spiritul programului formulat mai sus vom demonstra următorul rezultat:

[1]) Esenţialul din această Notă a fost comunicat la Colocviul de Analiză numerică, Cluj, 10–13 decembrie 1960, sub titlul *Asupra programării liniare.*

Orice problemă de programare liniară este echivalentă cu o problemă Π(1 ; 1), *singura condiţie de tipul* (2) *fiind*

(3) $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

La baza metodei stă următoarea

Lemă. *Soluţiile* $\geqslant 0$ *ale ecuaţiei*

(4) $$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

sînt date prin formulele:

(5) $$\begin{cases} x_1 = k_{11} + k_{12} + \cdots + k_{1n}, & y_1 = k_{11} + k_{21} + \cdots + k_{m1}, \\ x_2 = k_{21} + k_{22} + \cdots + k_{2n}, & y_2 = k_{12} + k_{22} + \cdots + k_{m2}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_m = k_{m1} + k_{m2} + \cdots + k_{mn}, & y_n = k_{1n} + k_{2n} + \cdots + k_{mn}, \end{cases}$$

unde $k_{ij} \geqslant 0$ *sînt parametri arbitrari.*

Deoarece formulele (5) dau evident soluţii ale ecuaţiei (4), rămîne de arătat că orice soluţie se poate pune sub forma (5).

În cazul $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ se poate presupune de exemplu $x_1 \leqslant y_1$, deci $y_1 - x_1 = x_2 - y_2 = u \geqslant 0$ şi se poate lua: $k_{11} = x_1$, $k_{12} = 0$, $k_{21} = u$, $k_{22} = y_2$. Ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2$ revine la $x_1 + x_2 = k_{11} + k_{12}$, $y_1 = k_{11} + k_{21}$, $x_3 + x_4 = k_{21} + k_{22}$, $y_2 = k_{12} + k_{22}$, adică la $x_1 = l_{11} + l_{12}$, $x_2 = l_{21} + l_{22}$, $x_3 = l_{31} + l_{32}$, $x_4 = l_{41} + l_{42}$, $k_{11} = l_{11} + l_{21}$, $k_{12} = l_{12} + l_{22}$, $k_{21} = l_{31} + l_{41}$, $k_{22} = l_{32} + l_{42}$, adică $y_1 = l_{11} + l_{21} + l_{31} + l_{41}$, $y_2 = l_{12} + l_{22} + l_{32} + l_{42}$, ceea ce demonstrează (5) şi în acest caz prin inducţie rezultatul se stabileşte pentru $m = 2^p$. Dacă soluţiile ecuaţiei (4) sint date de (5), luînd $x_m = k_{m1} = k_{m2} = \ldots = k_{mn} = 0$ va rezulta că soluţiile ecuaţiei $x_1 + \cdots + x_{m-1} = y_1 + \cdots + y_n$ vor avea aceeaşi formă, deci prin inducţie descendentă lema este stabilită pentru m oarecare şi $n = 2$.

Ecuaţia $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + y_2 + y_3$ revine la: $x_1 = k_{11} + k_{12}$, $x_2 = k_{21} + k_{22} + \cdots$, $x_m = k_{m1} + k_{m2}$, $y_1 = k_{11} + k_{21} + \cdots + k_{m1}$, $y_2 + y_3 = k_{12} + k_{22} + \cdots + k_{m2}$, de unde $k_{12} = k'_{12} + k'_{13}, \ldots, k_{m2} = k'_{m2} + k'_{m3}$, adică $x_1 = k_{11} + k'_{12} + k'_{13}$, $x_2 = k_{21} + k'_{22} + k'_{23}, \ldots, x_m = k_{m1} + k'_{m2} + k'_{m3}$, $y_1 = k_{11} + k_{21} + \cdots + k_{m1}$, $y_2 = k'_{12} + k'_{22} + \cdots + k'_{m2}$, $y_3 = k'_{13} + k'_{23} + \cdots + k'_{m3}$, deci rezultatul este valabil şi în acest caz şi prin inducţie se stabileşte în cazul general.

3. Vom descrie acum procedeul prin care se obţine reducerea problemei $\Pi(1; 1, \ldots, 1)$ la problema $\Pi(1; 1)$.

a) Introducînd la nevoie variabile auxiliare se poate presupune că condiţiile (2) au forma:

(6) $$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \cdots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{2n} x_n = \beta_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \cdots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m. \end{cases}$$

Sistemul (6) este echivalent cu sistemul

$$(7)\qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n = \beta_1 t, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n = \beta_m t, \end{cases}$$

în sensul următor:

La orice soluţie $(x_1, \ldots, x_n) = (u_1, \ldots, u_n)$, $(u_i \geqslant 0)$, a sistemului (6), corespunde soluţia $(y_1, \ldots, y_n, t) = (u_1, \ldots u_n, 1)$ a sistemului (7); reciproc soluţiei $(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) = (v_1, \ldots, v_n, t)$, $(v_i \geqslant 0, t > 0)$, corespunde soluţia $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (v_1/t, v_2/t, \ldots, v_n/t)$ de asemenea $\geqslant 0$. Rezultă de aici că (6) este incompatibil dacă (7) nu are soluţii cu $t \neq 0$.

b) Aplicînd convenabil lema, se rezolvă parametric una din ecuaţiile (7) şi se introduc soluţiile în celelalte ecuaţii; dacă acestea sînt identic satisfăcute, soluţia parametrică a sistemului (7) este găsită şi cea a sistemului (6) se obţine punînd $t = 1$ (este vorba, bineînţeles, de soluţiile $\geqslant 0$). Dacă există ecuaţii neidentice se reîncepe procedeul cu una din ele şi este evident că după cel mult m paşi se obţin sub formă parametrică soluţiile sistemului (7), şi deci ale sistemului (6), punînd $t = 1$.

c) După ce s-au găsit soluţiile lui (6) sub formă parametrică, se înlocuiesc $x_1, \ldots, x_n$ prin expresiile lor în funcţia de extremizat şi este clar că noua funcţie şi cea veche au exact acelaşi ansamblu de valori şi prin urmare aceleaşi valori extreme.

d) Problema $\Pi\,(1;\ 1)$ cu condiţia (3) se rezolvă prin simpla inspecţie a coeficienţilor.

Fie $F = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b$ (în care, dacă unele variabile lipsesc, sînt presupuse a figura cu coeficientul nul) de extremizat în D definit prin $x_i \geqslant 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Fie $k = \max(a_i)$, $l = \min(a_i)$, atunci $M = \sup\limits_{D} F = k + b, m = \inf\limits_{D} F = l + b$.

Se poate presupune $k = a_1 = a_2 = \cdots = a_p > a_{p+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Atunci $F - (b + k) = \sum a_i x_i - k \sum x_i = (a_{p+1} - k)\, x_{p+1} + \cdots + (a_n - k)\, x_n \leqslant 0$ în D, iar semnul $=$ se atinge pentru $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$, $x_1, \ldots, x_p$ arbitrari cu condiţia $x_1 + \cdots + x_p = 1$, $(x_i \geqslant 0)$. Similar pentru m.

Este posibil ca F să conţină mai multe variabile decît acelea care figurează în legătură, fie de exemplu $F = a_1x_1 + \cdots + a_qx_q + b, x_1 + \cdots + x_p = 1$, una cel puţin din variabilele din F nefigurînd în legătură.

În acest caz, dacă una din variabilele nelegate are coeficient pozitiv, $M = \infty$, iar dacă una din ele are coeficient negativ, $m = -\infty$; întradevăr partea din F care conţine variabilele legate este bornată în D, iar restul variabilelor le luăm nule cu excepţia aceleia cu coeficient > 0 (respectiv < 0) căreia îi dăm valori arbitrar de mari.

4. Observaţii. a) Prin metoda de mai sus se obţine o reprezentare parametrică a punctelor din D chiar cînd acesta este nemărginit, în timp ce teorema poliedrelor convexe ne asigură existenţa reprezentării numai în cazul D mărginit.

b) Exemple simple arată că reprezentarea nu este unică şi numărul parametrilor depinde de calea urmată pentru obţinerea reprezentării. Problema destul de dificilă a obţinerii reprezentărilor cu un număr minim de parametri rămîne deschisă.

c) Să arătăm pe un exemplu cum funcționează metoda. Să se determine valorile extreme ale funcției $F = x + 2y$ pe domeniul D, determinat prin condițiile $x+y-1 \geqslant 0$, $x-y+1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Dacă punem $x+y-1 = 2u$, $x-y+1 = 2v$, sistemul este echivalent cu $x+y = t+2u$, $x+v = y+2v$.

Dacă noul sistem s-ar rezolva după metoda din § **3** b) s-ar obține o reprezentare cu cinci parametri; mai simplu se procedează astfel: prin eliminarea lui t se obține $x = u+v$ și cele 2 ecuații se reduc la singura ecuație $y+v = u+t$, de unde $x = \alpha+2\gamma+\delta$, $y = \alpha+\beta$, $t = \beta+\delta$, $u = \alpha+\gamma$, $v = \gamma+\delta$, adică pentru punctele din D avem: $x = \alpha+2\gamma+\delta$, $y = \alpha+\beta$, $\beta+\delta = 1$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \geqslant 0$. $F = x+2y = 3\alpha+2\beta+2\gamma+\delta$, deci existînd variabile nelegate cu coeficientul pozitiv, $\sup F = \infty$; coeficientul minim al variabilelor legate fiind 1, $F \geqslant 1$, deci $\inf F = 3$, marginea inferioară fiind atinsă pentru $x+2y-1 = 3\alpha+2\beta+2\gamma+\delta-\beta-\delta = 3\alpha+\beta+2\gamma = 0$, adică $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, $x = 1$, $y = 0$.

Primit la 18 XI 1961

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici I

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

I. Прямой метод линейного программирования

(Резюме)

Отмечаем через $\Pi(F; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ задачу нахождения экстремальных величин непрерывной функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области D, определяемой условиями (1) и (2), где P_j являются полиномами соответствующих степеней $p_1, p_2, \ldots, p_m$; в случае если F является полиномом степени k, задача записывается $\Pi(k; p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Задача Π есть то, что мы предлагаем назвать алгебраическим программированием.

Доказывается, что любая задача линейного программирования $\Pi(1; 1, 1, \ldots, 1)$ является приводимой к задаче $\Pi(1; 1)$ с (3) как единственное условие типа (2). Эта последняя задача можеть быть решена простой проверкой коэффициентов, даже если F содержит различные буквы (§ **3** d)). Доказательство сводится к нахождению конечным числом шагов параметрического представления точек из области D, пользуя повторное применение следующей лемы (§ **2**):

Решения $\geqslant 0$ *уравнения* (4) *даны формулами* (5), *где* $k_{ij} \geqslant 0$ *производные параметры.*

LA PROGRAMMATION ALGÉBRIQUE

I. Une méthode directe de programmation linéaire

(Résumé)

Désignons par $\Pi(F; p_1, p_2, \ldots, p_m)$ le problème de trouver les valeurs extrêmes de la fonction continue $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans le domaine D défini par les conditions (1) et (2), où les P_j sont des polynomes de degrés respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_m$; si F est un polynome de degré k, le problème sera désigné par $\Pi(k; p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Le problème Π est ce que nous proposons d'appeler programmation algébrique.

On démontre que tout problème de programmation linéaire $\Pi(1; 1, 1, \ldots, 1)$ est réductible à un problème $\Pi(1; 1)$ avec (3) comme seule condition du type (2). Ce dernier problème peut être résolu par simple inspection des coefficients, même dans le cas où F contient des variables libres (§ **3** d)). La démonstration revient à trouver en un nombre fini de pas une représentation paramétrique des points de D, par l'application répétée du lemme suivant (§ **2**):

Les solutions $\geqslant 0$ *de l'équation* (4) *sont données par les formules* (5) *où* $k_{ij} \geqslant 0$ *sont des paramètres arbitraires.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. D. 517 27

LA PROGRAMMATION ALGÉBRIQUE
II. LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE

PAR
AL. CLIMESCU

1. Dans une Note précédente [1] nous avons défini le problème de la programmation algébrique, dont un cas particulier est le problème $II\,(2;\,1,1,\ldots,1)$ ou programmation quadratique, qui peut être formulé de la manière suivante:

Trouver $\inf F$, $\sup F$, où $F(x_1,\ldots,x_n)$ est un polynome de second degré, dans le domaine D, défini par

$$(1)\qquad x_i \geqslant 0,\quad (i=1,2,\ldots,m),\qquad (2)\; L_j \geqslant 0,\quad (j=1,2,\ldots,m),$$

les L_j étant des polynomes du premier degré.

Les méthodes existantes, excellemment résumées par H. P. Künzi [2], supposent toutes que la partie purement quadratique de F est définie ou au moins semi-définie. Nous nous affranchissons ici de cette restriction et nous décrivons une méthode qui permet la détermination de $M = \sup F$ et $m = \inf F$ dans tous les cas.

2. Dans la Note [1] nous avons montré qu'on peut trouver une représentation paramétrique linéaire des points de D, les paramètres $\geqslant 0$ étant assujettis à la seule condition que leur somme soit égale à l'unité. En remplaçant les variables par leurs expressions et en revenant aux anciennes notations, il en résulte que tout problème $II\,(2;\,1,1,\ldots,1)$ est équivalent à un problème du type suivant:

Soit D *le domaine défini par les conditions* (1) *et*

$$(3)\qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Trouver $\mathrm{m} = \inf_{\mathrm{D}} \mathrm{F}$, $\mathrm{M} = \sup_{\mathrm{D}} \mathrm{F}$, $\mathrm{F}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)$ *étant un polynome du second degré.*

Il peut arriver qu'après la transformation, F contienne aussi des variables libres (c'est-à-dire qui ne figurent pas dans (3)); nous laissons de côté ce cas assez difficile et nous supposerons que toutes les variables qui figurent effectivement dans F figurent aussi dans la relation (3).

3. Donnons ici les propriétés sur lesquelles s'appuit la résolution du problème.

a) En multipliant les termes linéaires par $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et le terme libre par $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$ on voit qu'on peut supposer que $F(x,x,\ldots,x)$ est une forme quadratique $T(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

b) On a

$$
\begin{aligned}
&T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) + \\
(4) \quad &+ T_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)(b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n) + \\
&+ T_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) = \cdots = (x_1 + \cdots + x_n)(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) + \\
&\qquad + T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),
\end{aligned}
$$

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ étant des formes quadratiques des variables mises en évidence.

Il suffit par exemple d'arranger T d'après les puissances descendantes de x_1 et de diviser par $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; le reste de la division sera $T_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

c) On a

$$
\begin{aligned}
&T_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = T(-x_2 - x_3 - \cdots - x_n, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&T_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = T(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

C'est évident d'après (4).

d) $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ont même rang et même signature. On a

$$
\begin{aligned}
T_1(-x_1 - x_3 - \cdots - x_n, x_3, \ldots, x_n) &= T(x_1, -x_1 - x_3 - \cdots - x_n, x_3, \ldots, x_n) = \\
&= T_2(x_1, x_3, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

Supposons que T_1 est décomposée en somme de carrés

$$
\begin{aligned}
&T_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \varepsilon_1 (a_{21} x_2 + \cdots + a_{n1} x_n)^2 + \\
(5) \quad &+ \varepsilon_2 (a_{22} x_2 + \cdots + a_{n2} x_n)^2 + \cdots + \varepsilon_p (a_{2p} x_2 + \cdots + a_{np} x_n)^2,
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ et les formes linéaires mises en évidence sont indépendantes, donc le système

$$
(6) \qquad \begin{cases}
a_{21} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 + \cdots + a_{2p} \lambda_p = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n1} \lambda_1 + a_{n2} \lambda_2 + \cdots + a_{np} \lambda_p = 0,
\end{cases}
$$

ne possède que la solution banale $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

D'après c) on a

$$
\begin{aligned}
&T_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) = \varepsilon_1 [a_{21}(-x_1 - x_3 - \cdots - x_n) + a_{31} x_3 + \cdots + a_{n1} x_n]^2 + \\
(7) \quad &+ \cdots = \varepsilon_1 [-a_{21} x_1 + (a_{31} - a_{21}) x_3 + \cdots + (a_{n1} - a_{21}) x_n]^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

et le système linéaire correspondant

$$
\begin{aligned}
&-a_{21} \lambda_1 - a_{22} \lambda_2 - \cdots - a_{2p} \lambda_p = 0, \\
&(a_{31} - a_{21}) \lambda_1 + (a_{32} - a_{22}) \lambda_2 + \cdots + (a_{3p} - a_{2p}) \lambda_p = 0, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&(a_{n1} - a_{21}) \lambda_1 + (a_{n2} - a_{22}) \lambda_2 + \cdots + (a_{np} - a_{2p}) \lambda_p = 0
\end{aligned}
$$

est équivalent au système (6), donc (7) donne une décomposition de T_2 en somme de carrés de formes indépendantes et le théorème en résulte.

Il est possible que $T_1, \ldots, T_n$ soient identiquement nulles; alors le problème est évidemment équivalent à un problème de programmation linéaire.

e) Les points intérieurs à D où T pourrait prendre la valeur M ou la valeur m sont aussi des points d'extremum relatif, donc leurs coordonnées vérifient le système

$$(8) \qquad \partial T/\partial x_1 = \partial T/\partial x_2 = \cdots = \partial T/\partial x_n, \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une solution de (8) intérieure à D. La formule générale $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (x_1 - a_1)(\partial T/\partial a_1) + \cdots + (x_n - a_n)(\partial T/\partial a_n) + T(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ montre qu'alors on a $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T(a_1, a_2, \ldots, a_n) + T(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$.

Posons $h_i = x_i - a_i$; on a $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = (x_1 + \cdots + x_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 1 - 1 = 0$, donc $T(h_1, \ldots, h_n)$ avec $h_1 + \cdots + h_n = 0$ est égale par exemple à $T_1(h_2, \ldots, h_n)$. Si $T_1(h_2, \ldots, h_n)$ est indéfinie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ne peut pas être point d'extremum et $T(x_1, \ldots, x_n)$ atteint M et m seulement sur la frontière.

Si $T_1(b_1, \ldots, b_n)$ est $\geqslant 0$, alors $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant T(a_1, \ldots, a_n)$ dans D, donc $m = T(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et si $T_1 \leqslant 0$, $M = T(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Si $(b_1, \ldots, b_n)$ est une autre solution de (8) intérieure à D, on a $T(b_1, \ldots, b_n) \geqslant T(a_1, \ldots, a_n)$ et d'une manière symétrique $T(a_1, \ldots, a_n) \geqslant T(b_1, \ldots, b_n)$, donc $T(a_1, \ldots, a_n) = T(b_1, \ldots, b_n)$. Il en résulte que T ne peut jamais atteindre et m et M dans l'intérieur de D, mais au plus une de ces deux valeurs.

Si le système (8) n'a pas de solutions intérieures à D, alors m et M ne peuvent être atteintes que sur la frontière.

b) Après avoir clarifié la situation pour les points intérieurs à D, on passe à la frontière soit pour déterminer m et M, soit pour déterminer une seule de ces valeurs, selon le cas qui se présente. On reprend donc le même problème pour chacune des formes $T(0, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_2 + \cdots + x_n = 1, \ldots, T(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ avec $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 1$; si par exemple il reste à déterminer M, la plus grande des bornes supérieures de ces nouvelles formes sera égale à M.

Il est évident que le procédé décrit conduit au résultat en un nombre fini de pas.

4. Les calculs peuvent être souvent simplifiés à l'aide de la méthode suivante. Soit

$$T(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \cdots + 2b_{n-1,n} x_{n-1} x_n$$

(les termes qui manquent dans T sont considérés comme y figurant avec le coefficient zéro).

Appelons *coefficient dominant* la valeur $d_1 = \max(a_i, b_{jk})$ et *coefficient dominé* la valeur $d_2 = \min(a_i, b_{jk})$.

Si d_1 *est égal à l'un des coefficients* a_i, *alors* $M = d_1$. Par exemple si $d_1 = a_1$, on a

$$T - a_1 = T - a_1 (x_1 + \cdots + x_n)^2 = (a_2 - a_1) x_2^2 + \cdots + \\ + (a_n - a_1) x_n^2 + 2 (b_{12} - a_1) x_1 x_2 + \cdots \leqslant 0 \tag{9}$$

(parce que tous les coefficients sont $\leqslant 0$).

$T = a_1$ pour les valeurs qui annulent chaque terme du second membre de (9) et au moins pour $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, donc $a_1 = \sup T$.

Si $a_1 = d_2$, $T - a_1 \geqslant 0$, la différence étant nulle au moins pour $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$, donc dans ce cas $\inf T = a_1 = d_2$.

Soit par exemple $T(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + xy + 0xz + 0yz$, $x + y + z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $d_1 = 2$ est atteinte par le coeficient d'un terme quadratique, donc $M = 2$; on a en effet $T - 2 = 2x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) = -y^2 - z^2 - xy - 2xz - 2yz \leqslant 0$ et la valeur 2 est atteinte seulement pour $x = 1$, $y = z = 0$.

Le système (8) devient $4x + y = 2y + x = 2z$, $x + y + z = 1$, avec la solution $x = 2/15$, $y = 6/15$, $z = 7/15$ intérieure à D.

Comme $T_2(y, z) = 2(y + z)^2 + y^2 + z^2 - (y + z) y = 2y^2 + 3yz + 3z^2$ est une forme positivement définie, $m = T(3/15, 6/15, 7/15) = 21/45$, m étant prise seulement en ce point.

Reçu le 12 VI 1962

Institut Polytechnique de Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Climescu Al., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1 — 2*, pp. 1 — 4.
2. Künzi H. P., ZAMM, 1961, **41**, S. 397 — 413.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

II. Квадратичное программирование

(Резюме)

На основании результатов полученных в [1] любая задача квадратичного программирования сводится к следующему :

Пусть D — *область определяемая условиями* $x_i \geqslant 0$, $x_1 + \ldots x_n = 1$. *Требуется найти* $m = \inf_D F$, $M = \sup_D M$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ *будучи полиномами второй степени.*

В работе устанавливается метод по которому решение этой задачи получается конечным числом шагов без какого либо ограничения для полинома F, в то время как существующие методы предполагают, что квадратичная часть выражения F является определенной формой или хотя бы полуопределенной.

PROGRAMAREA ALGEBRICĂ

II. Programarea pătratică

(Rezumat)

Pe baza rezultatelor din [1], orice problemă de programare pătratică se reduce la următoarea :

Fie D *domeniul definit prin condiţiile* $x_i \geqslant 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$. *Să se găsească* $m = \inf_D F$, $M = \sup_D F$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ *fiind un polinom de gradul doi.*

În lucrare se stabileşte o metodă prin care soluţia acestei probleme se obţine într-un număr finit de paşi fără nici o restricţie asupra polinomului F, în timp ce metodele existente presupun că partea pătratică a lui F este o formă definită sau cel puţin semidefinită.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 517.27

ASUPRA UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ GENERALIZATĂ

DE

ADOLF HAIMOVICI şi ŞARLOTA RIMER

§ 1. Se ştie că indicele de utilizare a unei maşini este dat de raportul $y = t/T$, unde T este timpul maxim cît ar putea fi utilizată maşina şi t este timpul cît ea funcţionează efectiv. Un indice analog se poate introduce evident pentru un ansamblu de maşini utilizate într-un proces tehnologic. Ne propunem, în legătură cu aceasta, următoarea chestiune:

Să presupunem că: a) o întreprindere lucrează produsele $A_1, A_2, \ldots, A_n$; b) pentru executarea fiecăruia din aceste produse se utilizează tipurile de maşini $M_1, M_2, \ldots, M_p$; c) întreprinderea este obligată să fabrice într-un timp dat p_1 unităţi din produsul $A_1, \ldots, p_n$ unităţi din produsul A_n, dar are libertatea să producă mai mult; d) întreprinderea dispune de q_1 maşini de tip $M_1, \ldots, q_p$ maşini de tip M_p; e) pentru execuţia unei unităţi din produsul A_i maşina de tip M_k funcţionează t_{ik} minute.

Se pune problema să se găsească cîte unităţi din produsele A_i să execute întreprinderea — realizînd, bineînţeles, obligaţia definită prin c) — pentru ca indicele de utilizare a ansamblului de maşini să fie maxim.

Dacă notăm cu x_i numărul de unităţi produse din categoria A_i şi cu u_k numărul de maşini de tipul M_k utilizate, avem următoarele restricţii:

$$\text{(a)} \qquad x_i \geqslant p_i, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant q_k, \quad \sum_{i=1}^{n} t_{ik} x_i \leqslant \tau u_k, \quad x_i, u_k \text{ — întregi},$$

unde τ este numărul total de minute cît poate lucra o maşină, şi care poate fi luat drept unitate.

Pe de altă parte, presupunînd că în procesul tehnologic diversele tipuri de maşini au aceeaşi importanţă, indicele de utilizare a ansamblului de maşini este

$$\text{(b)} \qquad y = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} t_{ik} x_i \Big/ \sum_{k=1}^{p} u_k, \qquad \tau = 1.$$

Se cere deci să se găsească maximul lui y atunci cînd x_i şi u_k satisfac (a). Făcînd substituţia:

$$x_i - p_i = X_i, \quad q_k - u_k = U_k$$

restricţiile (a) devin:

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} X_i \geqslant 0, \quad U_k \geqslant 0, \quad (i = 1,2,...,n\,;\ k = 1,2,...,p), \\ \sum_{i=1}^{n} t_{ik} X_i + U_k \leqslant q_k - \sum_{i=1}^{n} t_{ik} p_i = b_k, \\ U_k \leqslant q_k, \quad X_i,\ U_k - \text{întregi} \end{cases}$$

Punînd apoi, pentru prescurtare:

$$T_i = \sum_{k=1}^{p} t_{ik}, \quad T = \sum_{i=1}^{n} T_i p_i, \quad U = \sum_{k=1}^{p} q_k,$$

indicele y se scrie

$$y = \left(\sum_{i=1}^{n} T_i X_i + T\right) \Big/ \left(U - \sum_{k=1}^{p} U_k\right).$$

Pentru problema noastră concretă este necesar să presupunem încă

$$b_k = q_k - \sum_{i=1}^{n} t_{ik} p_i \geqslant 0,$$

ceea ce înseamnă că numărul maşinilor de fiecare tip trebuie să fie cel puţin egal cu cel necesar pentru realizarea obligaţiilor definite prin condiţia (c).

Sub forma aceasta, şi renunţînd pentru moment la restricţiile X_i, U_k — întregi, avem de-a face cu un caz particular al unei probleme care generalizează problema programării liniare şi care se enunţă astfel:

§ **2.** Fie x_i, $(i = 1,2,...,n)$, n variabile supuse condiţiilor:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} x_i \leqslant a_\alpha, \quad x_i \geqslant 0, \quad (\alpha = 1,2,...,p\,;\ i = 1,2,...,n);$$

se cere să se găsească valorile acestor variabile pentru care funcţiunea

$$(2) \quad y = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + A\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} B_i x_i + B\right)$$

are valoarea extremă, precum şi acest extremum. Această problemă a mai fost pusă [1] cu ocazia studiului unui model matematic al proceselor tactice de dirijare a focului armelor în război.

Fie Π mulţimea punctelor din R^n care satisfac (1) — evident un poliedru — şi K complementara ei; presupunem că nici una din ele nu se reduce la mulţimea vidă. Fie P_1 hiperplanul

(3) $$\Pi_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + A = 0,$$

P_2 — hiperplanul

(4) $$\Pi_2 \equiv \sum_{i=1}^{n} B_i x_i + B = 0,$$

şi Q — varietatea liniară $(n-2)$-dimensională definită de (3) şi (4).

Hiperplanele P_1 şi P_2 împart R^n în patru sferturi. Vom numi *sfertul întîi* acela în care $\Pi_1, \Pi_2 > 0$, sfertul al doilea acela în care $\Pi_1 < 0$, $\Pi_2 > 0$, al treilea acela în care Π_1, $\Pi_2 < 0$ şi al patrulea, acela în care $\Pi_1 > 0$, $\Pi_2 < 0$.

Cînd hiperplanul

(2') $$P(y) \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i x_i + A - y\left(\sum_{i=1}^{n} B_i x_i + B\right) = 0$$

se roteşte în jurul lui Q, în sens direct de la P_1 la P_2, y creşte monoton de la 0, tinzînd la $+\infty$, şi cînd P se roteşte în jurul lui Q în sens retrograd de la P_1 la P_2, y descreşte de la 0 şi tinde la $-\infty$.

a) Să presupunem că Q are cel puţin un punct M aparţinînd lui Π. Atunci orice hiperplan $P(y)$ are un punct comun cu Π. Rezultă că în acest caz y poate lua orice valoare reală pozitivă, nulă sau negativă, pentru măcar o n-uplă de valori x_i convenabil aleasă, care satisface (1).

Pentru a afla dacă există un astfel de punct M, cu alte cuvinte dacă $Q \cap \Pi \neq \emptyset$, se pot extrage din (3) şi (4) valorile a două variabile în funcţie de celelalte, fie, de exemplu

$$x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} r_i x_i + r, \quad x_n = \sum_{i=1}^{n-2} s_i x_i + s$$

(r_i, r, s_i şi s sînt numere care se deduc uşor din A_i, B_i, A şi B) şi înlocui în (1). Se capătă p inegalităţi de forma

$$\sum_{j=1}^{n-2} b_{\alpha j} x_j \leqslant 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n-2;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p).$$

Dacă acestea sînt compatibile, atunci ne aflăm în cazul considerat aici.

Evident, de data aceasta nu există nici maximum nici minimum, dacă bineînţeles nu se impun alte condiţii în plus.

b) Să presupunem că Π se găseşte în unul din semispaţiile $\Pi_1 > 0$, sau $\Pi_1 < 0$, cu alte cuvinte $P_1 \cap \Pi \equiv \emptyset$.

În acest caz există pentru y un minimum şi un maximum.

Demonstraţia este analogă cu aceea pentru existenţa unui extremum în cazul programării liniare.

Să demonstrăm anume că *extremele funcţiei* $y(x_i)$ *se realizează pentru un vîrf al poliedrului* Π. În adevăr să notăm cu m punctul de coordonate x_i şi $y(m)$ valoarea pe care o ia y în acest punct. Datorită condiţiei $P_1 \cap \Pi \equiv \emptyset$, funcţia $y(m)$ e continuă pe acest poliedru. Să presu-

punem că y nu este constant şi că îşi atinge maximul într-un punct m_0 necoincident cu un vîrf; fie s dimensiunea minimă a feţelor lui Π pe care se află m_0 ca punct interior şi Π_s faţa de dimensiune s pe care se află el. Pentru că Π_s nu e un vîrf, urmează $s > 0$, dar, evident, s poate fi n.

Dacă pe Π_s, y este constant, fie A_0 un vîrf situat pe această faţă; atunci $y(m_0) = y(A_0)$ şi teorema este demonstrată. Dacă $y(m)$ nu este constant pe Π_s, atunci există un punct $m_1 \in \Pi_s$, în care $y(m_1) < y(m_0)$. Porţiunea de dreaptă care trece prin m_0 şi m_1 conţinută în Π_s are punctul m_0 în interior; fie m_2 un punct al acesteia aşa fel ca m_0 să se afle în segmentul $m_1 m_2$. Dacă notăm cu $x_i^{(1)}$ şi $x_i^{(2)}$ coordonatele punctelor m_1 şi respectiv m_2, un punct al segmentului $m_1 m_2$ are coordonatele

$$x_i = \lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda) x_i^{(2)}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Or, cum se vede imediat, pe segmentul $m_1 m_2$, y este o funcţie monotonă de λ şi deci nu-şi poate atinge maximul în m_0. Contrazicerea la care am ajuns arată că, dacă y nu este constant pe Π_s şi îşi atinge maximul în $m_0 \in \Pi_s$, atunci $s = 0$, cu alte cuvinte m_0 este un vîrf.

Urmează deci că pentru rezolvarea problemei noastre este necesar să aflăm vîrfurile poliedrului Π şi apoi să vedem în care din ele $y(m)$ este maxim. Rezultă deci că metoda simplex este încă aplicabilă.

Să observăm, în sfîrşit, că dacă într-o bază oarecare din spaţiul R^n avem

$$y(m) = \left(S - \sum_{i=1}^{p} s_{a_i} x_{a_i}\right) \Big/ \left(T + \sum_{i=p+1}^{n} t_{a_i} x_{a_i}\right),$$

unde $s_{a_i}, t_{a_i} \geqslant 0$, atunci maximul funcţiei y este realizat pentru $x_{a_i} = 0$, şi el este S/T.

Să introducem acum şi restricţia că x_i sînt întregi. Considerăm atunci reţeaua carteziană formată din hiperplanele $x_i = k_i$, (k_i — întregi), mulţimea μ a nodurilor acestei reţele, interioare lui Π, şi înfăşurătoarea convexă μ_1 a acestora. Avem evident $\mu \subset \mu_1 \subset \Pi$. În plus vîrfurile lui μ_1 sînt în puncte ale lui μ. Considerăm acum restricţia funcţiei $y(m)$ la μ, fie ea $y'(m)$, şi restricţia lui $y(m)$ la μ_1, fie ea $y_1(m)$. Cum μ_1 e un poliedru convex, extremele lui $y(m)$ se obţin în vîrfuri care sînt puncte din μ, şi aceste extreme sînt, evident, şi extremele lui $y'(m)$.

Acestea se pot afla, de exemplu, prin metoda simplex aplicată poliedrului μ_1, sau, poate mai convenabil în cazul acesta, printr-o metodă de iteraţie (vezi de exemplu [1]).

Observaţie. Restricţiile (1) se pot înlocui uneori cu

$$a_{\alpha i} x_i \leqslant a'_\alpha < a_\alpha, \tag{1'}$$

unde a'_α sînt valorile maxime pe care le pot lua membrii I din (1) cînd punctul (x_i) parcurge μ.

§ 3. În cazul problemei concrete enunţate la început, funcţia y are un extremum. În adevăr, adoptînd notaţia de mai sus avem:

$$y = \left(\sum_{i=1}^{n} T_i X_i + T\right) \Big/ \left(U - \sum_{k=1}^{p} U_k\right).$$

De data aceasta $\Pi_2 \equiv U - \sum_{k=1}^{p} U_k$, iar poliedrul Π este definit prin condiţiile (c). Vom arăta că $P_2 \cap \Pi \equiv \varnothing$.

Din condiţiile (c) rezultă că *feţele poliedrului* Π *taie muchiile* U_k ale *reperului în puncte avînd* $0 \leqslant U_k \leqslant q_k$. Din $U - \sum_{k=1}^{p} U_k = 0$ rezultă că hiperplanul P_2 taie muchiile U ale reperului în puncte avînd $U_k = U = \sum_{k=1}^{p} q_k > q_k$. Rezultă că $P_2 \cap \Pi \equiv \varnothing$.

În mod analog arătăm că pentru $\Pi_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} T_i X_i + T = 0$ există relaţia $P_1 \cap \Pi \equiv \varnothing$. În adevăr, din $P_1 = 0$ rezultă că acest hiperplan taie muchiile X în puncte avînd $X_i < 0$, iar din condiţiile (c) rezultă că *feţele poliedrului* Π *taie axele* X *în puncte avînd* $X_i \geqslant 0$, pentru că din $\sum_{i=1}^{n} t_{ik} X_i + U_k \leqslant q_k - \sum_{i=1}^{n} t_{ik} p_i$ se obţine $\sum_{i=1}^{n} t_{ik} X_i \leqslant q_k - \sum_{i=1}^{n} t_{ik} p_i - U_k$ şi ţinînd seama de $U_k = q_k - u_k$ avem

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ik} X_i \leqslant U_k - \sum_{i=1}^{n} t_{ik} p_i \geqslant 0,$$

şi cu aceasta concluzia e demonstrată.

Observaţie. Evident, fără restricţia ca u_k şi x_i să fie întregi am putea face întotdeauna $y = 1$. Această ultimă restricţie face ca în general $y < 1$, şi în plus să fie necesară căutarea maximului.

Primit la 18 VI 1962

Universitatea „Al. I. Cuza", Iaşi,
Seminarul matematic „A. Myller"
şi
Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de matematici I

BIBLIOGRAFIE *)

1. Isbell J. R., Marlow W. H., Naval Research Logistics Quarterly, 1956, 3, pp. 71—94 (citat după traducerea rusă *Игры на уничтожение*, în colecţia Применение теории игр в военном деле, Сборник переводов, под редакцией В. О. Ашкенази, изд. Советское радио, М., 1961).

*) *Notă la corectură.* După redactarea articolului am luat cunoştinţă de lucrarea tov. E. Munteanu şi F. Radó, *Calculul şarjelor celor mai economice la cuptoarele de topit fontă*, publicată în Studii şi Cercetări Matematice, Cluj, 1961, **XI**, fasc. anexă, pp. 149—158, care pornind de la o altă problemă practică, ajung la o formulare matematică analogă cu cea din (1).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОБОБЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Резюме)

Доказывается, что если переменные x_i подлежат ограничениям (1), функция y из (2) допускает максимум только тогда когда гиперплоскость (4) не пересекается с многогранником Π, определенным через (1). Этот максимум достигается в одной из вершин Π. Можеть быть применим метод симплекс, а также и другие аналогичные. Если к тому же ставится условие, чтобы x_i были целыми, то рассматривается множество μ точек с целыми координатами Π и их выпуклая огибающая, являющаяся также выпуклым многогранником. Максимум функции y будет достигнут в одной из вершин последнего.

Эти результаты применяются для нахождения максимума индекса использования множества машин типа M_1, M_2,..., M_p, производящих фабрикаты A_1, A_2,..., A_n, обозначая через u_k — число машин, через x_i — число единиц фабриката A_i, через p_i — число единиц фабриката A_i необходимо выдаваемого данной установкой, через q_n — максимально возможное число используемых машин, и, наконец, через t_{ik} — время употребляемое машиной M_k для A_i.

SUR UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE GÉNÉRALISÉE

(Résumé)

On démontre que si les variables x_i sont soumises aux restrictions (1), la fonction y de (2) admet un maximum seulement si le hyperplan (4) a une intersection vide avec le polyèdre Π défini par (1). Ce maximum est réalisé en un sommet de Π. La méthode symplex et autres méthodes analogues sont appliquables. Si l'on impose encore la condition que les x_i soient des entiers, on considère l'ensemble μ des points à coordonées entières de Π et leur enveloppe convexe qui est encore un polyèdre convexe. Le maximum de y sera réalisé en un sommet de ce dernier.

On utilise ces résultats pour trouver le maximum de l'indice d'utilisation d'un ensemble de machines du type $M_1, \ldots, M_2, \ldots, M_p$, employées pour la fabrication des produits $A_1, A_2, \ldots, A_n$, en notant par u_k le nombre de machines, par x_i le nombre d'unités du produit A_i, par p_i le nombre d'unités de A_i que l'instalation doit produire obligatoirement, par q_n le nombre maximum de machines qui peut être utilisé et, enfin, par t_{ik} le temps employé par la machine M_k pour A_i.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 517.53

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ШИЛЬДА-ЛЕВАНДОВСКОГО

Т. Г. ЭЗРОХИ

§ 1. Пусть S_h есть класс однолистных в круге $|z| \leqslant 1$ функций

$$f(z) = z - \sum_{2}^{\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

для которых $a_n \geqslant 0$ и

$$\sum_{2}^{\infty} n a_n = 1. \tag{2}$$

Шильд [1] рассматривал класс полиномов S_p вида

$$z - \sum_{2}^{N} a_n z^n, \quad a_n \geqslant 0, \tag{3}$$

для которых $r = 1$ является радиусом однолистности. Как уже отмечалось в работе [2], $S_p \in S_h$.

В теореме 7 Шильд [1] высказал следующее предположение.

Если $w = f(z) \in S_p$ и через d_0 обозначить радиус круга, покрываемого образом круга $|z| \leqslant r_0$ при отображении $w = f(z)$, где r_0 — радиус выпуклости полинома $f(z)$, а через D_0 — радиус круга, покрываемого образом круга $|z| \leqslant 1$ при том же отображении, то $d_0/D_0 \geqslant 3/4$.

Эта гипотеза была доказана Левандовским [2] при помощи громоздкого анализа, потребовавшего установления восьми лемм. Сейчас мы приведем весьма простое доказательство аналогичного результата для всего класса S_h.

Пусть r_0 — радиус выпуклости функции (1) класса S_h. Нетрудно убедиться, что r_0 определяется уравнением

$$\sum_{2}^{\infty} n^2 a_n r_0^{n-1} = 1. \tag{4}$$

Требуется найти минимум функции

$$\eta = \left(r_0 - \sum_{2}^{\infty} a_n r_0^n\right) \Big/ \left(1 - \sum_{2}^{\infty} a_n\right)$$

при условиях (2) и (4). Это — задача на связанный экстремум. Положим, как обычно,

$$f(a_1, \ldots, a_n, r_0) = \left(r_0 - \sum_{2}^{\infty} a_n r_0^n\right) \Big/ \left(1 - \sum_{2}^{\infty} a_n\right) - \lambda \sum_{2}^{\infty} n a_n - \mu \sum_{2}^{\infty} n^2 a_n r_0^{n-1}$$

и найдем уравнения

$$(5)\qquad \partial f/\partial r_0 = \left(1-\sum_2^\infty n a_n r_0^{n-1}\right)/\left(1-\sum_2^\infty a_n\right) - \mu\sum_2^\infty n^2(n-1)a_n r_0^{n-2} = 0,$$

$$(6)\qquad \begin{aligned}(\partial f/\partial a_k)\left(1-\sum_2^\infty a_n\right) &= \eta - r_0^k - \lambda k\left(1-\sum_2^\infty a_n\right) - \\ &- \mu\left(1-\sum_2^\infty a_n\right)k^2 r_0^{k-1} = 0, \quad (k=2,\ 3,\ldots).\end{aligned}$$

Для нахождения решения системы уравнений (2), (4), (5) и (6) поступаем следующим образом. Умножим все члены уравнения (6) на $a_k(k-1)$, а затем просуммируем по k. Тогда получим

$$(7)\qquad \begin{aligned}\eta\sum_2^\infty(k-1)a_k - \sum_2^\infty(k-1)a_k r_0^k - \lambda\left(1-\sum_2^\infty a_n\right)\sum_2^\infty k(k-1)a_k - \\ - \mu\left(1-\sum_2^\infty a_n\right)\sum_2^\infty k^2(k-1)a_k r_0^{k-1} = 0.\end{aligned}$$

Из уравнения (5), если предварительно умножить все члены уравнения на r_0, находим

$$(8)\qquad r_0 - \sum_2^\infty n a_n r_0^n = \left(1-\sum_2^\infty a_n\right)\mu\sum_2^\infty n^2(n-1)a_n r_0^{n-1}.$$

На основании (8) и (2) из (7) следует, что $\lambda = 0$. Следовательно, уравнения (6) принимают вид

$$\eta - r_0^k - \mu\left(1-\sum_2^\infty a_n\right)k^2 r_0^{k-1} = 0, \quad (k=2,\ 3,\ldots),$$

или

$$(9)\qquad r_0 - \sum_2^\infty a_n r_0^n - r_0^k\left(1-\sum_2^\infty a_n\right) - \mu\left(1-\sum_2^\infty a_n\right)^2 k^2 r_0^{k-1} = 0,\ (k=2,\ 3,\ldots).$$

Умножая уравнение (9) на a_k и суммируя по всем k, имеем

$$(10)\qquad \sum_2^\infty a_k\left(r_0 - \sum_0^\infty a_n r_0^n\right) - \left(1-\sum_2^\infty a_n\right)\sum_2^\infty a_k r_0^k - \mu\left(1-\sum_2^\infty a_n\right)^2 = 0.$$

Из (9) на основании (10) получаем

$$\eta = (k^2-1)r_0^k/(k^2 r_0^{k-1}-1),$$

где k соответствует $a_k \neq 0$.

Поскольку $\eta > 0$, а $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 r_0^{k-1} = 0$, то k — конечно. Из $k^2 r_0^{k-1} - 1 > 0$ следует, что $(1/k)^{2/(k-1)} < r_0 \leqslant 1$.

Легко проверить, что функция $(k^2-1)x^k/(k^2 x^{k-1}-1)$ имеет минимум на интервале $((1/k)^{2/(k-1)}, 1)$ при $x = (1/k)^{1/(k-1)}$ и этот минимум равен $k^{-1/(k-1)} + k^{-k/(k-1)}$.

Следовательно,

$$\eta \geqslant k^{-1/(k-1)} + k^{-k/(k-1)}, \quad (k=2,\ 3,\ldots).$$

Исследуем функцию

$$\varphi(x) = \exp\{[-1/(x-1)]\ln x\} + \exp\{[-x/(x-1)]\ln x\}$$

при $x > 1$. Так как

$$\varphi'(x) = [1/(x-1)^2](2 - 2x + x\ln x + \ln x)\exp\{[-x/(x-1)]\ln x\}$$

и функция $\zeta = 2 - 2x + x\ln x + \ln x$ на интервале $[1, +\infty)$ возрастает, причем $\zeta = 0$ при $x = 1$, то $\varphi'(x) > 0$ на интервале $[2, +\infty)$, т.е.

$$\varphi(2) = \eta(2) = 3/4 < \varphi(3) < \varphi(4) < \ldots$$

Таким образом

$$\eta \geqslant 3/4,$$

причем оценка точная достигается функцией $z - \frac{1}{2}z^2$ и только ею, ибо если $k > 2$, то ни одна из величин $(k^2-1)r_0^k/(k^2 r_0^{k-1} - 1)$, как следует из предыдущего, не равна 3/4 на интервале $((1/k)^{2/(k-1)}, 1)$.

Примечание. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\exp\{[-1/(x-1)]\ln x\} + \exp\{[-x/(x-1)]\ln x\}\right) = 1,$$

то

$$3/4 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

§ 2. Классом L будем называть класс однолистных в круге $|z| \leqslant 1$ функций

$$f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n \tag{11}$$

для которых

$$\sum_2^\infty n|a_n| \leqslant 1.$$

Очевидно, что $S_h \subset L$.

Теорема. *При обозначениях* **§ 1** *для функций класса* **L**

$$d_0/D_0 \geqslant 1/4.$$

Доказательство. Радиус выпуклости r_0 функции (11) класса L определяется уравнением

$$1 + \sum_2^\infty n^2 a_n [r_0 \exp(i\varphi_0)]^{n-1} = 0 \tag{12}$$

и

$$d_0 = \min_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left| r_0\exp(i\varphi) + \sum_2^\infty a_n [r_0\exp(i\varphi)]^n \right|,$$

$$D_0 = \min_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\exp(i\varphi) + \sum_2^\infty a_n \exp(in\varphi)\right|.$$

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Тогда $d_0/D_0 \geqslant \left(r_0 - \sum_2^\infty |a_n| r_0^n\right) / \left(1 + \sum_2^\infty |a_n|\right)$.

Из неравенства $\left|1 + \sum_2^\infty n^2 a_n [r_0 \exp(i\varphi_0)]^{n-1}\right| \geqslant 1 - \sum_2^\infty n^2 |a_n| r_0^{n-1}$

следует, что $\sum_2^\infty n^2 |a_n| r_0^{n-1} > 1$.

Поэтому, если r_1 — корень уравнения $\sum_2^\infty n^2 |a_n| r_1^{n-1} = 1$, то $r_0 \geqslant r_1$, причем, как легко убедиться, $r_1 \geqslant 1/2$.

Тогда, так как функция $F(x) = x - \sum_2^\infty |a_n| x^n$ монотонно растет на промежутке $[0, 1]$, то $d_0/D_0 \geqslant \left(r_1 - \sum_2^\infty |a_n| r_1^n\right) / \left(1 + \sum_2^\infty |a_n|\right)$ или

$$d_0/D_0 \geqslant \left[\frac{1}{2} - \sum_2^\infty |a_n| \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] / \left(1 + \sum_2^\infty |a_n|\right)$$

или

$$d_0/D_0 \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_2^\infty |a_n|\right) / \left(1 + \sum_2^\infty |a_n|\right).$$

Но, так как $\sum_2^\infty |a_n| \leqslant \frac{1}{2} \sum_2^\infty n |a_n| \leqslant \frac{1}{2}$, то $d_0/D_0 \leqslant 1/4$.

Оценка неточная. Вопрос о точной оценке остается открытым.

Доказанную теорему можно рассматривать как некоторый аналог теоремы 7 Шильда [1].

Поступила 5 VII 1961 г.

Киевский политехнический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Schild A., Proc Amer. Math. Soc., 1954, **5**, *1*.
2. Lewandowski Z., Ann univ. Mariae Curie-Sklodowska, Lublin, Sectio A, Mathematica, 1956, **X**, pp. 81—94.

SUR UN THÉORÈME DE SCHILD-LEWANDOWSKI

(Résumé)

On démontre par une voie simplifiée un théorème qui peut-être considéré comme l'analogue du théorème 7 de Schild [1].

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI SCHILD-LEWANDOWSKI

(Rezumat)

Se demonstrează pe o cale simplificată o teoremă ce poate fi considerată ca fiind analogă teoremei 7 a lui Schild [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. K. 517.946 ; 517.53

ÜBER DEN AUFBAU DER THEORIE ELLIPTISCHER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUF FUNKTIONENTHEORETISCHER GRUNDLAGE

VON

ERWIN KREYSZIG

1. Einleitung

Auf Grund des bekannten Zusammenhanges zwischen den harmonischen Funktionen zweier reeller Veränderlichen und den analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen lassen sich theoretische und praktische Probleme des zweidimensionalen Potentials mit funktionentheoretischen Mitteln behandeln. Dieser Sachverhalt legt es nahe zu versuchen, die Theorie der Lösungen anderer allgemeinerer elliptischer partieller Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage aufzubauen.

Den ersten Schritt in dieser Richtung dürfte wohl E. T. Whittaker [1] getan haben. Später hat dann S. Bergman [2], [3] die im wesentlichen lokalen Untersuchungen Whittakers ins Grosse übertragen. Die genannte Fragestellung fand bald allgemeines Interesse : S. Bergman [4]...[8], M. Schiffer [9], [10], J. Diaz und G. Ludford [11], L. Bers [12], A. Gelbart [13], A. Temliakoff [14] und J. Vekua [15] führten Operatoren ein, die analytische Funktionen einer oder mehrerer komplexer Veränderlichen in Lösungen gewisser Klassen elliptischer Gleichungen mit analytischen Koeffizienten transformieren.

Für die meisten elliptischen Differentialgleichungen in zwei und drei unabhängigen Veränderlichen existieren beliebig viele Operatoren der genannten Art, und so erhebt sich die grundlegende Frage nach der Wahl geeigneter Operatoren. Man wird selbstredend nur solche Operatoren verwenden, die möglichst viele Eigenschaften der analytischen Funktionen invariant lassen oder in einfacher Weise transformieren, so dass man vermöge funktionentheoretischer Sätze Schlüsse auf das Verhalten der mit Hilfe eines Operators gewonnenen Lösungen ziehen kann. Von einer systematischen Erfassung und Klassifizierung praktisch brauchbarer Operatoren ist man zur Zeit noch weit entfernt.

Die Heranziehung funktionentheoretischer Methoden bei der Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen ist auch von erheblichem praktischen Interesse, z.B. in der Theorie kompressibler Strömungen und bei der numerischen Behandlung von Randwertproblemen, vgl. [9] und [16]...[18].

In diesem Zusammenhang ist es allerdings von entscheidender Bedeutung, dass die Eigenschaften der verwendenten Operatoren genau bekannt sind. Die allgemeine Darstellung eines Operators bildet nicht mehr als den Rahmen und den Ausgangspunkt für dessen nähere Untersuchung. Trotzdem in den letzten beiden Jahrzehnten zahlreiche Arbeiten über Integraloperatoren veröffentlicht wurden, sind eine Anzahl prinzipiell wichtiger Fragen noch gar nicht oder nur unzulänglich be-

handelt. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Klärung einiger dieser grundlegenden Probleme leisten.

In Kap. **2** werden neue Operatoren, die wir als Exponentialoperatoren bezeichnen, eingeführt, und alle partiellen Differentialgleichungen bestimmt, deren Lösungen sich mit Hilfe dieser Operatoren darstellen lassen.

In Kap. **3** wird gezeigt, dass für jede derartige Gleichung unendliche Folgen unabhängiger Partikulärlösungen existieren, die zusätzlich gewöhnliche lineare Differentialgleichungen befriedigen.

Auf diese Weise lässt sich dann die Fuchssche Theorie zur Untersuchung der Lösungen partieller Differentialgleichungen heranziehen, wie in Kap. **4** erläutert wird.

Das Kap. **5** betrifft das Koeffizientenproblem der Lösungen partieller Differentialgleichungen.

In Kap. **6** werden allgemeinere Methoden zur Behandlung des Koeffizientenproblems entwickelt, die zur Beseitigung gewisser, durch die Operatoren bedingter Beschränkungen führen.

In Kap. **7** wird die Übertragung der genannten Methoden auf partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung und auf Systeme partieller Differentialgleichungen betrachtet.

2. Exponentialoperatoren

Wir betrachten partielle Differentialgleichungen von der Form

$$\Delta v + \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v = 0 \tag{2.1}$$

mit reell-analytischen Koeffizienten α, β, γ zweier reeller Variabler x und y. Unter Einführung der komplexen Variablen $z_1 = x + iX$ und $z_2 = y + iY$ setzen wir α, β und γ ins Komplexe fort. Bei einigen der folgenden Untersuchungen werden diese Funktionen als ganz vorausgesetzt, bei anderen werden wir Singularitäten im Endlichen zulassen. Dies wird jeweils angegeben und ist zu beachten.

Führen wir nun die Variablen $z = z_1 + iz_2$ und $z^* = z_1 - iz_2$ ein, die für reelle z_1 und z_2 konjugiert sind, so ergibt sich aus (2.1)

$$L(u) = u_{zz^*} + au_z + bu_{z^*} + cu = 0 \tag{2.2}$$

mit $u(z, z^*) = v(z_1, z_2)$ und $a = (\alpha + i\beta)/4$, $b = (\alpha - i\beta)/4$, $c = \gamma/4$.

Für reelle z_1 und z_2 ist

$$b = \bar{a} \quad \text{und} \quad c = \bar{c}. \tag{2.3}$$

Fur beliebiges a, b, c entspricht (2.2) einem System zweier Gleichungen für den Real- und den Imaginärteil einer komplexen Lösung $u = u^{(1)} + iu^{(2)}$. Diese beiden Gleichungen sind genau dann voneinander unabhängig und von derselben Form, wenn (2.3) gilt. Dann ist mit einer komplexen Lösung $u(z, z^*)$ auch

$$U(z, z^*) = R(u) = [u(z, z^*) + \bar{u}(z^*, z)]/2 \tag{2.4}$$

eine Lösung. Diese hat für reelles z_1 und z_2 reelle Werte und wird deshalb kurz als *reelle Lösung* bezeichnet, im Gegensatz zur *komplexen Lösung* $u(z, z^*)$, die auch für reelles z_1 und z_2 komplexwertig ist.

Der Operator R in (2.4) ist für reelles z_1 und z_2 mit dem Operator $\mathfrak{Re}$ („Nehmen des Realteils") identisch.

Aus (2.2) folgt

$$M(w) = w_{zz^*} + Bw_{z^*} + Cw = 0 \tag{2.5}$$

mit

$$w = u \exp\left[\int a(z, z^*)\, dz^*\right] \tag{2.6}$$

und

$$B = b - \int a_z(z, z^*)\, dz^*, \quad C = c - a_z - ab. \tag{2.7}$$

Wir werden (2.5) zugrundelegen. Dies führt zu gewissen formalen Vereinfachungen. Die Übertragung der Ergebnisse von (2.5) auf (2.2) bereitet keine Schwierigkeiten.

Wir betrachten nun Integraloperatoren von der Form

$$w(z, z^*) = P(f) = \int_{-1}^{1} E(z, z^*, t)\, f(z[1-t^2]/2)(1-t^2)^{-1/2}\, dt. \tag{2.8}$$

Hierbei ist $f(z)$ eine beliebige analytische Funktion. $E(z, z^*, t)$ ist unabhängig von der Wahl von f und soll so bestimmt werden, dass der Operator P die Funktion f in eine Lösung von (2.5) transformiert. Durch Einsetzen von (2.8) in (2.5) zeigt man, dass E der Gleichung

$$(1 - t^2) E_{z^*t} - E_{z^*}/t + 2ztM(E) = 0 \tag{2.9}$$

genügen muss.

E heisst die *Erzeugende* des Operators P, und f heisst die *Zugeordnete* der betreffenden Lösung w bezüglich des vorliegenden Operators.

E und f können Singularitäten besitzen. In einem solchen Falle lässt sich in einer Umgebung des Nullpunktes stets ein Punkt finden, in dem alle vorkommenden Funktionen regulär sind. Wir können die Funktionen in der Umgebung eines solchen Punktes betrachten und dann die im Kleinen gültigen Beziehungen durch analytische Fortsetzung ins Grosse übertragen. Zum Beispiel gilt die durch (2.8) gegebene Zuordnung in jedem einfachzusammenhängenden Teilgebiet des Regularitätsgebietes der Zugeordneten $f(z)$.

Zu einer gegebenen Gleichung (2.5) kann man verschiedenartige Erzeugende wählen. Umgekehrt folgen aus der Wahl einer bestimmten Klasse spezieller Funktionen als Erzeugende Beschränkungen der Form der Koeffizienten von (2.5). So ergibt sich das folgende

Problem. Zu gegebenen Funktionen eines bestimmten Typs ist die zugehörige Klasse partieller Differentialgleichungen (2.5) zu bestimmen, deren Lösungen in der Form (2.8) mit den genannten Funktionen als Erzeugenden dargestellt werden können.

Versuche, dieses Problem zu behandeln [6], [20], [21], haben bisher nur zu sehr speziellen Ergebnissen geführt. Die nachstehende Untersuchung liefert u.a. einen Beitrag zu einer solchen Behandlung und gibt genügend Anhaltspunkte dafür, wie man im Falle anderer Klassen Erzeugender $E(z, z^*, t)$ als der hier zu betrachtenden Klasse zu verfahren hat.

Wir führen nun den Begriff des *Exponentialoperators* ein und geben dann die Lösung des genannten Problems für diese Klasse von Operatoren an.

Definition 1. Ein Integraloperator (2.8) mit einer Erzeugenden der Form

$$E = \exp Q, \qquad Q = \sum_{a=0}^{m} q_a(z, z^*)\, t^a, \tag{2.10}$$

heisst ein Exponentialoperator.

Definition 2. Eine Gleichung (2.5) heissse von der Klasse $\mathcal{E}$, wenn sie nicht identisch verschwindende Lösungen besitzt, die sich mit Hilfe eines Exponentialoperators darstellen lassen.

Den Fall des identischen Verschwindens von C in (2.5), der auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für w_{z^*} führt, und der gleichzeitigen Unabhängigkeit der Funktion E von z^*, der $w_{z^*} \equiv 0$ zur Folge hat, bezeichnen wir als *Trivialfall* und alle anderen Fälle als *nichttrivial.*

Dann lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zugehörigkeit einer Gleichung (2.5) zur Klasse $\mathcal{E}$ folgendermassen formulieren:

Satz 1. (I) *Können die Koeffizienten von* (2.5) *in der Form*

$$B = -\,\mathrm{d}q_0/\mathrm{d}z - q_2/z, \tag{2.12}$$

$$C = -\,(q_1/2z)\,(\partial q_1/\partial z^*) \tag{2.13}$$

dargestellt werden, wobei q_0 *nur von* z *abhängt und* q_1 *bzw.* q_2 *von der Form*

$$q_1 = \sum_{r=0}^{(m-1)/2} a_r\, z^{r+1/2}, \quad a_0 = a_0(z^*), \quad a_r = \text{konst.}, (r = 1, 2, \ldots, (m-1)/2), \tag{2.14}$$

bzw.

$$q_2 = \sum_{r=1}^{m/2} d_r\, z^r, \quad d_r = \text{konst.}, \tag{2.15}$$

ist, so gehört (2.5) *zur Klasse* $\mathcal{E}$. *Die übrigen Koeffizienten von* Q (vgl. (2.10)) *haben dann die Form*

$$q_{2p+1} = \frac{(-2)^p}{3.5\ldots(2p+1)} \sum_{r=p}^{(m-1)/2} r(r-1)\ldots(r-p+1)\, a_r\, z^{r+1/2}, \tag{2.16}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, (m-1)/2),$$

$$(2.17)\quad q_{2p} = -\frac{(-2)^p}{2.4\ldots 2p}\sum_{r=p}^{m/2}(r-1)(r-2)\ldots(r-p+1)\,d_r\,z^r,\ (p=2,3,\ldots,m/2).$$

(II) *Lässt sich* B *in der Form* (2.12) *und* C *in der Form*

$$(2.18)\qquad C = -(\partial q_2/\partial z^*)/(2z)$$

mit q_2 *gemäss* (2.15) *darstellen, so gehört* (2.5) *der Klasse* $\mathcal{E}$ *an. Dann ist* $q_{2p+1}\equiv 0$, $(p=1,2,\ldots,(m-1)/2)$, *die Funktionen* q_{2p} *sind durch* (2.17) *gegeben, und in* (2.15) *kann der Koeffizient* d_1 *eine analytische Funktion von* z^* *sein.*

(III) *Von Trivialfällen abgesehen sind die durch* (I) *und* (II) *gekennzeichneten Gleichungen* (2.5) *die einzigen der Klasse* $\mathcal{E}$.

Beweisskizze. (2.5) gehöre der Klasse $\mathcal{E}$ an. Einsetzen von (2.10) in (2.9) ergibt eine partielle Differentialgleichung für Q. Diese enthält die Potenzen t^s, $(s=-1,\ldots,2m+1)$. Der Koeffizient jeder dieser Potenzen muss identisch verschwinden. So ergibt sich ein System von $2m+3$ partiellen Differentialgleichungen, denen die Funktionen $q_\alpha(z,z^*)$ genügen müssen. Es bezeichne $[s]$ die der Potenz t^s entsprechende dieser Gleichungen. Aus $[-1]$ folgt $\partial q_0/\partial z^* = 0$. $[0]$ gilt identisch. Aus $[-1]$ und $[1]$ folgt

$$C = -(2z)^{-1}(q_1\,\partial q_1/\partial z^* + \partial q_2/\partial z^*).$$

Aus den übrigen Gleichungen lässt sich durch eine längere Rechnung schrittweise zeigen, dass $\partial q_m/\partial z^* = 0$ sein muss. Hierbei geht man von der gegenteiligen Annahme aus und führt diese zu einem Widerspruch. Dabei lassen sich die Gleichungen jeweils vereinfachen, indem man alle Gleichungen mit höherer Nummer berücksichtigt. Ähnlich beweist man dann schrittweise, dass $\partial q_\alpha/\partial z^* = 0$, $(\alpha = m-1, m-2,\ldots,4,3)$, gelten muss. Der Widerspruch ergibt sich dabei jeweils in der Gleichung $[p-1]$. Im Verlaufe dieses Teiles des Beweises ergeben sich Differentialrekursionsformeln, aus denen man auf die Form der Koeffizienten q_α schliessen kann, die im Wortlaut des Satzes angegeben ist. Dabei sind die Fälle $q_1 \equiv 0$ und $q_1 \not\equiv 0$ getrennt zu behandeln. Schliesslich ergibt sich unmittelbar aus dem Beweisgange, dass die als notwendig erkannten Bedingungen für B und C auch hinreichend für die Zugehörigkeit der Gleichung (2.5) zur Klasse $\mathcal{E}$ sind. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Ein praktisch wichtiger Sonderfall ist der folgende

Satz 2. *Jede partielle Differentialgleichung* (2.5) *mit konstanten Koeffizienten gehört der Klasse* $\mathcal{E}$ *an.*

Hierher gehört also zum Beispiel die Gleichung

$$\Delta v + v = 0$$

oder

$$(2.19)\qquad 4w_{zz^*} + w = 0.$$

Aus Satz 1 ergibt sich als einfachste Erzeugende

$$E = \exp\left[\mathrm{i}\,(zz^*)^{1/2}\,t\right].$$

Wählt man nun die Zugeordneten $f_n(z) = z^n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, so erhält man die Lösungen

$$w_n = \pi^{1/2}\,\Gamma(n + 1/2)\,(z/z^*)^{n/2}\,\mathrm{J}_n\left((zz^*)^{1/2}\right),$$

wobei J_n Besselsche Funktionen sind und von einer bekannten Integraldarstellung dieser Funktionen Gebrauch gemacht wurde.

Dies ist ein erster, sehr einfacher Sonderfall einer Beziehung zwischen partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen im Zusammenhang mit Lösungen, die durch Integraloperatoren gewonnen wurden.

Es sei angemerkt, dass sich Integraloperatoren ganz allgemein zu einer systematischen Untersuchung der Eigenschaften spezieller Funktionen heranziehen lassen, vgl. z. B. [22].

Nielsens und Ramseys Ergebnisse [20], [21] sind als Sonderfälle in Satz 1 enthalten, und aus diesem Satz ergibt sich auch der Grund dafür, weshalb die genannten Verfasser bei ihren sehr speziellen Untersuchungen nur eine geringe Anzahl nichttrivialer Fälle erhalten konnten.

3. Über Lösungen partieller Differentialgleichungen, die eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung befriedigen

Im vorliegenden Kapitel untersuchen wir eine wichtige Eigenschaft der Exponentialoperatoren. Wir werden zeigen, dass für jede partielle Differentialgleichung (2.5) der Klasse $\mathcal{L}$ unendliche Folgen unabhängiger Partikulärlösungen existieren, deren jede eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung befriedigt. Diese Differentialgleichungen haben für alle Funktionen einer solchen Folge dieselbe Ordnung. Anschliessend an den Existenzbeweis wird eine Methode zur Bestimmung der Koeffizienten dieser Gleichungen angegeben. Dies ist wesentlich, da man natürlich die Form dieser Koeffizienten genau kennen muss, wenn man aus den Gleichungen Aufschluss über die Eigenschaften der Lösungen $w(z, z^*)$ der Gleichung (2.5) erhalten will. Auf diese Weise ergibt sich dann die Möglichkeit, die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zur Untersuchung der Lösungen partieller Differentialgleichungen heranzuziehen.

Beim Beweis der Existenz der genannten Gleichungen wird im wesentlichen nur die Eigenschaft des Exponentialoperators benutzt, dass dessen Erzeugende, als Funktion einer der Veränderlichen z und z^* (oder auch z_1 und z_2) betrachtet, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung befriedigt, und als Funktion von t und einer der soeben genannten Veränderlichen aufgefasst, einer linearen partiellen Differentialgleichung genügt, die bezüglich t von erster Ordnung ist. Da es andere Erzeugende gibt, die diese Voraussetzungen erfüllen, so folgt hieraus, dass die zu entwickelnden Methoden in ähnlicher Weise auch bei anderen Integraloperatoren angewendet werden können. In diesem Sinne ist die

vorliegende Untersuchung als ein Teil einer allgemeineren Theorie aufzufassen.

Zunächst sind die folgenden beiden Fragen zu klären:

a) Die Lösungen $w(z, z^*)$ der Gleichung (2.5) sind Funktionen im reell-vierdimensionalen $xXyY$-Raum. Um gewöhnliche Differentialgleichungen für w zu erhalten, haben wir diese Funktionen auf gewissen Flächen dieses Raumes zu betrachten, und die Form der zu gewinnenden Diferentialgleichungen hängt von der Wahl dieser Flächen ab. Wir wählen die Ebenen

$$z_2 = z_2^{(0)} = \text{konst.} \tag{3.1}$$

und bezeichnen $w(z, z^*)$, als Funktion von z_1, z_2 aufgefasst, mit $\tilde{w}(z_1, z_2)$. Die Wahl von (3.1) hat den Vorteil, dass die betrachteten Funktionen in diesen Ebenen analytische Funktionen von z_1 sind.

b) Die Zugeordnete im Exponentialoperator ist geeignet zu wählen. Durch Differentiation und Elimination beweist man: Genügt jeder Summand einer Summe endlich vieler Funktionen einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten, so trifft dies auch für die genannte Summe zu. Dieser Sachverhalt legt es nahe, die Zugeordnete möglichst einfach und systematisch zu wählen. Wir betrachten deshalb Lösungen, die den regulären Zugeordneten

$$f_n(z) \equiv z^n, \ (n = 1, 2, \ldots), \ (\text{„}\textit{regulärer Fall (R)}\text{“}), \tag{3.2}$$

und den meromorphen Zugeordneten

$$f_n(z) = (z-\alpha)^{-n}, \ (n = 1, 2, \ldots), \ (\text{„}\textit{meromorpher Fall (M)}\text{“}), \tag{3.3}$$

im Exponentialoperator entsprechen.

Im regulären Falle (R) gilt nun der

Satz 3. (I) *Jede durch einen Exponentialoperator mit einer Zugeordneten der Form* (3.2) *dargestellte Lösung* $\mathrm{w}(\mathrm{z}, \mathrm{z}^*) = \mathrm{w}(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2)$ *einer Gleichung* (2.5) *der Klasse* $\mathfrak{E}$ *genügt einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung*

$$N(w) = \tilde{N}(\tilde{w}) = \sum_{\beta=0}^{k} b_\beta(z_1, z_2)\, w^{(\beta)} = 0, \ b_k = 1, \ z_2 = z_2^{(0)}. \tag{3.4}$$

Die Koeffizienten b_β *sind rationale Funktionen von* q_p, *vgl.* (2.10).

(II) *Die Ordnung* k *der Gleichung* (3.4) *ist unabhängig von* n *in* (3.2), *und es gibt eine Gleichung* (3.4) *mit*

$$k \leqq m + 1. \tag{3.5}$$

Beweisskizze. Es genügt zu zeigen, dass der Integrand des Exponentialoperators

$$s = 2^{-n} z^n \exp\left[Q(1-t^2)^{n-1/2}\right]$$

einer Differentialgleichung von der Form

$$N(s) = \mathrm{d}\,[(1-t^2)^{\lambda} F(z, z^*, t)]/\mathrm{d}t, \quad \lambda > 0 \tag{3.6}$$

genügt, wobei F eine für $|t| \leqq 1$ reguläre Funktion von t ist.

Um (3.6) zu konstruieren, wähle man $\lambda = 1$ und $F = sP$ mit

$$P = \sum_{r=0}^{g} p_r(z, z^*)\, t^r, \tag{3.7}$$

wobei g und die p_r geeignet zu bestimmen sind. Dann stelle man die Ableitungen von s nach z_1 durch ein Produkt von s und einer Funktion von z, z^* und t dar. Es zeigt sich, dass die letztgenannten Funktionen Polynome in t sind. Setzt man die erhaltenen Darstellungen und auch $\partial s/\partial t$ in (3.6) ein, so erhält man nach Weglassung eines gemeinsamen Faktors s auf beiden Seiten je ein Polynom in t, dessen Koeffizienten von z und z^* abhängen. Das Polynom auf der linken Seite hat den Grad mk. Wählt man

$$g = (k-1)\,m - 1, \tag{3.8}$$

so hat das Polynom auf der rechten Seite auch den Grad mk. Die Koeffizienten entsprechender Potenzen auf beiden Seiten müssen gleich sein. Damit zerfällt die Gleichung in ein System von $mk+1$ linearen Gleichungen in den Unbekannten $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$, $p_0, \ldots, p_g$. Wählt man

$$k = m + 1, \tag{3.9}$$

so ist die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten. Ist die Determinante D des Systems nicht identisch null, so lassen sich die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{k-1}$ von (3.6) eindeutig bestimmen. Ist $D \equiv 0$, so kann man das System auf ein System mit weniger Gleichungen und entsprechend weniger Unbekannten reduzieren und auch in diesem Falle zu einer Differentialgleichung der Form (3.4) gelangen. Satz 3 ist damit bewiesen.

Aussagen über w sind aus (3.4) natürlich desto einfacher zu gewinnen, je niedriger die Ordnung ist.

Zum Beispiel folgt aus dem Satz 2, dass man im Falle einer Gleichung (2.5) mit konstanten Koeffizienten gewöhnliche Differentialgleichungen (3.4) von zweiter Ordnung erhalten kann.

Auch der folgende Satz ist in diesem Zusammenhang von praktischem Interesse

Satz 4. *Jede der in Satz 3 genannten Lösungen* w *für deren Darstellung man einen Exponentialoperator verwenden kann, bei dem* Q *eine gerade Funktion von* t *ist, genügt einer gewöhnlichen Differentialgleichung* (3.4) *der Ordnung*

$$k \leqq m/2 + 1, \ (m \text{ gerade}). \tag{3.10}$$

Ob die Voraussetzungen dieses Satzes in einem gegebenen Falle erfüllt sind, prüft man mittels Satz 1.

Im meromorphen Falle (M) gilt der

Satz 5. *Jede durch einen Exponentialoperator mit einer meromorphen Zugeordneten* (3.3) *dargestellte Lösung* w *einer partiellen Differentialgleichung* (2.5) *der Klasse* $\mathfrak{E}$ *genügt einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung von der Form* (3.4) *und von der Ordnung*

$$k \leqq m + 3. \tag{3.11}$$

k *ist unabhängig von* n *in* (3.3). *Ist* Q *eine gerade Funktion von* t, *so gilt sogar*

$$k \leqq m/2 + 2, \ (m \text{ gerade}). \tag{3.12}$$

Der Grundgedanke des Beweises dieses Satzes ähnelt dem des Satzes 3 bzw. 4. Die Durchführung erfordert jedoch eine wesentliche Abänderung: Bei einer wörtlichen Übertragung des Beweises des Satzes 3 gelangt man im vorliegenden Falle nicht zu einem Gleichungssystem, dessen Anzahl der Unbekannten mit der Zahl der Gleichungen übereinstimmt. Man kommt aber zum Ziel, indem man auf der rechten Seite der (3.6) entsprechenden Gleichung eine kompliziertere Funktion wählt. Diese notwendige Abänderung hat eine Erhöhung der Ordnung der gewöhnlichen Differentialgleichung zur Folge.

Um die vorstehenden Sätze praktisch verwerten zu können, muss man Näheres über die Koeffizienten der Gleichung (3.4) wissen. Diese Koeffizienten ergeben sich aus einem System linearer Gleichungen. Hierzu gilt der folgende

Hilfssatz 6. *Es sei* $w(z, z^*)$ *eine durch einen Exponentialoperator dargestellte Lösung einer partiellen Differentialgleichung* (2.5) *mit einer Zugeordneten von der Form* (3.2). *Dann sind die Koeffizienten* b_β *der von* w *befriedigten gewöhnlichen Differentialgleichung* (3.4) *und die Koeffizienten* p_r *des Polynoms* (3.7) *Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:*

$$\begin{aligned} g_{k,\beta} + \delta_{0\beta} b_0 + \sum_{\gamma=1}^{k-1} g_{\gamma,\beta} &= b_\gamma + (2n+\beta)p_{\beta-1} - (\beta+1)p_{\beta+1} + \\ + \sum_{r=0}^{\beta} [(\beta - r - 1)q_{\beta-r-1} - (\beta - r + 1)q_{\beta-r+1}]p_r &= 0, \\ (\beta = 0, 1, \ldots, \gamma m;\ \gamma = 1, 2, \ldots, m), & \end{aligned} \tag{3.13}$$

vorausgesetzt, dass dessen Determinante D *nicht identisch verschwindet. Hierbei ist*

$$g_{1,\beta} = q'_\beta + \delta_{0\beta} n/z, \ (\beta = 0, \ldots, m), \tag{3.14}$$

$$g_{\gamma,\beta} = g'_{\gamma-1,\beta} + \sum_{r=0}^{\beta} g_{\gamma-1,\beta-r} g_{1,r}, \ (\beta = 0, \ldots, \gamma m;\ \gamma = 2, \ldots, m+1). \tag{3.15}$$

$\delta_{0\beta}$ *ist das Kroneckersymbol, und der Strich bezeichnet die Ableitung nach* z_1.

Der Beweis ergibt sich aus dem Beweise des Satzes 3.

Ein entsprechender Hilfssatz gilt für den meromorphen Fall (*M*).

Die der genannten Determinante D entsprechende Matrix (D) hat die Form

$$(D) = ((E)(K)). \tag{3.16}$$

Hierbei entspricht die Matrix (E) den Unbekannten $b_0, \ldots, b_m$, besitzt also $m+1$ Spalten und m^2+m+1 Zeilen, und hat die Form

$$(E) = \begin{pmatrix} (E_0) \\ (E_1) \\ \vdots \\ (E_m) \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

wobei

$$(E_0) = (1 \;\; g_{10} \;\; g_{20} \;\; \cdots \;\; g_{m0})$$

und

$$(E_s) = ((0)_{sm} \;\; (F_s)), \quad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

ist. Hierbei bedeutet $(0)_{sm}$ die Nullmatrix mit s Spalten und m Zeilen und (F_s) eine Matrix, deren Elemente im allgemeinen alle von null verschieden sind. Die Matrix (K) in (3.16) hat m^2 Spalten und m^2+m+1 Zeilen und kann bei grösseren Werten von m in der linken unteren und rechten oberen Ecke Nullen besitzen.

Zum Beispiel erhalten wir für $m = 1$

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & g_{10} \\ 0 & g_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (K) = \begin{pmatrix} -q_1 \\ 2n+1 \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

So ergibt sich im Falle der Gleichung $\Delta v + v = 0$ oder $4w_{zz^*} + w = 0$, bei Wahl der Erzeugenden $E = \exp[\mathrm{i}(zz^*)^{1/2} t]$ und der Zugeordneten (3.2), dass die gewöhnliche Differentialgleichung (3.4) von 2. Ordnung ist und die Koeffizienten $b_2 - 1$,

$$b_1 = (z_1^2 + z_2^2)^{-1}(z_1 - z_2^2/z_1 + 2\,\mathrm{i}\,n z_2),$$
$$b_0 = -(z_1^2 + z_2^2)^{-1}(n^2 + \mathrm{i}\,n z_2/z_1 - z_1^2)$$

besitzt, also im Endlichen nur ausserwesentlich singuläre Stellen hat. Als Sonderfall ergibt sich für $n = 0$ die von Bergman [5] untersuchte Gleichung.

4. Über Beziehungen zwischen den Singularitäten der partiellen und der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen

Im vorhergehenden Kapitel wurden unendliche Folgen unabhängiger Partikulärlösungen einer beliebigen partiellen Differentialgleichung der Klasse $\mathcal{E}$ angegeben, die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen genügen. Nun soll gezeigt werden, wie man direkte Beziehungen zwischen Eigenschaften der Koeffizienten der gegebenen partiellen Diffe-

rentialgleichung und denjenigen der genannten gewöhnlichen Differentialgleichungen gewinnen kann. Offenbar liefern derartige Beziehungen unmittelbar die Grundlage zur Anwendung der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die betrachteten Lösungen. Auf diese naheliegende Anwendung wollen wir in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingehen.

In der genannten Theorie spielen die Singularitäten eine wichtige Rolle. Aus der Art und Lage der Singularitäten einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erhält man bekanntlich weitgehenden Aufschluss über das Verhalten der zugehörigen Lösungen, insbesondere dann, wenn es sich um Stellen der Bestimmtheit handelt. Wir wollen deshalb im folgenden Beziehungen zwischen den Singularitäten der partiellen Differentialgleichungen der Form (2.5), die der Klasse $\mathcal{E}$ angehören, und denjenigen der zugehörigen Differentialgleichungen (3.4) betrachten.

Diese Untersuchung wird zugleich auch verdeutlichen, wie man vorzugehen hat, um andersartige Beziehungen zwischen den genannten Differentialgleichungen zu erhalten. Es handelt sich nämlich stets um dasselbe Grundproblem, Relationen, in denen die Exponentialoperatoren eine Rolle spielen, zu eliminieren. Die Darstellung durch Operatoren ist lediglich ein technisches Hilfsmittel, das in den Ergebnissen nicht mehr in Erscheinung treten darf.

Zuerst müssen wir festestellen, welche Singularitäten eine Gleichung der Klasse $\mathcal{E}$ überhaupt besitzen kann und wie diese mit den Singularitäten der Funktionen $q_\alpha(z, z^*)$ im Exponenten der Erzeugenden des Exponentialoperators zusammenhängen. Aufschluss hierüber erhält man aus dem Satz 1, und eine nähere Untersuchung ergibt das folgende Bild:

Im Fall (I) des Satzes 1 wird

$$C = -(1/2)(\partial a_0/\partial z^*) \sum_{r=0}^{(m-1)/2} a_r z^r . \tag{4.1}$$

C kann, als Funktion von z^* aufgefasst, Singularitäten besitzen, die von $a_0(z^*)$ herrühren. Ein Pol r-ter Ordnung von a_0 entspricht einem Pol $(2r+1)$-ter Ordnung von C. Damit C, als Funktion von z^*, an einer Stelle $z^* = c^*$ einen Pol 1. Ordung hat, muss

$$a_0 = k[\log(z^* - c^*)]^{1/2}, \quad (k \neq 0), \tag{4.2}$$

sein.

Im Fall (II) des Satzes 1 ist $q_1 = q_3 = \cdots = 0$. Dafür kann q_2 nun auch von z^* abhängen. Jedoch sind B und C nun nicht mehr vollkommen unabhängig. Hat q_2, als Funktion von z^*, einen Pol an einer Stelle $z^* = c^*$, so hat B, als Funktion von z^*, dort einen Pol derselben Ordnung, und C, als Funktion von z^*, einen Pol der Ordnung $s+1$, wobei s die Ordnung des Poles von q_2 ist. Ein Pol 1. Ordnung von C entspricht einer logarithmischen Singularität von q_2 und demnach auch von B.

Wir betrachten nun Lösungen von (2.5), die den regulären Zugeordneten (3.2) entsprechen, und nehmen an, dass die in Kap. 3 genannte Determinante D nicht identisch verschwindet. Es gilt dann der

Hilfssatz 7. *Sind die Koeffizienten* $q_\alpha(z, z^*)$ *der Erzeugenden* (2.10) *in einer Umgebung* U *des Nullpunktes regulär, so gilt:*

a) *Die Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung* (2.5'), *deren Lösungen sich durch einen Exponentialoperator mit einer solchen Erzeugenden darstellen lassen, sind in* U *regulär.*

b) *Die Koeffizienten* $b_\beta(z, z^*)$ *der gewöhnlichen Differentialgleichung* (3.4), *die einer beliebigen der genannten Lösungen entspricht, haben, als Funktionen von* z *aufgefasst, Pole im Punkte* $z = 0$ *derart, dass die Gleichung* (3.4) *in diesem Punkte eine Stelle der Bestimmtheit besitzt.*

c) *Die genannten Lösungen sind in* U *eindeutige Funktionen.*

Die Aussage a) beweist man mittels Satz 1, die Aussage b) mittels Hilfssatz 6 und die Aussage c), indem man zeigt, dass die Glieder von Q die einen Faktor $z^{1/2}$ enthalten, keinen Beitrag zu dem Integral liefern, durch das die betrachtete Lösung dargestellt wird.

Bisher haben wir angenommen, dass die Erzeugende E in dem betrachteten Gebiete regulär ist. Hat nun E Singularitäten, so können diese nur von q_0, q_1 oder q_2 herrühren. Im Falle (R) folgt dann aus Hilfssatz 6 der

Hilfssatz 8. *Zwischen den Singularitäten der Funktionen* q_0, q_1 *und* q_2 *in* (2.10) *und denjenigen der Koeffizienten der gewöhnlichen Differentialgleichung* (3.4), *die einer Lösung von* (2.5) *mit einer Zugeordneten* (3.2) *entspricht, bestehen die folgenden Beziehungen:*

a) *Hat* $q_0(z)$ *einen Pol* g*-ter Ordnung in einem Punkte* $z = a$, *dann hat der Koeffizient* b_β *von* (3.4), *als Funktion von* z *aufgefasst, dort einen Pol der Ordnung*

$$h(g+1), \quad (g>0), \tag{4.3}$$

wobei $h = m + 1 - \beta$ *ist. Einer logarithmischen Singularität von* $q_0(z)$ *in einem Punkte* $z = a$ *entspricht ein Pol* h*-ter Ordnung von* b_β *in diesem Punkte, und dann ist* $z = a$ *eine Stelle der Bestimmtheit der Gleichung* (3.4).

b) *Hat* q_1, *als Funktion von* z^* *betrachtet, einen Pol* r*-ter Ordnung in einem Punkte* $z^* = a^*$, *so hat* b_β, *ebenfalls als Funktion von* z^* *aufgefasst, wenn* $m > 1$ *ist, dort einen Pol der Ordnung*

$$h(r+1) + (\delta_{0\beta} + \delta_{2\beta})\, r, \quad (r>0, m>1); \tag{4.4}$$

für $m = 1$ *hat* b_0 *einen Pol* $(2r+2)$*-ter Ordnung und* b_1 *einen Pol 1. Ordnung im Punkte* $z^* = a^*$, ($\delta_{0\beta}$ *und* $\delta_{2\beta}$ *sind Kroneckersymbole*).

Damit haben wir nun insgesamt Beziehungen zwischen den Singularitäten der Erzeugenden (2.10) des Exponentialoperators und denjenigen der zugehörigen partiellen bzw. gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten. Der Schlussschritt besteht nun darin, dass wir diese beiden Arten von Beziehungen vereinigen und dadurch einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Singularitäten der Koeffizienten der genannten Gleichungen herstellen. Auf diese Weise werden alle Formulierungen eliminiert, die auf die Exponentialoperatoren Bezug nehmen. Das Ergebnis lautet im Falle (R) wie folgt:

Satz 9. *Die Singularitäten einer gewöhnlichen Differentialgleichung* (3.4), *die durch eine Lösung einer Gleichung* (2.5) *der Klasse* $\mathfrak{E}$ *mit einer Zugeordneten* (3.2) *befriedigt wird, sind mit den Singularitäten der genannten Gleichung* (2.5) *folgendermassen verknüpft:*

a) *Hat* B, *als Funktion von* z *für einen beliebigen endlichen Wert* $z^* = \text{konst.}$ *betrachtet, einen Pol* p*-ter Ordnung in einem Punkte* $z = a$, *dann besitzt* b_β, *als Funktion von* z *aufgefasst, für jeden endlichen Wert von* z^* *in dem genannten Punkte einen Pol der Ordnung*

$$\varrho = ph, \tag{4.5}$$

wobei $h = m + 1 - \beta$ *ist.*

b) *Hat* C, *als Funktion von* z^* *für einen beliebigen endlichen Wert* $z = \text{konst.}$ *betrachtet, einen Pol ungerader Ordnung* $j > 1$ *im Punkte* $z^* = a^*$, *so besitzt* b_β, *als Funktion von* z^* *aufgefasst, für jeden endlichen Wert von* z *in diesem Punkte einen Pol der Ordnung*

$$\sigma = [h(j+1) + (\delta_{0\beta} + \delta_{2\beta})(j-1)]/2. \tag{4.6}$$

c) *Sind die Koeffizienten von* (2.5) *so beschaffen, dass der Fall* (*II*) *des Satzes 1 zutrifft, und hat* B, *als Funktion von* z^* *für einen beliebigen Wert* $z = \text{konst.}$ *betrachtet, einen Pol der Ordnung* $v > 1$ *in einem Punkte* $z^* = a^*$, *so hat* b_β, *als Funktion von* z^* *aufgefasst, für jeden endlichen Wert von* z *einen Pol der Ordnung*

$$\tau = (m + 3 - \delta_{0\beta})\, v + h \tag{4.7}$$

in dem genannten Punkte.

Die für den Fall (*R*), d.h. für Lösungen von (2.5) mit einer regulären Zugeordneten (3.2) hergeleiteten Beziehungen lassen sich in ähnlicher Weise auch für den Fall (*M*), d.h. für Lösungen von (2.5) mit einer meromorphen Zugeordneten (3.3) gewinnen und anschliessend zu unmittelbaren Beziehungen zusammenfassen, d.h. zu Beziehungen, in denen die Exponentialoperatoren nicht mehr vorkommen. In Analogie zu Satz 9 erhält man auf diesem Wege den

Satz 10. *Ist* (3.4) *eine gewöhnliche Differentialgleichung, die von einer Lösung einer Gleichung* (2.5) *der Klasse* $\mathfrak{E}$ *mit einer meromorphen Zugeordneten* (3.3) *befriedigt wird, so besteht zwischen den Singularitäten der Koeffizienten der beiden genannten Gleichungen der folgende Zusammenhang:*

a) *Hat* B, *als Funktion von* z *für einen beliebigen endlichen Wert* $z^* = \text{konst.}$ *betrachtet, einen Pol* p*-ter Ordnung in einem Punkte* $z = a$, *so hat* b_β, *als Funktion von* z *aufgefasst, für jeden endlichen Wert* z^* *einen Pol der Ordnung*

$$q = jp \tag{4.8}$$

im Punkte $z = a$; *hierbei ist*

$$j = m + 3 - \beta.$$

Ist insbesondere $p = 1$, *so hat die gewöhnliche Differentialgleichung* (3.4) *im Punkte* $z = a$ *eine Stelle der Bestimmtheit.*

b) *Hat* C, *als Funktion von* z^* *für einen beliebigen endlichen Wert* $z^* = \text{konst.}$ *betrachtet, einen Pol der Ordnung* $2p = 1$, $(p > 1)$, *in einem Punkte* $z^* = a^*$, *so hat* b_β *dort ebenfalls einen Pol, und zwar für* $m = 1$ *einen Pol der Ordnung*

$$r = jp - (\delta_{1\beta} + \delta_{3\beta})(p - 1) \tag{4.9}$$

und für $m \geqq 2$ *einen Pol der Ordnung*

$$s = jp + (p - 1) \sum_{n=0}^{(m+2)/2} \delta_{2n,\beta}. \tag{4.10}$$

Hierbei ist δ_{ik} *des Kroneckersymbol.*

Auf Grund der vorstehenden Ergebnisse lassen sich nun Lösungen partieller Differentialgleichungen der Klasse $\mathcal{E}$ mit Hilfe von Sätzen über das Verhalten der Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Stellen untersuchen. Zugleich ist der Weg gezeigt, auf dem man andersartige Beziehungen zwischen den genannten Differentialgleichungen herleiten kann. Wir wollen dies hier nicht näher ausführen. Jedoch sind noch die folgenden allgemeinen Bemerkungen angebracht:

1. Wegen der Linearität der Gleichung (3.4) folgt aus den Sätzen 3 und 5: Jede Lösung einer partiellen Differentialgleichung der Klasse $\mathcal{E}$, deren Zugeordnete eine im Nullpunkt reguläre rationale Funktion ist, genügt einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Form (3.4).

2. Hieraus ergibt sich der

Satz 11. *Sind die Koeffizienten einer partiellen Differentialgleichung* (2.5) *rational und derart, dass* B *nur Pole der Ordnung* $\rho \geqq 2$ *und* C *nur Pole ungerader Ordnung* $\sigma \geqq 3$ *besitzt, so gilt:*

Die singulären Punkte jeder Lösung mit einer im Nullpunkt regulären rationalen Zugeordneten bilden algebraische Mengen im zz^**-Raum.*

3. Die dem Fall (R) entsprechenden Lösungen einer partiellen Differentialgleichung (2.5) der Klasse $\mathcal{E}$ bilden eine *vollständige Approximationsbasis*, d.h. jede in einem einfachzusammenhängenden Gebiet G, das den Nullpunkt enthält, reguläre Lösung von (2.5) lässt sich in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von G durch eine endliche Linearkombination der genannten Lösungen gleichmässig approximieren. Dies folgt aus Ergebnissen von S. Bergman [4].

5. Über Koeffizientenprobleme

In der Funktionentheorie liegt die Frage nahe, auf welche Weise und in welchem Umfange man die Eigenschaften einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (z = x + iy), \tag{5.1}$$

aus den Koeffizienten c_0, c_1,... bestimmen kann. Die Untersuchung derartiger Koeffizientenprobleme hat zu wichtigen Ergebnissen geführt. Vgl. z.B. [24] ... [26].

Für Lösungen partieller Differentialgleichungen (2.2):

$$L(u) \equiv u_{zz^*} + a(z, z^*)\, u_z + b(z, z^*)\, u_{z^*} + c(z, z^*)\, u = 0$$

bestehen entsprechende Möglichkeiten, d. h. man kann verschiedene grundlegende Eigenschaften einer (im Nullpunkt regulären) komplexen Lösung $u(z, z^*)$ bzw. einer reellen Lösung $U(z, z^*)$ (vgl. vorn) der Gleichung (2.2) aus den Koeffizienten der zugehörigen Potenzreihenentwicklung

$$u(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}\, z^m\, z^{*n}, \tag{5.2}$$

bzw.

$$U(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}\, z^m\, z^{*n} \tag{5.3}$$

bestimmen.

Sind die Funktionen a, b und c analytisch, so lässt sich die Betrachtung der Koeffizientenprobleme für Lösungen der Gleichung (2.2) in systematischer Weise auf funktionentheoretischer Grundlage entwickeln. Als Hilfsmittel dienen hierbei gewisse Bergmansche Operatoren $p(g)$, die sog. Bergman-Operatoren 1. Art (Definition s. unten), die analytische Funktionen $g(z)$ in Lösungen $u(z, z^*)$ der Gleichung (2.5) transformieren, $u = p(g)$. Die zugehörigen inversen Operatoren $p^{-1}(u)$ sind derart, dass man die Koeffizienten in (5.1) in sehr einfacher Weise durch gewisse Koeffizienten in (5.2) ausdrücken kann. So ergibt sich eine Möglichkeit, Sätze über Koeffizientenprobleme für komplexe und reelle Lösungen der Gleichung (2.2) aus bekannten funktionentheoretischen Ergebnissen herzuleiten. Vgl. [7], [16], [27] ... [30].

Die nachstehende Untersuchung einiger bisher noch nicht behandelter Koeffizientenprobleme verfolgt einen doppelten Zweck:

Erstens soll gezeigt werden, wie einfach die genannten Zusammenhänge zwischen der Theorie partieller Differentialgleichungen der Form (2.5) und der Funktionentheorie werden, wenn man die Lösungen dieser Gleichungen in geeigneter Weise darstellt.

Zweitens soll das folgende grundsätzliche Problem behandelt werden: Es wird sich zeigen, dass in den Sätzen über Koeffizientenprobleme, die sich mit Hilfe der Operatoren 1. Art ergeben, stets nur die Folge $\{u_{m0}\}$ bzw. $\{U_{m0}\}$ der Koeffizienten in (5.2) bzw. (5.3) eine Rolle spielt, während die übrigen Koeffizienten in den Voraussetzungen überhaupt nicht vorkommen. Dies ist nicht durch die Natur der Sache bedingt, sondern liegt an der Art der verwendeten Operatoren. Wir werden diese Beschränkung der Allgemeinheit dadurch beseitigen, dass wir Beziehungen zwischen verschiedenen Teilfolgen von Koeffizienten in (5.2) bzw. (5.3) herleiten.

Im vorliegenden Kapitel wird angenommen, dass die Koeffizienten a, b und c der Gleichung (2.2) ganze Funktionen sind.

Als erstes führen wir nun den Bergman-Operator 1. Art in einer für Koeffizientenprobleme geeigneten Weise ein.

Definition 3. Ein Operator

$$(5.4)\quad u(z,z^*)=p(g)\equiv H(z,z^*)\left[g(z)+\sum_{n=1}^{\infty} q_n(z,z^*)\int_0^z\int_0^{z_1}\cdots\int_0^{z_{n-1}} g\,dz_n\ldots dz_1\right],$$

wobei

$$(5.5)\qquad H=\exp\left[-\int_0^{z^*} a(z,t)\,dt\right]$$

ist und die Funktionen $q_n(z,z^*)$ die Eigenschaft

$$(5.6)\qquad q_n(z,0)=0,\quad (n=1,2,\ldots),$$

besitzen, heisst ein *Bergman-Operator 1. Art*. Hierbei ist $g(z)$ eine im Nullpunkt reguläre analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen $z=x+iy$; diese Funktion heisst die *p-Zugeordnete* der Lösung $u(z,z^*)$ der partiellen Differentialgleichung (2.2).

Die Funktionen q_n hängen nicht von der Wahl von g ab und sind, da a, b, und c ganze Funktionen sind, ganze Funktionen. Vgl. [4], [6].

Jede Lösung $u(z,z^*)$ einer Gleichung (2.2), die in einem, den Nullpunkt enthaltenden Gebiet B des zz^*-Raumes regulär ist, lässt sich in B in der Form (5.4) darstellen.

Weiterhin gilt der wichtige

Satz 12 (Bergman [7]). *Ist die* p-*Zugeordnete* g(z) *einer Lösung* u(z, z*) *einer Gleichung* (2.2), *deren Koeffizienten ganze Funktionen sind, in einem einfachzusammenhängenden und den Punkt* $z=0$ *enthaltenden Gebiete* G *regulär, so ist* u *in dem Gebiet* $B=G\times(|z^*|<\infty)$ *regulär.*

Durch Teilintegration findet man, dass (5.4) auch in der Form

$$(5.4')\qquad u=H\left[g+\sum_{n=1}^{\infty}(1/\Gamma(n))\,q_n\int_0^z(z-t)^{n-1}g(t)\,dt\right]$$

geschrieben werden kann.

Für die reelle Lösung $U(z,z^*)$ folgt aus (5.4) die Darstellung

$$(5.7)\qquad U(z,z^*)=[p(g)+\bar{p}(\bar{g})]/2$$

mit

$$(5.8)\quad \bar{p}(\bar{z})=\bar{H}(z^*,z)\left[\bar{g}(z^*)+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{q}_n(z^*,z)\int_0^{z^*}\int_0^{z_1}\cdots\int_0^{z_{n-1}}\bar{g}(z_n)\,dz_n\ldots dz_1\right]$$

und

$$\bar{H}(z^*, z) = \exp\left[-\int_0^z \bar{a}(z^*, t)\, dt\right]. \tag{5.9}$$

Wir wenden uns nun dem Problem der Bestimmung der Natur und Lage der Singularitäten komplexer und reeller Lösungen der Gleichung (2.2) mit ganzen Koeffizienten. Gleichzeitig betrachten wir die Frage der Darstellbarkeit dieser Lösungen durch partikuläre Lösungen, die regulär sind oder nur sehr einfache Singularitäten aufweisen. Diese Lösungen wollen wir als Elementarlösungen bezeichnen und folgendermassen definieren:

Definition 4. Eine in der Form (5.4) dargestellte Lösung der Gleichung (2.2) heisse eine *Elementarlösung*, wenn ihre p-Zugeordnete von der Form

$$g = k_s z^s \text{ oder } g = k_{-s}(z-\alpha)^{-s}, \alpha \neq 0, \quad (z, s = 0, 1, \ldots), \tag{5.10}$$

ist. (k_s, k_{-s} und α sind Konstanten).

Die Darstellung einer Lösung durch Elementarlösungen ist von Interesse, weil sich die in (5.4) vorkommenden Integrale im Falle einer Elementarlösung durch endlich viele elementare Fuktionen ausdrücken lassen und man auf diese Weise genaue Kenntnis über die Singularitäten dieser Lösung erhält.

Aus (5.4) und (5.7) folgt unmittelbar, dass sich jede im Nullpunkt reguläre reelle oder komplexe Lösung der Gleichung (2.2) als unendliche Reihe von Elementarlösungen darstellen lässt.

Wir betrachten zunächst reelle Lösungen.

Satz 13. *Eine im Nullpunkt reguläre Lösung* $U(z, z^*)$ (*vgl.* (2.6), *der partiellen Differentialgleichung* (2.2) *besitzt genau dann höchstens endlich viele Singularitätenebenen* (*diese sind Polebenen der Ordnung* $p \leqq q$ *und — für* $z^* \neq 0$ *— zugleich logarithmische Verzweigungsebenen*), *wenn die Determinanten*

$$D_r = |D_{r1} \quad D_{r2} \ldots D_{r,q+1}|, \quad (r = 0, 1, \ldots), \tag{5.11}$$

mit den Spaltenvektoren

$$D_{rj} = (U_{r+j-1,0} \quad U_{r+j,0} \ldots U_{r+j+q-1,0}), \quad (j = 1, 2, \ldots, q+1), \tag{5.12}$$

bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen verschwinden; hierbei sind $U_{m,n}$ *die Koeffizienten der Darstellung* (5.3) *der Lösung* U.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf einen Satz von Borel [31], und die Aussage über die Natur der Singularitäten ergibt sich durch Auswertung der im Operator 1. Art vorkommenden mehrfachen Integrale. Aus dem Beweis ergibt sich ferner:

Die in Satz 13 angegebenen Voraussetzungen sind zugleich notwendig und hinreichend dafür, dass die Darstellung von U durch Elementarlösungen höchstens endlich viele Terme mit einer Singularität aufweist.

Für komplexe Lösungen u gilt ein analoger Satz.

Hinsichtlich der Darstellbarkeit einer reellen Lösung durch endlich viele Elementarlösungen gilt der

Satz 14. *Eine im Nullpunkt reguläre Lösung* $U(z, z^*)$ *von* (2.2) *kann genau dann durch eine Summe von endlich vielen Elementarlösungen dargestellt werden, wenn die Determinanten*

$$E_r = |E_{r1} \quad E_{r2} \dots E_{r,\,q+1}|, \quad (r = 0, 1, \dots), \tag{5.13}$$

bis auf endlich viele Ausnahmen verschwinden; diese Determinanten haben die Spaltenvektoren

$$E_{rj} = (V_{r+j-1} \quad V_{r+j} \dots V_{r+j+q-1}), \quad (j = 1, 2, \dots, q+1), \tag{5.14}$$

wobei

$$V_m = 2U_{m0} - U_{00}H_m \tag{5.15}$$

und

$$H_m = (-1)^m |H_{m1} \quad H_{m2} \dots H_{mm}| \tag{5.16}$$

eine Determinante m*-ter Ordnung mit den Spaltenvektoren*

$$H_{mj} = (c_{j-1} \quad c_{j-2} \dots c_0 \; 1 \; 0 \; 0 \dots), \quad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{5.17}$$

$$c_0 = \bar{a}_{00}, \; c_r = (j-1)(j-2)\dots(j-r)\,\bar{a}_{0r}, \quad (r = 1, 2, \dots),$$

ist und

$$a(z, z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^m z^{*n} \tag{5.18}$$

gesetzt wurde.

Die Mittag-Leffler-Darstellung meromorpher Funktionen lässt sich in der folgenden Weise auf Lösungen partieller Differentialgleichungen übertragen:

Satz 15. *Es sei* $u(z, z^*)$ *eine im Nullpunkt reguläre Lösung der Gleichung* (2.2) *mit einer meromorphen Zugeordneten, die lauter einfache Pole, etwa in den Punkten* $z = a_r, (r = 1, 2, \dots), |a_1| \leqq |a_2| \leqq \dots$, *besitzt, und es sei* $f_r = c_r/(z - a_r)$ *der zum Pol bei* $z = a_r$ *gehörige meromorphe Teil. Die Reihe*

$$S(k) = \sum_{r=1}^{\infty} |c_r| \, |a_r|^{-k-2}, \quad (k \geqq 0), \tag{5.19}$$

konvergiere, und es sei $k = m$ *die kleinste ganze Zahl, für die noch Konvergenz besteht. Dann lässt sich* u *in der Form*

$$u(z, z^*) = \sum_{p=0}^{\infty} F_p(z, z^*) + \sum_{p=0}^{\infty} [G_p(z, z^*) - \sum_{r=0}^{m} H_{pr}(z, z^*)] \tag{5.20}$$

darstellen. Hierbei sind F_p *und* H_{pr} *reguläre Elementarlösungen, und* G_p *ist eine Elementarlösung mit genau einer Singularitätenebene. Diese Dar-*

stellung gilt im zz-Raum, der von den Punkten* $z = 2a_r$, $(r = 1,2,\ldots,)$, *aus durch Verzweigungsschnitte nach unendlich aufgeschnitten ist.*

Schliesslich erwähnen wir noch die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von R. Beke [33]:

Satz 16. *Die Koeffizienten* u_{mn} *der Darstellung* (5.2) *einer im Nullpunkt regulären Lösung* $u(z, z^*)$ *der partiellen Differentialgleichung* (2.2) *seien derart, dass für einen gewissen konstanten Wert* $z^* = z_0^*$ *höchstens endlich viele der Determinanten*

$$Q_m = |Q_{m1}\ Q_{m2}\ldots Q_{mm}|, \quad (m = 1,2,\ldots,), \tag{5.21}$$

mit den Spaltenvektoren

$$Q_{mj} = \Big[(j-1)!\sum_{n=0}^{\infty} u_{j-1,n} z_0^{*n},\quad j!\sum_{n=0}^{\infty} u_{jn} z_0^{*n},\ldots,(j+m-2)!\times \times \sum_{n=0}^{\infty} u_{j+m-2,n} z_0^{*n}\Big]$$

von null verschieden sind. Dann genügt $u(z, z^*)$, *als Funktion von* z *für* $z^* = z_0^*$ *betrachtet, einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung, deren Koeffizienten nur von* z_0^*, *aber nicht von* z *abhängen.*

6. Verallgemeinerte Betrachtung von Koeffizientenproblemen

Es war schon darauf hingewiesen worden, dass die Verwendung von Operatoren im Zusammenhang mit Koeffizientenproblemen gewisse Einschränkungen mit sich bringt, die nicht in der Natur der Sache liegen. In der Tat zeigen die vorstehenden Sätze, dass immer nur gewisse Koeffizienten der betrachteten Potenzreihenentwicklungen einer Lösung in die Voraussetzungen eingehen. Es sind dies die Koeffizienten u_{m0} bzw. U_{m0}, $(m = 0,1,\ldots,)$, der Darstellungen (5.2) bzw. (5.3).

Die folgende Betrachtung wird zeigen, durch welche Methoden und in welchem Umfange man auch von anderen Teilfolgen $\{u_{mn}\}$ bzw. $\{U_{mn}\}$, $(n > 0$ und fest), der genannten Koeffizienten auf die Eigenschaften der zugehörigen Lösungen schliessen kann. Zu diesem Zwecke werden wir nun Beziehungen zwischen den genannten Folgen herleiten.

Wir beginnen mit komplexen Lösungen. Die Übertragung der Ergebnisse auf reelle Lösungen ist dann relativ einfach.

Wir führen die Funktionen

$$u_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} z^m, \quad (n = 1,2,\ldots), \tag{6.1}$$

ein. Die Koeffizienten dieser Reihe bilden gerade eine der genannten Folgen, und die gewünschten Beziehungen ergeben sich aus den Beziehungen zwischen $u_n(z)$ und

$$u_0(z) = u(z,0) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{m0}\, z^m. \tag{6.2}$$

Zunächst geben wir einen Überblick über die wesentlichsten Gesichtspunkte der nachfolgenden Untersuchug.

Wir werden die folgende grundlegende Tatsache beweisen, die die ganze Situation kennzeichnet:

Während jeder Punkt, in dem $u_n(z)$ singulär ist, auch ein singulärer Punkt von $u_0(z)$ sein muss, kann umgekehrt ein singulärer Punkt von $u_0(z)$ einem regulären Punkt von $u_n(z)$ entsprechen.

Demnach sind die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Die Funktion $u_n(z)$ ist singulär in einem Punkte $z=a$, in dem $u_0(z)$ singulär ist.

II. Die Funktion $u_n(z)$ ist regulär in einem singulären Punkte der Funktion $u_0(z)$.

Wir werden Bedingungen angeben, unter denen einer der beiden Fälle ausgeschlossen wird.

Die Beziehungen zwischen den Singularitäten der Funktionen $u_0(z)$ und $u_n(z)$ bilden einen wesentlichen Teil unserer Untersuchungen, z. B. im Zusammenhang des Regularitätsgebietes der Lösungen $u(z,z^*)$ der Gleichung (2.2). Mit Hilfe dieser Beziehungen werden wir u.a. ein wichtiges Ergebnis von Bergman (Satz 12 der vorliegenden Arbeit) verallgemeinen.

Im Fall II ergeben sich die folgenden beiden Möglichkeiten, die wir nacheinander betrachten werden:

A. Die Funktion $u_n(z)$, ($n > 0$ und fest), ist für jede Wahl der Funktion $u_0(z)$, d.h. für jede beliebige im Nullpunkt reguläre Lösung einer gegebenen Gleichung (2.2), eine ganze Funktion.

B. Gewisse singuläre Stellen einer speziell gewählten, d.h. einer ganz bestimmten im Nullpunkt regulären Lösung u entsprechenden Funktion u_0, sind reguläre Stellen der Funktion u_n, ($n > 0$ und fest).

Alle Beziehungen zwischen u_0 und u_n werden sich aus einem System (S_n) gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen ergeben, das die Funktionen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ und deren Ableitungen enthält. Dieses System kann auf zwei verschiedene Weisen untersucht werden nämlich:

1. Die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ und deren Ableitungen lassen sich im allgemeinen aus dem System (S_n) eliminieren, und man kann die sich so ergebende einzelne Differentialgleichung betrachen.

2. Man kann das System (S_n) in seiner ursprünglichen Form untersuchen.

Der erste dieser beiden Wege führt auf eine lineare Differentialgleichung der Ordnung $k \leqq n$, die die allein interessierenden Funktionen u_0 und u_n, ($n > 0$ und fest), und deren Ableitungen enthält. Dieses Methode ist jedoch nicht vollkommen befriedigend, da sich meistens relativ komplizierte Bedingungen ergeben, unter denen gewisse grund-

legende Relationen zwischen u_0 und u_n gültig sind. Ausserdem treten Ausnahmefälle auf, bei denen die Methode nicht zum Ziel führt.

Es ist deshalb wünschenswert, Klassen partieller Differentialgleichungen (2.2) zu bestimmen, für die sich einfache und übersichtliche Beziehungen zwischen u_0 und u_n angeben lassen. Dies kann auf dem an zweiter Stelle genannten Wege erreicht werden.

Den Ausgangspunkt bildet die Gleichung (2.2), deren Koeffizienten wir wiederum als ganze Funktionen voraussetzen. Die Entwicklung (5.2) einer komplexen Lösung und die Potenzreihenentwicklungen der Koeffizienten im Nullpunkt schreiben wir in der Form:

$$(6.3)\qquad \begin{cases} u(z,z^*)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)\,z^{*n}, \quad a(z,z^*)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\,z^{*n}, \\ b(z,z^*)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z)\,z^{*n}, \quad c(z,z^*)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\,z^{*n}, \end{cases}$$

mit u_n gemäss (6.1) und

$$(6.4)\qquad a_n=\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}\,z^m, \quad b_n=\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}\,z^m, \quad c_n=\sum_{m=0}^{\infty} c_{mn}\,z^m.$$

Diese Darstellungen werden (2.2) eingesetzt, und der Koeffizient jeder vorkommenden Potenz von z^* wird gleich null gesetzt. Dies führt auf das folgende System (S_n) gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen:

$$(6.5)\qquad nu' + b_0 u_n = G_n/n, \quad (n = 1,2,\ldots),$$

mit

$$G_n = -\left\{ a_0 u'_{n-1} + c_0 u_{n-1} + \sum_{r=0}^{n-2} \left[a_{n-r-1} u'_r + (r+1)\, b_{n-r-1}\, u_{r+1} + c_{n-r-1} u_r \right] \right\}.$$

Über das Verhalten von u_0 in singulären Punkten von u_n gilt nun der einfache grundlegende

Satz 17. *Es sei* $\mathrm{u}(z,z^*)$ *eine beliebige im Nullpunkt reguläre Lösung der Gleichung* (2.2), *und die Koeffizienten dieser Gleichung seien ganze Funktionen. Ist dann eine beliebige Funktion* u_n, $(\mathrm{n}>0)$, *in der Entwicklung* (6.3) *von* u *in einem Punkte* $z = z_0$ *singulär, so gilt dies auch für die Funktion* u_0 *in* (6.3). *Ist also* u_0 *in einem Gebiete* B *regulär, so trifft dies auch für alle Funktionen* u_n, $(\mathrm{n} = 1,2,\ldots)$, *zu.*

Beweis. Wir betrachten (6.5). Mit a, b und c sind auch die Funktionen a_p, b_p und c_p in (6.5) ganze Funktionen. Da nun u_n für $z = z_0$ singulär ist, muss demnach wenigstens eine der Funktionen u_s, $(s<n)$, in (6.5) an dieser Stelle singulär sein. Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses ergibt sich die Behauptung.

Für jede der genannten Lösungen u ist also u_0 an einer singulären Stelle von u_n, $(n>0)$, singulär, aber din Funktionen u_p, $(1 \leqq p \leqq n-1)$,

können dort unter Umständen regulär sein. Beispiele hierzu lassen sich leicht angeben.

Bezeichnet $s_B(n)$ die Anzahl der singulären Punkte von u_n in einem Gebiet B, so ist $s_B(n) \leqq s_B(0)$ für alle n, aber s_B braucht keineswegs eine monotone Funktion von n zu sein.

Aus (6.5) ergibt sich weiterhin in einfacher Weise der

Hilfssatz 18. *Die Koeffizienten der Gleichung* (2.2) *seien ganze Funktionen. In den zugehörigen Entwicklungen im Nullpunkt sein keine konstanten oder nur von* z *abhängigen Glieder enthalten, und* z^{*s} *sei die niedrigste in diesen Entwicklungen vorkommende Potenz von* z^*. *Dann sind die einer beliebigen im Nullpunkt regulären Lösung entsprechenden Funktionen* $u_1, \ldots, u_s$ *ganz.*

Bezüglich singulärer Punkte von u_0, in denen u_n regulär ist, gilt zunächst die folgende Bemerkung:

Ist u_n, ($n > 0$ und fest), für jede im Nullpunkt reguläre Lösung $u(z, z^*)$ der Gleichung (2.2) eine ganze Funktion, so sind die Funktionen u_0 und u_n offenbar völlig voneinander unabhängig. Ferner ergibt sich aus (6.5):

Damit für jede der genannten Lösungen eine Anzahl aufeinanderfolgender Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ von u_0 unabhängig sind, muss $a_p(z) \equiv 0$, $c_p(z) \equiv 0$, ($p = 0, 1, \ldots, n-1$), sein. Sollen diese Funktionen ausserdem voneinander unabhängig sein, so muss zusätzlich $b_r(z) \equiv 0$, ($r = 1, 2, \ldots, n-1$), gelten. Die allgemeinste Gleichung (2.2), bei der die zuletzt genannte Unabhängigkeit für alle $n = 0, 1, \ldots$ zutrifft, ist demnach $u_{zz^*} + b(z)\, u_{z^*} = 0$, also eine gewöhnliche Differentialgleichung für u_{z^*}.

Die einleitend genannte Transformation des Systems (S_n) in eine einzelne Differentialgleichung für u_0, u_n und deren Ableitungen lässt sich in der folgenden Weise durchführen:

Das System (S_n) wird als ein System von n Gleichungen in den $2n-1$ „Unbekannten": $1, u_1, u_1', \ldots, u_{n-1}, u_{n-1}'$ aufgefasst, wobei der „Unbekannten" 1 alle diejenigen Glieder entsprechen, die nicht eliminiert werden sollen, also die Glieder, die u_0, u_n und die Ableitungen dieser Funktionen enthalten. Differenziert man jede Gleichung von (S_n) einmal, so ergeben sich n weitere Gleichungen, und zugleich treten die $n-1$ zusätzlichen „Unbekannten": $u_1'', u_2'', \ldots, u_{n-1}''$ auf. Differenziert man also jede Gleichung von (S_n) $(n-1)$-mal, so erhält man insgesamt ein erweitertes Gleichungssystem (S_n^*), das aus n^2 Gleichungen in ebensovielen „Unbekannten" besteht. Da dieses System homogener Gleichungen eine nichttriviale Lösung besitzt, so muss die zugehörige Determinante D_n der Koeffizienten verschwinden. Die Gleichung $D_n = 0$ ist also die gesuchte lineare Differentialgleichung, die u_0 mit u_n, ($n > 0$), verknüpft.

Ausnahmefälle, in denen die Eliminationsmethode nicht oder nicht direkt zum Ziele führt, sind die folgenden:

a) Es kann sein, dass gar keine Beziehungen zwischen u_0 und u_n bestehen. Dann kann man natürlich auch auf keinem anderen Wege ein Ergebnis der gewünschten Art erzielen.

b) Es kann vorkommen, dass zwar eine Beziehung zwischen u_0 und u_n besteht, dass aber die Determinante D_n identisch verschwindet. Dann hat man ein System von weniger Gleichungen, das sich aus (S_n^*) ergibt, zu betrachten. Die Methode bleibt im Prinzip dieselbe.

Auf die Nachteile der Eliminationsmethode wurde bereits hingewiesen.

Wir betrachten hier nur den Fall einer nicht identisch verschwindenden Determinante D_n. Indem wir D_n nach der ersten Spalte entwickeln, erhalten wir die Gleichung $D_n = 0$ in der Form

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} E_{pq} D_{pq} + \sum_{q=1}^{n} F_q D_{nq} = 0, \tag{6.6}$$

wobei D_{pq} die Adjunkte des Elementes in der ersten Spalte von D_n ist, das der Gleichung $[p,q]$ entspricht, und $[p,q]$ die Gleichung bezeichnet, die man erhält, wenn man die Gleichung von (S_n), in der u_p auf der linken Seite vorkommt, $(q-1)$-mal differenziert. Die Gleichung (6.6) lässt sich auch in der Form

$$\sum_{k=0}^{n} [\mathfrak{J}_k u_0^{(k)} + L_k u_n^{(k)}] = 0 \tag{6.7}$$

schreiben. Die Koeffizienten $\mathfrak{J}_k$ und L_k sind Funktionen von $a_0, \ldots, a_{n-1}$, $b_0, \ldots, b_{n-1}$, $c_0, \ldots, c_{n-1}$ und den zugehörigen Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten einschliesslich und demzufolge auf Grund unserer Voraussetzung, dass (2.2) ganze Funktionen als Koeffizienten hat, ebenfalls ganze Funktionen. Explizite Ausdrücke für $\mathfrak{J}_k$ und L_k lassen sich verhältnismässig einfach gewinnen, worauf hier verzichtet werden soll.

Verschwinden sämtliche L_k identisch, so muss dies auch für sämtliche $\mathfrak{J}_k$ gelten, denn anderenfalls wäre u_0 stets dieselbe Funktion, welche Lösung u einer gegebenen Gleichung (2.2) man auch betrachtet, d. h. welche Form u_n auch besitzt. In diesem Falle ist also D_n identisch null, und es liegt eine der eingangs genannten Ausnahmen vor.

Verschwinden sämtliche $\mathfrak{J}_k$ identisch, ohne dass dies auch für sämtliche L_k gilt, so reduziert sich (6.7) auf eine Differentialgleichung, die u_0 gar nicht enthält und deren allgemeine Lösung damit stets dieselbe, nicht von der Form von u_0 abhängende Gestalt besitzt. Dies entspricht offenbar dem vorn genannten Ausnahmefall a).

Da wir von diesen Ausnahmefällen absehen, so können wir also annehmen, dass wenigstens eine der Funktionen $\mathfrak{J}_k$ und wenigstens eine der Funktionen L_k nicht identisch verschwindet. Ist $k = m$ der grösste Wert, für den $\mathfrak{J}_k$ nicht identisch verschwindet, so hat (6.7) die Ordnung m und die Form

$$(6.8) \qquad \sum_{k=0}^{m} (\mathfrak{f}_k/\mathfrak{f}_m)\, u_0^{(k)} + H(u_n, u_n', \ldots, u_n^{(n)}) = 0.$$

Auf Grund eines bekannten Satzes erhalten wir damit den

Satz 19. *Es sei* $u(z, z^*)$ *eine im Nullpunkt reguläre Lösung einer partiellen Differentialgleichung* (2.2), *deren Funktionen* a, b, c *ganz sind. Für eine zu* $u(z, z^*)$ *gehörige Funktion* $u_n(z)$, $(n > 0$, *fest*$)$, *sei* $J_m \not\equiv 0$ *für ein* $m \geqq 0$ *sowie* $J_k \equiv 0$ *für alle* $k > m$. *Dann ist die zu* $u(z, z^*)$ *gehörige Funktion* $u_0(z)$ *in jedem Punkte regulär, in dem* $u_n(z)$ *regulär und* J_m *nicht null ist.*

Mit Satz 12 folgt aus Satz 19 der

Satz 20. *Es sei* $u(z, z^*)$ *eine im Nullpunkt reguläre Lösung der Gleichung* (2.2), *deren Koeffizienten ganze Funktionen sind. Für ein* $n > 0$ *sei die zugehörige Funktion* $u_n(z)$ *in einem einfachzusammenhängenden Gebiet* G *regulär, das den Nullpunkt enthält, und es sei* $J_m \not\equiv 0$ *für ein* $m \geqq 0$ *sowie* $J_k \equiv 0$ *für alle* $k > m$. *Dann ist* $u(z, z^*)$ *in dem Gebiet*

$$B = (G - \bigcup_{a=1,2,\ldots} a_a) \times (|z^*| < \infty)$$

regulär, wobei $z = a_1, a_2, \ldots$ *die Nullstellen von* J_m *in* G *bezeichnet.*

Sätze, die sich mit Hilfe der Eliminationsmethode ergeben, enthalten meist relativ komplizierte Voraussetzungen. Daher ist es wünschenswert, andere Verfahren zu entwickeln und Klassen praktisch wichtiger Differentialgleichungen (2.2) zu bestimmen, bei denen die Beziehungen zwischen den zu einer Lösung gehörenden Funktionen u_0 und u_n von einfacheren Voraussetzungen abhängen. Dies lässt sich tun, indem man das Differentialgleichungssystem (S_n) in seiner ursprünglichen Form betrachtet. Auf diese Weise kann man z.B. den folgenden Satz beweisen:

Satz 21. *Es sei* $u(z, z^*)$ *eine im Nullpunkt reguläre Lösung einer partiellen Differentialgleichung* (2.2), *deren Koeffizienten ganze Funktionen sind. Die* p*-Zugeordnete* $g(z)$ *dieser Lösung besitze in einem Punkte* $z = z_0 (\neq 0)$ *einen Pol der Ordnung* $r > 1$. *Gilt dann*

$$p_s(z_0) \neq 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

mit

$$p_1 = a_0, \; p_{n+1} = a_n - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s(z)}{n-s}\, p_{n-s}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

so ist $u_n(z)$ *im Punkte* $z = z_0$ *singulär und besteht aus einer Summe von Gliedern, von denen eines im Punkte* $z = z_0$ *einen Pol* r*-ter Ordnung besitzt, während die übrigen Glieder dort Pole niedrigerer Ordnung oder logarithmische Singularitäten haben können.*

Der Beweis dieses Satzes erfolgt am besten induktiv.

In dem Fall, dass die Koeffizienten einer Gleichung (2.2) nur von einer Veränderlichen abhängen, kann man einfachere Ergebnisse erzielen. Zum Beispiel gilt der folgende

Satz 22. *Die Koeffizienten der Gleichung*

$$u_{zz^*} + a(z)u_z + b(z)u_{z^*} + c(z)u = 0 \tag{6.9}$$

seien ganze Funktionen, und $a(z)$ *besitze in einem einfachzusammenhängenden Gebiet* G, *das den Nullpunkt enthält, keine Nullstellen.* $u(z, z^*)$ *sei eine beliebige im Nullpunkt reguläre Lösung, für die eine der zugehörigen Funktionen* $u_n(z), (n > 0$ *und fest), in* G *regulär ist. Dann ist* $u(z, z^*)$ *in dem Gebiete* $B = G \times (|z^*| < \infty)$ *regulär.*

Beim Beweis dieses Satzes wird u.a. von Satz 12 Gebrauch gemacht.

Die vorstehenden Ergebnisse betreffen komplexe Lösungen, lassen sich aber ohne Mühe auf reelle Lösungen übertragen. Es gilt nämlich der folgende

Satz 23. $U(z, \bar{z})$ *und* $u(z, \bar{z})$ *seien zwei einander gemäss* (2.4) *zugeordnete im Nullpunkt reguläre Lösungen einer partiellen Differentialgleichung* (2.2), *deren Koeffizienten ganze Funktionen sind, und* (5.3) *bzw.* (5.2) *seien die Potenzreihendarstellungen dieser Lösungen. Dann haben die beiden einem und demselben Wert von* n *entsprechenden zugehörigen Funktionen*

$$U_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} U_{mn} z^m, \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{6.10}$$

und $u_n(z)$ (*vgl.* (6.4)) *jeweils dieselben Singularitäten.*

Beweis. Wir schreiben die genannten Entwicklungen der Lösungen und die Reihendarstellungen der Koeffizienten der Gleichung (2.2) in der Form

$$u(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{u}_m(\bar{z}) z^m, \qquad a(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m(\bar{z}) z^m,$$

$$b(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{b}_m(\bar{z}) z^m, \qquad c(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}_m(\bar{z}) z^m,$$

mit

$$\tilde{u}_m(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \bar{z}^n, \qquad \tilde{a}_m(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \bar{z}^n,$$

$$\tilde{b}_m(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} \bar{z}^n, \qquad \tilde{c}_m(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \bar{z}^n.$$

Durch Einsetzen dieser Darstellungen in (2.2) ergibt sich in ähnlicher Weise wie vorn das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\tilde{u}'_m + \tilde{a}_0 \tilde{u}_m = \tilde{G}_m / m, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Hierbei ist

$$\tilde{G}_m = -\left\{\tilde{b}_0 \tilde{u}'_{m-1} + \tilde{c}_0 \tilde{u}_{m-1} + \sum_{r=0}^{m-2}\left[(r+1)\,\tilde{a}_{m-r-1}\tilde{u}_{r-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tilde{b}_{m-r-1}\tilde{u}'_r + \tilde{c}_{m-r-1}\tilde{u}_r\right]\right\}$$

wobei der Strich die Ableitung nach $\bar{z}$ bezeichnet. Es ist

$$\tilde{u}_0(\bar{z}) = u(0,\bar{z}) = g(0)\exp\left[-\int_0^{\bar{z}} a(0,t)\,dt\right].$$

Mit $a(\bar{z})$ ist auch $\tilde{G}_1 = -(\tilde{b}_0\tilde{u}'_0 + \tilde{c}_0\tilde{u}_0)$ eine ganze Funktion und damit gilt dies auch für die Lösung $\tilde{u}_1(\bar{z})$ der obigen gewöhnlichen Differentialgleichung die $m = 1$ entspricht. Wir nehmen nun an, dass die Funktionen $\tilde{u}_k(\bar{z})$ für alle $k \leqq m-1, (m \geqq 2$ und beliebig), ganze Funktionen sind, und zeigen, dass dann auch $\tilde{u}_m(\bar{z})$ eine ganze Funktion ist. Aus der genannten Annahme und der Voraussetzung, dass die Koeffizienten der Gleichung (2.2 ganze Funktionen sind, folgt, dass $\tilde{G}_m(\bar{z})$ eine ganze Funktion ist, und dasselbe gilt dann auch für die Lösung $\tilde{u}_m(\bar{z})$ der zugehörigen Differentialgleichung. Weiterhin ist in (5.2) und (5.3)

$$U_{mn} = (u_{mn} + \bar{u}_{nm})/2, \quad (n, m = 0, 1, \ldots).$$

Hieraus folgt

$$U_n = (u_n + \tilde{\bar{u}}_n)/2, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Da $\tilde{\bar{u}}_n$ eine ganze Funktion von z ist, so ergibt sich damit die Behauptung des zu beweisenden Satzes.

Bisher wurde angenommen, dass (2.2) die Koeffizienten ganze Funktionen besitzt. Die Sachlage ändert sich, wenn man zulässt, dass die Koeffizienten Singularitäten in der endlichen Ebene besitzen können, und wir wollen hierzu einige grundsätzliche Bemerkungen machen.

Es wurde gezeigt, dass eine Funktion $u_n(z)$ in einem Gebiet höchstens so viele singuläre Punkte besitzen kann wie die zugehörige Funktion $u_0(z)$, vorausgesetzt, dass die Koeffizienten von (2.2) ganze Funktionen sind. Entfällt diese Voraussetzung, so gilt die genannte Aussage im allgemeinen nicht mehr. Ähnlich ist die Lage bezüglich der Funktionen $u_m(z^*)$. Eine genaue Untersuchung des Problems lässt sich mit Hilfe der Differentialgleichungen (S_n) und der im Beweis des vorstehenden Satzes benutzten Differentialgleichungen anstellen. Man überlegt sich leicht, dass es nicht zulässig ist, das gegenwärtige Problem in zwei Teil-

probleme aufzuspalten und die durch Singularitäten von u_0 verursachten Singularitäten von u_n getrennt von denjenigen zu untersuchen, die von Singularitäten der Koeffizienten der Gleichung (2.2) herrühren. Vielmehr müssen beide Einflüsse auf u_n gleichzeitig betrachtet werden.

Abschliessend sei bemerkt, dass sich die Untersuchungen der letzten beiden Kapitel der vorliegenden Arbeit auch auf lineare partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung und auch auf Systeme von zwei Gleichungen zweiter Ordnung übertragen lassen. Dabei ergeben sich eine Reihe neuer Gesichtspunkte, die zum Teil durch die verwendeten Operatoren und zum Teil durch die Komplizierung der Gleichungen bedingt sind. Wir wollen hierauf jedoch nicht näher eingehen.

Eingegangen am 10 VIII 1961

Technische Hochschule, Graz, Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

1. Whittaker E. T., Math. Ann., 1903, **57**, S. 333–335.
2. Bergman S., Math. Z., 1925, **24**, S. 641—669.
3. — Math. Ann., 1928, **99**, S. 629—659; Ibid., 1929, **101**, S. 534—558.
4. — *Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations*, Erg. Math., Berlin, Springer, (im Druck).
5. — Math., Z., 1930, **32**, S. 386—405.
6. — Rec. Math. (N. S.), 1937, **2**, pp. 1169–1197.
7. — Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **53**, pp. 130–155.
8. — Duke Math. J., 1947, **14**, pp. 349–366.
9. Bergman S., Schiffer M., *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, New York, Academic Press, 1953.
10. — *Properties of Solutions of a System of Partial Differential Equations*, Studies in Math. and Mech. pres. to R. v. Mises, 1954, pp. 79–87.
11. Diaz J. B., Ludford G. S. S., Quart. Appl. Math., 1955, **12**, pp. 422–427.
12. Bers L., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, **36**, pp. 42—47.
13. Bers L., Gelbart A., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **56**, pp. 67—93.
14. Темляков А., Мат. Сб., (Н.С.), 1944, **14**, стр. 133–154
15. Векуа И. Н., Тр. математ. инст., Тбилиси, 1940, **7**, стр. 161—253.
16. Bergman S., ZAMM, 1952, **32**, S. 33—45.
17. — Ibid., 1956, **36**, S. 182–191.
18. v. Mises R., *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*. New York, Academic Press, 1958.
19. Wirtinger W., Math. Ann., 1927, **97**, S. 357—375.
20. Nielsen K., Ramsey B., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, pp. 156—162.
21. Nielsen K., Ibid., 1944, **50**, pp. 195–201.
22. Henrici P., Comm. Math. Helv., 1953, **27**, S. 253—293.
23. Kreyszig E., Arch. Rat. Mech. Analysis, 1957, **1**, S. 46—53.
24. Bieberbach L., *Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen*, Enz. math. Wiss., Bd. **II**, 3. Teil, 1. Hälfte.
25. — *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. **II**, 2. Aufl., Leipzig, B. G. Teubner, 1931.
26. — *Analytische Fortsetzung*, Erg. Math., N. S., 1955, Heft *3*.
27. Bergman S., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, pp. 1—34.
28. Mitchell J., Duke Math. J., 1946, **13**, pp. 87—104.
29. Ingersoll B., Ibid., 1948, **15**, pp. 1045—1056.
30. Netanyahu E., J. Rat. Mech. Analysis, 1954, **3**, pp. 755—761.
31. Borel É., Darboux Bull., (2), 1894, **18**, pp. 22—25.
32. Hurwitz A., Courant R., *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Berlin, Springer, 1922.
33. Beke E., Math. es. term. ert., 1916, **34**, pp. 1–61.
34. Bergman S., Duke Math. J., 1944, **11**, pp. 617—649.
35. Bochner S., Martin W. T., *Several Complex Variables*. Princeton, University Press, 1948.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Резюме)

Рассматриваются интегральные операторы трансформирующие аналитические функции комплексных переменных в решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа двух переменных.

Получается таким образом целый ряд фундаментальных свойств вышеуказанных решений в результате применения общих теорем теории функций комплексных переменных.

В частности, в этой статье рассматриваются особые решения и задача коэффициентов.

ELABORAREA TEORIEI ECUAŢIILOR CU DERIVATE PARŢIALE DE TIP ELIPTIC PE BAZA TEORIEI FUNCŢIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

(Rezumat)

Se consideră operatorii integrali care transformă funcţiile analitice de variabilă complexă în soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale de tip eliptic, în două variabile.

Se obţine pe această cale o vastă serie de proprietăţi fundamentale ale soluţiilor amintite graţie aplicării teoremelor generale din domeniul teoriei funcţiilor de variabilă complexă.

Se studiază, în particular în această lucrare, singularităţile soluţiilor şi problema coeficienţilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. C. 519.3 ; 517.946

A TECHNIQUE OF DYNAMIC PROGRAMMING CONCERNING A NEW CLASS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH „TOTAL DERIVATIVES"

BY

D. MANGERON

1. In some of his previous papers [1] ... [3] the author has developed from different points of view the boundary value problem concerning equations of non elliptic type (1), (4). He has established relations between the characteristic values of the boundary value problem

$$[A(x)u' + \lambda B(x)u]' + \lambda[B(x)u' + C(x)u] = 0 \tag{1}$$

on R, $u = 0$ on the boundary of R, and the minimum values of the functional

$$D(f) = \int_R A(x) f'^2(x)\,dx, \tag{2}$$

subject to the conditions that

$$H(f) = \int_R (2Bff' + Cf^2)\,dx = \pm 1, \tag{3}$$

and $f = 0$ on the boundary of R.

The novel aspects of the theorems lies in the interpretation of R as a $2n$-dimensional rectangular domain and the symbol as designating total differentiation in the sense that

$$u' = \partial^{2n} u/(\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{2n}) \tag{4}$$

(P i c o n e's sense [4]).

In order to simplify we begin here with the boundary value problem

$$\partial^4 u/(\partial x^2 \partial y^2) - \lambda A(x, y) = 0, \quad u\Big|_{FR} = 0, \quad R \equiv \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

that, under light conditions on $A(x,y)$, is equivalent to the problem of determining the relative minima of

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy, \tag{6}$$

subject to the constrains

$$u(0,y) = u(x,0) = u(1,y) = u(x,1) = 0, \tag{7}$$

$$\int_0^1\int_0^1 A(x,y)\,u^2\,dx\,dy = 1, \tag{8}$$

or, conversely, to that of determining the relative maxima of

$$\int_0^1\int_0^1 A(x,y)\,u^2\,dx\,dy, \tag{9}$$

subject to the constrains (7) and

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy = 1. \tag{10}$$

2. In the first approach, following the well known Bellman's formalism in the Calculus of Variations [5], [6], we consider the minimization of

$$\mathcal{J}(x) = \int_{a_1}^1\int_{a_2}^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy, \tag{11}$$

over all u satisfying the conditions

$$\begin{cases} u(a_1,y) = k_1(y),\ u(x,a_2) = k_2(x),\ k_1(a_2) = k_2(a_1) = k, \\ u(x,1) = 0,\ u(1,y) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\int_{a_1}^1\int_{a_2}^1 A(x,y)\,u^2\,dx\,dy = 1. \tag{13}$$

Here the new state variables a_1, a_2 satisfie the conditions

$$0 \leqslant a_1 < 1, \quad 0 \leqslant a_2 < 1. \tag{14}$$

We assume that the function $A(x,y)$ satisfies the constrain

$$0 < b_1 \leqslant A(x, y) \leqslant b_2$$

for all $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ and is continuous over $P = [0, 1] \times [0, 1]$.

Let us set a *functional* [1])

$$f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x)) = \operatorname{Min} \int_{a_1}^{1} \int_{a_2}^{1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 dx\, dy, \tag{15}$$

subject to the constrains (12), (13).

We write, along an extremal,

$$\int_{a_1+s_1}^{1} \int_{a_2+s_2}^{1} A(x, y) u^2\, dx\, dy = \left[\int_{a_1}^{1} \int_{a_2}^{1} - \int_{a_1}^{a_1+s_1} \int_{a_2}^{a_2+s_2} - \int_{a_1}^{a_1+s_1} \int_{a_2+s_2}^{1} - \int_{a_1+s_1}^{1} \int_{a_2}^{a_2+s_2} \right] A(x, y) u^2\, dx\, dy =$$

$$= 1 - s_1 \int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y) k_1^2(y)\, dy - s_2 \int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2) k_2^2(x)\, dx, \tag{16}$$

$$(a_1 + s_1 \leqslant x \leqslant 1;\ a_2 + s_2 \leqslant y \leqslant 1),$$

$$u(a_1+s_1,\ a_2+s_2) = k + s_1 v_1 + s_2 v_2,\ v_1 = \partial u/\partial x \,|_{x=a_1},\ v_2 = \partial u/\partial y \,|_{y=a_2}, \tag{17}$$

$$f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x)) = \int_{a_1+s_1}^{1} \int_{a_2+s_2}^{1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 dx\, dy + s_1 \int_{a_2+s_2}^{1} v_{1y}^2\, dy +$$

$$+ s_2 \int_{a_1+s_1}^{1} v_{2x}^2\, dx,\ v_{1y} = \partial v_1/\partial y \,|_{x=a_1},\ v_{2x} = \partial v_2/\partial x \,|_{y=a_2}, \tag{18}$$

to terms in $o(s_1, s_2)$.

We now make the change of variables

$$u(x, y) = \left[1 - \frac{s_1}{2} \int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y) k_1^2(y)\, dy - \frac{s_2}{2} \int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2) k_2^2(x)\, dx \right] w(x, y), \tag{19}$$

in order to maintain the condition (13). We then have

---

1) Due to a R. Bellman's valuable remark.

$$w(a_1 + s_1,\ a_2 + s_2) = k + s_1 v_1 + s_2 v_2 + \frac{k s_1}{2}\int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y)\, k_1^2(y)\,\mathrm{d}y +$$

$$+ k\frac{s_2}{2}\int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2)\, k_2^2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{20}$$

$$f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x)) = \int_{a_1+s_1}^{1}\int_{a_2+s_2}^{1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \times$$

$$\times\left[1 - \frac{s_1}{2}\int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y)\, k_1^2(y)\,\mathrm{d}y - \frac{s_2}{2}\int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2)\, k_2^2(x)\mathrm{d}x\right] + s_1\int_{a_2+s_2}^{1} v_{1y}^2\,\mathrm{d}y + s_2\int_{a_1+s_1}^{1} v_{2x}^2\,\mathrm{d}x, \tag{21}$$

to terms in $o(s_1, s_2)$.

Combining the above results, we obtain the approximate functional equation[2])

$$f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x)) = \operatorname*{Min}_{v_1,\, v_2}\left\{ s_1\int_{a_2+s_2}^{1} v_{1y}^2\,\mathrm{d}y + s_2\int_{a_1+s_1}^{1} v_{2x}^2\,\mathrm{d}x + \right.$$

$$+\left[1 - \frac{s_1}{2}\int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y)\, k_1^2(y)\mathrm{d}y - \frac{s_2}{2}\int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2)\, k_2^2(x)\,\mathrm{d}x\right] \times$$

$$\times f\left(a_1 + s_1, a_2 + s_2, k + s_1 v_1 + \frac{s_1 k}{2}\int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y)\, k_1^2(y)\,\mathrm{d}y,\right. \tag{22}$$

$$\left.\left. k + s_2 v_2 + \frac{s_2 k}{2}\int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2)\, k_2^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\right\} + o(s_1, s_2).$$

Letting $s_1 \to 0$, $s_2 \to 0$, one obtain the *generalized Bellman's equations* related to his new formalism concerning the classical variational solution of the eigenvalue problem [5], [6]

$$\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2 + \lambda^2\varphi(x)u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

---

[2])More general algorithm developments related to the systematic use of *functionals* beginning with (15) will be subject of another papers [9].

in the form of integro-differential equations with partial derivatives, that approximate solution combined with some very recent Picone's [7] and L. S. Pontrjagin's a. o. [8] results, we suppose to give in one of the next papers.

Received the 7 V 1962

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics II

REFERENCES

1. Mangeron D., Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, s. 4, 1932, **11**, pp. 1-11.
2. — C.r. Ac. Sci., Paris, 1937, **204**, pp. 94-96; Ibid., 1937, **204**, pp. 544-546; Ibid., 1937, **204**, p. 1024.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1949, **4**, pp. 441-445.
4. Picone M., Ann. Sci. Univ. Jassy, I-ière section, 1940, **26**, *I*, pp. 183-232.
5. Bellman R., *Dynamic Programming*, A RAND Corporation Research Study, Princeton University Press, 1957, Chapter **IX.**
6. — *Adaptive Control Processes. A Guided Tour*, A RAND Corporation Research Study, Princeton University Press, 1961, Chapter **VII.**
7. Picone M., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Memorie, Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, 1962, **6**, *2*, pp. 281-339.
8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Б. В., Мищенко Е. Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961.
9. Mangeron D., Croitoru E., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. e nat., s. 8, 1962, **32**, *5*.

ТЕХНИКА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НОВОГО КЛАССА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В „ПОЛНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ"

(Резюме)

В ряде предыдущих работ автора [1]...[3] рассмотрен с различных точек зрения новый класс граничных задач неэллиптического типа (1)...(4).

Один из самых плодотворных путей решения граничных задач рассматриваемого типа, (причем термин „полная производная" принят в смысле М. Пиконе [4]), оказался путь вариационного исчисления, кристаллизованный в целях сокращения записи настоящей заметки в соотношениях (5)...(10).

Рассматривая теперь изучаемые граничные задачи в рамках области программирования — названной динамическим программированием [5],[6]— и исходя из задачи (5),условий (12)...(14) и *функционала* (15), приходим — на основании выведенного соотношения (22) и перехода к пределу при $s_1 \to 0$ и $s_2 \to 0$ — к уравнениям обобщающим уравнения Р. Беллмана динамического программирования, относящимся к классической задаче

$$d^2u/dx^2 + \lambda^2\varphi(x)u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

TEHNICA PROGRAMĂRII DINAMICE ÎN REZOLVAREA UNEI NOI CLASE DE PROBLEME PE CONTUR PENTRU ECUAŢII CU „DERIVATE TOTALE"

(Rezumat)

Într-un şir de lucrări anterioare autorul a studiat din diferite puncte de vedere [1]...[3] o nouă clasă de probleme pe contur de *tip neeliptic* (1)...(4).

Una din cele mai fructuoase căi de abordare a problemelor studiate s-a arătat a fi metoda calculului variațional, cristalizată în text, pentru a fixa ideile, în ecuațiile (5) ... (10).

Încadrînd acum clasa de probleme abordate în domeniul programării dinamice [5], [6], și pornind pentru problema (5) de la condițiile (12) ... (14) și de la *funcționala* (15), se ajunge (pe baza relației stabilite (22), făcînd $s_1 \to 0$ și $s_2 \to 0$) la ecuațiile ce generalizează pe cele ale lui R. Bellman, de programare dinamică relative la clasica problemă

$$d^2 u/dx^2 + \lambda^2 \varphi(x) u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. C. 517.63

ASYMPTOTIC EXPANSIONS AND CONVERGING FACTORS

REMARKS ON A PAPER BY JEFFREYS

BY

R. B. DINGLE

1. Introduction

In a recent paper, Jeffreys [6] shows how a direct estimate may be made of the remainder in the asymtotic expansion of, for instance, integrals of the form

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon z}\varepsilon^m \, d\varepsilon}{(\varepsilon-\varepsilon_0)^{s+1}}.$$

From problems arising in his discussion, he concludes that usual methods of „improving the convergence" of asymptotic expansions must fail when all the terms in the expansion are of the same sign, e.g. when ε_0 is real and positive in (1). This conclusion is certainly correct for most methods of improving the convergence, but not for that developed by the present writer [3], [4]; indeed, reference to this reveals that nearly half the examples showing the success of the method were for expansions of just this type. It therefore seems desirable to supplement Jeffreys'paper by showing explicitly how the difficulties he stresses were circumvented in the writer's method.

2. Poincaré and complete asymptotic expansions

A survey of recent literature shows that there are two distinct interpretations of the meaning of „asymptotic expansion". Many authors retain Poincaré's [8] definition that $\sum_1^\infty a_r / z^{r-1}$ should be taken as the asymptotic expansion of a function $f(z)$ if

$$(2) \qquad \lim_{|z|\to\infty} z^{n-1}\left[f(z) - \sum_1^n a_r / z^{r-1}\right] = 0 \qquad \text{for every } n.$$

Since, however, $f(z)$ could be augmented by functions of (for example) the type $e^{-|z|}$ without affecting the value of $\lim z^{n-1} f(z)$ as $|z| \to \infty$, it is clear that in deriving such a Poincaré asymptotic expansion terms exponentially small in the phase range considered can be dropped or not even found. For example, consider the Fermi-Dirac integral

$$F_p(z) = \frac{1}{p!} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^p \, d\varepsilon}{e^{\varepsilon - z} + 1} = \frac{1}{(p+1)!} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{p+1} e^{\varepsilon - z} \, d\varepsilon}{(e^{\varepsilon - z} + 1)^2} =$$

$$= \frac{z^{p+1}}{(p+1)!} \int_{-\infty}^\infty \frac{(1 + \sigma/z)^{p+1} e^\sigma \, d\sigma}{(e^\sigma + 1)^2} - \frac{e^{-z}}{(p+1)!} \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon^{p+1} e^\varepsilon \, d\varepsilon}{(e^{\varepsilon - z} + 1)^2}. \tag{3}$$

Expanding $(1 + \sigma/z)^{p+1}$ by the binomial theorem and formally integrating term by term, it is easily found that the first term yields

$$2 z^{p+1} \sum_{0,2,4,\ldots}^\infty \frac{t(r)}{(p+1-r)! \, z^r}, \tag{4}$$

where $t(0) = 1/2$ and $t(r) = \sum_1^\infty (-1)^{\mu-1}/\mu^r$. Now (4) is Sommerfeld's [9] well-known Poincaré asymptotic expansion for $F_p(z)$, but it is obvious that terms in general of order e^{-z} have been neglected. It is impossible, therefore, to rely on such a Poincaré expansions for the reconstruction of either the remainder term or the original function.

With the ever-increasing use of such methods as „converging factors" for improving convergence, the phrase „asymptotic expansion" must be interpreted in a strict sense, with all terms retained. For instance, the „complete asymptotic expansion" for the Fermi-Dirac integral is [2]

$$F_p(z) \sim 2 z^{p+1} \sum_{0,2,4,\ldots}^\infty \frac{t(r)}{(p+1-r)! \, z^r} +$$

$$+ \cos \pi p \sum_1^\infty (-1)^{r-1} e^{-rz}/r^{p+1}, \quad |\mathrm{ph}\, z| < \pi. \tag{5}$$

In general, such a „complete asymptotic expansion" of a function $f(z)$ may be defined as an expression containing formal expansion of the type $\sum_1^\infty a_r / z^{r-1}$, which formally exactly obeys — over a given range of ph z — all those relations satisfied by $f(z)$ which do not involve any *numerical* value of z other than $|z| \to \infty$. For instance:

(i) Functional form as $z \to \infty$.

(ii) Functional form as $|z| \to \infty$ for a range of ph z. Watson [12] has shown that expansions of the type considered are complete asymptotic expansions if valid in the Poincaré sense over a *sufficient* range of ph z.

(iii) Differential, difference and integral equations.
(iv) Recurrence relations.
(v) Relations involving parameters other than z.

For example, whereas both the Poincaré expansion (4) and the complete expansion (5) of $F_p(z)$ show the correct behaviour as $z \to \infty$, and satisfy the known relation $(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)\,F_p(z) = F_{p-1}(z)$, the failure of (4) and success of (5) become clear when the parameter p is taken as zero. For (4) then reduces to z, and (5) to $z + \ln(1+\mathrm{e}^{-z})$, and the latter is correct since

$$F_0(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{e}^{\varepsilon - z} + 1} = z + \ln(1 + \mathrm{e}^{-z}). \tag{6}$$

It is only from such complete expansions that remainders can be reconstructed. Complete, rather than Poincaré, expansions are quoted for example in Miller's introduction to *Tables of Weber Parabolic Cylinder Functions* [7, pp. 28—29], and in the present writer's work. It is interesting to recall that the need for such complete expansions was foreseen a long time ago by Goldstein [5] in his investigations on the characteristic numbers of the Mathieu equation.

In Jeffreys' paper, the phrase „asymptotic expansion" has been interpreted throughout in the original Poincaré sense [1]). His conclusion that „if all the terms of an asymptotic expansion are of one sign there are integrals with the same asymptotic expression which will differ greatly in the remainders at the smallest term, and a useful estimation of the remainder is impossible from mere inspection of the series irrespective of the integral that leads to it", is certainly correct for such Poincaré asymptotic expansions, but does not apply to complete asymptotic expansions.

3. Reconstructing the original function from the complete asymptotic expansion

In his paper Jeffreys mentions specifically two difficulties which might prevent the accurate reconstruction of a function from its asymptotic expansion. He illustrates the first by considering the definition of the modified Bessel function $\mathrm{I}(z)$, where $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, as a loop integral, noting that for z real and positive (i.e. $\alpha = 0$) the full contribution comes from one loop, whereas for $\alpha \neq 0$ an additional contribution arises from a second loop, *which is not continued analytically when* α *passes through* 0. However, this lack of continuity in the individual contributions simultaneously appears as a change in form of the appropriate complete asymptotic expansion (a similar case appears in [7, p. 28]), and

[1]) A somewhat confusing instance occurs on p. 91 of his paper, where the quantity he treats as the error in the Poincaré expansion would not be regarded as a true remainder in a complete expansion, but as a much larger contribution (e. g. from one revolution around the single pole at r if $p=1$) *which should have been separated off earlier* — exactly like the second term on the right hand side of equation (5). The true remainder in this sense has in fact got lost in the approximations he makes.

merely shows that there are two distinct ways of applying the writer's method to such expansions. The simplest way is that usually adopted in [3], [4]: in reconstructing a function from a complete expansion in which all terms are of the same sign, the interpretation is made for z real and positive only, and the resultant function then extended into complex plane. In the examples mentioned, this means that the single expansion valid for z real and positive is interpreted in terms of the $\bar{A}$ or $\bar{\Pi}$ basic functions. On the other hand, an alternative way would be to start from either of the complete expansions valid for $\alpha \gtrless 0$, (each now containing two expansions), and make the interpretations for each expansion in terms of the A or Π basic functions. An example in effect illustrating the equivalence of these different approaches already appears on [3, pp. 478–479].

The second difficulty mentioned by Jeffreys is that Borel's method of summation essentially reproduces a series similar to the Taylor series for $(\varepsilon - \varepsilon_0)^{-s-1}$ in the sample integral (1). From this he concludes that it is possible to improve convergence by methods based on analytic continuation of the formal sum of this series only if this sum does not have a singularity where the path meets the circle of convergence — i. e. only if ε_0 is not real and positive. However, [3, part I, § 3] this difficulty was circumvented by expressing the series in terms of geometrical progressions, and taking the sum to infinity of each such progression as

$$\frac{\text{initial term}}{1 - \text{ratio between terms}}.$$

Thus for the simplest asymptotic expansion of this type, when z is real and positive,

$$z\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{Ei}\,(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{(r-1)!}{z^{r-1}} \to \sum_1^{n} \frac{(r-1)!}{z^{r-1}} + \int_0^{\infty} \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{r-1} \mathrm{e}^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon =$$

$$= \sum_1^{n} \frac{(r-1)!}{z^{r-1}} + \frac{1}{z^n}\,\mathrm{P}\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n\,\mathrm{e}^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon}{1-\varepsilon/z}\,, \tag{7}$$

the principal value P being needed here because the function and its complete asymptotic expansion are certainly real when z is real. (As a further check, we may put $n = 0$ and $u = z - \varepsilon$; the right hand side then reduces to $z\mathrm{e}^{-z}\left(\mathrm{P}\int_{-\infty}^{z} u^{-1}\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u\right)$, and this principal value is in fact the definition of $\mathrm{Ei}\,(z)$). More complicated expansions of this type were then, in effect, expressed in terms of this. As indicated in [3], the reason for the widespread success of this approach is that „it is a characteristic feature of at least the better-known asymptotic expansions $\sum_1^{\infty} a_r/z^{r-1}$ that $|a_r|$ behaves roughly like $(r-1)!$ for large r — or at least, the expansions can be written in such a way that this is so". Indeed, the method has

proved of value for many other asymptotic expansions than those treated in the work so far published — e. g. to the expansions for zeros of Bessel functions, Bessel functions of nearly equal order and variable, and characteristic numbers of the Mathieu equation.

4. Remarks on mathematical rigour

Although the theory of complete asymptotic expansions and their exact interpretation, expounded in [3, „Miscellaneous Generalizations"] and the present paper, is as yet neither comprehensive nor rigorous, it is nevertheless already possible to make use of the results in a rigorous way. For given an integral, we may determine (not yet quite rigorously) its complete asymptotic expansion, and then confirm (rigorously) that it formally exactly obeys — over a given range of ph z — those relations satisfied by the original integral which do not involve any *numerical* value of z other than $|z| \to \infty$; we can then interpret (not yet quite rigorously) the later terms of this expansion, and then confirm (rigorously) the correctness of the result by reducing the summation to no terms, thereby leaving an integral representation. Given a differential, difference or integral equation, we may determine (not yet quite rigorously) its complete asymptotic expansion, and then confirm (rigorously) by substitution that it formally exactly satisfies the equation over a given range of ph z; we can then interpret (not yet quite rigorously) the later terms of this expansion, and then confirm (rigorously) the correctness of the result by substitution in the original equation. Thus whereas the *derivations* are not yet quite rigorous, all the *results* are subjected to rigorous confirmation.

(Equivalent results for integrals could of course be found in other ways — e. g. by using terminated Taylor series. (C. f. e. g. Stieltjes [10], Dingle [2, § 4] and Jeffreys [6]). In practice, however, it is usually very difficult to reduce the resultant double or multiple integrals representing remainder terms to tractable forms. In this connection, van der Corput's remarks [11, pp. 3—4] on such direct calculations of even the upper bounds of remainder terms are particularly revealing: „It is often very difficult to find such an upper bound, or the upper bound obtained may be so weak that it is quite useless.... In complicated problems it is advisable to restrict oneself first to pure asymptotic expansions without trying to find a numerical upper bound for the absolute value of the error term.... Moreover, there reigns in pure asymptotics a — partially still unrevealed — harmony which enables us under general conditions to write down almost immediately the required asymptotic expansions...").

Construction of a more comprehensive theory is at present being carried out along the following lines:

a) Reframing methods of deriving asymptotic expansions to yield complete rather than Poincaré expansions.

b) Proving that the different methods of derivation considered under a) all lead to the same complete expansions — i. e. that complete expansions are unique.

c) Showing that on interpretation complete expansions lead back to the original functions.

Consider, for example, the general Laplace-type integral treated by Jeffreys [6], $\int_0^\infty F(\varepsilon)\,e^{-\varepsilon x}\,d\varepsilon$, a form embracing a wide class of integrals and of solutions to differential, difference and integral equations [3]). By a theorem of Darboux [1], the later coefficients in the expansion of $F(\varepsilon)$ in rising powers of ε are determined by the singularity of $F(\varepsilon)$ closest to $\varepsilon = 0$. For the present it will be assumed that this singularity lies at $-\varepsilon_0$ where $\varepsilon_0 > 0$. In estimating the later terms in the asymptotic expansion of the integral, it therefore suffices to write $F(\varepsilon) \sim a/\,1+\varepsilon/\varepsilon_0)^{s+1}$.

Now [4])

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon x}\,d\varepsilon}{(1+\varepsilon/\varepsilon_0)^{s+1}} = \frac{1}{s!\,x}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^s e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon}{1+\varepsilon/\varepsilon_0 x)} = x^{-1}\,\Lambda_s(\varepsilon_0 x).$$

Hence the problems involved in deriving the later terms of such expansions, and conversely in interpreting these later terms, can be reduced to the same problems for the much simpler basic converging factor Λ. It must therefore now be shown that on interpretation the complete expansion of Λ leads back to the original function Λ.

Examination of the derivation of the complete asymptotic expansion of $\Lambda_s(z) = (s!)^{-1}\int_0^\infty (1+\varepsilon/z)^{-1}\,\varepsilon^s e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon$,

$$(9)\qquad \underset{\mathrm{I}}{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^s e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon}{1+\varepsilon/z}} \sim \int_0^\infty \sum_{r=1}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{z}\right)^{r-1}\varepsilon^s e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon \equiv \underset{\mathrm{II}}{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(-z)^{r-1}}}\underset{\mathrm{III}}{\int_0^\infty \varepsilon^{r+s-1}e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+s-1)!}{(-z)^{r-1}},$$

reveals that there are three steps:

---

[3]) Moreover essentially the same arguments apply to functions of other types—e. g. the Fermi-Dirac integral, which can be expressed in terms of

$$\int_0^\infty (1\pm\varepsilon)^{p+1}\,e^{-\varepsilon x}(1+e^{-\varepsilon x})^{-2}\,d\varepsilon.$$

[4]) $$\int_0^\infty \frac{\varepsilon^s e^{-\varepsilon}\,d\varepsilon}{1+\varepsilon/z} = z^{s+1}e^z\int_z^\infty d\zeta\int_0^\infty \sigma^s e^{-(1+\sigma)\zeta}\,d\sigma = s!\,z^{s+1}e^z\int_z^\infty \frac{e^{-\zeta}\,d\zeta}{\zeta^{s+1}} =$$

$$= s!\,z^{s+1}\int_0^\infty \frac{e^{-\nu}\,d\nu}{(z+\nu)^{s+1}} = \frac{s!\,z}{\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon z/\varepsilon_0}\,d\varepsilon}{(1+\varepsilon/\varepsilon_0)^{s+1}}.$$

I. Expansion of $(1+\varepsilon/z)^{-1}$ as $\sum_{r=1}^{\infty}(-\varepsilon/z)^{r-1}$, continued formally into the region $\varepsilon/z > 1$.

II. Interchange in order of integration and summation.

III. Replacement of $\int_0^{\infty}\varepsilon^{r+s-1}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}\varepsilon$ by $(r+s-1)!$.

The resultant expansion for $\Lambda_s(z)$ is complete, because it formally exactly obeys those relations satisfied by $\Lambda_s(z)$ which do not involve any *numerical* value of z other than $|z| \to \infty$, e. g. approach to unity as $z \to \infty$, differential equation $\Lambda_s'' - [1+(s+1)z^{-1}]\Lambda_s' + (s+1)z^{-2}\Lambda_s = 0$, and parametric relation $s\Lambda_s(z) = z[1-\Lambda_{s-1}(z)]$.

Examination of the interpretation of the complete expansion [3, part I, § **2**],

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+s-1)!}{(-z)^{r-1}} \xrightarrow{\text{(i)}} \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(-z)^{r-1}}\int_0^{\infty}\varepsilon^{r+s-1}\mathrm{e}^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon \equiv \int_0^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{z}\right)^{r-1}\varepsilon^{s}\mathrm{e}^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon \equiv \tag{10}$$

$$\text{(ii)} \qquad\qquad \text{(iii)}$$

$$\equiv \int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{s}\mathrm{e}^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon}{1+\varepsilon/z},$$

also reveals three steps:

(i). Replacement of $(r+s-1)!$ by $\int_0^{\infty}\varepsilon^{r+s-1}\mathrm{e}^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon$.

(ii). Interchange in order of summation and integration.

(iii). Interpretation of $\sum_{r=1}^{\infty}(-\varepsilon/z)^{r-1}$ as expansion of $(1+\varepsilon/z)^{-1}$, continued formally into the region $\varepsilon/z > 1$.

These steps (i) ... (iii) are seen to be precisely those of I ... III taken in the reverse order, showing that the process of analytic continuation involved in interpretation precisely retraces the process of analytic continuation involved in the derivation of the complete asymptotic expansion.

Finally, consider the later terms in the asymptotic expansion of $\int_0^{\infty}F(\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\,\mathrm{d}\varepsilon$, ($F(\varepsilon)$ real), when the singularity of $F(\varepsilon)$ closest to $\varepsilon = 0$ lies at ε_0 where $\varepsilon_0 > 0$. In this case it is simplest to restrict attention *during both derivation and interpretation* to real values of x, so that use may be made of the fact that the integral and its complete expansion must then be real. By Darboux' theorem, the integral estimating the later terms is

$$(11) \qquad P\int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon x}\,d\varepsilon}{(1-\varepsilon/\varepsilon_0)^{s+1}} = x^{-1}A_s(-\varepsilon_0 x),\ x \text{ real and positive,}$$

the principal value being needed here to ensure reality. Again the steps involved in the interpretation of the expansion are precisely those involved in its derivation taken in the reverse order, the essential equivalence now being $(1-\varepsilon/z)^{-1} \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon/z)^{r-1}$ continued formally into the region $\varepsilon/z > 1$.

Received the 5 III 1961

University of Western Australia, Nedlands, Australia

REFERENCES

1. Darboux J. G., J. de Math., 1878, **6**, pp. 1–56, 377–416.
2. Dingle R. B., Appl. Sci. Res., 1957, **B 6**, pp. 225–239.
3. — Proc. Roy. Soc., 1958, **A 244**, pp. 456–490.
4. — Ibid., 1959, **A 249**, pp. 270–295.
5. Goldstein S., Proc. Roy. Soc. Edin., 1929, **49**, pp. 210–223.
6. Jeffreys H., Proc. Roy. Soc., 1958, **A 248**, pp. 88–92.
7. Miller J. C. P., *Tables of Weber Parabolic Cylinder Functions*, London, H.M.S.O., 1955.
8. Poincaré H., Acta Math., 1886, **8**, pp. 295–344.
9. Sommerfeld A., Z. Phys., 1928, **47**, S. 1–32.
10. Stieltjes T., Ann. Sci. Éc. norm. sup. Paris, 1886, **3**, pp. 201–258.
11. van der Corput J. G., *Asymptotic Expansions*, **I**, Technical Report, Depart. of Math., Univ. of California.
12. Watson G. N., Phil. Trans., 1911, **A 211**, pp. 279–313.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ФАКТОРЫ СХОДИМОСТИ

Замечания по поводу одной работы Джеффриса

(Резюме)

Излагается связь между результатами, полученными в одной из последних работ Джеффриса [6] и работой автора в этой области [3], [4], относящейся к асимптотическому разложению и факторам сходимости.

DEZVOLTĂRI ASIMPTOTICE ŞI FACTORI DE CONVERGENŢĂ

Observaţii pe marginea unei lucrări a lui Jeffreys

(Rezumat)

Se expune legătura între rezultatele obţinute într-o lucrare recentă a lui Jeffreys [6] şi lucrarea autorului [3], [4], relativă la dezvoltări asimptotice şi factori de convergenţă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 513.154

О ПАРАХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ТЕОРЕМЕ ДЕЗАРГА

Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН

Предположим, что в пространстве расположены два треугольника: ABC (в плоскости σ) и $A'B'C'$ (в плоскости σ').

Теоремой Дезарга называется следующее утверждение (рис.1):

Если прямые AA′, BB′ *и* CC′, *соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку* (S), *то соответственные стороны таких треугольников пересекаются и точки их пересечения лежат на одной прямой (линии пересечения* s_0 *плоскостей треугольников).*

Таким образом в теореме Дезарга речь идет о паре треугольников, расположенных перспективно (прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку). В этом случае, как утверждает теорема, соответственные стороны двух данных треугольников пересекаются, причем, точки пересечения лежат на линии пересечения плоскостей этих треугольников.

Можно, следовательно, рассматривать теорему Дезарга как устанавливающую связь между тремя парами соответственных вершин двух треугольников и тремя парами их соответственных сторон в том случае, когда треугольники имеют перспективное расположение.

Посмотрим не существует ли какая либо закономерность и в общем случае, когда данные треугольники расположены в пространстве *произвольно.*

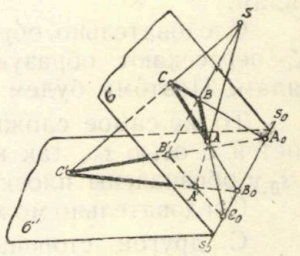


Рис. 1

Другими словами в предлагаемом ниже исследовании два треугольника ABC и $A'B'C'$ являются расположенными произвольно в пространстве (не требуется их перспективного расположения) и ставится вопрос о взаимоотношении 3 прямых AA', BB' и CC' и 3 пар точек пересечения соответственных сторон треугольников с линией пересечения их плоскостей (s_0). Оказывается, что и в этом, самом общем случае расположения треугольников в пространстве, такая зависимость существует и мы переходим к ее установлению (рис. 2).

Докажем следующую *теорему*:

Пусть имеем два произвольно-расположенных в пространстве треугольника ABC *и* A′B′C′. *Тогда прямые* AA′, BB′ *и* CC′, *соединяющие соответственные вершины треугольников, определяют линейчатую поверхность 2-го порядка* (K), *которая пересекает прямую* s_0 *(линию пересечения плоскостей данных треугольников) в двойных точках проективного*

соответствия, устанавливаемого на ней тремя парами точек пересечения ее с соответственными сторонами данных треугольников[1]).

Доказательство (рис. 2.)

Линейчатая поверхность $K(AA', BB', CC')$ определяется 3 прямыми, записанными в скобках. Обозначим через X и Y точки пересечения поверхности K с прямой s_0. Далее обозначим через x, проходящую через точку X образующую поверхности K второй серии, то-есть пересекающую прямые AA', BB' и CC'. Аналогично, образующую второй серии, проходящую через точку Y, обозначим буквой y.

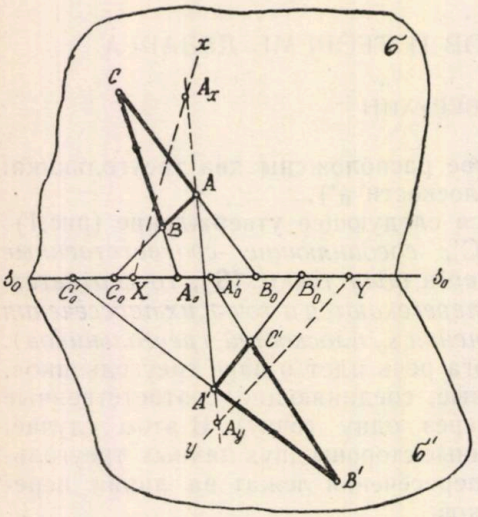


Рис. 2.

Обозначим также через A_0, B_0, C_0 и A_0', B_0', C_0' точки пересечения прямой s_0 соответственно со сторонами BC, AC, AB и $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ данных треугольников.

Рассмотрим теперь линейчатую поверхность 2-го порядка K_C (AA', BB', s_0) определяемую 3 прямыми, записанныьми в скобках.

Тогда линии x и y явятся для этой поверхности образующими второй серии. Обозначим через A_x и A_y точки пересечения соответственно прямых x и y с прямой AA'. Заметим, что для поверхности K_C образующими второй серии будут также прямые AB и $A'B'$.

Как известно, образующие одной серии поверхности 2-го порядка, пересекают две любые ее образующие другой серии по проективным рядам.

Следовательно, образующие AB, $A'B'$, x и y второй серии поверхности K_C пересекают образующие AA' и s_0 первой серии по проективным рядам. Поэтому будем иметь: $(A_x A_y A A') = (XYC_0 C_0')$.

То же самое сложное отношение можно изобразить в пучке плоскостей с осью s_0, так как: $(A_x A_y A A') \overline{\overline{\wedge}} (s_0x, s_0y, \sigma, \sigma')$, где через $s_0 x$ и $s_0 y$ обозначены плоскости, определяемые прямыми (s_0 и x) и (s_0 и y).

Следовательно можем написать: $(XYC_0 C_0') = (s_0 x, s_0 y, \sigma, \sigma') = \text{const}$.

С другой стороны, очевидно, что $(s_0x, s_0y, \sigma, \sigma')$ постоянно для всех трех поверхностей K_C (AA', BB', s_0), K_B (CC', AA', s_0) и K_A (BB', CC', s_0). Поэтому, проведя для двух последних из них те же рассуждения, что и для первой, получим: $(XYC_0 C_0') = (XYB_0 B_0') = (XYA_0 A_0') = (s_0 x, s_0 y, \sigma, \sigma')$.

Отсюда и заключаем, что точки X и Y являются двойными для проективитета $(A_0 A_0', B_0 B_0', C_0 C_0')$, устанавливаемого на прямой s_0 парами соответственных сторон данных треугольников.

[1]) О некоторых специальных случаях расположения треугольников будет сказано ниже.

Теорема доказана[2]).

Примечание. I. Следует, конечно иметь ввиду, что поверхность 2-го порядка может пересекать прямую s_0 в двух действительных, сливающихся или мнимых точках, поэтому проективитет, образованный парами сторон данных треугольников может быть гиперболическим, параболическим и эллиптическим.

II. Заметим, что для случая перспективного расположения треугольников ABC и $A'B'C'$, то есть когда имеет место теорема Дезарга, линейчатая поверхность 2-го порядка K вырождается в конус и остается неопределенной (имеется лишь 3 образующих конуса).

Поэтому точки пересечения X и Y конуса K с прямой s_0 могут быть выбраны произвольно. Это означает, что все точки проективитета на прямой s_0 двойные и последений обращается в тождественное преобразование, то есть, в частности, должны иметь:

$$A_0 \equiv A_0', \quad B_0 \equiv B_0', \quad C_0 \equiv C_0'.$$

Другими словами получаем теорему Дезарга.

Таким образом доказанная выше теорема может рассматриваться как одно из обобщений теоремы Дезарга в пространстве.

Несколько слов о другим обобщениях этой теоремы.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что треугольники, о которых идет речь в теореме Дезарга, представляют собой простейшие многоугольники („симплексы“) для плоскости. Поэтому естественно возникает вопрос о возможности формулировки теоремы, аналогичной теореме Дезарга, для простейших многогранников (тетраэдров) в пространстве и вообще для симплексов многомерных пространств. По этому пути и пошли, главным образом, обобщения теоремы Дезарга.

Так, например, хорошо известна следующая теорема Понселе [1]:

Если прямые AA′, BB′, CC′ *и* DD′, *соединяющие соответственные вершины двух тетраэдров* ABCD *и* A′B′C′D′, *проходят через одну точку* (S), *то линии пересечения соотвественных граней этих тетраэдров лежат в одной плоскости.*

Теорема доказывается при помощи теоремы Дезарга, примененной к парам соответственных граней тетраэдров.

Далее последовали теоремы о более сложном расположении пары тетраэдров в пространстве. Таковы, например, предложение Шаля о двух гиперболоидально- расположенных тетраэдрах в пространстве [2], исследование Шлефли и Шура [3], [4], а также Мордухой-Болтовского [5] и др.

Интересное обобщение теоремы Дезарга для пары многомерных симплексов было получено А. Н. Перепелкиной в ее кандидатской диссертации [6]. Оно заключается в следующем:

Если $\mathbf{n}+1$ *прямых, соединяющих соответственные вершины двух* $\mathbf{n}$*-мерных симплексов, образуют ассоциированную систему, то* $\mathbf{n}+1$

---

[2]) Можно было бы провести доказательство другим путем, применяя, например, теорему о „лучевой сети“. Однако такое привлечение понятий, не связанных с рассматриваемой фигурой (парой треугольников), представляется нам менее отвечающим поставленной задаче.

(n—2)-*мерных пространств пересечения соответственных граней симплексов также образуют ассоциированную систему.*

В частности при $n = 3$ получаем теорему Шаля, а при $n = 2$ теорему Дезарга на плоскости.

Как видно из сказанного, предложенные обобщения идут в двух направлениях. Первое, которое можно считать преимущественным, исследует вопросы аналогичные теореме Дезарга для пространств большего числа измерений (симплексы в пространстве многих измерений, начиная с тетраэдров в трехмерном пространстве).

Второе, усложняет связи между такими симплексами, заменяя перспективное расположение гиперболоидальными или еще более сложными связями.

Иногда оба эти направления соединяются вместе, как например, в работе А. Н. Перепелкиной и др.

Поступила 24 XI 1961 г.

Академия педагогических наук РСФСР, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Poncelet I., *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, art. 582.
2. Chasles M., *Aperçu historique*, 1875, Note XXXII.
3. Schläfli, Journ. f. reine und angew. Math., 1866, **65**.
4. Schur F., Math. Ann., 1882, **XIX**, S. 429.
5. Мордухай-Болтовский Д. Д., *О гипердолоидальном расположеиии тетраэдров в звязи с геометрией многообразия 5 порядка*, Варшава, 1913.
6. Перепелкина А. Н., *Ассоциированные системы прямых и* (n—2)-*мерных многообразий в приложении к* n-*мерным симплексам* М., 1941, (кандидатская диссертация).

DIE DREICKPAARE IM RAUM UND DER SATZ VON DESARGUES

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird ein Paar im Raum beliebig liegende Dreiecke betrachtet. Es wird folgender Satz bewiesen: *Es seien zwei im Raum beliebig liegende Dreiecke* ABC *und* A′B′C′. *Dann bestimmen die Geraden* AA′, BB′ *und* CC′, *die entsprechende Ecken verbinden, die lineare Fläche* K *zweiter Ordnung. Diese Fläche* K *schneidet die Durchschnittsgerade* s_0 *der Ebenen von gegebenen Dreiecker in Doppelpunkten der Projektivität, die auf* s_0 *mit drei Paar Punkten des Durchschnittes* s_0 *mit entsprechenden Dreieckseiten festgestellt ist.*

Im Einzelfalle, wenn die Geraden *AA′*, *BB′* und *CC′* durch einen Punkt gehen, d. h. die gegebenen Dreiecke perspektivisch liegen, wird die Projektivität auf der Geraden s_0 zur Identität, und wir haben dann der Satz von Desargues.

PERECHE DE TRIUNGHIURI ÎN SPAŢIU ŞI TEOREMA LUI DESARGUES

(Rezumat)

Se demonstrează următoarea teoremă relativă la o pereche de triunghiuri în spaţiu: *Fie* ABC *şi* A′B′C′ *două triunghiuri în spaţiu. Dreptele* AA′, BB′ *şi* CC′ *ce unesc vîrfurile respective ale triunghiurilor formează o suprafaţă riglată* K, *de ordinul al doilea. Suprafaţa* K *taie dreapta de intersecţie* s_0 *a triunghiurilor considerate, în punctele duble ale proiectivităţii generate pe* s_0 *de trei perechi de puncte determinate pe* s_0 *de laturile respective ale triunghiurilor date.*

În cazul particular în care dreptele *AA′*, *BB′*, *CC′* sînt concurente, adică cele două triunghiuri sînt în perspectivă, proiectivitatea indusă pe dreapta s_0 devine o identitate şi se obţine astfel teorema lui Desargues.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 513.82

OBSERVAŢII ASUPRA SPAŢIILOR CU CONEXIUNE AFINĂ, CU TENSOR RECURENT

DE

VIOREL MURGESCU

1. Se ştie că un spaţiu Weyl este un spaţiu cu conexiune afină simetrică, dotat cu un tensor recurent (dublu covariant şi simetric), adică satisfăcînd relaţiile $g_{ij|k} = 2\omega_k g_{ij}$, unde $g_{ij|k}$ este derivata covariantă a tensorului g_{ij} relativ la conexiunea spaţiului, iar ω_k este un vector, numit vector de recurenţă.

În Nota de faţă sînt considerate spaţii cu conexiune afină *cu torsiune* şi cu tensor recurent, care reprezintă – într-un anumit sens — o generalizare a spaţiilor Weyl. Se stabilesc unele proprietăţi simple pentru atare spaţii, cum ar fi condiţiile de integrabilitate ale relaţiilor de recurenţă şi formulele de legătură dintre coeficienţii conexiunii şi componentele tensorului g_{ij}. Apoi se tratează problema reprezentării conforme a două spaţii cu tensor recurent şi cu tensorii de torsiune egali. Se stabileşte, în consecinţă, un analog al tensorului conform de curbură al lui Weyl, constituind o generalizare directă a acestuia la cazul spaţiilor cu tensori de torsiune egali.

2. Fie A_n un spaţiu cu conexiune afină, iar $\Gamma_{ij}^{\ k} (\neq \Gamma_{ji}^{\ k})$ coeficienţii conexiunii. Fie încă g_{ij} un tensor dublu covariant simetric, care satisface relaţiile de recurenţă

$$g_{ij|k} = 2\omega_k g_{ij}, \tag{1}$$

în care $g_{ij|k}$ reprezintă derivata covariantă a tensorului g_{ij} cu privire la conexiunea $\Gamma_{ij}^{\ k}$. Evident, conexiunea $\Gamma_{ij}^{\ k}$, tensorul g_{ij} şi vectorul de recurenţă ω_k nu sînt complet arbitrari, ci trebuie astfel aleşi încît să satisfacă condiţiile de integrabilitate ale sistemului (1). În scopul determinării acestora, derivăm covariant relaţiile (1), mai întîi în raport cu indicele l şi apoi, după permutarea lui k cu l, scădem relaţiile astfel obţinute:

$$g_{ij|k|l} - g_{ij|l|k} = 2(\omega_{k|l} - \omega_{l|k}) g_{ij}.$$

Ţinînd seama de formulele de comutare ale unui tensor covariant de ordinul al doilea şi ale unui vector

$$g_{ij|k|l} - g_{ij|l|k} = R^h_{ikl}\, g_{hj} + R^h_{jkl}\, g_{hi} - 2\underset{\smile}{\Gamma_{kl}}^h\, g_{ij|h},$$

$$\omega_{k|l} - \omega_{l|k} = (\partial_l \omega_k - \partial_k \omega_l) - 2\underset{\smile}{\Gamma_{kl}}^h \omega_h,$$

unde

$$\underset{\smile}{\Gamma_{kl}}^h = \frac{1}{2}(\Gamma_{kl}^{\ h} - \Gamma_{lk}^{\ h}) \tag{2}$$

sînt componentele tensorului de torsiune al spaţiului, relaţiile precedente devin, în virtutea condiţiilor (1), de forma

$$R^h_{ikl}\, g_{hj} + R^h_{jkl}\, g_{hi} = 2(\partial_l \omega_k - \partial_k \omega_l)\, g_{ij}.$$

În scopul eliminării componentelor ω_k, contractăm cu g^{ij} şi obţinem relaţiile

$$B_{kl} = n(\partial_l \omega_k - \partial_k \omega_l), \quad (B_{kl} = R^h_{hkl}).$$

Înlocuindu-le în relaţiile precedente, condiţiile de integrabilitate ale sistemului (1) devin

$$R^h_{ikl}\, g_{hj} + R^h_{jkl}\, g_{hi} = (2/n)\, B_{kl}\, g_{ij}. \tag{3}$$

Aceste relaţii sînt formal identice cu cele din cazul spaţiilor Weyl; aici, însă, tensorii R^h_{ijk} şi B_{kl} provin dintr-o conexiune cu torsiune.

Ne propunem, în continuare, să cercetăm în ce măsură tensorul g_{ij} şi vectorul ω_k determină conexiunea. Pentru aceasta, ţinînd seama că

$$g_{ij,k} = g_{ih}\Gamma_{jk}^{\ h} + g_{jh}\Gamma_{ik}^{\ h} + 2\omega_k g_{ij},$$

— după cum rezultă din (1) —, formăm simbolii Christoffel de speţa întîia relativi la tensorul g_{ij},

$$[ij, k] = g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}.$$

Urmează, în consecinţă,

$$\frac{1}{2}[ij, k] + \underset{\smile}{\Gamma_{jk}}^h g_{ih} + \underset{\smile}{\Gamma_{ik}}^h g_{jh} - \underset{\frown}{\Gamma_{ij}}^h g_{hk} = \omega_i g_{jk} + \omega_j g_{ik} - \omega_k g_{ij}, \tag{4}$$

unde

$$\underset{\frown}{\Gamma_{ij}}^h = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^{\ h} + \Gamma_{ji}^{\ h}) \tag{5}$$

reprezintă partea simetrică a conexiunii.

Contractînd în relaţia (4) cu g^{kl} şi separînd în primul membru partea simetrică a conexiunii, rezultă

$$\underset{\frown}{\Gamma_{ij}}^l = \left\{ {l \atop ij} \right\} - (\omega_i \delta^l_j + \omega_j \delta^l_i - \omega_k g_{ij} g^{kl}) + (g_{ih}\underset{\smile}{\Gamma_{jk}}^h + g_{jh}\underset{\smile}{\Gamma_{ik}}^h)\, g^{kl}, \tag{6}$$

unde $\left\{ {l \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl}[ij, k]$ sînt simbolii Christoffel de speţa a doua relativi la acelaşi tensor.

Înlocuind în condițiile de integrabilitate (3) partea simetrică a conexiunii, obținem un sistem diferențial liniar cu derivate parțiale de primul ordin, în necunoscutele $\underset{\smile}{\Gamma}_{ij}^{k}$. Dacă acest sistem este identic satisfăcut, urmează că tensorul de torsiune poate fi ales arbitrar. În cazul contrar, el este determinat cu arbitrarietatea ce rezultă din soluția generală a sistemului, în ipoteza că acesta este compatibil.

Reciproc, fie $\underset{\smile}{\Gamma}_{ij}^{h}$ coeficienții unei conexiuni a căror parte simetrică este dată de relația (6) și a căror parte strîmb simetrică (2) este dată de o soluție a sistemului dedus din (3), sistem despre care am amintit mai înainte. Înlocuindu-i în expresia derivatei covariante a tensorului g_{ij} rezultă

$$g_{ij|k} = \partial g_{ij}/\partial x^k - \underset{\smile}{\Gamma}_{ik}^{h} g_{hj} - \underset{\smile}{\Gamma}_{jk}^{h} g_{hi} = \partial g_{ij}/\partial x^k - \left[\left\{ {h \atop ik} \right\} + \underset{\smile}{\Gamma}_{ik}^{h} - \right.$$

$$- (\omega_i \delta_k^h + \omega_k \delta_i^h - \omega_m g_{ik} g^{mh}) + (g_{im} \underset{\smile}{\Gamma}_{kn}^{m} + g_{km} \underset{\smile}{\Gamma}_{in}^{m}) g^{nh}\Big] g_{hj} -$$

$$- \left[\left\{ {h \atop jk} \right\} + \underset{\smile}{\Gamma}_{jk}^{h} - (\omega_j \delta_k^h + \omega_k \delta_j^h - \omega_m g_{jk} g^{mh}) + \right.$$

$$\left. + (g_{jm} \underset{\smile}{\Gamma}_{kn}^{m} + g_{km} \underset{\smile}{\Gamma}_{jn}^{m}) g^{nh}\right] g_{hi} = 2\omega_k g_{ij},$$

adică tocmai relația (1) de recurență.

În cazul particular cînd tensorul

$$S^l_{ij} = g^{lk} g_{jh} \underset{\smile}{\Gamma}_{ik}^{h} \tag{7}$$

este strîmb simetric în indicii inferiori, partea simetrică a conexiunii $\underset{\smile}{\Gamma}_{ij}^{k}$ dată de relația (6) este o conexiune Weyl și, în consecință, este unic determinată de tensorul g_{ij} și vectorul ω_k; în schimb, partea sa strîmb simetrică va fi o soluție a sistemului

$$S^l_{(ij)} = 0.$$

În plus, conexiunea $\underset{\smile}{\Gamma}_{ij}^{k}$ trebuie să satisfacă condițiile (3) de integrabilitate a sistemului (1).

3. Fie $\bar{A}_n$ și A_n, $(n \geqslant 3)$, două spații cu conexiune afină, coeficienții conexiunii $\underset{\smile}{\bar{\Gamma}}_{ij}^{k}$, respectiv $\underset{\smile}{\Gamma}_{ij}^{k}$ fiind dați de relații de tipul (6). Fie încă $\bar{g}_{ij}$ și g_{ij} tensorii recurenți definiți în aceste spații. Se spune că A_n e reprezentat conform pe $\bar{A}_n$ dacă este stabilită o corespondență regulată între aceste spații, care păstrează unghiurile. Presupunînd că am ales în punctele corespunzătoare celor două spații coordonate egale $(\bar{x}^i = x^i)$, condiția necesară și suficientă pentru ca corespondența astfel definită între $\bar{A}_n$ și A_n să fie conformă este ca să avem între tensorii $\bar{g}_{ij}$ și g_{ij}, dc aceleași coordonate, proporționalitate. Dar cum această condiție este independentă de alegerea factorului de proporționalitate, luînd convenabil cei doi tensori, putem considera

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij}. \tag{8}$$

Numim proprietăţi conforme ale unui A_n, acele proprietăţi ce sînt invariante la reprezentări conforme. Prin urmare, dacă presupunem în plus că cele două spaţii au tensorii de torsiune egali

$$\underset{\smile}{\bar{\Gamma}_{ij}^{k}} = \underset{\smile}{\Gamma_{ij}^{k}}, \tag{9}$$

aceste proprietăţi vor depinde numai de pseudotensorul metric g_{ij} şi de tensorul $\underset{\smile}{\Gamma_{ij}^{k}}$.

Întrebuinţînd notaţiile lui N o r d e n, introducem vectorul

$$p_i = \bar{\omega}_i - \omega_i, \tag{10}$$

unde $\bar{\omega}_i$ şi ω_i sînt vectorii asociaţi cu tensorii $\bar{g}_{ij}$ şi g_{ij} luaţi egali, numit vector de reprezentare conformă, care este independent de alegerea coordonatelor din cele două spaţii conform corespondente, precum şi de alegerea tensorilor $\bar{g}_{ij}$ şi g_{ij}, presupuşi egali. Notînd încă prin

$$\tau_{ij}^{k} = \bar{\Gamma}_{ij}^{k} - \Gamma_{ij}^{k} \tag{11}$$

tensorul de deformare corespunzător celor două conexiuni, în virtutea formulelor (6) şi (9) rezultă

$$\tau_{ij}^{k} = \tau_{\underline{ij}}^{k} = p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - p_l g_{ij} g^{lk}; \quad \underset{\smile}{\tau_{ij}^{k}} = 0. \tag{12}$$

Considerăm acum relaţia bine cunoscută

$$\bar{R}_{ijk}^{h} - R_{ijk}^{h} = \tau_{ik|j}^{h} - \tau_{ij|k}^{h} + \tau_{mj}^{h}\tau_{ik}^{m} - \tau_{mk}^{h}\tau_{ij}^{m} - 2\underset{\smile}{\Gamma_{jk}^{m}}\tau_{\underline{im}}^{h}, \tag{13}$$

unde $\bar{R}_{ijk}^{h}$ şi R_{ijk}^{h} sînt tensorii de curbură corespunzători celor două spaţii, iar

$$\tau_{ik|j}^{h} = \partial_j \tau_{ik}^{h} + \Gamma_{mj}^{h}\tau_{ik}^{m} - \Gamma_{ij}^{m}\tau_{mk}^{h} - \Gamma_{kj}^{m}\tau_{im}^{h} \tag{14}$$

reprezintă tensorul de deformare derivat covariant cu privire la conexiunea Γ_{ij}^{k}.

Cu ajutorul acestuia ne propunem, în continuare, să determinăm un obiect geometric de natură conformă, care în cazul particular al spaţiilor Weyl se reduce la tensorul conform de curbură. În acest scop, înlocuim (12) şi (14) în (13) şi apoi, în virtutea notaţiei

$$p_{ij} = p_{i|j} - p_i p_j + \frac{1}{2} g_{ij} g^{mn} p_m p_n, \tag{15}$$

constatăm că relaţia (13) devine

$$\bar{R}_{ijk}^{h} - R_{ijk}^{h} = \delta_i^h (p_{kj} - p_{jk}) + \delta_k^h p_{ij} - \delta_j^h p_{ik} + g^{hm}(g_{ij} p_{mk} - g_{ik} p_{mj}) - 2\underset{\smile}{\Gamma_{jk}^{m}}\tau_{\underline{im}}^{h}. \tag{13'}$$

Dar cum $\underset{\smile}{\bar{\Gamma}_{jk}^{m}} = \underset{\smile}{\Gamma_{jk}^{m}}$, $\left\{{h \atop im}\right\} = \left\{{h \atop im}\right\}$, rezultă că putem scrie egalitatea

$$2\underset{\smile}{\Gamma_{jk}^{m}}\tau_{\underline{im}}^{h} = 2\underset{\smile}{\bar{\Gamma}_{jk}^{m}}\left[\bar{\Gamma}_{\underline{im}}^{h} - \left\{{h \atop im}\right\}\right] - 2\underset{\smile}{\Gamma_{jk}^{m}}\left[\Gamma_{\underline{im}}^{h} - \left\{{h \atop im}\right\}\right], \tag{16}$$

unde cantitățile dintre parantezele drepte au caracter tensorial, ca diferențe de conexiuni. Prin urmare (13′) devine

$$(13'') \qquad \begin{aligned} &(R^h_{ijk} + 2\Gamma_{\underset{\smile}{jk}}{}^m [\Gamma_{\underline{im}}{}^h - \{{}^h_{im}\}]) - (R^h_{ijk} + 2\Gamma_{\underset{\smile}{jk}}{}^m [\Gamma_{\underline{im}}{}^h - \{{}^h_{im}\}]) = \\ &= \delta^h_i (p_{kj} - p_{jk}) + \delta^h_k p_{ij} - \delta^h_j p_{ik} + g^{hm}(g_{ij} p_{mk} - g_{ik} p_{mj}) . \end{aligned}$$

Pentru a simplifica scrierea relațiilor ce urmează, vom introduce notațiile

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + 2\Gamma_{\underset{\smile}{jk}}{}^m (\Gamma_{\underline{im}}{}^h - \{{}^h_{im}\}) , \\ \overline{\mathfrak{M}}^h_{ijk} = \overline{R}^h_{ijk} + 2\overline{\Gamma}_{\underset{\smile}{jk}}{}^m (\overline{\Gamma}_{\underline{im}}{}^h - \{{}^h_{im}\}) , \end{cases}$$

unde $\overline{\mathfrak{M}}^h_{ijk}$ și $\mathfrak{M}^h_{ijk}$ sînt tensori ce depind de tensorii de curbură din spațiile respective, de tensorii de torsiune corespunzători, presupuși egali, precum și de tensorii de deformare ai conexiunilor simetrice asociate cu $\Gamma_{ij}{}^k$ relativ la conexiunea indusă de tensorii $\overline{g}_{ij}$ și g_{ij}.

Notînd prin

$$(18) \qquad \mathfrak{M}_{.jk} = B_{jk} + 2\Gamma_{\underset{\smile}{jk}}{}^m (\Gamma_{\underline{hm}}{}^h - \{{}^h_{hm}\}) , \quad \overline{\mathfrak{M}}_{.jk} = \overline{B}_{jk} + 2\overline{\Gamma}_{\underset{\smile}{jk}}{}^m (\overline{\Gamma}_{\underline{hm}}{}^h - \{{}^{\overline{h}}_{hm}\}) ,$$

și

$$(19) \qquad \mathfrak{M}_{ij.} = R_{ij} + 2\Gamma_{\underset{\smile}{jh}}{}^m (\Gamma_{\underline{im}}{}^h - \{{}^h_{im}\}) , \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ij.} = \overline{R}_{ij} + 2\overline{\Gamma}_{\underset{\smile}{jh}}{}^m (\overline{\Gamma}_{\underline{im}}{}^h - \{{}^{\overline{h}}_{im}\}) ,$$

tensorii obținuți din (17) prin contractare, din (13″) urmează prin contractarea lui h cu i,

$$(20) \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{.jk} - \mathfrak{M}_{.jk} = n(p_{kj} - p_{jk}) ;$$

de asemenea, contractînd în (13″) h cu k, urmează

$$(21) \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{ij.} - \mathfrak{M}_{ij.} = (n-1) p_{ij} - p_{ji} + p g_{ij} ,$$

unde prin p am notat scalarul

$$(22) \qquad p = g^{mh} p_{mh} .$$

Contractînd în (21) cu g^{ij} și notînd încă

$$(23) \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2} \overline{\mathfrak{M}}_{ij.} g^{ij} , \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \mathfrak{M}_{ij.} g^{ij} ,$$

rezultă

$$(24) \qquad \overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M} = (n-1) p .$$

Urmează atunci din (20), (21) și (24) că

$$(25) \qquad \begin{aligned} p_{ij} = {} & (\overline{\mathfrak{M}}_{ij.} - \mathfrak{M}_{ij.}) / (n-2) + (\overline{\mathfrak{M}}_{.ij} - \mathfrak{M}_{.ij}) / [n(n-2)] - \\ & - \{(\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}) / [(n-1)(n-2)]\} g_{ij} . \end{aligned}$$

Înlocuind (17) și (25) în (13″) se obține relația

$$\overline{\mathfrak{M}}^h_{ijk} - \mathfrak{M}^h_{ijk} = \delta^h_i (\overline{\mathfrak{M}}_{.jk} - \mathfrak{M}_{.jk}) / n + \{ \delta^h_k (\overline{\mathfrak{M}}_{.ij} - \mathfrak{M}_{.ij}) - \delta^h_j (\overline{\mathfrak{M}}_{.ik} - \mathfrak{M}_{.ik}) +$$
$$+ g^{hm} g_{ij} (\overline{\mathfrak{M}}_{.mk} - \mathfrak{M}_{.mk}) - g^{hm} g_{ik} (\overline{\mathfrak{M}}_{.mj} - \mathfrak{M}_{.mj}) \} / [n (n-2)] +$$
(26)
$$+ \{ \delta^h_k (\overline{\mathfrak{M}}_{ij.} - \mathfrak{M}_{ij.}) - \delta^h_j (\overline{\mathfrak{M}}_{ik.} - \mathfrak{M}_{ik.}) + g^{hm} g_{ij} (\overline{\mathfrak{M}}_{mk.} - \mathfrak{M}_{mk.}) -$$
$$- g^{hm} g_{ik} (\overline{\mathfrak{M}}_{mj.} - \mathfrak{M}_{mj.}) \} / (n-2) + 2(\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}) (\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}) / [(n-1)(n-2)].$$

Separînd termenii baraţi de o parte, constatăm că am obţinut un tensor invariant la reprezentări conforme, care — evident — are valori egale în punctele corespunzătoare celor două spaţii cu tensori de torsiune egali, pe care îl notăm prin W^h_{ijk}, anume:

$$W^h_{ijk} = \mathfrak{M}^h_{ijk} - \delta^h_i \mathfrak{M}_{.jk} / n + (\delta^h_j \mathfrak{M}_{.ik} - \delta^h_k \mathfrak{M}_{.ij} + g^{hm} g_{ik} \mathfrak{M}_{.mj} -$$
(27)
$$- g^{hm} g_{ij} \mathfrak{M}_{.mk}) / [n (n-2)] - (\delta^h_k \mathfrak{M}_{ij.} - \delta^h_j \mathfrak{M}_{ik.} + g^{hm} g_{ij} \mathfrak{M}_{mk.} -$$
$$- g^{hm} g_{ik} \mathfrak{M}_{mj.}) / (n-2) - 2\mathfrak{M} (\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}) / [(n-1)(n-2)].$$

În cazul spaţiilor fără torsiune, tensorii $\mathfrak{M}^h_{ijk}$, $\mathfrak{M}_{.jk}$, $\mathfrak{M}_{ij.}$ fiind identici respectiv cu tensorii R^h_{ijk}, B_{jk} şi R_{ij}, W^h_{ijk} se reduce tocmai la tensorul conform de curbură al lui Weyl, pe care îl generalizează.

Se mai poate observa că tensorul (27) se bucură de proprietăţile

$$W^h_{ijk} + W^h_{ikj} = 0, \quad W^h_{hjk} = 0.$$

Primit la 17 III 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de matematici I

BIBLIOGRAFIE

1. Mayer O., *Curs de probleme speciale de geometrie diferenţială,* 1952, (manuscris).
2. Норден А. П., *Пространства аффинной связности,* М.-Л., 1950.
3. Murgescu V., An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, 1958, secţ. I, **IV**, *1,* pp. 67—79.

О ПРОСТРАНСТВАХ АФФИНОЙ СВЯЗНОСТИ С РЕКУРРЕНТНОЙ КРИВИЗНОЙ

(Резюме)

Устанавливаются условия интегрируемости (3) отношений (1) и формулы связи (6) между коеффициентами аффинной связности с кручением $\Gamma_{ij}{}^k$ и составляющими рекуррентного тензора g_{ij}. Находится затем конформный тензор кривизны (27) для двух пространств с рекуррентными тензорами и с одинаковым кручением.

SUR LES ESPACES À CONNEXION AFFINE, À COURBURE RÉCURRENTE

(Résumé)

Dans cette Note on établit les conditions d'intégrabilité (3) pour les équations (1) et les formules de liaison (6) pour les coefficients $\Gamma_{ij}{}^k$ d'une connexion affine à torsion et les composantes d'un tenseur récurrent g_{ij}. Puis on trouve le tenseur conforme de courbure (27) pour le cas de deux espaces à torsions égales et à tenseurs récurrents.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 539.3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

И. Н. СЛЕЗИНГЕР

1. Примем в качестве характеристик деформированного состояния среды компоненты тензора конечной деформации:

$$(1.1)\quad \eta_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2}\lambda_{\alpha i}\lambda_{\alpha j},\ (2e_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_{ji},\ \lambda_{ij} = \partial u_i / \partial x_j),\ (i, j, \alpha = 1,2,3).$$

При этом уравнения равновесия нелинейной теории упругости записываются в виде [1]:

$$(1.2)\quad \partial[(\delta_{m\alpha} + \lambda_{m\alpha})\sigma^*_{n\alpha}] / (\partial x_n) = -F_m,\ (\delta_{m\alpha} + \lambda_{m\alpha})\sigma^*_{n\alpha}\beta_n = f_m,\ (m,n = 1,2,3).$$

Здесь: u_i — составляющие перемещения точек среды в направлении, ортогональных декартовых осей x_i; σ^*_{ij} — обобщенные напряжения, соответствующие η_{ij}; F_m — массовые силы, отнесенные к единице объема тела до его деформации; f_m — поверхностные силы, отнесенные к единице поверхности тела до деформации; β_n направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности; δ_{ij} — символ Кронекера.

Предположим, что рассматриваемая среда однородна и изотропна, а процесс ее деформирования — обратимый. Тогда обобщенный закон Гука может быть записан в форме, предложенной Н. В Зволинским и П. М. Ризом [2], [3], а именно

$$(1.3)\quad \begin{aligned} T_{ij} = &\left[\lambda(I_1 + \frac{1}{2}I_1^2 - 3I_2) + BI_1^2 - CI_2\right]\delta_{ij} + \\ &+ [2\mu + (\lambda - 2\mu + C)I_1]\varepsilon_{ij} + (5\mu + A)\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon_{j\alpha}, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \delta_{i\alpha}\varepsilon_{\alpha i},\ I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \varepsilon^2_{\alpha\beta}),\ 2\varepsilon_{ij} = \partial u_i / \partial\xi_j + \partial u_j / \delta\xi_i - (\partial u_\alpha / \partial\xi_i)\cdot(\partial u_\alpha / \partial\xi_j),$$

λ, μ, A, B, C — упругие постоянные, и ξ_i — координаты точек среды после деформации.

Для составления интересующих нас уравнений необходимо перейти в (1.3) от истинных напряжений T_{ij} к обобщенным напряжниям σ^*_{ij} и от ε_{ij} к λ_{ij}. Для этого учтем, что [1], [4]:

(1.4) $\sigma^*_{ij} = D(\partial x_i/\partial\xi_\alpha)\cdot(\partial x_j/\partial\xi_\beta)\,T_{\alpha\beta}$, $\partial u_i/\partial\xi_j = \delta_{ij} - \partial x_i/\partial\xi_j$, $\partial x_i/\partial\xi_j = m_{ij}/D$,

где $D = |\delta_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}|_{\alpha,\beta=1,2,3}$ а m_{ij} суть алгебраические дополнения элементов определителя D^*, получающегося из D путем транспонирования.

Далее ограничимся рассмотрением только таких случаев нелинейной деформации, когда можно пренебречь всеми произведениями λ_{ij} по сравнению с единицей. Нетрудно установить, что при этом имеют место следующие упрощенные соотношения:

(1.5) $$2\varepsilon_{ij} = 2e_{ij} - \lambda_{i\alpha}\lambda_{\alpha j} - \lambda_{\alpha i}\lambda_{j\alpha} - \lambda_{\alpha i}\lambda_{\alpha j},$$

(1.6) $$T_{ij} = \sigma_{ij} + [\lambda(\omega^2 - \theta^2) + B\theta^2 - C\Lambda]\,\delta_{ij} + (\lambda - 2\mu + C)\theta e_{ij} + (\mu + A)e_{i\alpha}e_{j\alpha} + \mu\lambda_{i\alpha}\lambda_{j\alpha},$$

и

(1.7) $$\sigma^*_{ij} = T_{ij} + \theta\sigma_{ij} - \lambda_{i\alpha}\sigma_{j\alpha} - \lambda_{j\alpha}\sigma_{i\alpha},$$

где

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad \theta = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33},$$

$$\omega^2 = \omega_{12}^2 + \omega_{23}^2 + \omega_{31}^2, \quad 2\omega_{ij} = \lambda_{ij} - \lambda_{ji}, \quad 2\Lambda = \theta^2 - e_{\alpha\beta}^2.$$

Внося (1.5) и (1.6) в (1.7) и удерживая только парные произведения λ_{ij}, получаем формулы обобщенного закона Гука (1.3) в виде:

(1.8) $$\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij} + (\lambda\omega^2 + B\theta^2 - C\Lambda)\delta_{ij} - (\lambda - C)\theta e_{ij} - (3\mu - A)e_{i\alpha}e_{j\alpha} + \mu\lambda_{\alpha i}\lambda_{\alpha j}.$$

Подстановка этих формул в (1.2) дает возможность выразить уравнения равновесия в одних перемещениях. Придерживаясь принятой выше степени точности, получаем:

(1.9) $$\begin{cases} (\lambda + \mu)(\partial\theta/\partial x_m) + \mu\nabla u_m + \partial P_{mn}/\partial x_n = -F_m, \\ (\lambda\theta\delta_{mn} + 2\mu e_{mn} + P_{mn})\beta_n = f_m, \end{cases}$$

где

(1.10) $$P_{mn} = (\lambda\omega^2 + B\theta^2 - C\Lambda)\delta_{mn} + (\lambda\omega_{mn} + Ce_{mn})\theta + (\mu + A)e_{n\alpha}e_{m\alpha} - \mu\lambda_{n\alpha}\lambda_{\alpha m}.$$

Заметим, что при решении задач упругие постоянные A, B, C можно выбрать в соответствии с рекомендацией, данной в [5], либо же принять равными нулю. В последнем случае мы получаем вместо (1.10) просто

(1.11) $$P_{mn} = \lambda(\omega^2\delta_{mn} + \theta\omega_{mn}) + \mu(e_{n\alpha}e_{m\alpha} - \lambda_{n\alpha}\lambda_{\alpha m}).$$

Уравнения (1.9), (1.11) были использованы нами для изучения некоторых случаев нелинейной деформации упругих тел в [6], [7].

2. Предположим теперь, что рассматриваемое тело находится под действием критической нагрузки, допуская два бесконечно близких деформированных состояния равновесия. Обозначим составляющие точек тела в одном из этих состояний (исходном) через u_m, $(m = 1,2,3)$, а в другом (смежном) через

$$u_m^+ = u_m + \varepsilon u_m', \quad (m = 1,2,3), \tag{2.1}$$

где ε — малый параметр. Очевидно, что при этом и

$$\lambda_{mn}^+ = \lambda_{mn} + \varepsilon\lambda_{mn}', \quad \theta^+ = \theta + \varepsilon\theta', \quad e_{ij}^+ = e_{ij} + \varepsilon e_{ij}', \quad \omega_{ij}^+ = \omega_{ij} + \varepsilon\omega_{ij}',$$

а значит

$$P_{mn}^+ = P_{mn} + \varepsilon P_{mn}' + \cdots, \tag{2.2}$$

где

$$\lambda_{mn}' = \partial u_m'/\partial x_n, \quad \theta' = \lambda_{11}' + \lambda_{22}' + \lambda_{33}', \quad 2e_{ij}' = \lambda_{ij}' + \lambda_{ji}', \quad 2\omega_{ij}' = \lambda_{ij}' - \lambda_{ji}'$$

и

$$\begin{aligned} P_{mn}' = {} & 2\left[\lambda(\omega_{12}\omega_{12}' + \omega_{23}\omega_{23}' + \omega_{31}\omega_{31}') + \left(B - \frac{1}{2}C\right)\theta\theta' + \frac{1}{2}Ce_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}'\right]\delta_{mn} + \\ & + \lambda(\theta\omega_{mn}' + \omega_{mn}\theta') + C(\theta e_{mn}' + e_{mn}\theta') + (\mu + A)(e_{n\alpha}e_{m\alpha}' + e_{m\alpha}e_{n\alpha}') - \\ & - \mu(\lambda_{n\alpha}\lambda_{\alpha m}' + \lambda_{\alpha m}\lambda_{n\alpha}'). \end{aligned} \tag{2.3}$$

В наиболее общем случае плотности F_m и f_m массовых и поверхностных сил, действующих на тело, зависят от u_m и λ_{mn}. На основании (2.1) их можно также представить в виде:

$$F_m^+ = F_m + \varepsilon F_m' + \cdots, \quad f_m^+ = f_m + \varepsilon f_m' + \cdots, \tag{2.4}$$

где

$$F_m' = (\partial F_m/\partial u_r)u_r' + (\partial F_m/\partial\lambda_{rs})\lambda_{rs}', \quad f_m' = (\partial f_m/\partial u_r)u_r' + (\partial f_m/\partial\lambda_{rs})\lambda_{rs}', \ldots$$

Подставляя (2.2) и (2.4) в уравнения равновесия (1.9) и отбирая из получающихся равенств только члены, линейные относительно ε, получаем следующие уравнения устойчивости:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)(\partial\theta'/\partial x_m) + \mu\nabla u_m' + \partial P_{mn}'/\partial x_n + F_m' = 0, \\ (\lambda\theta'\delta_{mn} + 2e\mu_{mn}' + P_{mn}')\beta_n - f_m' = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Из приведенных выше выражений видно, что P_{mn}' и F_m', f_m' зависят от u_m' линейно; следовательно, уравнения (2.5) образуют относительно u_m' линейную однородную систему. Коэффициенты же при u_m' в этих уравнениях являются функциями u_m, т.е. в конечном счете параметров внешней нагрузки. Решение системы (2.5) дает возможность определить критические значения этих параметров, а тем самым — и критические значения внешней нагрузки.

3. В заключение остановимся на плоской деформации. Если деформация тела параллельна осям x_1, x_2, то $\lambda_{\alpha 3} = \lambda_{3\alpha} \equiv 0$ и выражения (1.10) для P_{mn} и (2.3) для P_{mn}' значительно упрощаются, принимая вид

$$P_{mn} = \widetilde{P}_{mn} = (\lambda + \mu)\,[(-1)^n(1-\delta_{mn})\widetilde{\theta} + \delta_{mn}\widetilde{\omega}]\,\widetilde{\omega} + B\delta_{mn}\widetilde{\theta}^2 + \tag{3.1}$$
$$+ (A + C)\,[(1-\delta_{mn})\widetilde{e}\,\widetilde{\theta} + \delta_{mn}(e^2 + \lambda_{mn}^2)], \quad (m, n = 1,2),$$

$$P'_{mn} = \widetilde{P}'_{mn} = (\lambda+\mu)\,[(-1)^n(1-\delta_{mn})\,(\widetilde{\theta}\widetilde{\omega}' + \widetilde{\omega}\widetilde{\theta}') + 2\delta_{mn}\,\widetilde{\omega}\widetilde{\omega}'] + 2B\delta_{mn}\,\widetilde{\theta}\widetilde{\theta}' + \tag{3.2}$$
$$+ (A + C)\,[(1-\delta_{mn})\,(\widetilde{\theta}\widetilde{e}' + \widetilde{e}\widetilde{\theta}') + 2\delta_{mn}(\widetilde{e}\widetilde{e}' + \lambda_{mn}\lambda'_{mn})],$$

где

$$\widetilde{\theta} = \lambda_{11} + \lambda_{22},\ \widetilde{\omega} = \omega_{12},\ \widetilde{e} = e_{12},\ \widetilde{\theta}' = \lambda'_{11} + \lambda'_{22},\ \widetilde{\omega}' = \omega'_{12},\ \widetilde{e}' = e'_{12}.$$

Особый интерес представляет случай, когда $A = B = C = 0$; как видно из (3.1), слагаемое P_{mn}, учитывающее нелинейность задачи, зависит при этом только от объемной деформации элементов тела θ и их поворотов $\widetilde{\omega}$. При отсутствии последних (двухосное растяжение — сжатие, осесимметрическая деформация) P_{mn} обращается в нуль и решение нелинейной задачи (в перемещениях) совпадает с решением соответствующей линейной задачи.

Поступила 17 IX 1960 г.

Одесский электротехнический институт связи, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В., *Теория упругости*, Судпромгиз, Л., 1958.
2. Зволинский Н. В., Риз П. М., ИАН СССР, ОТН, 1938, *8—9*.
3. — ПММ, 1939, **II**, *4*.
4. Гольденблат И. И., *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Гостехтеоретиздат, М., 1955.
5. Риз П. М., ПММ, 1947, **XI**, *4*.
6. Нудельман Я. Л., Слезингер И. Н., *Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов*, М., 1960.
7. Слезингер И. Н., Барская С. Я., Изв. высших учебных заведений МВО СССР (Строительство и архитектура), 1960, *5*.

THE PRINCIPAL EQUATION OF THE NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY EXPRESSED IN THE DISPLACEMENTS.

(Summary)

There is given in the article the inference of the principal equations of the nonlinear theory of elasticity in the displacements. The theory is based on a simple version of the generalized Hooke's law, given in [2], [3].

ECUAŢIILE FUNDAMENTALE ALE TEORIEI ELASTICITĂŢII NELINIARE EXPRIMATE ÎN DEPLASĂRI

(Rezumat)

Se deduc ecuaţiile fundamentale ale teoriei neliniare a elasticităţii. Deducerea lor este bazată pe o simplă interpretare a legii lui Hooke, dată în [2], [3].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. D. 531.539.2

CAS GÉNÉRAL DES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES RELATIFS D'UN PENDULE PHYSIQUE DOUBLE SITUÉ DANS UN PLAN SOUMIS À ROTATION

PAR

G. BRADISTILOV et G. BOYADJIEV

Dans le travail [1] on a étudié les mouvements asymptotiques et périodiques d'un système de pendules physiques liés successivement et situés dans un plan vertical.

Dans le présent travail nous allons montrer l'existence des mouvements périodiques d'un pendule physique double situé dans un plan passant par le centre d'une sphère (par exemple le globe terrestre) qui tourne uniformément, avec une vitesse angulaire constante, autour d'un axe et qui est invariablement lié à cet axe.

Soit l l'axe de rotation passant par le centre G de la sphère, Oyz le plan où est situé le pendule physique double et dont l'axe z passe par G et forme avec l un angle α. Nous choisissons le système de coordonnées $O'XYZ$, invariablement lié à la sphère, d'une telle manière que son origine soit située sur l, que l'axe Y passe par O et que l'axe Z soit parallèle à l'axe z (fig. 1). Soit β l'angle entre les axes y et Y. Le premier pendule tourne autour de l'axe O et le second autour de l'axe O_1 du premier. Les centres de gravité des pendules sont S_1 et S_2, S_1 étant situé sur la droite OO_1 entre O et O_1; OS_1 et OS_2 sont respectivement les axes d'inertie principaux des deux pendules.

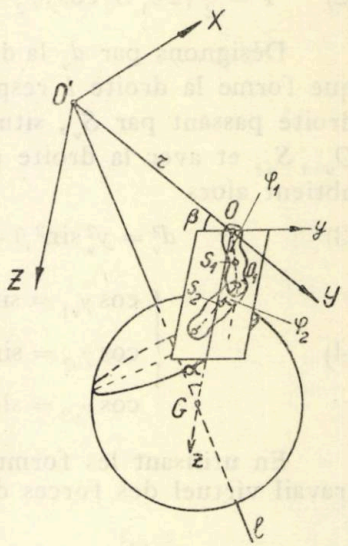


Fig. 1

Désignons par: φ_ν—l'angle entre la direction $\overrightarrow{O_{\nu-1}S_\nu}$, $(O_0 \equiv O)$, et la direction positive de l'axe Oz, m_ν—la masse du ν-ième pendule, $r = \overline{O'O}$, $a_\nu = \overline{O_{\nu-1}S_\nu}$, $b_\nu = \overline{O_{\nu-1}O_\nu}$, I_ν — le moment d'inertie du ν-ième pendule par rapport à S_ν, I'_ν — le moment d'inertie par rapport à l'axe

$O_{\nu-1}S_\nu$ et I''_ν — le moment d'inertie du même pendule par rapport à l'axe situé dans le plan Oyz passant par S_ν et perpendiculaire à $O_{\nu-1}S_\nu$. Il est évident que $I_\nu = I'_\nu + I''_\nu$, $(\nu = 1, 2)$.

Dans chaque point de S_ν agit une force qui est proportionnelle à la masse m_ν, parallèle à OG et dirigée vers la sphère. La grandeur de cette force est désignée par $m_\nu q$, $(q = \text{const.})$.

Le cas particulier d'un pendule physique double constitué par des barres homogènes, de masses égales et de mêmes longeurs, où $\beta = \pi/2$, a été étudié par G. Manolov [2].

Les coordonnées (y_ν, z_ν) des centres de gravité des pendules sont données par les expressions:

$$(1)\qquad y_\nu = a_\nu \sin\varphi_\nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \sin\varphi_k,\quad z_\nu = a_\nu \cos\varphi_\nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} b_k \cos\varphi_k,\quad (\nu = 1, 2).$$

Si l'on pose comme dans [1]

$$A_\nu = a_\nu^2 m_\nu + b_\nu^2 \sum_{k=\nu+1}^{2} m_k,\quad B_\nu = a_\nu m_\nu + b_\nu \sum_{k=\nu+1}^{2} m_k,\quad \left(\sum_{3}^{2} = 0,\ \nu = 1, 2\right),$$

l'énergie cinétique du système de pendules physiques par rapport au système de coordonnées Oyz, considérée comme constante, est:

$$(2)\qquad T = \frac{1}{2}\left[2 b_1 B_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\,\varphi'_1\varphi'_2 + (A_1 + I_1)\,\varphi'^2_1 + (A_2 + I_2)\,\varphi'^2_2\right].$$

Désignons par d_ν la distance de S_ν à l, par $\gamma_{\nu1}$, $\gamma_{\nu2}$ et $\gamma_{\nu3}$ les angles que forme la droite l respectivement avec la droite $O_{\nu-1}S_\nu$, avec la droite passant par S_ν, située dans le plan Oyz et perpendiculaire à $O_{\nu-1}S_\nu$, et avec la droite passant par S_ν et perpendiculaire à Oyz. On obtient alors

$$(3)\qquad d_\nu^2 = y_\nu^2 \sin^2\beta + [(r + y_\nu \cos\beta)\cos\alpha - z_\nu \sin\alpha]^2,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos\gamma_{\nu1} = \sin\alpha\cos\beta\sin\varphi_\nu + \cos\alpha\cos\varphi_\nu, \\ \cos\gamma_{\nu2} = \sin\alpha\cos\beta\cos\varphi_\nu - \cos\alpha\sin\varphi_\nu, \\ \cos\gamma_{\nu3} = \sin\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

En utilisant les formules (3) et (4) il est facile de voir que le travail virtuel des forces d'inertie est

$$\delta A = \delta \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\omega^2}{2}\left(m_\nu\{y_\nu^2 \sin^2\beta + [(r + y_\nu\cos\beta)\cos\alpha - z_\nu\sin\alpha]^2\} + \right.$$

$$(5)\qquad + [I'_\nu(\sin\alpha\cos\beta\sin\varphi_\nu + \cos\alpha\cos\varphi_\nu)^2 +$$

$$\left. + I''_\nu(\sin\alpha\cos\beta\cos\varphi_\nu - \cos\alpha\sin\varphi_\nu)^2 + I_\nu\sin^2\alpha\cos^2\beta]\right).$$

Ayant en vue le travail des forces d'inertie et de la gravité et que le travail des forces centrifuges est nul, l'énergie potentielle du système de pendules est donnée par l'expression

$$U = -q\sum_{\nu=1}^{2} B_\nu \cos\varphi_\nu - \frac{\omega^2}{2}\sum_{\nu=1}^{2}\{[QA_\nu + (\sin^2\alpha\cos^2\beta I'_\nu + \cos^2\alpha I''_\nu)]\sin^2\varphi_\nu +$$

$$+ [SA_\nu + (I'_\nu\cos^2\alpha + I''_\nu\sin^2\alpha\cos^2\beta)]\cos^2\varphi_\nu -$$

(6)
$$- 2WP_\nu\sin\varphi_\nu\cos\varphi_\nu - 2rRB_\nu\cos\varphi_\nu + 2rVB_\nu\sin\varphi_\nu + r^2 m_\nu\cos^2\alpha +$$

$$+ I_\nu\sin^2\alpha\cos^2\beta\} - \omega^2 b_1 B_2[Q\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + S\cos\varphi_1\cos\varphi_2 -$$

$$- W\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

où

$$P_\nu = A_\nu + I''_\nu - I'_\nu, \quad H_\nu = A_\nu + I_\nu, \quad (\nu = 1, 2),$$

$$Q = \sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta, \quad S = \sin^2\alpha,$$

$$R = \sin\alpha\cos\alpha, \quad V = \cos^2\alpha\cos\beta, \quad W = \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta.$$

L'intégrale de la force vive est par conséquent $T + U = h$.

Les équations de Lagrange nous donnent le système d'équations différentielles du mouvement relatif du pendule physique double

$$H_\nu\varphi''_\nu + \Xi[\cos(\varphi_\nu - \varphi_k)\varphi''_k + \sin(\varphi_\nu - \varphi_k)\varphi'^2_k] = -qB_\nu\sin\varphi_\nu +$$

(7)
$$+ \omega^2\left\{\frac{1}{2}(Q - S)P_\nu\sin 2\varphi_\nu - WP_\nu\cos 2\varphi_\nu + rB_\nu(V\cos\varphi_\nu + R\sin\varphi_\nu) -\right.$$

$$- b_1 B_2 W\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + (Q\cos\varphi_\nu\sin\varphi_k - S\sin\varphi_\nu\cos\varphi_k), \quad (\nu = 1, 2).$$

Ξ représente ici l'opérateur défini par

(8)
$$\Xi[\ldots] = B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1} b_k[\ldots] + b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{2} B_k[\ldots].$$

Évidemment le système (7) est satisfait pour $\varphi_\nu = 0$ si l'on a

(9) $W(P_\nu + b_1 B_2) - rVB_\nu = 0$, ou bien $\operatorname{tg}\alpha = rB_\nu/(P_\nu + b_1 B_2)$, $(\nu = 1,2)$.

Au cas contraire $\varphi_\nu = 0$ ne représente pas la position d'équilibre du système (8) et par opposition aux mouvements non relatifs considérés dans [1], Oz ici n'est pas en général l'axe d'un état d'équilibre. Pour voir s'il existe un tel état on effectue dans (8) la substitution $\varphi_\nu = \theta_\nu + \lambda\psi_\nu$, $(\nu = 1,2)$, où λ est un paramètre suffisamment petit, et

après avoir développé les fonctions renfermant λ suivant les puissances de λ on trouve

$$\lambda\{H_\nu \psi_\nu'' + \Xi[\cos(\theta_\nu - \theta_k)\psi_k'']\} = -qB_\nu \sin\theta_\nu +$$

$$+\omega^2\left\{\frac{1}{2}(Q-S)P_\nu \sin 2\theta_\nu - WP_\nu \cos 2\theta_\nu + rB_\nu(V\cos\theta_\nu + R\sin\theta_\nu) -\right.$$

$$\left. -b_1 B_2 W\cos(\theta_1+\theta_2) + \Xi(Q\cos\theta_\nu \sin\theta_k - S\sin\theta_\nu\cos\theta_k)\right\} + \tag{10}$$

$$+\lambda\{-qB_\nu\cos\theta_\nu\cdot\psi_\nu + \omega^2[(Q-S)P_\nu\cos 2\theta_\nu\psi_\nu + 2WP_\nu\sin 2\theta_\nu\cdot\psi_\nu +$$

$$+ rB_\nu(R\cos\theta_\nu - V\sin\theta_\nu)\psi_\nu + b_1 B_2 W\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot(\psi_1+\psi_2) +$$

$$+\Xi[(Q\psi_k - S\psi_\nu)\cos\theta_\nu\cos\theta_k - (Q\psi_\nu - S\psi_k)\sin\theta_\nu\sin\theta_k]\} + f_\nu,\ (\nu=1,2),$$

où f_1 et f_2 contiennent des termes dans lesquels λ est de puissance supérieure à 1.

Compte tenu du théorème de Lagrange-Dirichlet on sait que si l'énergie potentielle U possède un minimum, il en existe une position d'équilibre stable; les conditions nécessaires sont en ce cas

$$(\partial U/\partial\varphi_\nu)_{\varphi_\nu=\theta_\nu} = -qB_\nu\sin\theta_\nu + \omega^2\left[\frac{1}{2}(Q-S)P_\nu\sin 2\theta_\nu - WP_\nu\cos 2\theta_\nu +\right.$$

$$+ rB_\nu(V\cos\theta_\nu + R\sin\theta_\nu) - b_1 B_2 W\cos(\theta_1+\theta_2) + \tag{11}$$

$$\left.+\Xi(Q\cos\theta_\nu\sin\theta_k - S\sin\theta_\nu\cos\theta_k)\right] = 0,\quad (\nu=1,2).$$

À partir de ce système transcendant de deux équations on doit déterminer les angles θ_1 et θ_2 pour lesquels on va chercher la position d'équilibre.

Prenant en considération (11), divisant par λ dans les équations (10) et posant $\lambda = 0$, on obtient le système générateur

$$H_\nu\psi_\nu'' + \Xi[\cos(\theta_\nu-\theta_k)\cdot\psi_k''] = -qB_\nu\cos\theta_\nu\cdot\psi_\nu +$$

$$+\omega^2[(Q-S)P_\nu\cos 2\theta_\nu\cdot\psi_\nu + 2WP_\nu\sin 2\theta_\nu\cdot\psi_\nu + rB_\nu(R\cos\theta_\nu - V\sin\theta_\nu)\psi_\nu +$$

$$+ b_1 B_2 W\sin(\theta_1+\theta_2)\cdot(\psi_1+\psi_2) + \Xi[(Q\psi_k - S\psi_\nu)\cos\theta_\nu\cos\theta_k - \tag{12}$$

$$-(Q\psi_\nu - S\psi_k)\sin\theta_\nu\sin\theta_k],\quad (\nu=1,2).$$

Ce système possède des intégrales de la forme

$$\psi_\nu = L_\nu\exp(\varrho t),\quad (\nu=1,2),$$

où L_ν satisfait au système

$$(a_{\nu1}\varrho^2 + b_{\nu1})L_1 + (a_{\nu2}\varrho^2 + b_{\nu2})L_2 = 0,\quad (\nu=1,2). \tag{13}$$

Ici

$$a_{\nu\nu} = H_\nu, \quad a_{12} = a_{21} = b_1 B_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

$$b_{\nu\nu} = qB_\nu \cos\theta_\nu - \omega^2 [(Q - S) P_\nu \cos 2\theta_\nu + 2WP_\nu \sin 2\theta_\nu +$$

$$+ rB_\nu (R\cos\theta_\nu - V\sin\theta_\nu) + b_1 B_2 W \sin(\theta_1 + \theta_2) - b_1 B_2 (Q\sin\theta_1 \sin\theta_2 + S\cos\theta_1 \cos\theta_2),$$

$$b_{12} = b_{21} = -\omega\, b_1 B_2 [Q\cos\theta_1 \cos\theta_2 + S\sin\theta_1 \sin\theta_2 + W\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

L'équation caractéristique de (12) est

$$\begin{vmatrix} a_{11}\varrho^2 + b_{11} & a_{12}\varrho^2 + b_{12} \\ a_{21}\varrho^2 + b_{22} & a_{22}\varrho^2 + b_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Puisque $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ et $a_{12} = a_{21}$ il en résulte que toutes les racines de l'équation séculaire (14) sont réelles par rapport à ϱ^2.

Si l'on pose $a_{12}\varrho^2 + b_{12} = (q/u)\, b_1 B_2$, l'équation caractéristique (14) prend la forme

$$\Delta_2(u) = \begin{vmatrix} \dfrac{a_{11}}{a_{12}} b_1 B_2 + \left(b_{11} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}} b_{12}\right)\dfrac{u}{q} & b_1 B_2 \\ b_1 B_2 & \dfrac{a_{22}}{a_{12}} b_1 B_2 + \left(b_{22} - \dfrac{a_{22}}{a_{12}} b_{12}\right)\dfrac{u}{q} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Dans nos considérations ultérieures nous allons admettre que $\cos(\theta_1 - \theta_2) > 0$; nous allons examiner tout d'abord le caractère des racines u_1 et u_2, $(u_1 < u_2)$, de l'équation (15).

I-e cas.

$$b_{11} - (a_{11}/a_{12})\, b_{12} > 0, \quad b_{22} - (a_{22}/a_{12})\, b_{12} > 0.$$

Puisque

$$\begin{vmatrix} (a_{11}/a_{12})\, b_1 B_2 & b_1 B_2 \\ b_1 B_2 & (a_{22}/a_{12})\, b_1 B_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ et } (a_{22}/a_{12})\, b_1 B_2 > 0,$$

l'équation (15) a des racines négatives $u_1 < u_2 < 0$.

Suivant le signe de l'expression $(q/u)\, b_1 B_2 - b_{12}$ ou bien $(q/u) + \omega^2 \Theta$, où

$$\Theta = Q\cos\theta_1 \cos\theta_2 + S\sin\theta_1 \sin\theta_2 + W\sin(\theta_1 + \theta_2),$$

on peut avoir trois cas subordonnés:

1. Si

$$\omega^2 < -q/(u_1 \Theta),$$

l'équation (14) possède deux paires de racines imaginaires $\pm i\varrho_1$ et $\pm i\varrho_2$.

2. Si

$$-q/(u_1 \Theta) < \omega^2 < -q/(u_2 \Theta),$$

l'équation (14) a une paire de racines purement imaginaires $\pm i\varrho_2$ et deux racines réelles $\pm \xi_1$.

3. Si

$$-q/(u_2 \Theta) < \omega^2,$$

l'équation (14) a deux couples de racines réelles $\pm \xi_1$ et $\pm \xi_2$.

II-e cas.

$$b_{11} - (a_{11}/a_{12})\, b_{12} > 0, \quad b_{22} - (a_{22}/a_{12})\, b_{12} < 0,$$

ou bien

$$b_{11} - (a_{11}/a_{12})\, b_{12} < 0, \quad b_{22} - (a_{22}/a_{12})\, b_{12} > 0.$$

L'équation (15) a alors une racine positive et une racine négative

$$u_1 < 0 < u_2.$$

On peutavoir les subcas suivants :

1. Si

$$\omega^2 < -[q/(u_1\Theta)],$$

l'équation (14) a une paire de racines purement imaginaires $\pm i\varrho_1$ et une paire de racines réelles $\pm\xi_2$.

2. Si

$$-[q/(u_1\Theta)] < \omega^2,$$

l'équation (14) a deux paires de racines réelles $\pm\xi_1$ et $\pm\xi_2$.

III-e cas.

$$b_{11} - (a_{11}/a_{12})\, b_{12} < 0, \quad b_{22} - (a_{22}/a_{12})\, b_{12} < 0.$$

L'équation (15) a deux racines positives

$$0 < u_1 < u_2,$$

et l'équation (14) possède deux paires de racines réelles $\pm\xi_1$ et $\pm\xi_2$.

Admettons à présent que le système transcendant (11) a au moins une solution pour θ_1 et θ_2. Compte tenu de la grande complexité de ce système nous n'allons pas envisager ici la question de l'existence d'une solution, mais il est facile d'en trouver une pour quelque cas particulier.

La solution θ_1 et θ_2 du système (11) représente la position d'équilibre d'un pendule physique double. Pour le cas I, c'est-à-dire lorsque les racines de (14) sont $\pm i\varrho_1$ et $\pm i\varrho_2$, cette position est stable.

Nous allons montrer, en utilisant la méthode donnée dans [3, § 5], qu'autour de la position d'équilibre stable non-verticale le système de deux pendules possède, en géneral, deux familles de mouvements périodiques.

L'intégrale commune du système générateur (12) est

$$(16)\qquad \begin{cases} \psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{2} L_{\nu\mu}\,(C_\mu \cos \varrho_\mu t + D_\mu \sin \varrho_\mu t), \\ \psi'_\nu = \sum_{\mu=1}^{2} L_{\nu\mu}\,\varrho_\mu\,(-C_\mu \sin \varrho_\mu t + D_\mu \cos \varrho_\mu t), \quad (\nu = 1, 2), \end{cases}$$

où $L_{1\mu}$ et $L_{2\mu}$, $(\mu = 1, 2)$, satisfont au système d'équations

$$(17)\qquad (a_{\nu 1}\varrho_\mu^2 - b_{\nu 1})\, L_{1\mu} + (a_{\nu 2}\varrho_\mu^2 - b_{\nu 2})\, L_{2\mu} = 0, \quad (\nu = 1, 2),$$

le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, et C_μ et D_μ, $(\mu = 1, 2)$, représentent quatre constantes arbitraires.

Considérons une solution arbitraire du système d'équations différentielles (10) ayant les vitesses initiales

$$(18)\qquad \psi_\nu(0) = \sum_{\mu=1}^{2} L_{\nu\mu}\beta_\mu, \quad \psi'_\nu(0) = \sum_{\mu=1}^{2} L_{\nu\mu}\varrho_\mu\alpha_\mu, \quad (\nu = 1, 2),$$

où α_μ et β_μ seront déterminés plus tard. Cette solution est de la forme

$$(19)\quad \psi_\nu(t) = \psi_\nu(t, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda),\ \psi'_\nu(t) = \psi'_\nu(t, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda),\ (\nu = 1, 2),$$

α_1 et α_2 pouvant être entièrement arbitraires et sans restriction de généralité on peut poser $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$, et prenant en considération (16), pour $\lambda = 0$ on obtient

$$(20)\quad \begin{cases} \psi_\nu(t, 1, \alpha_2, 0, \beta_2, 0) = L_{\nu 1} \sin \varrho_1 t + L_{\nu 2}(\beta_2 \cos \varrho_2 t + \alpha_2 \sin \varrho_2 t), \\ \psi'_\nu(t, 1, \alpha_2, 0, \beta_2, 0) = L_{\nu 1} \varrho_1 \cos \varrho_1 t + L_{\nu 2} \varrho_2 (-\beta_2 \sin \varrho_2 t + \alpha_2 \cos \varrho_2 t), \\ \qquad\qquad (\nu = 1, 2). \end{cases}$$

Les membres droits des intégrales (19) peuvent être développées en séries entières suivant α_2, β_2 et λ lorsque $|\alpha_2|$ et $|\beta_2|$ sont suffisamment petits. Ces intégrales auront la période modifiée $(2\pi + 2\delta)/\varrho_1$ si

$$(21)\quad \begin{cases} \psi_\nu((2\pi + 2\delta)/\varrho_1, 1, \alpha_2, 0, \beta_2, \lambda) - \psi_\nu(0, 1, \alpha_2, 0, \beta_2, \lambda) = 0, \\ \psi'_\nu((2\pi + 2\delta)/\varrho_1, 1, \alpha_2, 0, \beta_2, \lambda) - \psi'_\nu(0, 1, \alpha_2, 0, \beta_2, \lambda) = 0, \ (\nu = 1, 2). \end{cases}$$

Si trois des équations (21) sont satisfaites, l'équation suivante, la quatrième par exemple, est la conséquence de celles-ci, la dérivée partielle $\partial(T + U)/\partial\psi_2$ pour $\varphi_\nu = \theta_\nu + \lambda\psi_\nu(0)$, $\varphi'_\nu = \lambda\psi'_\nu(0)$ étant approximativement égale à

$$2\lambda^2 [b_1 B_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \psi'_1(0) + (A_2 + I_2)\psi'_2(0)]_{\lambda=0} =$$
$$= 2\varrho_1 \lambda^2 (a_{21} L_{11} + a_{22} L_{21}) = 2\lambda^2 (b_{21} L_{11} + b_{22} L_{21})/\varrho_1$$

et par suite différente de zéro; si l'on admet le contraire il y aurait $b_{21}/b_{22} = a_{22}/a_{21}$, ce qui est en contradiction avec le I-e cas.

On peut montrer d'une manière analogue à celle utilisée dans le travail [3] qu'il est possible, à partir des trois premières équations (21), de trouver α_2, β_2 et δ comme fonctions uniques de λ.

Ayant en vue (20) ces trois équations sont :

$$(22)\quad \begin{cases} 2L_{11}\delta + L_{12}\{\sin 2(\varrho_2/\varrho_1) \cdot \alpha_2 + [\cos 2(\varrho_2/\varrho_1) - 1]\beta_2\} + F_1 = 0, \\ 2L_{21}\delta + L_{22}\{\sin 2(\varrho_2/\varrho_1) \cdot \alpha_2 + [\cos 2(\varrho_2/\varrho_1) - 1]\beta_2\} + F_2 = 0, \\ L_{12}\varrho_2 + \{[\cos 2(\varrho_2/\varrho_1) - 1]\alpha_2 - \sin 2(\varrho_2/\varrho_1) \cdot \beta_2\} + F_3 = 0, \end{cases}$$

où F_ν, $(\nu = 1, 2, 3)$, représentent des développements en série suivant $\lambda, \alpha_2, \beta_2$ et δ; les termes ne contenant pas le facteur λ sont au moins du deuzième degré.

Le déterminant fonctionnel du système (21) est

$$\Phi = 8\varrho_2 \sin^2(\varrho_2/\varrho_1) \cdot L_{12} \Delta,$$

et par suite différent de zéro lorsque ϱ_2 n'est pas multiple de ϱ_1.

Il en résulte que lorsque la condition ci-dessus est satisfaite, dans le I-e cas il existe une famille de mouvements périodiques relatifs autour de la position non-verticale θ_1 et θ_2 dépendant d'un paramètre, à période approximative $2\pi/\varrho_1$. En remplaçant ϱ_1 par ϱ_2 on obtient encore une famille de mouvements périodiques.

Dans tous les autres cas la position d'équilibre θ_1 et θ_2 est instable, les familles de mouvements périodiques et asymptotiques pouvant être trouvées comme dans [1, § 5].

Dans le cas I.2 il existe autour da la position d'équilibre θ_1 et θ_2 une famille de mouvements périodiques dépendant de la racine $i\varrho_2$ et une famille de mouvements asymptotiques dépendant d'un paramètre qui correspond à la racine négative $-\xi_1$.

Dans le cas I. 3 il y a une famille de mouvements asymptotiques qui dépend de deux paramètres et correspond aux racines négatives $-\xi_1$, $-\xi_2$.

Dans le cas II. 1 il y a une famille de mouvements périodiques correspondant à la racine $i\varrho_1$ et une famille de mouvements asymptotiques qui dépend d'un paramètre et correspond à la racine $-\xi_2$.

Les cas II. 2, III et I. 3 sont identiques.

Reçu le 15 VI 1961

Université de Sofie,
R. P. Bulgarie

BIBLIOGRAPHIE

1. Bradistilov G., Math. Ann., 1938, **116**, *2*.
2. Manolov S., Časopis pro pěstovani matematiky, 1959, *84*.
3. Bradistilov G., Math. Ann., 1939, **116**, *4*.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ДВОЙНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, ЛЕЖАЩЕГО В ПОДВЕРЖЕННОЙ РОТАЦИИ ПЛОСКОСТИ

(Резюме)

В этой работе доказывается наличие периодических движений двойного маятника, лежащего в плоскости Oyz, которая проходит через центр G равномерно вертящейся сферы (например, земной сферы) вокруг оси, с постоянной угловой скоростй. Оси l и z проходят через G, заключая угол α. Сфера неизменно связана с координатной системой $O'XYZ$ таким образом, что O' лежит на l, ось Z является параллельной z, а ось Y, проходящая через O, заключает с осью y угол β.

Проведенные исследования показывают, что ось Oz не является вообще осью равновесной. Положение невертикального равновесия θ_1 и θ_2, вокруг которого при некоторых условиях имеют место периодические движения, определяется из одной трансцендентной системы.

ASUPRA CAZULUI GENERAL DE MIŞCĂRI PERIODICE RELATIVE ALE UNUI PENDUL FIZIC DUBLU SITUAT ÎNTR-UN PLAN SUPUS LA ROTAŢIE

(Rezumat)

Se demonstrează, în corespondenţă cu titlul articolului, existenţa mişcărilor periodice. Se găseşte, în particular, că axa Oz nu este în general vorbind o axă de echilibru. Un sistem de ecuaţii transcendente determină poziţiile de echilibru nevertical θ_1 şi θ_2 în jurul cărora au loc, în anumite condiţii, mişcări periodice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. C. 532.5

FORCED FLOW OF A NON-NEWTONIAN LIQUID AGAINST A ROTATING DISK

BY
M. K. JAIN

1. Introduction

The steady forced flow of an incompressible viscous liquid against a rotating disk was first considered by Schlichting and Truckenbrodt [4]. The liquid occupies the semiinfinite region on one side of the disk and the motion is rotationally symmetric. Hannah [5] has obtained more accurate solution of the problem. It is shown that the thickness of the layer carried along by the rotation depends on the ratio of the velocity of undisturbed flow and the peripheral velocity of the disk. Earlier, Homann (1936), Frössling [3] (the flow near a stagnation point), Th. v. Kármán [1] and Cochran [2] (the flow near a rotating disk) have discussed two important particular cases of this problem.

In this paper, we shall consider, the laminar steady forced flow of a non-Newtonian liquid against a rotating disk by using the second order stress-strain velocity relations of classical hydrodynamics. The resulting system of non-linear differential equations have been solved by extremal point collocation method. It is found that the effect of cross-viscosity depends on a non-dimensional number R_c.

2. Equations of motion

The equations of motion of viscous liquid in cylindrical polar coordinates with terms of aximuthal variation neglected, are

$$\varrho\,[u\,(\partial u/\partial r) + w\,(\partial u/\partial z) - v^2/r] = \partial p_{rr}/\partial r + \partial p_{zr}/\partial z + (p_{rr} - p_{\theta\theta})/r, \tag{2.1}$$

$$\varrho\,[u\,(\partial v/\partial r) + w\,(\partial v/\partial z) + uv/r] = \partial p_{r\theta}/\partial r + \partial p_{z\theta}/\partial z + 2/r)\,p_{r\theta}, \tag{2.2}$$

$$\varrho\,[u\,(\partial w/\partial r) + w\,(\partial w/\partial z)] = \partial p_{rz}/\partial r + \partial p_{zz}/\partial z + p_{rz}/r, \tag{2.2}$$

where u, v, w are the velocity components in the directions of r, θ, z respectively and ϱ is density.

The equation of continuity is

$$\partial u/\partial r + u/r + \partial w/\partial z = 0. \tag{2.4}$$

The appropriate boundary conditions (see [4]) are

$$\text{(2.5)} \qquad \begin{cases} z = 0: & u = 0, \quad v = r\Omega, \quad w = 0, \\ z = \infty: & u = U, \quad v = 0, \end{cases}$$

where Ω is the angular velocity of the disk and $U = ar$, a being constant.

The stress components are related to the strain velocity components by the relation

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{bmatrix} p_{rr} & p_{r\theta} & p_{rz} \\ p_{\theta r} & p_{\theta\theta} & p_{\theta z} \\ p_{zr} & p_{z\theta} & p_{zz} \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{bmatrix} + \\ + \mu_c \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{r\theta} & e_{zz} \end{bmatrix},$$

where

$$e_{rr} = 2(\partial u/\partial r), \quad e_{\theta\theta} = 2u/r, \quad e_{zz} = 2(\partial w/\partial z),$$

$$e_{r\theta} = \partial v/\partial r - v/r, \quad e_{\theta z} = \partial v/\partial z, \quad e_{zr} = \partial w/\partial r + \partial u/\partial z,$$

μ and μ_c are coefficients of viscosity and cross-viscosity respectively.

Let the velocity components in cylindrical coordinates be given by relations

$$\text{(2.7)} \qquad u = rf'(z), \quad v = rg(z), \quad w = -2f(z).$$

Substituting equation (2.7) into (2.6), we obtain the stress components in non-Newtonian liquid as

$$\text{(2.7 a)} \begin{cases} p_{rr} = -p + 2\mu f' + \mu_c(4f'^2 + r^2 f''^2), \; p_{\theta\theta} = -p + 2\mu f' + \mu_c(4f'^2 + r^2 g'^2), \\ p_{zz} = -p - 4\mu f' + \mu_c[r^2(f''^2 + g'^2) + 16 f'^2], \; p_{r\theta} = \mu_c r^2 f'' g', \\ p_{zr} = \mu r f'' - 2\mu_c r f' f'', \; p_{\theta z} = \mu r g' - 2\mu_c r f' g'. \end{cases}$$

On using (2.7) and the above stress components, the equations of motion become

$$r(f'^2 - g'^2 - 2ff'') = -(1/\varrho)(\partial p/\partial r) + r[\nu f''' + \nu_c(f''^2 - 2f' f''' - g'^2)],$$

$$2f'g - 2fg' = \nu g'' + \nu_c\, 2f''g' - 2f' g''),$$

$$4ff' = -(1/\varrho)(\partial p/\partial z) - 2\nu f'' + \nu_c(2r^2 f'' f''' + 2r^2 g' g'' + 28 f' f''),$$

where ν and ν_c are the kinematic coefficients of viscosity and cross-viscosity respectively.

The condition of integrability gives

$$\partial[\nu f''' + \nu_c(f''^2 - 2f' f''' - g'^2) - f'^2 + g'^2 + 2ff'']/\partial z = 2\nu_c(2f'' f''' + 2g' g'').$$

On integration and simplifying, we get

$$\nu f''' + 2ff'' - f'^2 + g'^2 - \nu_c (2f'f''' + f''^2 + 3g'^2) = C,$$

where C is a constant of integration to be determined from the conditions

$$f''(\infty) = f'''(\infty) = 0, \quad f'(\infty) = a, \quad g(\infty) = g'(\infty) = 0.$$

We get $C = -a^2$ and the required equations for determining the velocity profile become

$$\nu f''' + 2ff'' - f'^2 + g^2 - \nu_c (2f'f''' + f''^2 + 3g'^2) + a^2 = 0, \tag{2.8}$$

$$\nu g'' + 2fg' - 2f'g + \nu_c (2f''g' - 2f'g'') = 0. \tag{2.9}$$

Substituting (2.7) into the boundary conditions (2.5), we get

$$\begin{cases} z = 0: & f' = 0, \quad g = \Omega, \quad f = 0, \\ z = \infty: & f' = a, \quad g = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Now two cases arise according as $\Omega \leqslant a$ and $\Omega \geqslant a$.

Case 1: $\Omega \leqslant a$.
The equations (2.8) and (2.9) with the following transformations

$$f(z) = \sqrt{a\nu}\, F(\zeta), \quad g(z) = aG(\zeta), \quad \zeta = \sqrt{a/\nu}\, z$$

become

$$F''' + 2FF'' - F'^2 + G^2 - R_c (2F'F''' + F''^2 + 3G'^2) + 1 = 0, \tag{2.11}$$

$$G'' + 2FG' - 2F'G - R_c (2F'G'' - 2F''G') = 0. \tag{2.12}$$

The boundary conditions (2.10) become

$$\begin{cases} \zeta = 0: & F' = 0, \quad G = K, \quad F = 0, \\ \zeta = \infty: & F' = 1, \quad G = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

where $R_c = \nu_c a/\nu$, and $K = \Omega/a$.

Case II. $\Omega \geqslant a$.
On substituting

$$f(z) = \sqrt{\nu\Omega}\, F(\zeta), \quad g(z) = \Omega G(\zeta), \quad \zeta = \sqrt{\Omega/\nu}\, z,$$

the equations (2.8) and (2.9) become

$$F''' + 2FF'' - F'^2 + G^2 - R_c (2F'F''' + F''^2 + 3G'^2) + \lambda^2 = 0, \tag{2.14}$$

$$G'' + 2FG' - 2F'G - R_c (2F'G'' - 2F''G') = 0, \tag{2.15}$$

where $\lambda = a/\omega$, $R_c = \nu_c \Omega/\nu$, and a dash denotes differentiation with respect to ζ.
The boundary conditions in this case become

$$\begin{cases} \zeta = 0: & F = 0, \quad G = 1, \quad F' = 0, \\ \zeta = \infty: & F' = \lambda, \quad G = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

For $R_c = 0$, Schlichting and Truckenbrodth (*op. cit.*) have solved the above two cases by Kármán-Pohlhausen integral method. In what follows, we shall discuss the above boundary value problems for different values of R_c, λ and K.

3. Extremal point collocation method

We take a set of functions $F_0, F_1, F_2, \ldots, G_0, G_1, G_2, \ldots$ which fulfil all the boundary conditions of the problem and form a linear combination of these functions to obtain an approximate solution of the problem. We set

$$F(\zeta) \approx F_0(\zeta) + C_1 F_1(\zeta) + C_2 F_2(\zeta), \tag{3.1}$$

$$G(\zeta) \approx G_0(\zeta) + b_1 G_1(\zeta) + b_2 G_2(\zeta) \tag{3.2}$$

where for case I,

$$\begin{cases} F_0(\zeta) = \zeta - 1 + \exp(-\zeta), \quad F_1(\zeta) = 1 - 2\exp(-\zeta) + \exp(-2\zeta), \\ \qquad F_2(\zeta) = 2 - 3\exp(-\zeta) + \exp(-3\zeta), \\ G_0(\zeta) = k\exp(-3\zeta), \; G_1(\zeta) = \exp(-\zeta) - \exp(-3\zeta), \\ \qquad G_2(\zeta) = \exp(-2\zeta) - \exp(-3\zeta), \end{cases} \tag{3.3}$$

and for case II

$$\begin{cases} F_0(\zeta) = \lambda[\zeta - 1 + \exp(-\zeta)], \; F_1(\zeta) = 1 - 2\exp(-\zeta) + \exp(-2\zeta), \\ \qquad F_2(\zeta) = 2 - 3\exp(-\zeta) + \exp(-3\zeta), \\ G_0(\zeta) = \exp(-3\zeta), \; G_1(\zeta) = \exp(-\zeta) - \exp(-3\zeta), \\ \qquad G_2(\zeta) = \exp(-2\zeta) - \exp(-3\zeta). \end{cases} \tag{3.4}$$

We shall now confine our attention to the case I only, the case II can be treated in a similar way.

Substitutig (3.1) and (3.2) into (2.11), (2.12), we get the defect functions D_F and D_G as

$$\begin{aligned} D_F = {} & F_0''' + C_1 F_1''' + C_2 F_2''' + 2(F_0 + C_1 F_1 + C_2 F_2)(F_0'' + C_1 F_1'' + C_2 F_2'') - \\ & - (F_0' + C_1 F_1' + C_2 F_2')^2 + (G_0 + b_1 G_1 + b_2 G_2)^2 - \\ & - R_c[2(F_0' + C_1 F_1' + C_2 F_2')(F_0''' + C_1 F_1''' + C_2 F_2''') + \\ & + (F_0'' + C_1 F_1'' + C_2 F_2'')^2 + 3(G_0' + b_1 G_1' + b_2 G_2')^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_G = {} & G_0'' + b_1 G_1'' + b_2 G_2'' + 2(F_0 + C_1 F_1 + C_2 F_2)(G_0' + b_1 G_1' + b_2 G_2') - \\ & - 2(F_0' + C_1 F_1' + C_2 F_2')(G_0 + b_1 G_1 + b_2 G_2) - \\ & - R_c[2(F_0' + C_1 F_1' + C_2 F_2')(G_0'' + b_1 G_1'' + b_2 G_2'') - \\ & - 2(F_0'' + C_1 F_1'' + C_2 F_2'')(G_0' + b_1 G_1' + b_2 G_2')]. \end{aligned}$$

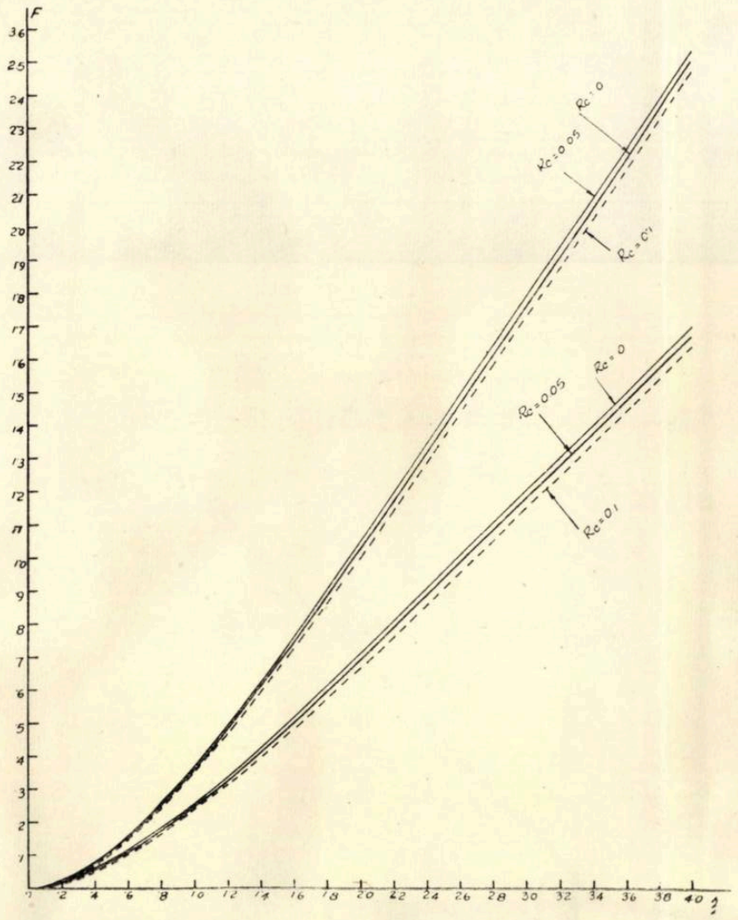


Fig. 1. — Distribution of the velocity function F.

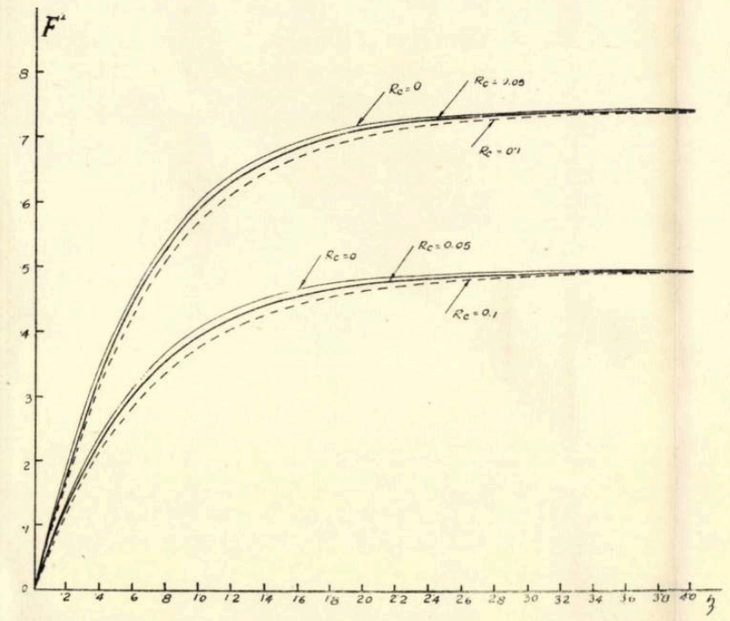


Fig. 2. — Distribution of the velocity function F'.

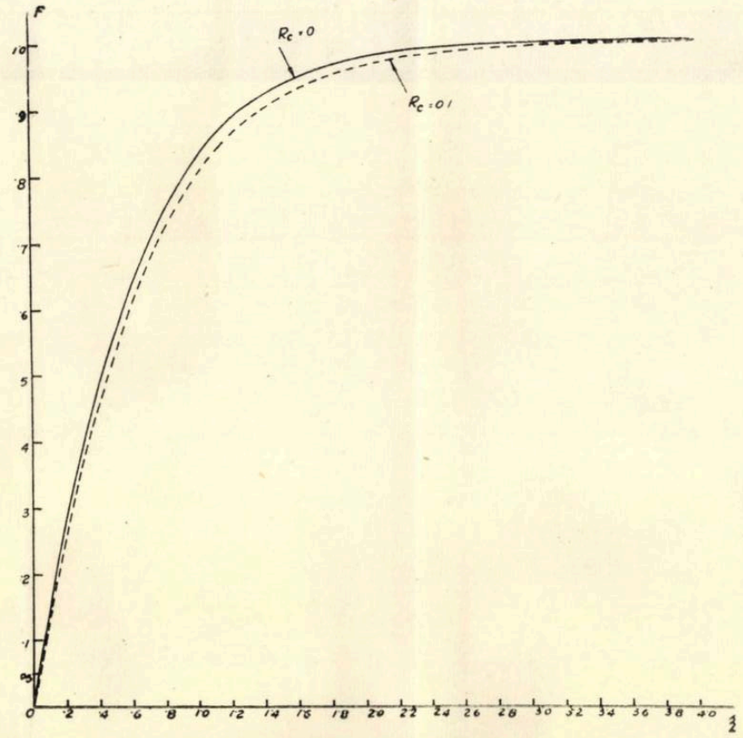


Fig. 3. — Distribution of the velocity function F' for $k = 1$.

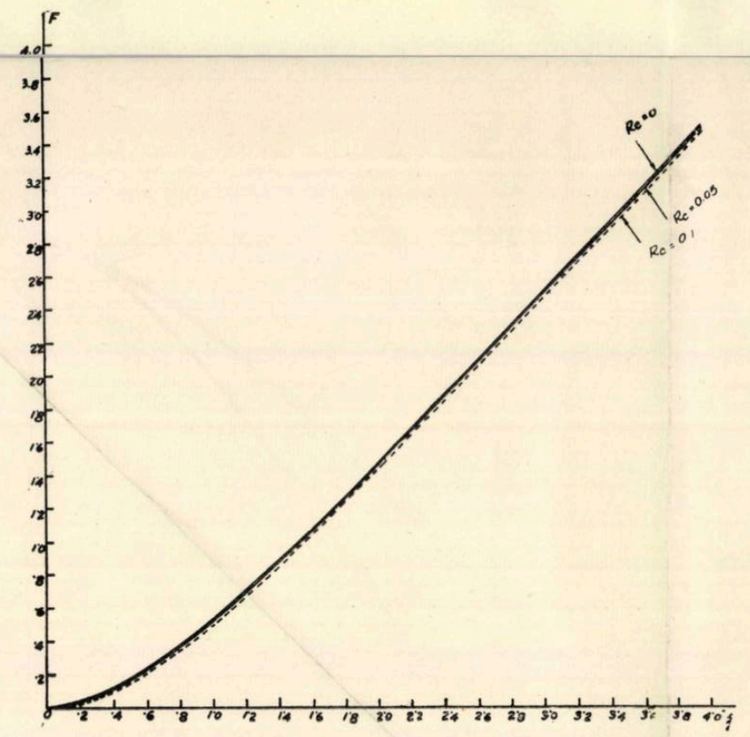


Fig. 4. — Distribution of the velocity function F for $k = 1$, $\lambda = 1$.

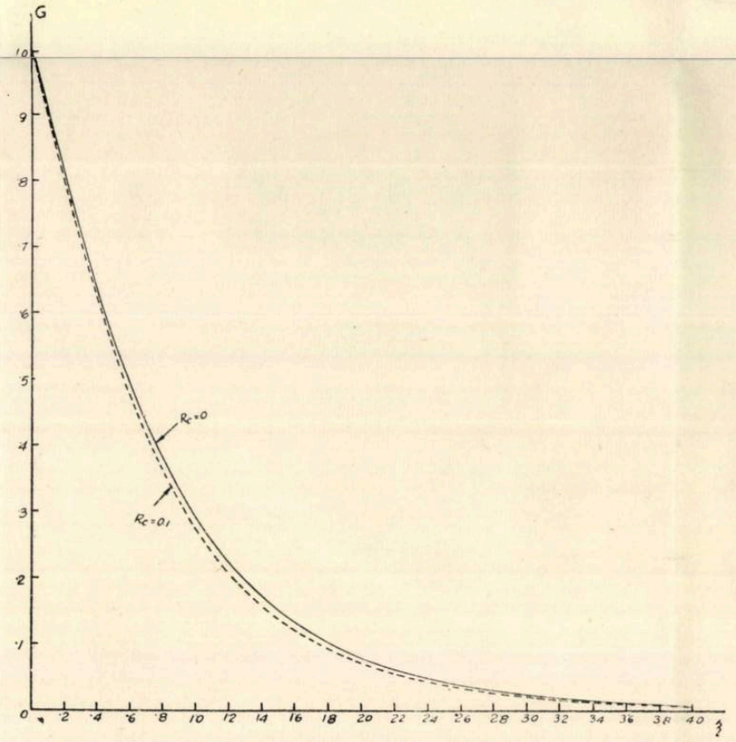


Fig. 5. — Distribution of the velocity function G for $\lambda = 3/4$.

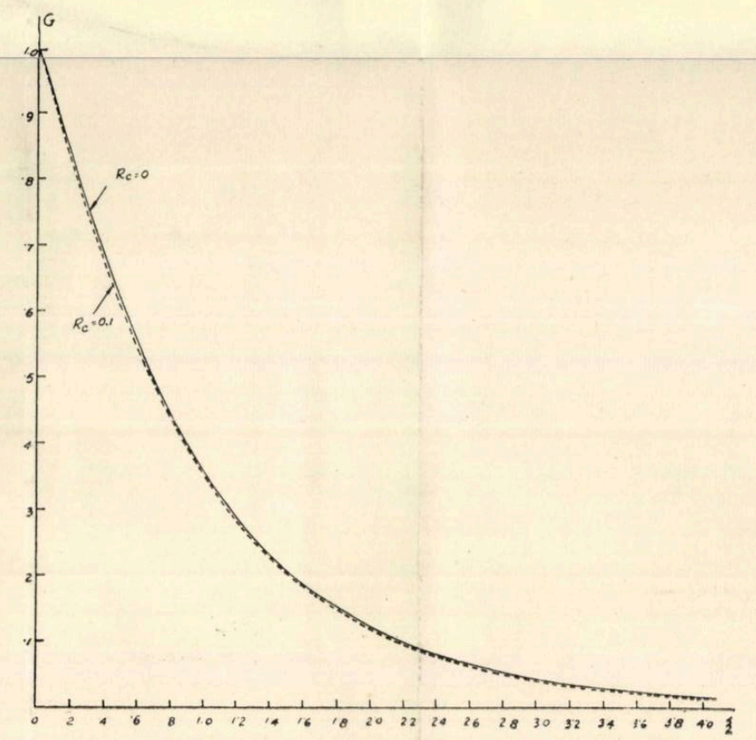


Fig. 6. — Distribution of the velocity function for $\lambda = 1/2$.

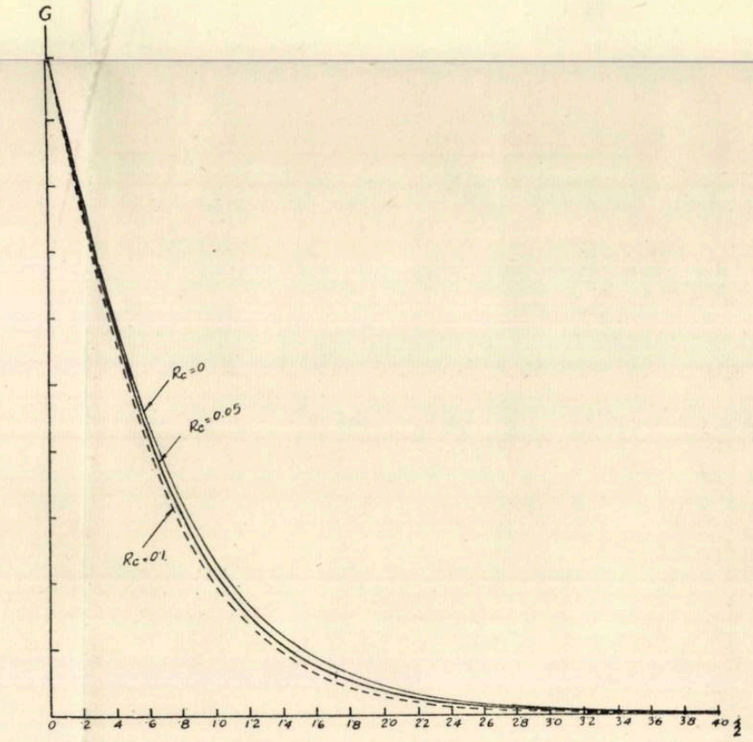


Fig. 7. — Distribution of the velocity function for $\lambda = 1/4$

The defect functions D_F and D_G are both functions of the free parameters C_1, C_2, b_1, b_2, and ζ. We shall determine the free constants such that max $|D_F| = \min$ and max $|D_G| = \min$.

Let the trial extremal collocation points be $\zeta = \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}$ and $\zeta = \zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}$ for D_F and D_G respectively We are then required to satisfy, [6]...[8]:

$$D_{F_{11}} + D_{F_{12}} = 0, \quad D_{F_{12}} + D_{F_{13}} = 0, \quad D'_F(\zeta_{1j}) = 0, \quad (j = 1, 2, 3).$$

$$D_{G_{21}} + D_{G_{22}} = 0, \quad D_{G_{22}} + D_{G_{23}} = 0, \quad D'_G(\zeta_{2j}) = 0, \quad (j = 1, 2, 3).$$

The above equations have been solved for $R_c = 0;\ 0.05; 0.1$ and $K = 1/4;\ 1/2;\ 3/4;\ 1$.

We get the constants C_1, C_2, b_1, b_2 for $K = 1/4$, $R_c = 0$, as

$$C_1 = 0.71959603, \quad C_2 = -0.18539806, \quad b_1 = 0.05171847, \quad b_2 = 0.37956525$$

and max $|D_F| = 0.1944772$, max $|D_G| = 0.0615740$.

Thus our approximating functions become

$$F(\zeta) \approx [\zeta - 1 + \exp(-\zeta)] + 0.71959603\,[1 - 2\exp(-\zeta) + \exp(-2\zeta)] - 0.18539806\,[2 - 3\exp(-\zeta) + \exp(-3\zeta)],$$

$$G(\zeta) \approx 0.25\exp(-\zeta) + 0.05171847\,[\exp(-\zeta) - \exp(-3\zeta)] + 0.3795653\,[\exp(-2\zeta) - \exp(-3\zeta)].$$

In a similar way, we have solve case II for $R_c = 0; 0.05; 0.1$ and $\lambda = 1/4;\ 1/2;\ 3/4;\ 1$.

For $R_c = 0$, $\lambda = 3/4$, the approximate solution is obtained as

$$F(\zeta) \approx 0.75\,[\zeta - 1 + \exp(-\zeta)] + 0.4510788\,[1 - 2\exp(-\zeta) + \exp(-2\zeta)] - 0.0823391\,[2 - 3\exp(-\zeta) + \exp(-3\zeta)],$$

$$G(\zeta) \approx \exp(-3\zeta) + 0.4523492\,[\exp(-\zeta) - \exp(-3\zeta)] + 1.11887036\,[\exp(-2\zeta) - \exp(-3\zeta)]$$

and max $|D_F| = 0.0821667$, max $|D_G| = 0.21314567$.

The velocity functions for $\lambda, K = 1$ and $R_c = 0;\ 0.05;\ 0.1$ are given in tables 1, 2, 3. The effect of cross-viscosity on velocity profile as R_c increases is shown in Fig. 1...7.

4. Conclusions

The circumferential and radial components of shearing stress in non-dimensional form for case I can be written as

$$\sqrt{R_a}\, p_{zr}/(\varrho u^2) = F''(0), \quad \sqrt{R_a}\, p_{z\theta}/(\varrho u^2) = G'(0), \tag{4.1}$$

where $R_a = au/\nu$ is a Reynold number for case I.

The equation (4.1) is independent of ν_c and hence cross-viscosity does influence shearing stress directly. The effect of cross-viscosity is quite significant and is given below in table 4.

Table 1

The functions for the velocity for Forced Flow against a Rotating Disk ($\lambda=1$, $K=1$, $R_c=0$)

ζ	$F(\zeta)$	$F'(\zeta)$	$F''(\zeta)$	$G(\zeta)$	$-G'(\zeta)$
0	0	0	1.5810	1	1.1064
0.1	0.0076	0.1488	1.3956	0.8893	1.0973
0.2	0.0292	0.2794	1.2173	0.7821	1.0418
0.3	0.0629	0.3927	1.0516	0.6818	0.9608
0.4	0.1072	0.4902	0.9015	0.5903	0.8679
0.5	0.1605	0.5735	0.7679	0.5083	0.7720
0.6	0.2215	0.6443	0.5605	0.4358	0.6786
0.7	0.2890	0.7042	0.5486	0.3724	0.5912
0.8	0.3620	0.7545	0.4608	0.3173	0.5113
0.9	0.4396	0.7968	0.3858	0.2699	0.4396
1.0	0.5211	0.8321	0.3220	0.2292	0.3762
1.1	0.6058	0.8615	0.2681	0.1944	0.3208
1.2	0.6932	0.8860	0.2227	0.1647	0.2727
1.3	0.7829	0.9063	0.1845	0.1396	0.2313
1.4	0.8744	0.9231	0.1527	0.1183	0.1958
1.5	0.9674	0.9370	0.1261	0.1003	0.1655
1.6	1.0617	0.9484	0.1039	0.0850	0.1398
1.7	1.1570	0.9579	0.0856	0.0722	0.1180
1.8	1.2532	0.9657	0.0703	0.0613	0.0996
1.9	1.3501	0.9720	0.0577	0.0522	0.0840
2.0	1.4476	0.9773	0.0473	0.0444	0.0709
2.1	1.5455	0.9816	0.0388	0.0379	0.0599
2.2	1.6439	0.9851	0.0317	0.0324	0.0506
2.3	1.7425	0.9879	0.0259	0.0277	0.0428
2.4	1.8414	0.9903	0.0211	0.0238	0.0363
2.5	1.9406	0.9922	0.0172	0.0204	0.0307
2.6	2.0399	0.9937	0.0139	0.0176	0.0261
2.7	2.1393	0.9950	0.0113	0.0152	0.0222
2.8	2.2388	0.9960	0.0092	0.0131	0.0189
2.9	2.3385	0.9969	0.0074	0.0114	0.0161
3.0	2.4382	0.9975	0.0060	0.0090	0.0138
3.1	2.5380	0.9981	0.0048	0.0086	0.0118
3.2	2.6378	0.9985	0.0039	0.0075	0.0102
3.3	2.7377	0.9988	0.0031	0.0066	0.0087
3.4	2.8376	0.9991	0.0025	0.0058	0.0075
3.5	2.9375	0.9993	0.0020	0.0051	0.0065
3.6	3.0375	0.9995	0.0016	0.0044	0.0057
3.7	3.1374	0.9997	0.0012	0.0039	0.0049
3.8	3.2374	0.9998	0.0010	0.0035	0.0043
3.9	3.3374	0.9999	0.0007	0.0031	0.0037
4.0	3.4374	0.9999	0.0006	0.0027	0.0033

Table 2

The functions for the velocity for Forced Flow against a Rotating Disk ($\lambda=1$, $K=1$, $R_c=0.05$)

ζ	$F(\zeta)$	$F'(\zeta)$	$F''(\zeta)$	$G(\zeta)$	$-G'(\zeta)$
0	0	0	1.4975	1	1.1734
0.1	0.0072	0.1420	1.3422	0.8835	1.1473
0.2	0.0279	0.2684	1.1850	0.7720	1.0783
0.3	0.0604	0.3793	1.0342	0.6686	0.9863
0.4	0.1033	0.4756	0.8942	0.5750	0.8847
0.5	0.1551	0.5585	0.7673	0.4917	0.7819
0.6	0.2146	0.6295	0.6545	0.4185	0.6833
0.7	0.2806	0.6899	0.5553	0.3548	0.5918
0.8	0.3522	0.7410	0.4692	0.2999	0.5088
0.9	0.4286	0.7841	0.3949	0.2528	0.4349
1.0	0.5088	0.8204	0.3314	0.2126	0.3699
1.1	0.5924	0.8507	0.2774	0.1785	0.3133
1.2	0.6788	0.8761	0.2316	0.1497	0.2646
1 3	0.7675	0.8973	0.1930	0.1254	0.2228
1.4	0.8581	0.9149	0.1606	0.1049	0.1871
1.5	0.9504	0.9296	0.1334	0.0877	0.1569
1.6	1.0439	0.9417	0.1107	0.0734	0.1313
1.7	1.1387	0.9518	0.0917	0.0613	0.1098
1.8	1.2343	0.9602	0.0759	0.0513	0.0917
1.9	1.3307	0.9671	0.0628	0.0429	0.0765
2.0	1.4277	0.9728	0.0519	0.0359	0.0639
2.1	1.5252	0.9775	0.0429	0.0301	0.0533
2.2	1.6231	0.9815	0.0354	0.0252	0.0444
2.3	1.7215	0.9847	0.0293	0.0211	0.0370
2.4	1.8200	0.9873	0.0241	0.0176	0.0309
2.5	1.9189	0.9895	0.0199	0.0149	0.0258
2.6	2.0180	0.9913	0.0164	0.0126	0.0215
2.7	2.1172	0.9928	0.0136	0.0106	0.0180
2.8	2.2165	0.9941	0.0112	0.0090	0.0150
2.9	2.3160	0.9951	0.0092	0.0076	0.0126
3.0	2.4155	0.9959	0.0076	0.0064	0.0105
3.1	2.5152	0.9966	0.0063	0.0055	0.0088
3.2	2.6148	0.9972	0.0052	0.0046	0.0074
3.3	2.7146	0.9977	0.0043	0.0040	0.0063
3.4	2.8144	0.9981	0.0036	0.0034	0.0053
3.5	2.9142	0.9984	0.0029	0.0029	0.0044
3.6	3.0141	0.9987	0.0024	0.0025	0.0038
3.7	3.1139	0.9989	0.0020	0.0021	0.0032
3.8	3.2138	0.9991	0.0017	0.0019	0.0027
3.9	3.3137	0.9992	0.0014	0.0016	0.0023
4.0	3.4137	0.9993	0.0012	0.0014	0.0020

Table 3

The function for the velocity for Forced Flow against a Rotating Disk ($\lambda=1$, $K=1$, $R_c=0.1$)

ζ	$F(\zeta)$	$F'(\zeta)$	$F''(\zeta)$	$G(\zeta)$	$-G'(\zeta)$
0	0	0	1.4021	1	1.2400
0.1	0.0068	0.1342	1.2794	0.8777	1.1972
0.2	0.0264	0.2555	1.1457	0.7619	1.1145
0.3	0.0575	0.3634	1.0115	0.6555	1.0117
0.4	0.0986	0.4580	0.8832	0.5598	0.9015
0.5	0.1487	0.5403	0.7645	0.4751	0.7919
0.6	0.2063	0.6113	0.6571	0.4012	0.6880
0.7	0.2706	0.6721	0.5616	0.3373	0.5924
0.8	0.3405	0.7240	0.4777	0.2824	0.5064
0.9	0.4151	0.7680	0.4048	0.2357	0.4302
1.0	0.4938	0.8053	0.3419	0.1961	0.3636
1.1	0.5760	0.8367	0.2880	0.1626	0.3059
1.2	0.6610	0.8631	0.2420	0.1346	0.2564
1.3	0.7485	0.8853	0.2031	0.1111	0.2142
1.4	0.8380	0.9040	0.1701	0.0915	0.1784
1.5	0.9292	0.9196	0.1424	0.0752	0.1482
1.6	1.0218	0.9326	0.1191	0.0617	0.1229
1.7	1.1156	0.9435	0.0995	0.0505	0.1016
1.8	1.2104	0.9526	0.0831	0.0413	0.0838
1.9	1.3061	0.9602	0.0694	0.0337	0.0691
2.0	1.4024	0.9666	0.0580	0.0274	0.0568
2.1	1.4994	0.9719	0.0484	0.0222	0.0466
2.2	1.5968	0.9763	0.0405	0.0180	0.0382
2.3	1.6946	0.9800	0.0338	0.0146	0.0312
2.4	1.7927	0.9831	0.0283	0.0117	0.0255
2.5	1.8912	0.9857	0.0237	0.0094	0.0208
2.6	1.9899	0.9879	0.0199	0.0075	0.0169
2.7	2.0888	0.9897	0.0167	0.0060	0.0137
2.8	2.1878	0.9912	0.0140	0.0048	0.0111
2.9	2.2870	0.9925	0.0118	0.0038	0,0090
3.0	2.3863	0.9936	0.0099	0.0030	0.0073
3.1	2.4857	0.9945	0.0084	0.0023	0.0058
3.2	2.5852	0.9953	0.0071	0.0018	0.0047
3.3	2.6848	0.9959	0.0060	0.0014	0.0037
3.4	2.7844	0.9965	0.0051	0.0010	0.0030
3.5	2.8841	0.9970	0.0044	0.0008	0.0024
3.6	2.9838	0.9974	0.0037	0.0005	0.0019
3.7	3.0835	0.9977	0.0032	0.0004	0.0015
3.8	3.1833	0.9980	0.0027	0.0003	0.0011
3.9	3.2831	0.9983	0.0023	0.0001	0.0009
4.0	3.3830	0.9985	0.0020	0.0000	0.0007

Table 4

	R_c \ K	0.25	0.50	0.75	1.0
$G'(0)$	0	−0.2670	−0.5374	−0.8170	−1.1064
	0.05	−0.2857	−0.5746	−0.8693	−1.1734
	0.1	−0.3069	−0.6151	−0.9258	−1.2400
$F''(0)$	0	1.3268	1.3783	1.4642	1.5810
	0.05	1.3218	1.3583	1.4170	1.4975
	0.1	1.3169	1.3345	1.3631	1.4021

Similarly, the effect of cross-viscosity in case II is given in table 5

Table 5

	R_c \ λ	0.50	0.75	1.0
$G'(0)$	0	−0.8415	−0.9764	−1.1064
	0.05	−0.8575	−1.0144	−1.1734
	0.1	−0.8723	−1.0498	−1.2400
$F''(0)$	0	0.8238	1.1581	1.5810
	0.05	0.7693	1.0887	1.4975
	0.1	0.7126	1.0135	1.4021

It is evident from tables 4 and 5 that the circumferential component of shearing stress increases while the radial component decreases as R_c increases.

The dimensionless moment coefficient C_M can be written as

$$C_M = \Phi(a/\omega)(1/\sqrt{R_\Omega}),$$

where $R_\Omega = R^2\Omega/\nu$, the Reynold number, Ω — angular velocity and

$$(1/\pi)\,\Phi(a/\omega) = -\frac{\sqrt{R_\Omega}\,(p_{rz})_{rc}\,R}{\varrho\,(R\Omega)^2}$$

the moment coefficient which depends only on $G'(0)$ and therefore increases as R_c increases.

Received the 12 XI 1961

Indian Institute of Technology, Kharagpur, India

REFERENCES

1. v. Kármán Th., ZAMM, 1921, **1**, S. 233.
2. Cochran W. G., Proc. Cambridge Phil. Soc., 1934, **30**, p. 365.
3. Frössling N., Lunds Univ. Arsskr., N. F. 1940, *2*, p. 35.
4. Schlichting H, Truckenbrodt E., ZAMM, 1952, **32**, S. 97.
5. Hannah D. M., ARC Rep. a. Mem., 1952, *2773*.
6. Jain M. K., J. Eng. a. Sc. Res., 1960, **5**, p. 81.
7. — Appl. Sci. Res., Sec. A, 1962, **10**, (to appear).
8. — *Collocation method for physical problems*. Proc. 6th Congress on theor. a Appl. Mech., Delhi, 1960.

ПРИНУДИТЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ИМЕЮЩЕЙ КАК ПРЕПЯТСТВИЕ ВРАЩАЮЩИЙСЯ ДИСК

(Резюме)

Пользуя соотношения классической гидромеханики для скорости, напряжения и деформации, автор исследует задачу принудительного течения жидкости имэющей как препятствие вращающийся диск. Система полученных нелинейных дифференциальных уравнений разрешена методом коллокации экстремальной точки. Устанавливается, что поперечная вязкость зависит от безразмерной величины R_c. Толщина максимального слоя, профили скоростей и коэффициент безразмерного момента заметно зависят от роста величины R_c.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Распределение функции скорости F.
Рис. 2. — Распределение функции скорости F'.
Рис. 3. — Распределение функции скорости F' для $k=1$.
Рис. 4. — Распределение функции скорости F для $k=1$, $\lambda=1$.
Рис. 5. — Распределение функции скорости G для $\lambda=3/4$.
Рис. 6. — Распределение фунлции скорости G для $\lambda=1/2$.
Рис. 7. — Распределение функции скорости G для $\lambda=1/4$.

SCURGEREA FORŢATĂ A UNUI FLU D NENEWTONIAN AVÎND CA OBSTACOL UN DISC ÎN ROTAŢIE

(Rezumat)

Se analizează problema scurgerii forţate a unui fluid nenewtonian avînd ca obstacol un disc în rotaţie, folosindu-se în acest scop relaţiile din hidrodinamica clasică relative la viteză, tensiune şi deformaţii. Sistemul de ecuaţii diferenţiale neliniare astfel obţinut a fost rezolvat prin metoda colocării punctului de extremum. Se găseşte că vîscozitatea transversală depinde de un număr adimensional R_c. Grosimea stratului limită, profilele vitezelor şi coeficientul adimensional de momente, depind sensibil de creşterea lui R_c.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Distribuţia funcţiei viteză F.
Fig. 2. — Distribuţia funcţiei viteză F'.
Fig. 3. — Distribuţia funcţiei viteză F' pentru $k=1$.
Fig. 4. — Distribuţia funcţiei viteză F pentru $k=1$, $\lambda=1$.
Fig. 5. — Distribuţia funcţiei viteză G pentru $\lambda=3/4$.
Fig. 6. — Distribuţia funcţiei viteză G pentru $\lambda=1/2$.
Fig. 7. — Distribuţia funcţiei viteză G pentru $\lambda=1/4$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. C. 532.5

ON THE IMPACT OF DROPS ON RIGID WALLS

BY

ȘT. I. GHEORGHIȚĂ

1. The problem of the impact of drops on rigid flat surfaces has been started by M. I. Hmelnik [1]. He assumed that the ideal incompressible fluid which builds up the drop fills a semicircle in the plane of motion. In a subsequent paper, the same author considered the impact of a semispherical drop, the others conditions being unaltered. The velocities and the impulsive pressures on the wall are larger in the plane case than in the three-dimensional case by about 20% [2].

In the present work we shall treat the problem in the plane case, generalizing the results of [1] in the sense that the drop can be in contact with the wall only on a part of its straight frontier and also that the drop has the form of a sector of circle. Our method is that utilized by C. Iacob [3], [4] after we shall have reduced the problem to a mixed problem for a half-plane. For this end we shall consider directly the complex potential $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, where $z = x + iy$, instead of considering the function $\Omega = z(df/dz)$; we must outline that the method of Ω-function cannot be applied to the general problem considered here. The Iacob's method is also different from the Gourevitch's one who, considered a problem for a semicircle [5].

2. We assume that the liquid cylinder in the impact nstant is deformed such that its section is a sector of circle of radius a and central angle α, $(0 < \alpha < 2\pi)$, but the contact with the wall is only on the part AD of its straight part AC parallel with the wall (fig. 1). With a reference system with the origin in the centre of this sector and the Ox-axis along the straight wall, $z_D = b$, denoting by $\vec{V}_0 (\perp OA)$, the velocity of the drop untill the contact with the wall and by $w = u - iv$ the complex velocity, the boundary conditions may be written:

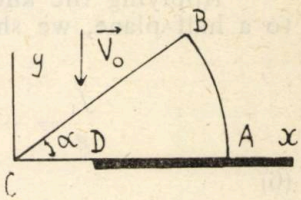


Fig. 1

$$v = V_0 \text{ on } AD, \quad \varphi = 0 \text{ on } ABCD. \tag{1}$$

We can write instead the first condition $\partial\psi/\partial x = -V_0$, then on AD we have $\psi = -V_0 x$.

Mapping conformally the domain $ABCDA$ on the semicircle $A_1 B_1 C_1 D_1 A_1$ of the plane z_1 so that $z_1(0) = 0$, $z_1(a) = 1$, $z_B = -1$, we shall have

$$z_1 = (z/a)^{\pi/\alpha}. \tag{2}$$

Denoting $\beta = b/a$, $(0 \leqslant \beta < 1)$, in this new plane we shall have the following boundary conditions for the analytical function $f_1 = f(z_1)$:

$$\begin{cases} \mathcal{I}m\{f_1\} = -V_0 a x_1^{\alpha/\pi} \text{ on } y_1 = 0,\ 1 > x_1 > \beta, \\ \mathcal{R}e\{f_1\} = 0 \text{ on } |z_1| = 1,\ y_1 > 0 \text{ and } y_1 = 0, \\ \qquad -1 < x_1 < \beta. \end{cases} \tag{3}$$

Using the Schwarz's principle, we shall continue the function $f(z_1)$ in the rest of the upper half-plane so that in symmetrical points with respect to the circle $|z_1| = 1$, ψ_1 will take the same values. In this manner we have to solve a Volterra-Signorini's mixed problem: to determine an analytical function $f(z_1)$, regular in the upper half-plane, knowing that on the real axis it satisfies the conditions

$$\begin{cases} \mathcal{R}e\{f_1\} = 0 \text{ on } (-\infty, \beta) \text{ and } (\beta^{-1}, \infty), \\ \mathcal{I}m\{f_1\} = \begin{cases} -V_0 a x_1^{\alpha/\pi} \text{ on } (\beta, 1), \\ -V_0 a x_1^{-\alpha/\pi} \text{ on } (1, \beta^{-1}). \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

Introducing the function $g(z_1) = i\sqrt{(z_1 - \beta)(z_1 - \beta^{-1})}$ with the arithmetical value of the radix on the radius (β^{-1}, ∞), we know the real part of the function $f_1 g^{-1}$ on the whole real axis:

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{f_1}{g}\right\} = \begin{cases} 0 \text{ on } (-\infty, \beta) \text{ and } (\beta^{-1}, \infty), \\ V_0 a\,[x_1^{\alpha/\pi}/\sqrt{(x_1 - \beta)(\beta^{-1} - x_1)}] \text{ on } (\beta, 1), \\ V_0 a\,[x_1^{-\alpha/\pi}/\sqrt{(x_1 - \beta)(\beta^{-1} - x_1)}] \text{ on } (1, \beta^{-1}). \end{cases} \tag{5}$$

Applying the known formulas for the Dirichlet's problem relative to a half-plane, we shall have

$$\frac{f_1}{g} = -\frac{V_0 a i}{\pi}\left[\int_\beta^1 \frac{x_1^{\alpha/\pi}\,dx_1}{(x_1 - z_1)\sqrt{(x_1 - \beta)(\beta^{-1} - x_1)}} + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \int_1^{\beta^{-1}} \frac{x_1^{-\alpha/\pi}\,dx_1}{(x_1 - z_1)\sqrt{(x_1 - \beta)(\beta^{-1} - x_1)}}\right],$$

without to add an imaginary constant, in view of the behaviour of the function at infinity. We can also write

$$(7)\quad f_1 = \frac{V_0 a}{\pi}\sqrt{(z_1-\beta)(z_1-\beta^{-1})}\int_{\beta}^{1}\left(\frac{1}{x_1-z_1}+\frac{1}{1-x_1 z_1}\right)\frac{x_1^{\alpha/\pi}\,dx_1}{\sqrt{(x_1-\beta)(\beta^{-1}-x_1)}}.$$

Denoting

$$(8)\quad \Phi(z_1) = \int_{\beta}^{1}\frac{x_1^{\alpha/\pi}\,dx_1}{(x_1-z_1)\sqrt{(x_1-\beta)(\beta^{-1}-x_1)}},$$

we can give a new form of (7):

$$(9)\quad f(z_1) = (V_0 a/\pi)\sqrt{(z_1-\beta)(z_1-\beta^{-1})}\,[\Phi(z_1) - z_1^{-1}\Phi(z_1^{-1})].$$

So, by (2) we know the complex potential $f(z)$ in the physical plane.

3. We shall calculate some particular cases of $f(z)$, from which the velocities and impulsive pressures can be easily computed:

a) $\alpha = \pi/2,\ \beta = 0$:

$$(10)\quad f(z) = -V_0 z\mathrm{i} - (V_0/\pi)\,[(z - a^2 z^{-1})\ln(1 - z^2 a^{-2}) + 2z\ln a z^{-1}].$$

b) $\alpha = \pi,\ \beta \neq 0$:

$$(11)\quad \begin{aligned} f(z) = &-V_0 z\mathrm{i} + [V_0(a-z)/(\pi z)]\times \\ &\times\big((a+z)\ln\{[(z+a)(b-a) + \\ &+2\sqrt{a(z-b)(a^2-bz)}]/[(b+a)(z-a)\}- \\ &-\mathrm{i}\sqrt{(z-b)(z-a^2 b^{-1})}\times \\ &\times \operatorname{arctg}\,[2\sqrt{ab}/(a-b)]\big), \end{aligned}$$

and when $\beta \to 0$, from (11) we find

$$(12)\quad \begin{aligned} f(z) = V_0\big(&-z\mathrm{i} + [(a+z)/(\pi\sqrt{z})]\times \\ &\times\{[(a+z)/\sqrt{z}]\times \\ &\times\ln[(\sqrt{a}-\sqrt{z})/(\sqrt{a}+\sqrt{z})] + 2\sqrt{a}\}\big). \end{aligned}$$

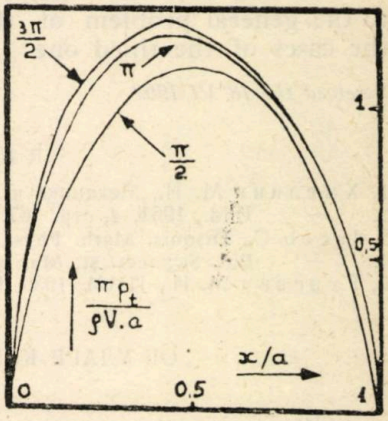


Fig. 2

c) $\alpha = 3\pi/2,\ \beta = 0$:

$$(13)\quad f(z) = -(V_0/\pi)\{z\pi\mathrm{i} + a^{2/3} z^{1/3}[1 - (a/z)^{2/3}] + (z - a^2/z)\ln[1-(z/a)^{2/3}] + (2z/3)\ln(a/z)\}.$$

From these expressions we shall deduce only the impulsive pressures p_t $(= -\varrho\varphi)$ for $\beta = 0$; marking $s = x/a$, for $0 < x < a$, we find

$$(14)\quad p_t(\pi/2) = (\varrho V_0 a/\pi)\,[(s - s^{-1})\ln(1-s^2) - 2s\ln s],$$

$$(15)\quad p_t(\pi) = (\varrho V_0 a/\pi)\,[(1-s)/\sqrt{s}]\,\{[(1+s)/\sqrt{s}]\ln[(1+s)/(1-s)] - 2\},$$

$$(16)\quad p_t(3\pi/2) = (\varrho V_0 a/\pi)\,[s^{1/3} - s^{-1/3} + (s - s^{-1})\ln(1-s^{2/3}) - (2s/3)\ln s].$$

In the fig. 2 these pressures are plotted. It is seen the influence of the form of drops on the values and maximum of p_t.

4. The Hmelnik's case can be framed in our method. For instance, because on the imaginary axis $\psi = 0$, we have to solve the following problem: to find a function defined in $|z| \leqslant a$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, when we know that

$$\varphi = 0 \text{ on } |z| = a,\ x > 0,\ y > 0,$$

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{on } x = 0,\ y > 0, \\ -V_0 x & \text{on } y = 0,\ x > 0. \end{cases}$$

By a conformal mapping $z^2 = a^2 Z$, the above problem can be stated: to find a function $f(Z)$, defined in $|Z| \leqslant 1$, $Y \geqslant 0$, when we know that

$$\varphi = 0 \quad \text{on} \quad |Z| = 1, \quad Y > 0,$$

$$\psi(X, 0) = \begin{cases} 0 & \text{on } -1 < X < 0, \\ -V_0 a \sqrt{X} & \text{on } 1 > X > 0 \end{cases}$$

So, continuing analitically the function $f(Z)$ defined in the semicircle to the rest of the upper half-plane, we have to solve an ordinary Dirichlet problem for the upper half-plane, and the solution is found to be $f(z) = -(V_0 z/\pi)\{\pi i + (1 - a^2/z^2)\ln[(a-z)/(a+z)]\}$, i. e. the Hmelnik's solution.

As can be easily verified, the Hmelnik's method cannot be applied to the general problem of the second paragraph, and consequently to the cases of the third one.

Received the 18 VI 1962 *University of Bucharest*

REFERENCES

1. Хмелник М. И., Механика и Машиностроение, 1960, *4*, стр. 180.
2. — Ibid., 1961, *4*, стр. 167.
3. Iacob C., Disquis. Math. Phys., 1943, **3**, p. 207.
4. — Bul. Şt., secţ. şt. Mat. şi Fiz., 1952, **IV**, p. 669.
5. Гуревич М. И., ПММ, 1939, **III**, *2*, стр. 3.

ОБ УДАРЕ КАПЕЛЬ НА ТВЕРДЫЕ СТЕНКИ

(Резюме)

Изучается плоская задача об ударе жидкости на стенку, когда жидкость занимает в плоскости движения сектор круга (рис.1), обобщая задачу из [1]. Решая смешанную краевую задачу методом К. Якоба [3], [4], дается общая форма комплексного потенциала. Для $\alpha = \pi/2$; π; $3\pi/2$, ($b = 0$), приводятся графики импульсивных давлений (рис. 2). Метод функции Ω здесь нельзя применить.

DESPRE PERCUSIUNEA PICĂTURILOR ASUPRA PEREŢILOR RIGIZI

(Rezumat)

Se tratează problema plană a percusiunii unui fluid asupra unui perete, cînd fluidul ocupă în planul mişcării un sector de cerc (fig.1), generalizîndu-se problema din [1]. Rezolvînd o problemă la limită mixtă prin metoda lui C. Iacob [3], [4], se dă forma generală a potenţialului complex. Se particularizează pentru $\alpha = \pi/2$; π; $3\pi/2$, ($b = 0$), trasîndu-se graficele presiunilor impulsive (fig. 2). Metoda funcţiei Ω nu se poate aplica la problema de faţă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. C. 539.181

ON THE THEORY OF INTERACTION OF THE RADIATION WITH A SOLID

BY

V. D. KUCHIN

1. The displacement of an atom of a solid under the influence of a radiation

Consider the scattering of the waves of the electromagnetic radiation (for the corpuscular radiation — of the plane waves, which characterize the moving charged particle or the flow of the particles non-interacting with each other) falling onto the plate of a solid. It is assumed that sizes of the individual initial volumes of the solid are smaller than the wave length which falls onto the solid. The variation of the elastic properties and the density of the solid from the first volume to the other one is insignificant, which permits to consider that the probability of the scattering of the electromagnetic waves (of charged particles) is identical all over the whole volume of the substance. If the elementary volume of the solid is considered to have a random orientation, the substance can be represented as an elastic isotropic one being characterized by two elastic constants λ_0 and μ_0.

The equation determining the displacement of the individual volume of the solid having a mean value of density ϱ_0 with respect to the equilibrium position under the influence of the external stress (of a radiation) can be written [1] as follows:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho_0 \ddot{u} = \partial\sigma_{xx}/\partial x + \partial\sigma_{xy}/\partial y + \partial z_{xz}/\partial z, \\ \varrho_0 \ddot{v} = \partial\sigma_{xy}/\partial x + \partial\sigma_{yy}/\partial y + \partial\sigma_{yz}/\partial z, \\ \varrho_0 \ddot{w} = \partial\sigma_{xz}/\partial x + \partial\sigma_{yz}/\partial y + \partial\sigma_{zz}/\partial z, \end{cases}$$

where: u, v and w are the components of a vector $\mathbf{a} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w$ of the displacement of the individual volume of the solid, σ_{xx}, σ_{xy} etc. are the components of the strain, which are given for the elastic isotropic medium [1] by:

$$\sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy},$$
$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \mu\varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \mu\varepsilon_{yz}.$$

Here

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{xx} = \partial u/\partial x, \quad \varepsilon_{yy} = \partial v/\partial y, \quad \varepsilon_{zz} = \partial w/\partial z,$$

$$\varepsilon_{xy} = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y, \quad \varepsilon_{xz} = \partial w/\partial x + \partial u/\partial z, \quad \varepsilon_{yz} = \partial w/\partial y + \partial v/\partial z.$$

If the falling wave of the radiation is a periodic function of time (for example $\exp(j\omega t)$, where ω is the cyclic frequency of the falling wave), the components u, v and w of the displacement vector will have to vary with time according to the same law as the falling wave does. In connection with the above mentioned consideration the equation (1) can be shown in the form:

$$-\varrho_0 \omega^2 u \exp(j\omega t) = \partial(\lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx})/\partial x + \partial(\mu\varepsilon_{xy})/\partial y + \partial(\mu\varepsilon_{xz})/\partial z,$$

$$-\varrho_0 \omega^2 v \exp(j\omega t) = \partial(\mu\varepsilon_{xy})/\partial x + \partial(\lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy})/\partial y + \partial(\mu\varepsilon_{yz})/\partial z,$$

$$-\varrho_0 \omega^2 w \exp(j\omega t) = \partial(\mu\varepsilon_{xz})/\partial x + \partial(\mu\varepsilon_{yz})/\partial y + \partial(\lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz})/\partial z.$$

For the homogeneous medium, with the mean significances ϱ_0, λ_0 and μ_0, we have:

$$(2) \quad \begin{cases} -\varrho_0 \omega^2 u \exp(j\omega t) = \lambda_0(\partial\Delta/\partial x) + 2\mu_0(\partial\varepsilon_{xx}/\partial x) + \mu_0(\partial\varepsilon_{xy}/\partial y) + \mu_0(\partial\varepsilon_{xz}/\partial z), \\ -\varrho_0 \omega^2 v \exp(j\omega t) = \mu_0(\partial\varepsilon_{xy}/\partial x) + \lambda_0(\partial\Delta/\partial y) + 2\mu_0(\partial\varepsilon_{yy}/\partial y) + \mu_0(\partial\varepsilon_{yz}/\partial z), \\ -\varrho_0 \omega^2 w \exp(j\omega t) = \mu_0(\partial\varepsilon_{xz}/\partial x) + \mu_0(\partial\varepsilon_{yz}/\partial y) + \lambda_0(\partial\Delta/\partial z) + 2\mu_0(\partial\varepsilon_{zz}/\partial z). \end{cases}$$

So far as in the real solid the density and the elastic constants differ from the average values ϱ_0, λ_0 and μ_0; their actual correlations are $\varrho = \varrho_0 + \varrho'$, $\lambda = \lambda_0 + \lambda'$ and $\mu = \mu_0 + \mu'$. Hence $\varepsilon_{xx} = \varepsilon^0_{xx} + \varepsilon'_{xx}$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon^0_{yy} + \varepsilon'_{yy}$ etc.

In connection with the above mentioned, equation (2) for an inhomogeneous solid can be represented as follows:

$$(3) \quad \varrho_0 \omega^2 u' \exp(j\omega t) + \partial(\lambda_0 \Delta' + 2\mu_0 \varepsilon'_{xx})/\partial x + \mu_0(\partial\varepsilon'_{xy}/\partial y) + \mu_0(\partial\varepsilon'_{xz}/\partial z) = -\varrho' \omega^2 u_0 \exp(j\omega t) - \partial(\lambda' \Delta_0 + 2\mu' \varepsilon^0_{xx})/\partial x - \partial(\mu' \varepsilon^0_{xy})/\partial y - \partial(\mu' \varepsilon^0_{xz})/\partial z,$$

$$(4) \quad \varrho_0 \omega^2 v' \exp(j\omega t) + \partial(\lambda_0 \Delta' + 2\mu_0 \varepsilon'_{yy})/\partial x + \mu_0(\partial\varepsilon'_{xy}/\partial y) + \mu_0(\partial\varepsilon'_{yz}/\partial z) = -\varrho' \omega^2 v_0 \exp(j\omega t) - \partial(\lambda' \Delta_0 + 2\mu' \varepsilon^0_{yy})/\partial y - \partial(\mu' \varepsilon^0_{xy})/\partial x - \partial(\mu' \varepsilon^0_{yz})/\partial z,$$

$$(5) \quad \varrho_0 \omega^2 w' \exp(j\omega t) + \partial(\lambda_0 \Delta' + 2\mu_0 \varepsilon'_{zz})/\partial x + \mu_0(\partial\varepsilon'_{xz}/\partial y) + \mu_0(\partial\varepsilon'_{yz}/\partial z) = -\varrho' \omega^2 w_0 \exp(j\omega t) - \partial(\lambda' \Delta_0 + 2\mu' \varepsilon^0_{zz})/\partial z - \partial(\mu' \varepsilon^0_{xz})/\partial x - \partial(\mu' \varepsilon^0_{yz})/\partial y.$$

Let us differentiate, as in the case for the homogeneous material, the obtained equations (3) on the x, (4) on the y, and (5) on the z. After some transformations we get:

$$
(6)\quad \begin{cases} \nabla^2 \Delta' + (\omega^2/c_1^2)\,\Delta^2 = -\{(1/\mathrm{j})\,\omega c_1 [\partial(\varrho'\Delta_0)/\partial x] + \nabla^2(\lambda'\Delta_0 + 2\mu'\varepsilon_{xx}^0) - \\ \qquad -(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\,(2\mu'\Delta_0)\}/(\varrho_0 c_1^2), \\ \bar{\omega}_x'(\nabla^2 + \omega^2/c_2^2) = 0, \\ \bar{\omega}_y'(\nabla^2 + \omega^2/c_2^2) = -\{(1/\mathrm{j})\,\omega c_1 [\partial(\varrho'\Delta_0)/\partial z] + \partial^2(2\mu'\Delta_0)/\partial x\,\partial z\}/(2\mu_0), \\ \bar{\omega}_z'(\nabla^2 + \omega^2/c_2^2) = -\{-(1/\mathrm{j})\omega c_1[\partial(\varrho'\Delta_0)/\partial y] - \partial^2(2\mu'\Delta_0)/\partial x\,\partial y\}/(2\mu_0), \end{cases}
$$

where $c_1^2 = (\lambda_0 + 2\mu_0)/\varrho_0$ is the penetration velocity of the longitudinal waves, $c_2^2 = \mu_0/\varrho_0$ is the penetration velocity of the shear waves and

$$
2\bar{\omega}_x = \partial w/\partial y - \partial v/\partial z, \quad 2\bar{\omega}_y = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x, \quad 2\bar{\omega}_z = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y,
$$

$$
\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_x^0 + \bar{\omega}_x', \quad \bar{\omega}_y = \bar{\omega}_y^0 + \bar{\omega}_y', \quad \bar{\omega}_z = \bar{\omega}_z^0 + \bar{\omega}_z'.
$$

The obtained equations can be used as the initial equations for the definition of the scattering of the elastic waves by means of the individual volumes of the solid.

If the plane wave falls onto a plate of the solid in direction of x, so $u_0 = A\exp[\mathrm{j}(\omega/c_1)x]$, $v_0 = w_0 = 0$, $\Delta = \mathrm{j}(\omega/c_1)u_0$ and the particular solution of the equation (6) will be:

$$
(7)\quad \Delta' = \frac{1}{4\pi a(\lambda_0 + 2\mu_0)} \int_{V_0} (\lambda'\Delta_0 + 2\mu'\varepsilon_{xx}^0) \exp[-\mathrm{j}(\omega/c_1)a]\,\mathrm{d}V_0,
$$

where $\mathrm{d}V_0 = \mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\,\mathrm{d}z_0$ is the total volume of the solid, $a^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ is the displacement of this volume under the influence of the radiation. Suppose that the displacement of the individual volume is less than the falling wave length of the radiation, and the latter is less than the sizes of the elementary volume of the solid. Then the ratio of the wave lenght to the displacement can be neglected. On the surface of an elementary volume

$$
c'\Delta_0 = \partial(c'\Delta_0)/\partial x_0 = \partial(c'\Delta_0)/\partial y_0 = \partial(c'\Delta_0)/\partial z_0 = 0,
$$

and the integral in the equation (7) can be represented as a sum of simpler integrals, which are easily to solve. As result of it we have:

$$
(8)\quad \Delta' = -V_0\Delta_0\varrho_0\omega^2\{(\Delta\varrho)\cos\alpha + (1/c_1^2)[\Delta(\varrho_0 c_1^2) - 2(1/c_1^2)(\Delta\mu)(\cos^2\beta + \cos^2\gamma)]\exp[-\mathrm{j}(\omega/c_1)a]\}/(4\pi a c_1^2).
$$

Analogically

$$
(9)\quad \begin{cases} \bar{\omega}_y' = -V_0\Delta_0\varrho_0\omega^2[c_1(\Delta\varrho)\cos\gamma + 2(1/c_2)(\Delta\mu)\cos\alpha\cos\gamma]/(8\pi a c_2^3), \\ \bar{\omega}_z' = -V_0\Delta_0\varrho_0\omega^2[-c_1(\Delta\varrho)\cos\beta - 2(1/c_2)(\Delta\mu)\cos\alpha\cos\beta]/(8\pi a c_2^3). \end{cases}
$$

In this case α, β, γ are the corners between the vector of displacement and the coordinate axis. If the displacement of the elementary volume of the solid is in the direction ot y, which is perpendicular in the direction of the falling wave, $v_0 = A \exp [j (\omega/c_2^2)\, y]$, so the equation (6) can be shown in the form:

$$\nabla^2 \Delta' + (\omega^2/c_1^2)\, \Delta^2 = -[(1/j)\, \omega c_2\, (2\varrho' \omega_z^0) + 2\partial^2 (2\mu' \omega_z^0)/\partial x\, \partial y]/(\lambda_0 + 2\mu_0),$$

$$\omega_x' (\nabla^2 + \omega^2/c_2^2) = -\{-(1/j)\, \omega c_2\, [\partial (2\varrho' \omega_z^0)/\partial z] - \partial^2 (2\mu' \omega_z^0)/\partial x\, \partial y\}/(2\mu_0),$$

$$\omega_y' (\Delta^2 + \omega^2/c_2^2) = -[\partial^2 (2\mu' \omega_z^0)/\partial y\, \partial z]/(2\mu_0),$$

$$\omega_z' (\nabla^2 + \omega^2/c_2^2) = -\{(1/j)\, \omega c_2\, [\partial (2\varrho' \omega_z^0)/\partial x] + (\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2)\, (2\mu' \omega_z^0)\}/(2\mu_0).$$

The equations derived for the above mentioned supposition have the following solutions:

$$\Delta' = -[V_0 \omega^2/(2\pi \varrho_0 a c_1^3)]\, \omega_z^0 \cos\beta . [(\Delta\varrho)\, c_2 + 2\, (\Delta\mu)\, (1/c_1) \cos\alpha] \exp [-j\, (\omega/c_1)\, a], \tag{10}$$

$$\begin{cases} \omega_x' = -[V_0 \omega^2 \cos\gamma/(2\pi\mu_0 a)][(\Delta\varrho) + (1/c_2^2)(\Delta\mu) \cos\alpha] \exp [-j(\omega/c_2)a], \\ \omega_y' = -[V_0 \omega^2/(2\pi\mu_0 a c_2^2)]\, (\Delta\mu) \cos\beta \cos\gamma \cdot \exp [-j\, (\omega/c_2)\, a], \\ \omega_z' = -[V_0 \omega^2/(2\pi\mu_0 a)]\, [(\Delta\varrho) \cos\alpha + \\ \qquad + (1/c_2^2)\, (\Delta\mu)\, (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)] \exp [-j\, (\omega/c_2)\, a]. \end{cases} \tag{11}$$

We determine now the displacement of the atoms of the solid under the influence of a radiation. The initial equation which describes the displacement **a** of the atoms (of the iones) of the homogeneous isotropic elastic solid can be written for the sake of easiness using an operator as follows [2]:

$$\varrho_0 \ddot{\mathbf{a}} = (\lambda_0 + \mu_0)\, \nabla (\nabla \mathbf{a}) + \mu_0 \Delta \mathbf{a}. \tag{12}$$

However if the impulse or the highfrequency radiations effects the solid, the solution of the equation (12) can be found without variable's separation.

The solution of the differential equation (12) is assumed to be the function

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} \exp [j\omega\, (\tau - t)],$$

where: **A** is a function of the coordinate **x**, in the direction of which the impulse or the highfrequency radiations effects, τ is a constant. Substituting the solution in the initial differential equation we have:

$$\varrho_0 \omega \mathbf{A} + (\lambda_0 + \mu_0)(j\omega \cdot \nabla\tau + \nabla)(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mathbf{A} \cdot \nabla\tau) + \mu_0 [\Delta \mathbf{A} + 2j\omega (\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{A} (\nabla\tau)^2 + j\omega \mathbf{A} \cdot \Delta\tau] = 0. \tag{13}$$

Supposing $\mathbf{A} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (j\omega)^{-n} \mathbf{A}_n$, the expression (13) yields :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (j\omega)^{-n} \{\varrho_0 \omega^2 \mathbf{A}_n + (\lambda_0 + \mu_0)(j\omega \nabla\varepsilon + \nabla)(\nabla \cdot \mathbf{A}_n + j\omega \mathbf{A}_n \cdot \nabla\tau) + \mu_0[\Delta \mathbf{A}_n + 2j\omega (\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A}_n - \omega^2 \mathbf{A}_n (\nabla\tau)^2 + j\omega \mathbf{A}_n \cdot \Delta\tau]\} = 0 . \tag{14}$$

After some transformations the equation (14) will appear as

$$-\varrho_0 \mathbf{A}_n + (\lambda_0 + \mu_0)[(\mathbf{A}_n \cdot \nabla\tau)\nabla\tau + \nabla(\mathbf{A}_{n-1} \cdot \nabla\tau) + (\nabla \cdot \mathbf{A}_{n-1})\nabla\tau + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_{n-2})] + \mu_0[(\nabla\tau)^2 \cdot \mathbf{A}_n + 2(\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A}_{n-1} + (\Delta\tau)\mathbf{A}_{n-1} + \Delta \cdot \mathbf{A}_{n-2}] = 0. \tag{15}$$

The vectors $\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{A}_{n-2}$ have been introduced in view to conserve for the equation (15) the same form for different values of n. It is easy to see that in the equation (15) when $n = 0$ only

$$\begin{cases} [-\varrho_0 + (\lambda_0 + 2\mu_0)(\nabla\tau)^2]\mathbf{A}_0 \cdot \nabla\tau = 0 , \\ [-\varrho_0 + \mu_0 (\nabla\tau)^2]\mathbf{A}_0 \times \nabla\tau = 0 \end{cases} \tag{16}$$

can be equal to zero. If we now demand $\mathbf{A}_0$ or $\nabla\tau$ be equal to zero it means that $\mathbf{A}_0 \cdot \nabla\tau = 0$ or $\mathbf{A}_0 \times \nabla\tau = 0$. Then in the first case we have $(\nabla\tau)^2 = \varrho_0/\mu_0 = 1/c_2^2$ and for $\mathbf{A}_0 \times \nabla\tau = 0$ it follows that $(\nabla\tau)^2 = \varrho_0/(\lambda_0 + 2\mu_0) = 1/c_1^2$. From the condition $\mathbf{A}_0 \cdot \nabla\tau = 0$ it follows that $\mathbf{A}_0 \perp \nabla\tau$. As $\mathbf{A}_0 \times \nabla\tau = 0$ it means that $\mathbf{A}_0 \parallel \nabla\tau$. Thus τ is a lineal function of an arc of the ray trajectory, that for $x = x_0$ have the significance $\tau = \tau_0$. From the equations (16) we determine the value of the parameter τ:

$$\tau = \tau_0 + (x - x_0)/c_2 , \quad \tau = \tau_0 + (x - x_0)/c_1 .$$

The value $\mathbf{A}_0$ can be determined by using the same equations. Supposing $n = 1$ we find :

$$(\lambda_0 + \mu_0)(\mathbf{A}_1 \cdot \nabla\tau)\nabla\tau + (\lambda_0 + \mu_0)(\nabla \cdot \mathbf{A}_0)\nabla\tau + \mu_0[2(\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0 \cdot \nabla\tau] = 0 ,$$

whence $\mathbf{A}_1 = -\Delta \cdot \mathbf{A}_0/\nabla\tau$, that means $\mathbf{A}_1 \perp \nabla\tau$. As $\mathbf{A}_0 \cdot \nabla\tau = 0$, so

$$\nabla\tau \cdot [(\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A}_0] = 0 \text{ or } 2(\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A}_0 + (\nabla^2\tau)\mathbf{A}_0 = 0 .$$

Let us find the solution of this equation. Suppose $n = 2$

$$(\lambda_0 + \mu_0)(\mathbf{A}_2 \cdot \nabla\tau)\nabla\tau + (\lambda_0 + \mu_0)(\nabla \cdot \mathbf{A}_1)\nabla\tau + \mu_0[2(\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A}_1 + (\nabla\tau_0)\mathbf{A}_1 + \Delta\mathbf{A}_0] = 0 . \tag{17}$$

For the case $\mathbf{A}_0 \cdot \nabla\tau = 0$ and $\nabla\tau[(\nabla\tau \cdot \nabla)\mathbf{A}_1] = (\nabla\tau \cdot \nabla)(\nabla\tau \cdot \mathbf{A}_1)$ the expression (17) can be simplified :

$$[\varrho_0(\lambda_0 + \mu_0)/\mu_0](\mathbf{A}_2 \cdot \nabla\tau + \nabla \cdot \mathbf{A}_1) - \mu_0[2(\nabla\tau \cdot \nabla)\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + (\Delta\tau)\nabla \cdot \mathbf{A}_0 - \nabla\tau \cdot \Delta\mathbf{A}_0] = 0. \tag{18}$$

Substituting (18) in (17)

$$2(\nabla\tau\,.\,\nabla)\,\mathbf{A}_1 + (\Delta\tau)\mathbf{A}_1 = -\,\Delta\mathbf{A}_0 + c_2^2\nabla\tau\,.\,(\nabla\tau\times\Delta\mathbf{A}_0) - \\ - c_2^2\nabla\tau\,.\,[2(\nabla\tau\,.\,\nabla)\nabla\,.\,\mathbf{A}_0 + (\Delta\tau)\nabla\,.\,\mathbf{A}_0],$$

we obtain the equation from which $\mathbf{A}_1$ can be determined by means of $\mathbf{A}_0$. Analogically we can write down the equation, which gives $\mathbf{A}_n$

$$2(\nabla\tau\,.\,\nabla)\,\mathbf{A}_n + (\Delta\tau)\,\mathbf{A}_n = F(\mathbf{A}_{n-1})\,.$$

Thus

$$\mathbf{a} = \left[\sqrt{\frac{r_1 r_2}{(r_1 + x - x_0)(r_2 + x - x_0)}}\sum_{n=0}^{n=\infty}(\mathrm{j}\omega)^{-n}\,\mathbf{A}_n(x_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,c_2\sum_{n=1}^{n=\infty}(\mathrm{j}\omega)^{-n}\int_{x_0}^{x}F(\mathbf{A}_{n-1})\mathrm{d}t\right]\exp\{\mathrm{j}\omega\,[\tau_0 + (x - x_0)/c_2] - t\},$$

where r_1 and r_2 are the radii of a curvature of a ray trajectory at the points x and x_0. Some different result can be obtained in the case $\mathbf{A}\times\nabla\tau = 0$,

$$\mathbf{a} = \left[\sqrt{\frac{r_1 r_2}{(r_1 + x - x_0)(r_2 + x - x_0)}}\,(\Delta\tau)\sum_{n=0}^{n=\infty}(\mathrm{j}\omega)^{-n}\,\mathbf{A}_n(x_0) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\,c_1(\nabla\tau)\sum_{n=1}^{n=\infty}(\mathrm{j}\omega)^{-n}\int_{x_0}^{x}F_1(\mathbf{A}_{n-1})\mathrm{d}t +$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{n=\infty}(\mathrm{j}\omega)^{-n}\,\mathbf{A}_{n-1}\right]\exp\{\mathrm{j}\omega[\tau_0 + (x - x_0)/c_1] - t\}\,.$$

2. Electrical conductivity of a radiated solid

Consider the simplest energetic model of a solid where the main zone filled by electrons is separated from the conductivity zone by means of the prohibited region of 5...8 eV. When absorbing a δ quanta of a radiation by simple volume $a_1\,\delta$ electrons go over from the main levels and $a_2\,\delta$ electrons from the valency one to the conductivity zone. Under the circumstances this correlation is obvious to be always kept $n + N = p + P$, where n and N are the electron concentration in the conductivity zone and on the mixture levels, p is the concentration of holes on the valency level and P is that on the intermediate levels.

Let β be the probability of the return of the free electron from the conductivity zone onto mixture levels, and γ is that on the valency level. It is known [3] that the relation of the probabilities of the transition of an electron from a mixture level into a conductivity zone and back is

$$\varkappa_1 = y/\beta = AT^{3/2}\exp[-\varphi/(kT)],\quad \varkappa_2 = z/\gamma = AT^{3/2}\exp[-\psi/(kT)].$$

Here φ is the ionization's intensivity, and ψ is the recombination's intensivity. The variation of the number of carriers with the time in the solid under the effect of a radiation can be determined as follows:

$$\partial n/\partial t = -\gamma n + \beta N(n - n_0),$$

$$\partial N/\partial t = \delta(\alpha_1 + \alpha_2) - \gamma n - \beta N(n - n_0) + z(p - p_0) - \gamma N p,$$

$$\partial p/\partial t = \alpha_2 \delta + DP + z(p - p_0) - \gamma N p,$$

$$\partial P/\partial t = \alpha_1 \delta - DP,$$

where D is the diffusion coefficient. In the case of an equilibrium state of processes in the solid

$$n = n_0/(1 - \varkappa_1/N), \quad P = [p_0 - \delta(\alpha_1 + \alpha_2)/z]/(1 - N/\varkappa_2),$$

that leads to:

$$n_0/(1 - \varkappa_1/N) + N = [p_0 - \delta(\alpha_1 + \alpha_2)/z]/(1 - N/\varkappa_2) + \alpha_1 \delta/D. \tag{19}$$

At the room temperature the ratioes of the probabilities of transitions are equal to $\varkappa_1 = 2.10^{19} \exp[-\varphi/(kT)]$ and $\varkappa_2 = 2.10^{19} \exp[-\psi/(kT)]$. For comparatively small values φ we have:

$$2.10^{19} \exp[-\varphi/(kT)]/N \gg 1 \text{ or } N \ll 2.10^{19} \exp[-\varphi/(kT)].$$

Thus

$$n_0/(1 - \varkappa_1/N) \approx -(n_0/\varkappa_1) N.$$

But since

$$n_0/\varkappa_1 = \{n_0 \exp[-\varphi/(kT)]\}/(5.10^{15} T^{3/2}) \gg 1 \text{ or}$$

$$N/\varkappa_2 = \{N \exp[-\psi/(kT)]\}/(5.10^{19}) \gg 1,$$

the equation (19) of the equilibrium state of the solid at the room temperature can be given by:

$$(n_0/\varkappa_1) N = [p_0 - \delta(\alpha_1 + \alpha_2)/z]/(N/\varkappa_2) - \alpha_1 \delta/D.$$

If there is no radiation, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ and $(n_0/\varkappa_1) N_0 = p_0/(N_0/\varkappa_2)$, whence $N_0 = [\varkappa_1 \varkappa_2 (p_0/n_0)]^{1/2}$. Since $\exp[-\varphi/(kT)] \gg (N_0/AT^{3/2}) \gg \exp[-\psi/(kT)]$, then

$$N_0 = AT^{3/2} (p_0/n_0)^{1/2} \exp[-(\varphi + \psi)/(2kT)].$$

Hence

$$\sigma_0 = \varepsilon N_0 u_n = 10^{-3} u_n T^{3/2} (p_0/n_0)^{1/2} \exp[-(\varphi + \psi)/2kT].$$

If a radiation effects the solid $P \ll p$ or

$$[p_0 - \delta(\alpha_1 + \alpha_2)/z]/(1 - N/\varkappa_2) \ll \alpha_1 \delta/D$$

and the equation of an equilibrium state of a solid will be:

$$N(n_0/\varkappa_1 - 1) = \alpha_1 \delta/D,$$

whence

$$N \approx (1/n_0)(\alpha_1 \delta/D) \varkappa_1 = AT^{3/2} (1/n_0)(\alpha_1 \delta/D) \exp[-\varphi/(kT)].$$

Thus

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma = \varepsilon N u_n = 10^{-3} u_n T^{3/2} (1/n_0)(\alpha_1 \delta/D) \exp[-\varphi/(kT)].$$

3. The inducing electromotive force

The velocity of the formation of charge carriers (of a space charge) in solid under the effect of a radiation is equal to

$$\partial n/\partial t = nu_n (\partial E/\partial x) + u_n E (\partial n/\partial x) + D_n (\partial^2 n/\partial x^2),$$

$$\partial p/\partial t = pu_p (\partial E/\partial x) + u_p E (\partial p/\partial x) + D_p (\partial^2 p/\partial x^2),$$

where E is the field tension in solid, which the space charge gives.

Suppose that the space charge is formed in solid due to the inequality of the diffusion coefficients of electrons and of holes. Will appear as

$$(20) \quad \begin{cases} \partial^2 n/\partial x^2 = \{1/[D_n (1 - j_n n)]\} (\partial n/\partial t), \\ \partial^2 p/\partial x^2 = \{1/[D_p (1 - j_p p)]\} (\partial p/\partial t), \end{cases}$$

so far as $u_n E (\partial n/\partial x) = 0$ and $u_p E (\partial p/\partial x) = 0$ [4]. Using the Poisson's equation $\partial E/\partial x = 4\pi Q/\varepsilon$, where ε is the dielectric constant, we obtain from the equation (20) the expression which describes the density of a space charge in solid

$$\varepsilon [(p - p_0) - (n - n_0)] = [1/(4\pi/\varepsilon)] (\partial E/\partial x) =$$
$$= \varepsilon\tau (D_p - D_n) [1 - \exp(-t/\tau)] (\partial^2 n/\partial x^2).$$

In this equation τ is the relaxation time, which for the case being examined is $\tau < t$. Excluding $\partial E/\partial x$ we get:

$$D_p (1 - j_p) - D_n (1 - j_n) = -\{1/[(4\pi/\varepsilon)\varepsilon n]\} (\partial n/\partial u_n) (\partial j_n/\partial t).$$

For the equilibrium concentration of electrons and holes we have:

$$j_n = [n (D_n - D_p)/(nD_n + pD_p)] [1 - \exp(-t/\tau)],$$

$$j_p = [p (D_n - D_p)/(nD_n + pD_p)] [1 - \exp(-t/\tau)].$$

Thus

$$(21) \quad \varepsilon [(p - p_0) - (n - n_0)] = \varepsilon\tau (D_p - D_n) [1 - \exp(-t/\tau)] (\partial^2 n/\partial x^2).$$

It is possible that the space charge in solid is formed due to the different values of an electron and a hole conductivities. Thus $D_n = D_p = 0$, $u_n \neq u_p$ and

$$j''_n = [n (u_n + u_p)/(nu_n + pu_p)] [1 - \exp(-t/\tau)],$$

$$j''_p = [p (u_n + u_p)/(nu_n + pu_p)] [1 - \exp(-t/\tau)],$$

and

$$(22) \quad \varepsilon [(p - p_0) - (n - n_0)] = -\varepsilon\tau (u_n + u_p) E [1 - \exp(-t/\tau)] (\partial n/\partial x).$$

The solution of the equations (21) and (22) leads to $(n - n_0) = (p - p_0) = \varepsilon E/(kT)$ whence the inducing electromotive force is equal to:

$$\mathcal{E} = -\int_{x(n_0)}^{x(n)} E\,dx = -\int_{x(n_0)}^{x(n)} \frac{n - n_0}{\varepsilon} kT\,dx.$$

4. The character of the temperature field in a radiated solid

The energy of a radiation falling onto a solid expenses partially for its heating. The temperature field of the radiated solid can be estimated as follows.

Suppose in the radiation flow, falling onto a plate of a solid, the radial distribution of a radiation is given as $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \exp(-ax - by)$.

The heat obtained by the solid due to the absorbtion of the radiation, will be distributed along the depth of the plate (in the direction of x) according to the law $W_0 = \eta E \mathcal{J} \exp(-\mu z)$, where E is the energy of the radiation. Thus the total quantity of heat produced in the solid due to the absorbtion of the radiation energy is equal to:

$$W_0 = \eta E \mathcal{J} \exp(-ax - by - \eta z).$$

The equation which describes the temperature field in a solid being radiated will be:

$$(23) \quad \partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2 + (W_0/\lambda) \exp(-ax - by - \mu z) = 0,$$

where λ is the heat conductivity coefficient. Let us solve the equation (23) by a method of the elementary balances. To do this it is necessary to transform this equation into

$$(\partial^2 T/\partial z^2)\left[(\partial^2 T/\partial x^2)/(\partial^2 T/\partial z^2) + (\partial^2 T/\partial y^2)/(\partial^2 T/\partial z^2) + 1\right] + \\ + (W_0/\lambda) \exp(-ax - by - \mu z) = 0.$$

Having marked [5]

$$(\partial^2 T/\partial x^2)/(\partial^2 T/\partial z^2) + (\partial^2 T/\partial y^2)/(\partial^2 T/\partial z^2) + 1 = \xi \approx \text{const.},$$

one obtains

$$\partial^2 T(z)/\partial z^2 = -[W_0/(\xi\lambda)] \exp(-\mu z).$$

For a solid plate with the dimensions $0.1 \times 0.1 \times 0.1$ m^3 we have $\xi = 2.33$.

The equation of the heating balance for the direction z (for $x = y = 0$) are of the form:

$$(24) \quad \begin{cases} \text{a)} & w_0 = (\lambda/\delta)(T_0 - T_1) + K(T_0 - T_c), \\ \text{b)} & w_1 + (\lambda/\delta)(T_0 - T_1) = (\lambda/\delta)(T_1 - T_2), \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{n}-1) & w_{n-2} + (\lambda/\delta)(T_{n-3} - T_{n-2}) = (\lambda/\delta)(T_{n-2} - T_{n-1}), \\ \text{n)} & w_{n-1} + (\lambda/\delta)(T_{n-2} - T_{n-1}) = K(T_{n-1} - T_c). \end{cases}$$

Here w_n is the heat produced in an elementary volume of a solid, T_1, T_2,..., T_n are the temperatures of an elementary volume of the solid, T_c is the medium's temperature, K is the heat transmission coefficient and δ is the thickness of the solid plate. The joint solution of the equations (24) permits to define the temperature of an elementary volume of the solid and therefore the distribution of the temperature in the direction of z (fig. 1). The distribution of the temperature in the directions of x and y can be found in the same way.

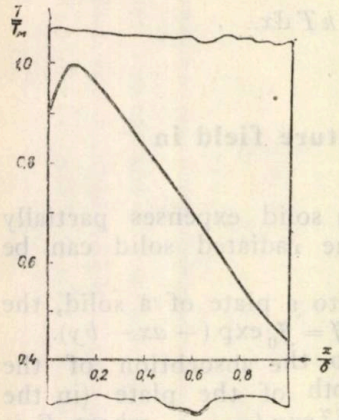


Fig. 1. — The distribution of the temperature on the solid in the direction of z.

The Machine-Building Institute,
Zaporozhye, USSR

Received the 3 VIII 1961

REFERENCES

1. Kolsky H., *Stress Waves in Solids*, Oxford, Univ. Press, 1958.
2. Friedlander F. G., Keller J. B., Commun. pure and appl. Math., 1956, **3**, p. 387.
3. Киттель Ч., *Введение в физику твердого тела*, ГИТЛ, М., 1957, (перев. с англ.)
4. Green M., J. appl. Phys., 1959, **30**, p. 744.
5. Бойков Г. П., Изв. Томск. политехн. ин-та, 1958, *101*.

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

(Резюме)

Смещение атомов твердого тела под действием ионизирующих излучений определено через упругие постоянные материала. Рассмотрение простой энергетической (зонной) модели твердого тела позволило определить величину основной и добавочной (наведенной) электропроводностей. Анализ полученных соотношений показывает, что при облучении в твердом теле возникает объемный заряд, который на 25% снижает величину напряженности основного внешнего электрического поля и является причиной возникновения наведенной э. д. с. Наведенная в твердом теле э. д. с. должна расти с увеличением интенсивности излучения и экспоненциально падать с ростом температуры твердого тела. Решено уравнение, описывающее температурное поле в облучаемом твердом теле.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Распределение температуры в твердом теле по направлению z.

ASUPRA TEORIEI INTERACŢIUNII RADIAŢIEI CU SUBSTANŢA

(Rezumat)

Luînd în considerare modelul zonal energetic al unui solid s-au derminat mărimile conductibilităţii electrice induse, de bază şi suplimentară. S-a rezolvat ecuaţia care descrie cîmpul de temperaturi în corpul solid iradiat.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Distribuţia temperaturii în solid în direcţia z.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 1—2, 1962

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 661.8...455

О СКОРОСТИ И МЕХАНИЗМЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФОСФАТОВ СЕРНОЙ И ФОСФОРНОЙ КИСЛОТАМИ

М. Е. ПОЗИН и Б. А. КОПЫЛЕВ

1. *Введение*

Разложение фосфатов серной или фосфорной кислотами представляет собой сложный процесс химического растворения, т. е. необратимого разрушения кристаллической решетки минерала, сопровождающийся одновременной кристаллизацией побочного или основного продукта реакции сульфата кальция или моно- или ди-кальций фосфата.

Имеющиеся данные по равновесию в системах $CaO - SO_3 - P_2O_5 - H_2O$ [1], [2] и $CaO - P_2O_5 - H_2O$ [3]...[9] позволяют установить характер образующихся продуктов и с достаточной полнотой оценить выход кристаллизующихся веществ [10], [11] в зависимости от температуры и концентраций взаимодействующих реагентов. Однако для выбора оптимальных условий осуществления процесса и разработки рациональных способов кислотного разложения фосфатов необходимо знание закономерностей, характеризующих скорость растворения фосфатов и кристаллизации образующихся твердых фаз.

Своеобразием разложения фосфатов серной или фосфорной кислотами является: а) большая активность применяемой кислоты (проведение процесса при высоком концентрационном потенциале), б) малая растворимость образующихся твердых продуктов и в) малый объем жидкой фазы. Применение серной кислоты концентрации 65...70% H_2SO_4, а фосфорной с содержанием 45...55% P_2O_5 обусловливает растворение фосфата при большой движущей силе, определяемой активностью кислоты или разностью концентраций водородных ионов в массе раствора и на поверхности фосфата. Но повышенная вязкость концентрированных кислот приводит к замедлению диффузии водородных ионов к реакционной поверхности и продуктов реакции от твердой поверхности в массу раствора.

Растворимость сульфата кальция в растворах серной кислоты при 50°С наибольшая в диапазоне концентраций 7,7...10,1% H_2SO_4 и равна 0,413% $CaSO_4$ или 0,17% CaO. При содержании в растворе 40...50% H_2SO_4 растворимость $CaSO_4$ уменьшается до 0,0025...0,015%.

Растворимость сульфата кальция в растворах фосфорной кислоты увеличивается с повышением температуры, а также с увеличением кон-

центрации кислоты до некоторого предела и зависит от формы выделяющегося сульфата кальция — ангидрита, полугидрата или дигидрата [1], [2]. Максимальная растворимость при 80°С $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ в растворе с концентрацией 20% P_2O_5 равна 1,44% $CaSO_4$, а ангидрита в растворе с концентрацией 41,3% P_2O_5 — равна 1,4% $CaSO_4$.

Растворимость CaO в системе $CaO - P_2O_5 - H_2O$ — максимальная в моновариантных растворах, равновесных с дикальций-фосфатом и одноводным монокальцийфосфатом [3]...[9]. С повышением температуры содержание P_2O_5 в этих растворах возрастает, а содержание CaO мало изменяется. При 25°С раствор, равновесный с $CaHPO_4$ и $Ca(H_2PO_4)_2 \cdot H_2O$ содержит 5,8% CaO и 24,47% P_2O_5. С увеличением и уменьшением концентрации P_2O_5 в растворе, по сравнению с концентрацией эвтонического раствора концентрация CaO в растворе уменьшается.

Весовое отношение исходных твердой и жидкой фаз (*Т* : *Ж*) в производстве простого и двойного суперфосфата весьма невелико и составляет $\sim 1 : 1$. Поэтому уже при незначительном протекании реакции между фосфатом и кислотой жидкая фаза быстро пересыщается сульфатом кальция или монокальцийфосфатом и кристаллизация последних начинается задолго до завершения процесса растворения фосфата. В зависимости от степени пересыщения жидкой фазы кристаллизующимися веществами и их свойств образующиеся продукты откладываются на непрореагировавших частицах фосфата сплошным, плотным или неоднородным, пористым слоем (коркой). В результате этого образуется дополнительное сопротивление диффузии кислоты в поверхности фосфата, что вызывает резкое замедление реакции.

Таким образом, скорость разложения фосфатов серной или фосфорной кислотами зависит в основном от структуры корки кристаллизующихся продуктов реакции и условий ее образования и формирования.

Изучение процесса кристаллизации продуктов реакции при взаимодействии фосфатов с серной или фосфорной кислотами является, следовательно, необходимым условием для выяснения механизма и разработки теоретических основ кинетики этого процесса.

Таблица 1

Состав фосфатов (в%)

Фосфаты	P_2O_5	CaO	R_2O_3	MgO	CO_2		Не растворимые в кислоте примеси
Апатитовый концентрат	39,41	51,8	0,55	0,12	—	3,2	0,15
Подольский фосфорит	32,80	49.6	2,58	—	5,67	0,59	3,74
Фосфорит Кара-Тау	26,7	42,7	2,2	3,1	7,8	2,4	12,10

Ниже излагаются краткие результаты некоторых наших исследований по влиянию концентрации кислоты, температуры и отношения твердой и жидкой фаз на скорость разложения фосфатов и по механизму взаимодействия фосфатов с серной и фосфорной кислотами. Опыты проводили с применением фосфатов различного состава (см. таблицу 1).

2. *Влияние концентрации и количества кислоты*

Скорость разложения фосфата определяется сложной зависимостью от концентрации исходной кислоты и от соотношения между кислотой и фосфатом [12]. Независимо от значения $Т:Ж$ высокая скорость разложения фосфата серной кислотой имеет место при использовании 30%...40%-ной серной кислоты. При этом разложение Подольского фосфорита практически заканчивается в течение 15 мин (степень разложения составляет 95%...100%). Но при увеличении концентрации кислоты до 50% H_2SO_4 на скорость процесса начинает влиять количество кислоты или значение отношения $Т:Ж$. Так, при $Т:Ж = 1:10$ уже в течение 15 мин достигается степень разложения, равная 92,6% и процесс заканчивается в течение 1 часа. С уменьшением количества 50%-ной серной кислоты разложение фосфорита замедляется. Для 60%-ной кислоты наименьшая степень разложения фосфорита наблюдается при сравнительно большом количестве кислоты, а именно при $Т:Ж = 1:10$.

В зависимости от отношения $Т:Ж$ минимальная скорость разложения фосфата имеет место при различных концентрациях кислоты. Например, для $Т:Ж = 1:10$ степени разложеня фосфата за 15...60 мин 70%-ной кислотой больше, чем 60%-ной, и меньше, чем 50%-ной кислотой. При $Т:Ж = 1:6$ степени разложениия фосфата за равные промежутки времени 50%-ной кислотой меньше, чем 60%-ной, и больше, чем 70%-ной кислотой (это справедливо при длительности процесса от 15 до 210 мин). С дальнейшим уменьшением количества кислоты, например, при $Т:Ж = 1:3$ степень разложения тем меньше, чем больше концентрация кислоты (от 30% до 70% H_2SO_4).

Аналогично изменяется степень разложения апатита и зависимости от нормы кислоты в производстве суперфосфата, т. е. при малых количествах жидкой фазы. Возрастание степени разложения в течение первых 7 минут по мере увеличения нормы кислоты имеет место при использовании серной кислоты с содержанием 55% и 68% H_2SO_4 [13]. В случае применения серной кислоты (в процессе смешения) концентрации 60,62% и 65%, наоборот, степень разложения апатита уменьшается с увелнчением нормы кислоты. В общем с увеличением нормы кислоты степень разложения апатита в процессе смешения его с кислотой увеличивается в случае применения 55%-й кислоты, уменьшается для кислот с содержанием 60% и 62% H_2SO_4, практически не изменяется для 65%-ной кислоты и увеличивается при применении 68%-ной кислоты.

Разложение апатита фосфорной кислотой ускоряется по мере увеличения концентрации кислоты от 13,6% до 53,6% P_2O_5, но замедляется при использовании более концентрированной кислоты [14].

Увеличение количества фосфорной кислоты влияет на скорость разложения апатита по-разному. При очень большом количестве кислоты ($Т : Ж = 1 : 20...1 : 30$) с содержанием даже 20% P_2O_5 степень разложения апатита за 1,5 часа при 80°С составляет 91% [10]. При норме кислоты 50% и 75% (от стехиометрического количества) процесс практически прекращается через 40...50 мин [14].

Из приведенных данных следует, что концентрация и количество кислоты влияют на скорость разложения не однозначно. Это, очевидно, объясняется противоположным влиянием (в определенных условиях) на скорость процесса разложения фосфата двух факторов — активности кислоты и степени пересыщения раствора кристаллизующейся твердой фазой — сульфатом кальция или монокальцийфосфатом.

3. *Изохроны растворения фосфатов в серной и фосфорной кислотах*

Метод изохрон дает возможность установить пределы концентраций кислоты, а также значения $Т : Ж$, при которых превалирует влияние на скорость процесса активности кислоты или степени пересыщения. На рис. 1 представлена общая зависимость степени разложения фосфорита от концентрации серной кислоты при различных значениях $Т : Ж$ [15]. С увеличением концентрации разбавленных растворов (начиная от нулевой) и уменьшением концентрации весьма концентрированных растворов (от 100% H_2SO_4), активность их повышается. Начиная с некоторых концентраций (малых и больших) кислоты, возрастает пересыщение системы сульфатом кальция и уменьшается степень разложения фосфорита. Поэтому полная кривая зависимости степени разложения от концентрации должна иметь два максимума и один минимум. Чем меньше $Т : Ж$, т. е. чем больше количество кислоты, тем больше раздвинуты максимумы на кривых (ср. кривые *I* и *II*).

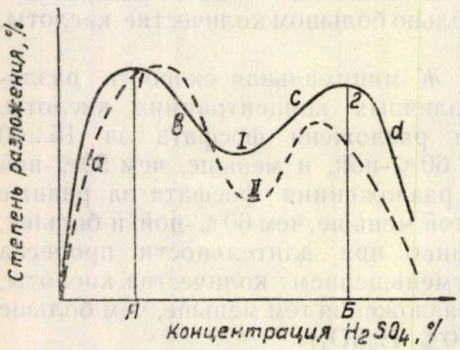


Рис. 1. — Общий вид зависимости степени разложений фосфорита от концентрации исходной серной кислоты для разных значений $Т : Ж$. *1*—$Т' : Ж'$; *2*—$Т'' : Ж''$ ($Т' : Ж' < Т'' : Ж''$).

Точкам *1* и *2* на кривой *I* соответствуют оптимальные концентрации кислоты *А* и *Б*, обеспечивающие наивысшие степени разложения фосфата. Правее точки *1* и левее точки *2* степени разложения меньше, чем в этих точках: имеет место минимум скорости разложения фосфата для серной кислоты концентрацин больше *А* и меньше *Б*. При очень малых отношениях $Т : Ж$ максимумы могут практически совпасть с крайними точками кривой (почти на ординатах). В этом случае обнаруживается лишь один минимум.

Опытные данные полностью подтверждают эти соображения. На рис. 2 видно, что при отношении $Т : Ж = 1 : 10$ степень разложения

фосфорита за 15 мин уменьшается с повышением концентрации серной кислоты от 30% до 60% H_2SO_4 и увеличивается с увеличением концентрации от 60% до 70% H_2SO_4. Характер кривой в этом случае аналогичен характеру кривых, полученных Е. Б. Бруцкус и М. Л. Чепелевецким [16] при значительно меньшем значении $T:Ж$,

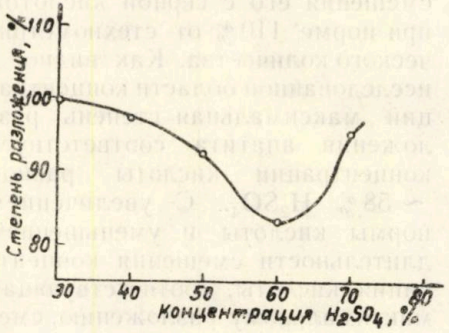


Рис. 2. — Зависимость степени разложения фосфорита за 15 мин от концентрации исходиой серной кислоты при $T:Ж = 1:10$.

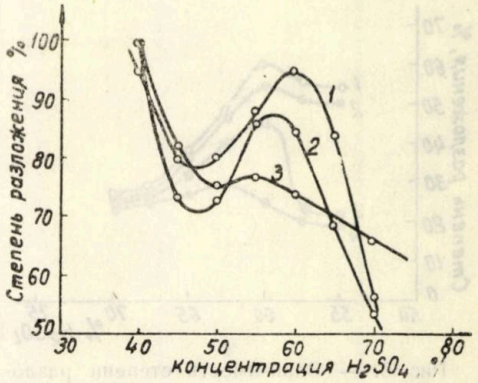


Рис 3. — Зависимость степени разложения фосфорита за 15 мин от концентрации серной кислоты для различных отношений $T:Ж$. *1* — $T:Ж = 1:6$; *2* — $T:Ж = 1:4$; *3* — $T:Ж = 1:3$.

равном 1 : 30. В таких же условиях и при недостаточном перемеши$_4$вании был обнаружен экспериментально и максимум в левой частдиаграммы, соответствующий кислоте с содержанием 5...10% H_2SOи [17]. Для отношения $T:Ж = 1:6$ (рис. 3) степень разложения фосфорита за 15 мин при повышении концентрации кислоты с 30% до ~ 47% H_2SO_4 уменьшается, но при увеличении концентрации с ~47% до 60% H_2SO_4 степень разложения растет, а при дальнейшем росте концентрации с ~ 60% до 70% H_2SO_4 снова падает. То же самое явление уменьшения, а затем увеличения и повторного уменьшения степени разложения фосфорита при увеличении концентрации исходной кислоты наблюдалось и для $T:Ж = 1:4$ и 1 : 3, что легко объясняется приведенными выше соображениями. Эти же закономерности наблюдаются и при резком уменьшении количества жидкой фазы в пульпе, например, при производстве суперфосфата. При этом наличие оптимальной концентрации кислоты, соответствующей максимальной скорости

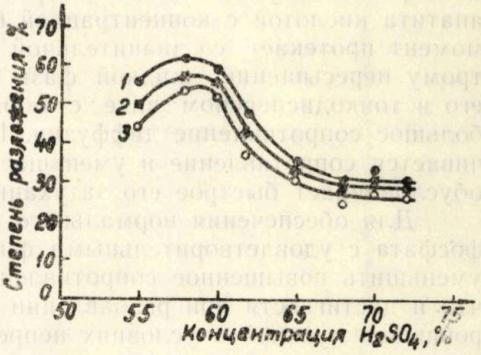


Рис. 4. — Зависимость степени разложения апатита от концентрации серной кислоты при норме 110% от стехиометрического количества. Время разложения (мин): *1* — 7; *2* — 6; *3* — 5.

разложения фосфата в определенном диапазоне концентраций кислоты установлено как при малой длительности взаимодействия реагентов (т. е. в процессе смешения кислоты и фосфата), так и при значительно большей длительности процесса (при созревании камерного продукта и вызревании его при хранении). На рис. 4 представлена зависимость степени разложения апатита от концентрации кислоты в процессе смешения его с серной кислотой при норме 110% от стехиометрического количества. Как видно, в исследованной области концентраций максимальная степень разложения апатита соответствует концентрации кислоты равной ~ 58% H_2SO_4. С увеличением нормы кислоты и уменьшением длительности смешения концентрация кислоты, соответствующая максимальному разложению, смещается в сторону больших значений — 60...62% H_2SO_4 (рис. 5).

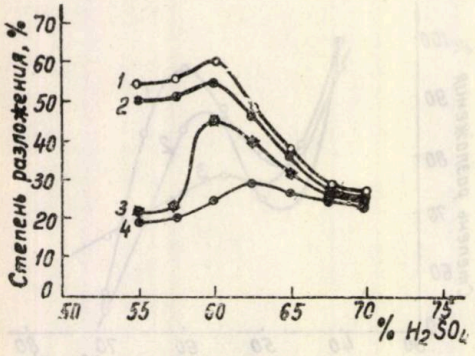


Рис. 5. — Зависимость степени разложения апатита от концентрации серной кислоты при норме 120% от стехиометрического количества. Время разложения (мин): *1* — 7; *2* — 5; *3* — 3,5; *4* — 2.

Полученные данные указывают, что при оптимальной концентрации кислоты создается наиболее благоприятное соотношение между движущей силой процесса — активностью кислоты и сопротивлением диффузии кислоты к поверхности фосфата. В этом случае кристаллы сульфата кальция выделяются в таком виде, при котором они не создают значительного сопротивления диффузии (имеют большие размеры или кристаллизуются не на поверхности зерен фосфата). Разложение апатита кислотой с концентрацией 65% H_2SO_4 и большей в первый момент протекает со значительной скоростью. Это приводит к быстрому пересыщению жидкой фазы сульфатом кальция и выделению его в тонкодисперсном виде с образованием корки, представляющей большое сопротивление диффузии. По мере протекания реакции увеличивается сопротивление и уменьшается движущая сила процесса, что обусловливает быстрое его затухание.

Для обеспечения нормального хода процесса и получения суперфосфата с удовлетворительными физическими свойствами необходимо уменьшить повышенное сопротивление, создаваемое в начале процесса, что и достигается при разбавлении свежих порций кислоты прореагировавшей пульпой в условиях непрерывного смешения реагентов. При этом возникают благоприятные условия для протекания процесса с большей скоростью.

На рис. 6 видно, что скорость разложения апатита серной кислотой с концентрацией 68% H_2SO_4 при непрерывном смешении реагентов значительно больше, чем при периодическом смешении. Благодаря этому и достигается возможность получения хорошо прореагировавшей пульпы, обладающей свойством схватывания; созревание такой пульпы в камере протекает вполне нормально.

Скорость доразложения апатита в процессе созревания его в камере и дозревания при хранении также зависит от концентрации применяемой кислоты и характеризуется максимумом в диапазоне концентраций от 60% до 70% H_2SO_4.

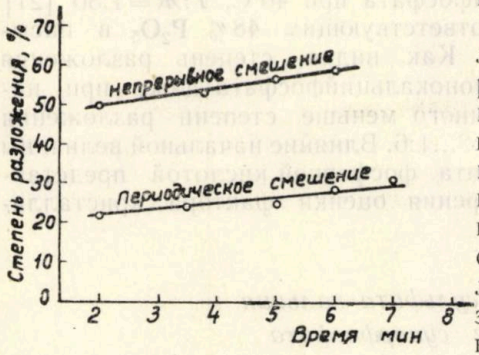


Рис. 6. — Степень разложения апатита 68%-ной серной кислотой при непрерывном смешении (заводские данные НХЗ) и периодическом смешении (лабораторные данные).

Как видно на рис. 7, степень разложения апатита в процессе созревания суперфосфата в условиях, имитирующих непрерывное смешение реагентов (двухкратное смешение апатита с разбавленной и концентрированной кислотой), заметно больше, чем при периодическом смешении (однократном замесе). В лабораторных условиях наибольшая эффективность непрерывного смешения апатитового концентрата с серной кислотой наблюдается в области концентраций 61,7...62% H_2SO_4. При получении суперфосфата в указанных условиях возможно достичь через 3 дня степени разложения апатита 93...93,5% при норме кислоты 110% от стехиометрического количества. Такой суперфосфат может быть направлен на гранулирование без дополнительного вылеживания. Позже было установлено [19], [20], что при таком же значении оптимальной концентрации кислоты имеет место максимальное разложение в камерном продукте флоридского фосфорита [19] и фосфорита Кара-Тау [20].

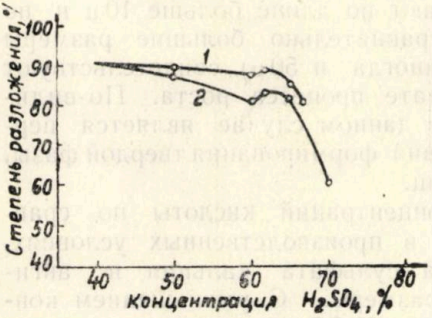
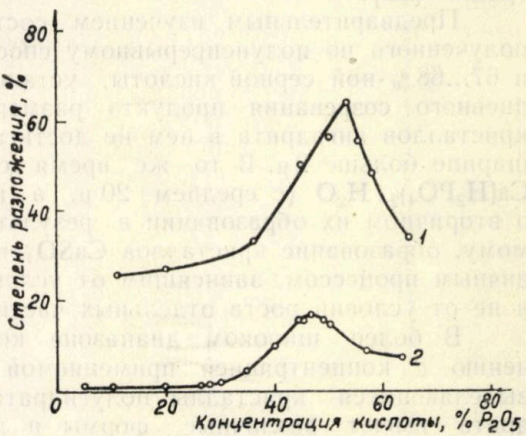


Рис. 7.—Изменение степени разложения апатита в зависимости от концентрации серной кислоты при получении суперфосфата непрерывным (двухкратным) и периодическим (однократным) смешением реагентов. *1*—непрерывно (двухкратное) семешение; *2*—периодическое (однократное) смешение.



Ррис. 8. — Изотерма-изохрома разложения апатита фосфорной кислотой (за 2 часа). *1* — разложение апатита при 20°С и стехиометрической норме фосфорной кислоты; *2* — разложение апатита при 40°С в насыщенных растворах $CaO-P_2O_5-H_2O$.

На рис. 8 представлена двухчасовая изотерма-изохрона (кривая *1*) зависимости степени разложения апатита от концентрации исходной

фосфорной кислоты при 20°С и отношении $Т:Ж = 1:2...1:6$. Максимальная степень разложения достигается при концентрации кислоты ~ 54% P_2O_5 [14]. Кривая *2* относится к растворению апатита в насыщенных растворах одноводного монокальцийфосфата при 40°С, $Т:Ж = 1:30$ [21] и характеризуется максимумом, соответствующим 48% P_2O_5 в насыщенном растворе тройной системы. Как видно, степень разложения апатита в насыщенных растворах монокальцийфосфата даже при начальных значениях $Т:Ж = 1:30$ намного меньше степени разложения в фосфорной кислоте при $Т:Ж = 1:2...1:6$. Влияние начальной величины $Т:Ж$ на скорость разложения апатита фосфорной кислотой представляется весьма важным с точки зрения оценки фактора кристаллизации монокальцийфосфата.

4. *Кристаллизация сульфата кальция в производстве суперфосфата*

Выше было указано на зависимость скорости взаимодействия фосфата с серной кислотой от степени пересыщения раствора сульфатом кальция и свойств корки, образованной выделяющимися кристаллами на поверхности реагирующих частиц.

Представляют интерес данные по исследованию механизма кристаллизации и гранулометрического состава образующихся кристаллов в процессе взаимодействия апатита с серной кислотой разных концентраций [22].

Предварительным изучением состава заводского суперфосфата, полученного по полунепрерывному способу из апатитового концентрата и 67...68%-ной серной кислоты, установлено, что даже после 30-ти дневного созревания продукта размеры подавляющего большинства кристаллов ангидрита в нем не достигают по длине больше 10 μ и по ширине больше 2 μ. В то же время сравнительно большие размеры $Ca(H_2PO_4)_2 \cdot H_2O$ (с среднем 20 μ, а иногда и 50 μ) свидетельствуют о вторичном их образовании в результате процесса роста. По-видимому, образование кристаллов $CaSO_4$ в данном случае является первичным процессом, зависящим от условий формирования твердой фазы, а не от условий роста отдельных частиц.

В более широком диапазоне концентраций кислоты по сравнению с концентрацией применяемой в производственных условиях, выделяющиеся кристаллы полугидрата сульфата кальция и ангидрита имеют различные формы и размеры. С уменьшением концентрации кислоты от 63% до 50% H_2SO_4 существенно изменяются форма и размеры выделяющихся кристаллов $CaSO_4 \cdot 0{,}5H_2O$ и ангидрита. Так, полугидрат в пульпе, полученной через 10 мин после замеса апатита с кислотой концентрации 63% H_2SO_4, выделяется в виде тонких иголочек с размерами 3 μ...6 μ × 1μ...0,5 μ. При использовании кислоты с концентрацией 56%...52% H_2SO_4 выделяются волосные кристаллы длиной от 12 μ...15 μ до 20 μ...30 μ. Хорошо образованные призматические кристаллы полугидрата длиной 30 μ...50 μ до 70 μ и шириной 5 μ...10 μ выделяются при разложении апатита 50...51%-ной серной кислотой.

Кристаллы ангидрита, выделившиеся в суперфосфате односуточного хранения, имеют следующие форму и размеры в зависимости от концентрации использованной кислоты: при 63% H_2SO_4 — тонкие иголочки размером 6 μ...15 μ × 1 μ...2 μ, при 55%-ной кислоте — пластинчатые кристаллы с размерами 15 μ...20 μ × 9 μ...12 μ и при 50%-ной кислоте — призматические кристаллы с размерами 15 μ × 9 μ и 12 μ × 12 μ.

Из сопоставления размеров получаюшихся кристаллов сульфата кальция со скоростью разложения апатита следует, что при образовании кристаллов в виде тонких иголочек размером до ~ 5 μ процесс (особенно во-второй стадии) значительно замедляется (затормаживается). В случае же образования кристаллов $CaSO_4$ в виде пластинчатых и призматических кристаллов, имеющих размеры больше 10 μ, процесс разложения фосфата протекает сравнительно быстро.

Визуальными наблюдениями установлено, что при значительном пересыщении растворов сульфатом кальция (в случае применения кислоты большой концентрации) образующиеся мелкие кристаллы покрывают всю поверхность непрореагировавших частиц апатита. При этом имеет значение и форма кристаллов: тонкие иголки более плотно укладываются на поверхности, нежели пластинчатые и призматические. Укладка крупных пластинчатых и призматических кристаллов вокруг частицы апатита не является компактной. Это приводит к образованию между кристаллами каналов (пор), по которым серная кислота проникает к поверхности неразложившегося апатита.

Таким образом, эффект экранирования зерен фосфата, а следовательно, и эффект торможения их разложения определяются размерами и формой образующихся кристаллов сульфата кальция.

В условиях непрерывного смешения реагентов апатит поступает в предварительно прореагировавшую пульпу и реагирует с серной кислотой меньшей концентрации (по сравнению с исходной) в присутствии фосфорной кислоты. В определенном диапазоне концентрации фосфорной кислоты растворимость сульфата кальция значительно больше, чем в серной кислоте. В этих условиях степень пересыщения раствора сульфатом кальция меньше и выделяющиеся кристаллы имеют более крупные размеры (в несколько раз) по сравнению с кристаллами, образующимися при периодическом смешении апатита с кислотой той же концентрации. Это было подтверждено специальными опытами по перекристаллизации в ангидрит полугидрата сульфата кальция, предварительно обработанного фосфорной кислотой. Однако, с увеличением концентрации фосфорной кислоты растворимость сульфата кальция резко уменьшается. Например, при 25°С растворимость $CaSO_4 . 0{,}5\ H_2O$ в 80%-ной фосфорной кислоте уменьшается в 10 раз по сравнению с растворимостью его 40%-ной кислоте. Соответственно увеличивается степень пересыщения раствора сульфатом кальция и размеры выделяющихся кристаллов уменьшаются почти в два раза [23]. По-видимому, уменьшение размеров кристаллов выделяющихся из более концентрированных растворов, связано также с увеличением вязкости жидкой фазы и ухудшением условий дифузии из раствора к кристаллическим зародышам. Помимо этого, увеличение концентрации фосфорнойкислоты приводит к усилению коагуляции выделяющегося сульфата

кальция и интенсификации процесса отложения шламовых частиц сульфата кальция на зернах апатита. В результате на поверхности апатита образуется прочный и мало проницаемый покров, препятствующий диффузии кислоты к апатиту, что обусловливает резкое торможение реакции. Это делает понятным тот факт, что при осуществлении непрерывного процесса смешения реагентов в производстве суперфосфата невозможно применение для разложения апатита серной кислоты с концентрацией больше 72% H_2SO_4 без резкого замедления реакции и ухудшения качества камерного суперфосфата.

Применение бащенной или еще более концентрнрованной серной кислоты в производстве суперфосфата возможно при нахождении путей укрупнения выделяющихся кристаллов сульфата кальция или предотвращения осаждения их на поверхности апатита. Этого можно достигнуть или применением добавок, облегчающих формирование образующейся твердой фазы или заряжающих сульфат кальция и апатит однородным электрическим зарядом, а также применением электрического тока. Например, добавка к апатиту до 1% сульфата кальция вызывает некоторое улучшение микроструктурного состава суперфосфата—увеличение размеров и количества пластинчатых кристаллов сульфата кальция [22]. Применение переменного электрического тока дает возможность достичь в камерном процессе разложения фосфорита Кара-Тау на 90% [24]. Полученный таким образом кислый суперфосфат без дозревания на складе может быть направлен на аммонизацию.

5. *О механизме взаимодействия фосфатов с фосфорной кислотой*

Изучением изменения скорости реакции в процессе взаимодействия апатитового концентрата с фосфорной кислотой установлено наличие оптимальной концентрации кислоты ($\sim 53{,}6\%$ P_2O_5), для которой характерна наиболее высокая скорость в начальной стадии разложения [14]. Однако по мере протекания реакции концентрация кислоты почти перестает влиять на скорость разложения. Примерно через 60 мин от начала опыта скорости для всех кислот, за исключением 21% P_2O_5, становятся приблизительно одинаковыми. Таким образом, по мере протекания реакции концентрация кислоты почти перестает влиять на ее скорость.

Температура, так же как и концентрация кислоты, влияет только на начальную скорость разложения. Несмотря на то, что начальные скорости при повышенных температурах значительно больше, они уменьшаются гораздо быстрее и уже через 15 мин...20 мин от начала разложения становятся меньшими, чем при 20°С. Повышение температуры от 40°С до 70°С вообще почти не влияет на скорость разложения. Все кривые изменения скоростей разложения с течением времени для этих температур совпадают друг с другом.

Зависимость скорости разложения апатитового концентрата фосфорной кислотой (при 20°С и стехиометрической норме кислоты) от концентрации водородных ионов на всем протяжении опыта имеет криволинейный характер. Это указывает на то, что в период камер-

ного созревания продукта скорость разложения апатита фосфорной кислотой находится не в прямо пропорциональной зависимости от концентрации водородных ионов в системе.

Из всего этого следует, что по скорости процесса разложение апатита фосфорной кислотой можно разделить на два этапа [25]. Первый — очень короткий этап характеризуется высоким температурным коэффициентом, высокой скоростью разложения, зависящей от концентрации кислоты. На втором этапе и концентрация кислоты, и температура мало влияет на скорость разложения — процесс протекает как диффузионный. Это объясняется тем, что в первый, очень короткий момент разложение апатита происходит в фосфорной кислоте, не насыщенной монокальцийфосфатом и, следовательно, без образования новой твердой фазы. По мере протекания реакции жидкая фаза насыщается однозамещенным фосфатом кальция и начинается его кристаллизация. Это происходит тем быстрее, чем выше концентрация исходной кислоты. В результате кристаллизации монокальцийфосфата на зернах апатита образуется корка соли, которая по мере ее формирования оказывает все большее сопротивление диффузии водородных ионов.

Первый этап разложения подчиняется основным закономерностям, установленным [10] для процесса растворения апатита фосфорной кислотой в условиях, когда исключена возможность кристаллизации продукта реакции.

Некоторый сдвиг во времени между началом кристаллизации соли, определяемым графически, и переходом во-второй этап разложения, по-видимому, объясняется как пересыщением раствора монокальцийфосфатом, как и тем, что образующаяся корка на частицах апатита в первое время может и не оказывать значительного сопротивления диффузии водородных ионов.

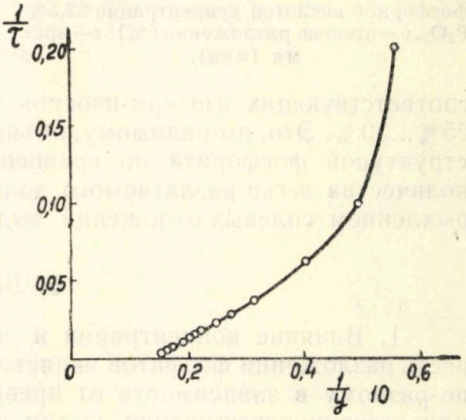


Рис. 9. — Зависимость между $1/y$ и $1/\tau$ при разложении апатита фосфорной кислотой. y — степень разложения апатита 59,0% P_2O_5 кислотой (%); τ — время (мин).

Известно, [11], [26], что в случае торможения процесса лишь сопротивлением образующейся корки скорость его изменяется по уравнению прямой в координатах $1/y—1/\tau$ где y — количество вещества, прореагировавшего к моменту времени τ. Как видно из рис. 9, разложение апатита фосфорной кислотой описывается в целом значительно более сложной зависимостью. Однако, если исключить первые точки, относящиеся к 15 мин...20 мин разложения, то в дальнейшем процесс хорошо описывается указанной зависимостью.

На основании полученных результатов можно заключить, что скорость разложения апатита фосфорной кислотой для так называемых „загустевающих“ пульп (в которых происходит кристаллизация моно-

MOSTAVI KONTEM 1848 KONZPONTI KÖNYVTÁRA

кальций фосфата) определяется на первом этапе (при отсутствии кристаллизации) концентрацией кислоты и температурой, а на втором — скоростью диффузии водородных ионов через твердую корку продуктов реакции.

Механизм разложения фосфорита Кара-Тау как термической, так и экстракционной фосфорными кислотами [27] не отличается от механизма разложения апатита. В отличие от апатитового концентрата разложение фосфорита Кара-Тау почти на всем протяжении опыта от 5 мин до 150 мин хорошо описывается прямолинейной зависимостью (рис. 10) в координатах $1/y$ и $1/\tau$, где: y — степень разложения фосфорита Кара-Тау кислотой, содержащей 52,5% P_2O_5 (в %), τ — время (в мин). Это, очевидно, объясняется тем, что при наличии в растворе соединений магния насыщение раствора и кристаллизация солей наступает значительно раньше времени, в течение которого производилось первое определение. Однако, при одной и той же структуре и толщине корки это должно было бы привести к замедлению процесса разложения по сравнению с апатитовым концентратом. В действительности, как видно из рис. 10, изотермы-изохроны для фосфорита Кара-Тау лежат значительно выше соответствующих изотерм-изохрон для апатита. Разница составляет 25%...30%. Это, по-видимому, объясняется более тонкой и менее плотной структурой фосфорита по сравнению с апатитом, наличием большого количества легко разлагаемого доломита, а также имеющим место разрыхлением солевых отложений выделяющимся углекислым газом.

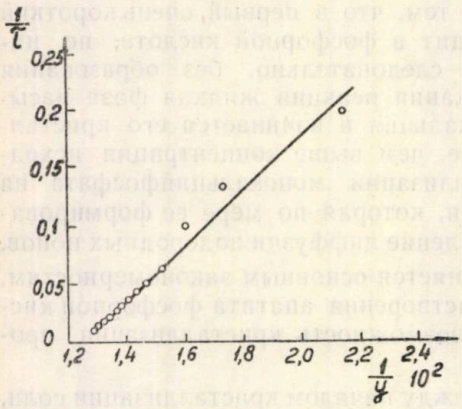


Рис. 10. — Зависимость между $1/y$ и $1/\tau$ при разложении фосфорита Кара-Тау фосфорной кислотой концентрации 52,5% P_2O_5. y — степень разложения (%); τ — время (мин).

6. *Выводы*

1. Влияние концентрации и количества серной кислоты на скорость разложения фосфатов является сложной функцией и сказывается по-разному в зависимости от превалирующей роли активности кислоты или степени пересыщения систем сульфатом кальция.

Концентрация серной кислоты и отношение $T:Ж$ в пульпе являются основными решающими факторами, определяющими при прочих оптимальных условиях (температуры, размера частиц и т. д.) скорость разложения фосфата серной кислотой.

2. Анализ зависимости степени разложения фосфата от концентрации серной кислоты за определенный промежуток времени при различных значениях $T:Ж$ приводит к выводу о наличии двух концентраций кислоты, дающих максимальную степень разложения, и одной концентрации, при которой степень разложения минимальна.

3. Одной из особенностей непрерывного смешения реагентов является увеличение общей скорости взаимодействия апатита с серной кислотой по сравнению с периодическим смешением, что объясняется разбавлением серной кислоты большим количеством уже прореагировавшей пульпы. Это, в частности, и дает возможность использовать при непрерывном смешении реагентов более концентрированную серную кислоту.

4. Влияние концентрации серной кислоты на скорость разложения фосфатов объясняется в основном свойствами корки, образующейся на поверхности частиц фосфата виделяющимися кристаллами сульфата кальция. Разложение фосфата сильно замедляется при образовании кристаллов в виде тонких иголок размером до $\sim 5\,\mu$ и протекает сравнительно быстро при образовании пластинчатых и призматических кристаллов $CaSO_4$ размером больше 10 μ. Размеры образующихся кристаллов и определяются концентрацией, количеством и температурой кислоты, а также другими факторами, влияющими на скорость образования и роста новой и твердой фазы.

5. Разложение апатитового концентрата фосфорной кислотой в „загустевающей" пульпе протекает в две стадии (этапа). Вначале (на первом очень коротком этапе) скорость разложения зависит от концентрации и нормы кислоты, а также от температуры. На втором этапе растворение сопровождается кристаллизацией продуктов реакции и скорость разложения определяется скоростью диффузии реагентов через твердую корку монокальцийфосфата.

6. Механизм разложения Кара-Тау фосфорной кислотой аналогичен механизму разложения апатита. Однако, в связи с наличием в растворе соединений магния, высаливающих кальциевые соли, время протекания первого этапа резко сокращается и процесс хорошо описывается прямолинейной зависимостью в координатах $1/y$ и $1/\tau$.

Поступила 25 V 1961 г.

Ленинградский технологический институт им. Ленсовета, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Таперова А. А., ЖПХ, 1940, **XIII**, *5*, стр. 1.
2. Таперова А. А., Шульгина М. Н., Ibid., 1945, **XVIII**, *9—10*, стр. 521.
3. Cameron F. K., J. Am. Chem. Soc., 1904, **26**, p. 1454; Ibid., 1905, **27**, p. 1512.
4. Cameron F. K., Bell T. M., Ibid., 1906, **28**, p. 1222.
5. Basset H., Z. anorg. Chem., 1907, **53**, S. 33; Ibid., 1908, **54**, S. 1; J. Chem. Soc London, 1917, **111**, p. 620.
6. Белопольский А. П., Таперова А. А., Серебренникова М. Т., Шульгина М. Н., ЖПХ, 1937, **X**, *7*, стр. 504.
7. Белопольский А. П., Таперова А. А., Шульгина М. Н., Ibid, 1939, **XII**, *1*.
8. Белопольский А. П., Серебренникова М. Т., Билевич А. В., Ibid., 1940, **XIII**, *1*, стр. 3.
9. Elmore K. L., Farr T. D., Ind. Eng. Chem., 1940, **32**, *4*, p. 580.
10. Чепелевецкий М. Л., Труды НИУИФ, 1937, *137*.
11. Чепелевецкий М. Л., Бруцкус Е. Б., *Суперфосфат. Физико-химические основы производства*, М., 1957.
12. Позин М. Е., Копылев Б. А., Се-Ден Тен, Тр. ЛТИ им. Ленсовета, 1956, *XXXVI*, стр. 5—21.

13. Позин М. Е., Григорьев Г. С., Копылев Б. А., Соколова А. Д., ЖПХ, 1958, **XXXI**, *7*, стр. 698.
14. Позин М. Е., Копылев Б. А., Жильцова Д. Ф., Ibid., 1959, **XXXII**, *3*, стр. 509.
15. Позин М. Е., Копылев Б. А., Се-Ден Тен, Тр. ЛТИ им. Ленсовета, 1956, *XXXVI*, стр. 21—30.
16. Бруцкус Е. Б., Чепелевецкий М. Л., Изв. сектора физ.-хим. анализа АН СССР, 1950, *20*, стр. 383.
17. Чепелевецкий М. Л., Бруцкус Е. Б., Краснов К. С., Южная Е. В., ЖНХ, 1956, **I**, *7*, стр. 1512.
18. Позин М. Е., Копылев Б. А., Се-Ден Тен, Труды ЛТИ им. Ленсовета, 1956, *XXXVI*, стр. 31—41, 41—50.
19. Hatfield J. D., Rindt D. N., Slack A. V., Ind. Eng. Chem., 1959, **51**, *5*, p. 677.
20. Позин М. Е., Копылев Б. А., Сейтмагзимов А., ЖПХ, 1960, **XXXIII**, *9*, стр. 1969.
21. Краснов К. С., Ibid, 1953, **XXVI**, *11*, стр. 1114, ; Ibid, 1955, **XXXVIII**, *12*, стр. 1275.
22. Позин М. Е., Копылев Б. А., Варшавский В. Л., Тр. ЛТИ им. Ленсовета, 1956, *XXXVI*, стр. 58—72.
23. Позин М. Е., Копылев Б. А., Варшавский В. Л., Пинтер И., ЖПХ, (в печати).
24. Падо Н. К., Базилев В. Д., Тр. НИУИФ, 1960, *172*, **ч. I**, стр. 19.
25. Позин М. Е., Копылев Б. А., Жильцова Д. Ф., ЖПХ, 1959, **XXXII**, *10*, стр. 2164.
26. Николаев А. В., (ред.), *Защитные пленки на солях*, Изд. АН СССР, М., 1944 г.
27. Позин М. Е., Копылев Б. А., Жильцова Д. Ф., ЖПХ, 1959, **XXXII**, *11*, стр. 2377.

DECOMPOSITION RATE AND MECHANISM OF THE PHOSPHATES OF SULPHURIC AND PHOSPHORIC ACIDS

(Summary)

The decomposition rate of the phosphates of sulphuric and phosphoric acids is stated to be a complex function of the concentration and the amount of the acid, other conditions being equal. The examination of the decomposition rate dependence of phosphate on the concentration of sulphuric acid during a definite period of time, the weight relations of phosphates and acid being different, leads us to the conclusion of the existence of two acid concentrations giving a maximum degree of decomposition and on concentration with a maximum degree of decomposition.

The decomposition of phosphates of sulphuric acid proceeds very fast, when using H_2SO_4 of 50%...60% concentration because of the formation, under these conditions, of laminated and prysmatic crystals of calcium sulphate, their size being larger than 10 μ.

The interaction of phosphates with phosphoric acid under conditions excluding crystallization of the reaction product proceeds with a rather fast rate.

The decomposition rate of phosphates of phosphoric acid which is accompanied by the crystallization of the reaction product is not large and is due to the dissusion rate of the reagents through the solid crust of monocalciumphosphate.

Explication of the figures

Fig. 1. — The general diagram of the dependence of the phosphorite decomposition rate on the concentration of the original sulphuric acid for various values of $S:L$. $1 - S':L'$; $2 - S'':L''$, $(S':L' < S'':L'')$

Fig. 2. — The dependence of the phosphorite decomposition rate after 15 min, on the concentration of the original sulphuric acid for $S:L=1:10$.

Fig. 3. — The dependence of the phosphorite decomposition rate after 15 min, on the concentration of sulphuric acid for various values of $S:L$. *1* — $S:L=1:6$; *2* — $S:L=1:4$; *3* — $S:L=1:3$.

Fig. 4. — The dependence of the apathite decomposition rate on the concentration of sulphuric acid at a standard of 110% as compared to stechiometric quantity. Decomposition time (im min): *1* — 7; *2* — 6; *3* — 5.

Fig. 5. — The dependence of the apathite decomposition rate on the concentration of the sulphuric acid at a standard of 120% as compared to stechimetric quantity. Decomposition time (in min): *1* — 7; *2* — 5; *3* — 3,5; *4* — 2.

Fig. 6. — The apathite decomposition rate by the 98% sulphuric acid at continuous mixing (commercial-scale data) and periodical mixing (laboratory data).

Fig. 7. — The variation of the apathite decomposition rate with the concentration of the sulphuric acid when producing superphosphate by continuous (twofold) and periodical (one) mixing. *1* — continuous (twofold) mixing; *2* — periodical (one) mixing.

Fig. 8. — Isotherm-isochron of the decomposition of phosphoric acid (in 2 hours). *1* — the decomposition of apathite at 20°C and at the stechiometric standard of phosphoric acid; *2* — the decomposition of apathite at 40°C in saturated solutions of $CaO-P_2O_5-H_2O$.

Fig. 9. — The relation between $1/y$ and $1/\tau$ during the decomposition of apathits by phosphoric acid. y — apathite decomposition rate 59.0% by P_2O_5 acid (%); τ — time (min).

Fig. 10. — The relation between $1/y$ and $1/\tau$ during the decomposition of phosphorite Kara-Tau by phosphoric acid at the concentration of 52,5% P_2O_5. y — decomprin position rate (%); τ — time (min).

ASUPRA VITEZEI ŞI MECANISMULUI DE DESCOMPUNERE A FOSFAŢILOR ACIZILOR SULFURIC ŞI FOSFORIC

(Rezumat)

S-a stabilit că viteza de descompunere a fosfaţilor acizilor sulfuric şi fosforic (restul condiţiilor fiind aceleaşi) este o funcţie complicată de concentraţia şi de cantitatea de acid folosită. Analiza dependenţei între gradul de descompunere a fosfatului şi concentraţia acidului sulfuric, făcută într-un interval de timp determinat variind raportul între greutatea fosfatului şi acidului întrebuinţat, pune în evidenţă existenţa a două concentraţii de acid care conduc la un grad maxim de descompunere şi a unei singure concentraţii de acid care corespunde la un grad minim de descompunere.

Descompunerea fosfaţilor prin intermediul acidului sulfuric se face repede folosind concentraţia 50%...60% H_2SO_4, întrucît în acest caz se formează cristale de sulfat de calciu în plăci şi prizmatice, de dimensiuni mai mari decît 10 μ.

Interacţiunea fosfaţilor cu acidul fosforic, în condiţii care să excludă cristalizarea produsului de reacţie, decurge cu o viteză comparativ mai ridicată.

Viteza de descompunere a fosfaţilor acidului fosforic nu este ridicată în cazul cristalizării produsului de reacţie. Ea se determină prin viteza de difuzie a reagenţilor prin crusta solidă a monocalcifosfatului.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Diagrama generală a dependenţei între gradul de descompunere a fosfaţilor şi concentraţia acidului sulfuric original, pentru diferite valori ale raportului $S:L$. *1* — $S':L'$; *2* — $S'':L''$, $(S':L' < S'':L'')$.

Fig. 2. — Dependenţa procesului de descompunere a fosfaţilor după 15 min, în funcţie de concentraţia acidului sulfuric original, în cazul raportului $S:L=1:10$.

Fig. 3. — Dependenţa procesului de descompunere a fosfaţilor după 15 min, în funcţie de concentraţia acidului sulfuric, pentru diferite valori ale raportului $S:L$. *1* — $S:L=1:6$; *2* — $S:L=1:4$; *3* — $S:L=1:3$.

Fig. 4. — Dependenţa între gradul de descompunere a apatitei şi concentraţia acidului sulfuric standardizat 110%, luîndu-se ca bază de comparaţie cantitatea stoichiometrică. Timpul de descompunere (min): *1* — 7; *2* — 6; *3* — 5.

Fig. 5. — Dependența între gradul de descompunere a apatitei și concentrația de acid sulfuric standardizat 120%, luîndu-se ca bază de comparație cantitatea stoichimetrică Timpul de descompunere (min): *1* — 7 ; *2* — 5 ; *3* — 3,5 ; *4* — 2.

Fig. 6. — Dependența între viteza de descompunere a apatitei în prezența acidului sulfuric 68% amestecarea efectuîndu-se neîntrerupt (date cu caracter industrial) sau periodic (date de laborator).

Fig. 7. — Variația gradului de descompunere a apatitei cu concentrația acidului sulfuric în cazul formării de superfosfat, executîndu-se o amestecare neîntreruptă (dublă) și periodică (simplă). *1* — amestecarea neîntreruptă (dublă) ; *2* — amestecare periodică (simplă).

Fig. 8. — Izoterma-izocronă a procesului de descompunere a acidului fosforic (în două ore). *1* — descompunerea apatitei la 20°C și la o concentrație a acidului fosforic corespunzătoare standardului stoichiometric ; *2* — descompunerea apatitei la 40°C în soluție saturată de $CaO—P_2O_5—H_2O$.

Fig. 9. — Relația între $1/y$ și $1/\tau$ în timpul descompunerii apatitei de către acidul fosforic. y — viteza de descompunere a apatitei 59.0% de către P_2O_5 acid (%) ; τ — timpul (min).

Fig. 10. — Relația între $1/y$ și $1/\tau$ în timpul descompunerii fosfatului Cara-Tau de către acidul fosforic la concentrația de 52, % P_2O_5. y — viteza de descompunere (%) ; τ — timpul (min).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 546.681 ; 669.871

DETERMINAREA FLUOROMETRICĂ A GALIULUI CU RODAMINA *B* ÎN SUBPRODUSELE INDUSTRIEI ZINCULUI

DE

VIRGIL ARMEANU şi POLIXENIA COSTINESCU

1. Introducere

Galiul este un metal al viitorului care îşi găseşte o utilizare din ce în ce mai largă în tehnică pentru preţioasele lui proprietăţi, în rîndul cărora figurează domeniul larg de temperaturi în care acest metal rămîne în stare lichidă. Se ştie că punctul de topire al galiului este 29,5°C şi cel de fierbere 2 064°C, însă galiul lichid are tendinţa de a rămîne în stare topită şi sub temperatura lui de solidificare (stare de subrăcire), ceea ce coboară încă limita inferioară a stării lichide.

Galiul este un metal rar; ca răspîndire în scoarţa superficială a pămîntului este al 43-lea element, găsindu-se în cantitate de circa $4.10^{-4}\%$. Totuşi se găseşte în cantitate mai mare de circa 66 ori decît iodul, de 100 ori decît argintul, de 150 ori decît mercurul şi de 800 ori decît aurul.

Este socotit un element rar deoarece nu se găseşte concentrat în anumite minereuri sau zăcăminte, fiind dispersat, întovărăşind în general minereurile de zinc şi bauxitele, unde poate ajunge pînă la concetraţia de 0,003%. În cenuşa unor cărbuni de pămînt, după N e k r a s o v, s-a găsit pînă la 1,5% Ga.

Utilizările lui principale sînt: la termometre, în diferite aliaje cu punct de topire coborît, necesare pentru semnalizare sau alte aparate automate, la producerea oglinzilor speciale, în aliaje dentare etc.

Fiind din ce în ce mai mult întrebuinţat în tehnică, în prezent se dă o deosebită atenţie descoperirii şi extragerii lui din diversele subproduse de metalurgie sau alte subproduse industriale. În acest scop au fost necesare şi s-au căutat noi metode de detectare şi de dozare a microcantităţilor de galiu.

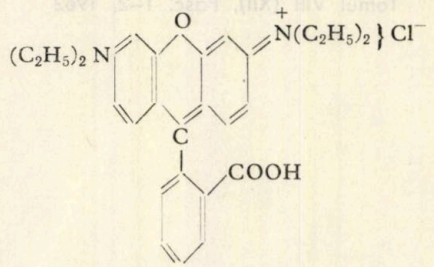
Astfel s-au instituit un mare număr de metode pentru dozarea galiului: gravimetrice, volumetrice, cromatografice, polarografice, complexometrice, spectrale şi spectrofotometrice.

Ne-am orientat spre ultima clasă, şi anume, spre metodele fluorometrice, deoarece permit dozări relativ rapide şi suficient de exacte, utilizînd o aparatură care se poate găsi mai uşor.

Se cunosc în literatură metode fluorometrice folosind drept reactivi: salicil orto-amino-fenol [1], cupferon [2], oxină [3], 5,7 dibromoxină [4], galion [5], cuercetină [6], sulfo-naftol-azo-rezorcină [7] şi rodamină *B* [8], [9], [10].

Din examinarea acestor metode s-a ajuns la concluzia că metodele cu rodamină *B* prezintă mai multe avantaje.

Rodamina *B*, (N, N, N′, N′-tetraetil rodamină-clorhidrat), ($C_{28}H_{30}O_3N_2 \cdot HCl$),



în soluţie de acid clorhidric 6 *n* dă cu galiul compusul tetracloro-galat de rodamină *B*, de tipul $(RH)GaCl_4$, de culoare roşie-violet, care poate fi extras cu ajutorul unor solvenţi organici ca: benzen sau amestec de benzen eter, clorbenzen, tetraclorură de carbon şi alţii. Acest compus prezintă simultan cu coloraţia şi o fluorescenţă galben-portocalie în lumină ultravioletă.

Se ştie că rodamina *B* nu este un reactiv specific pentru galiu, deoarece reacţionează şi cu alte elemente ca: stibiul (V), taliul (III), aurul (III) şi fierul (III), care dau şi ele complecşi solubili în benzen. De aceea galiul trebuie separat de elementele care jenează dozarea lui.

Separarea galiului se face prin extracţie cu solvenţi organici din soluţie clorhidrică 6 *n*.

Deoarece în aceste condiţii trec în soluţie eterică fierul (III), molibdenul şi taliul (III), (II), se reduc fierul şi taliul, în prealabil, cu o soluţie de clorură titanoasă, iar molibdenul, dacă este în cantitate mai mare, se elimină cu benzoinoximă [12].

Onishi şi Sandell [8] extrag clorura de galiu cu eter izopropilic, iar Culkin şi Riley [9] folosesc eterul etilic.

În lucrarea de faţă s-a căutat a se determina cantităţile mici de galiu ce se găsesc în subprodusele industriei zincului de la noi din ţară, folosind atît metoda de separare a galiului de celelalte elemente, prin extracţia triclorurii de galiu cu eter etilic, cît şi o altă metodă mai rapidă, prin înlăturarea extracţiei cu eter, după indicaţiile date de Saltîkova şi Fabrikova [10].

Elementele care sînt extrase parţial, o dată cu clorura de galiu, cu eter etilic, în condiţiile de lucru indicate, ca de exemplu germaniul şi staniul, nu reacţionează cu rodamina *B*.

2. Metoda I (cu extracţia clorurii de galiu)

a) *Reactivi*

1. Eter etilic cu acid clorhidric. Într-o pîlnie de separare se agită 200 ml eter etilic cu 30 ml acid clorhidric (1 : 1), în care s-a dizolvat 50 mg sulfit de sodiu. Se separă stratul eteric şi se repetă operaţia de agitare cu altă tranşă de acid clorhidric 1 : 1.

2. Acid clorhidric 6 *n* şi acid clorhidric 6 *n* saturat cu eter ca la pct. 1.

3. Soluţie de clorură titanoasă 20%; se foloseşte proaspăt preparată, trecîndu-se printr-o coloană de reducere cu cadmiu metalic.

4. Soluţie 0,5% rodamină *B* în acid clorhidric 6 *n*.

5. Amestec benzen-eter (3 : 1).

6. Soluţie etalon de galiu. S-a dizolvat 0,01604 g galiu metalic în 10 ml acid clorhidric 1 : 1 şi 0,5 ml perhidrol, pe baie de apă; s-a adus la uscare şi apoi cu acid clorhidric 6 *n*, prin diluări succesive, s-a obţinut soluţia etalon care conţine 1,02 γ Ga/1 ml.

b) *Modul de lucru*

S-au efectuat patru operaţii:

1. Trecerea probei în soluţie. Se tratează 0,3...1 g substanţă cu 10 ml acid clorhidric 1 : 1 şi 1...2 ml perhidrol, sau 2...3 ml acid azotic concentrat şi se eva-

poră la uscare pe o baie de apă; se reia o dată sau de două ori cu acid clorhidric 1 : 1. În cazul cînd se foloseşte acid azotic, pentru îndepărtarea acestuia se evaporă de mai multe ori cu acid clorhidric 1 : 1, deoarece prezenţa acidului azotic împiedică determinarea galiului.

2. Separarea galiului de elementele care interferează. Pentru separarea galiului, reziduul se reia cu acid clorhidric 6 *n* şi se aduce la balon cotat de 25 ml, fără să se filtreze partea insolubilă. Se pipetează 10 ml din această soluţie limpede într-o pîlnie de separare de 50 ml, spălată în prealabil cu acid clorhidric 6 *n*; se pun 0,5 ml din soluţia de clorură titanoasă şi tot atît acid clorhidric concentrat. Se adaugă un volum egal de eter etilic cu acid clorhidric. Se agită două minute, la început uşor, ridicînd dopul, pînă ce încetează presiunea vaporilor. Se separă faza apoasă în altă pîlnie, de asemenea spălată cu acid clorhidric 6 *n* şi se adaugă încă 2...3 picături din soluţia de clorură titanoasă şi un număr egal de picături de acid clorhidric concentrat. Se repetă extracţia cu 5 ml eter cu acid clorhidric şi se agită un minut. Stratul de eter se reuneşte cu primul, spălînd pîlnia cu 1...2 ml eter.

Extractele de eter sînt spălate prin agitare timp de 10...15 sec cu 2...3 ml acid clorhidric 6 *n*, saturat cu eter. După separarea acidului, stratul eteric se trece într-un pahar de 50 ml, în care s-a pus 0,5 ml soluţie clorură de sodiu 10%. Se spală pereţii pîlniei cu 2...3 ml apă distilată. Se acoperă paharul cu o sticlă de ceas, se evaporă cu precauţie eterul pe baie.

3. Formarea şi extragerea tetracloro-galatului de rodamin. După evaporarea eterului se spală sticla de ceas cu cît mai puţină apă şi se continuă evaporarea la uscare; se răceşte reziduul: se reia cu 10 ml acid clorhidric 1 : 1, se trec într-o pîlnie de separare de 50 ml uscată, se pun 2...3 picături din soluţia de clorură titanoasă şi tot atîtea picături de acid clorhidric concentrat; se agită, se adaugă 0,4 ml soluţie de rodamină *B*, se amestecă bine şi apoi se adaugă 10 ml amestec benzen-eter (7,5 ml benzen şi 2,5 ml eter) se agită 2 min, se lasă să se separe cele două straturi şi se trece soluţia eter-benzenică, care conţine complexul rodamin clorgalat, în cuve de 10 ml.

4. Compararea fluorescenţei cu seria de etaloane. Pentru compararea fluorometrică se prepară concomitent o serie de etaloane în aceleaşi condiţii de lucru ca probele de analizat. Seria de soluţii standard se prepară din soluţia etalon, luîndu-se cîte 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; ...; 10 ml şi se aduc la 10 ml, cu acid clorhidric 6 *n*, în pîlnia de separare de 50 ml, şi se trec prin aceleaşi operaţii ca şi probele de analizat.

Cuvele cu etaloane şi cu probele de analizat trebuie observate lateral, pe fond negru, în lumina ultravioletă a lămpii de cuarţ.

S-a folosit pentru determinare lampa Thelta-Sonne.

3. Metoda II (fără extracţia clorurii de galiu)

Paralel cu aceste analize s-au făcut determinări, după cum s-a arătat mai sus, şi cu această metodă, care este mai rapidă, fără a fi necesară extracţia clorurii de galiu cu eter etilic. Această metodă de lucru comportă numai trei operaţii, înlăturînd extracţia cu eter, care este una din operaţiile cele mai lungi.

a) *Modul de lucru*

Proba de analizat se aduce în soluţie ca şi în prima metodă, şi apoi se trece cu acid clorhidric 6 *n* într-un balon cotat de 25 ml.

Se iau 10 ml din soluţia limpede într-o pîlnie de separare de 50 ml, spălată cu acid clorhidric 6 *n*, se adaugă 0,5 ml soluţie clorură titanoasă pentru reducerea fierului trivalent la fier bivalent; se agită, se adaugă 0,4 ml soluţie clorhidrică de rodamină *B*; după ce se amestecă bine se efectuează extragerea compusului cu amestecul de benzen-eter prin agitare, timp de 2 min.

Se trece stratul benzenic în cuve de 10 ml şi se compară fluorescenţa cu o serie de etaloane care se trec prin aceleaşi operaţiuni ca şi proba de analizat. S-a lucrat cu aceeaşi lampă de cuarţ.

Rezultatele obţinute, comparate cu cele din prima metodă, din acelaşi material, sînt suficient de concordante.

Metoda aceasta fiind mult mai rapidă, poate fi folosită cu succes în cazul analizelor în serie.

Tabelul 1

Determinarea pe probe cu adaus de etalon

Nr. crt.	Oxizi Wälz g	Ga existent γ	Ga adăugat γ	Ga total găsit γ	Ga regăsit din cel adăugat γ	Diferența între Ga regăsit și cel adăugat γ
1	0,5002	3,79	2,04	5,73	1,94	— 0,10
2	0,4988	3,77	2,04	5,73	1,96	— 0,08
3	0,5433	4,12	3,06	7,01	2,89	— 0,17
4	0,6104	4,61	3,06	7,65	3,04	— 0,02
5	0,4675	3,53	4,08	7,65	4,12	+ 0,04
6	0,5030	3,80	4,08	7,65	3,85	— 0,23
7	0,6221	4,70	5,10	9,56	4,86	— 0,24
8	0,5024	3,79	5,10	8,92	5,13	+ 0,03
9	0,5121	3,87	6,12	9,56	5,69	— 0,43
10	0,4030	3,32	6,12	9,56	6,24	+ 0,12

Tabelul 2

Metoda I (cu extracția clorurii de galiu)

Nr. crt.	Denumirea probei	Cantitatea de substanță g	Ga găsit γ	Ga găsit p.p.m.	Eroarea *) absolută p.p.m.
1	Oxizi Wälz	0,5155	3,82	7,42	+0,15
		0,4314	3,18	7,38	+0,11
		0,6362	4,46	7,02	—0,25
2	Oxizi de filtru	0,5838	3,18	5,46	+0,02
		0,8498	4,46	5,25	—0,19
		0,6797	3,82	5,62	+0,18
3	Oxizi răcitor	0,6136	5,10	8,83	—0,20
		0,5928	5,10	8,59	+0,09
		0,6631	5,73	8,64	+0,14
4	Oxizi Wälz	0,4968	3,82	7,69	+0,03
		0,6684	5,10	7,63	—0,03
5	Clincher Wälz	0,5818	3,18	5,47	—0,16
		0,7722	4,16	5,79	+0,16
6	Concentrat zincos	0,5698	5,10	8,95	—0,07
		0,6341	5,73	9,02	—
		0,4900	4,46	9,10	+0,08
7	Steril final	0,5096	1,91	3,75	—0,24
		0,6028	2,55	4,23	+0,24

*) Calculată față de valoarea medie.

4. Determinarea pe probe cu adaus de etalon

Pentru a verifica exactitatea şi reproductibilitatea metodei rapide s-au făcut încercări pe o probă de oxizi Wälz a cărei compoziţie chimică procentuală este următoarea :

Zn = 72,95% ; Pb = 4,51% ; Fe = 0,18 % ; S = 0,63% ; Cu = 0,095% ;
Cd = 0,036% ; As = 1,65% ; Ge = 0,001% ; Ga = 0,000726%.

La diferite cantităţi de oxizi Wälz obţinuţi prin acest procedeu aplicat la prelucrarea minereurilor de zinc, s-a adăugat 2...6 ml soluţie de etalon de galiu (1 ml conţine 1,02 γ Ga). Aceste cantităţi au fost adăugate înainte de dezagregarea substanţei, pentru a păstra condiţiile de lucru din metodă, şi s-au obţinut rezultatele din tabelul 1.

Folosind cele două metode s-a determinat galiul conţinut în mai multe probe provenite din subprodusele din industria zincului.

Rezultatele obţinute sînt consemnate în tabelele 2 şi 3.

Tabelul 3

Metoda II (fără extracţia clorurii de galiu)

Nr. crt.	Denumirea probei	Cantitatea de substanţă g	Ga găsit γ	Ga găsit p.p.m.	Eroarea absolută *) p.p.m.
1	Oxizi Wälz	0,5133	3,82	7,44	—0,12
		0,5652	4,46	7,89	+0,33
		0,5195	3,82	7,35	—0,21
2	Oxizi de filtru	0,6516	3,18	4,88	—0,23
		0,4775	2,55	5,34	+0,23
3	Oxizi răcitor	0,5417	4,46	8,23	—0,02
		0,4733	3,82	8,07	—0,18
		0,6052	5,10	8,46	+0,21
4	Oxizi Wälz	0,5211	3,82	7,33	—0,37
		0,5681	4,46	7,85	+0,15
		0,4824	3,82	7,92	+0,22
5	Clincher Wälz	0,4661	2,55	5,47	—0,19
		0,5344	3,18	5,95	+0,29
		0,5698	3,18	5,58	—0,08
6	Concentrat zincos	0,6526	5,73	8,78	+0,14
		0,3849	3,18	8,26	—0,38
		0,5011	4,46	8,90	+0,26
7	Steril final	0,6555	2,55	3,89	+0,22
		0,5552	1,91	3,44	—0,23
		0,5190	1,91	3,68	+0,01

*) Calculată faţă de valoarea medie.

5. Concluzii

Metodele folosite au permis să se determine cantităţile de galiu din oxizi, clinchere Wälz etc., din industria zincului.

Rezultatele obţinute sînt reproductibile, încadrîndu-se între limitele admise în determinările fluorometrice.

Primit la 22 VI 1961

Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Patrovsky W., Chem. Listy, 1958, **48**, p. 537.
2. Bradacs L. K., Feigl F., Hecht F., Microchim. Acta, 1956, p. 269.
3. Санделл Ф. Б., *Колориметрическое определение следов металлов*, Госхимиздат, М., 1944, стр. 198—202.
4. Ladenbauer J. M., Slamo O., Microchim. Acta, 1956, p. 1209.
5. Каранович Г. Г., Ионова Л. А., Подольская Б. Л., ЖАХ, 1958, *4*, стр. 440—443.
6. Baiulescu G., Comun. Acad. R.P.R., 1957, **VII**, *9*, pp. 765—771.
7. Назаренко В. А., Винковецкая С. И., ЖАХ, 1958, *3*, стр. 327—331.
8. Onishi H., Sandell F. B., Anal. Chim. Acta, 1955, **13**, pp. 159—164.
9. Culkin F., Riley J. P., The analyst, 1958, **83**, pp. 208—212.
10. Салтыкова В. С., Фабрикова Е. А., ЖАХ, 1958, *13*, стр. 63—65.
11. Popp E., Hejja A., Överges J.. Acta Tehnica, 1956, *1—2*.
12. Lacroix S., Anal. Chim. Acta, 1948, **2**, p. 167.

ФЛУОРОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЛЛИЯ РОДАМИНОМ *Б*

(Резюме)

Авторы применяют два метода определения галлия, содержащегося в побочных продуктах цинковой промышленности, основанные на флуоресценции, вызванной родамином *Б*.

Внеся видоизменения в существующие (известные) методы, авторам удалось получить воспроизводимые результаты с ошибкой в дозволенных пределах.

FLUOROMETRIC DETERMINATION OF GALIUM WITH RHODAMINE *B*

(Summary)

For the determination of galium in the byproducts of zincindustry, the authors have used two methods based on the fluorescency yelded with rhodamine *B*.

By modifying the known methods, the authors obtain succesful reproductible results, with errors in the admisible limits.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 541.135.3

CONTRIBUŢII LA STUDIUL STABILIRII CONDIŢIILOR DE OBŢINERE A POLICROMAŢILOR PRIN ELECTROLIZA CROMATULUI DE SODIU[1])

DE

ŞT. IVĂŞCANU

1. Introducere

Una dintre cele mai răspîndite metode de protecţie a metalelor bazate pe electroliză este cromarea.

Răspîndirea largă a cromării se datoreşte exclusiv proprietăţilor cromului electrolitic şi anume, rezistenţei sale anticorozive mari şi durităţii sale excepţionale. De asemenea, aspectul strălucitor cu nuanţe albăstrui face ca depunerile de crom să fie foarte mult apreciate.

Acest important proces tehnologic în prezent este larg utilizat în industria automobilelor, în construcţia avioanelor, în industria obiectelor de larg consum, la fabricarea instrumentelor şi aparatelor medicale, la restabilirea dimensiunilor pieselor mecanice uzate şi în multe alte domenii.

Depunerea electrolitică a cromului se realizează, în mod obişnuit, din soluţia de anhidridă cromică la care se adaugă acid sulfuric într-o proporţie anumită.

Cu toată răspîndirea sa largă şi cu toate cercetările întreprinse, cromarea electrolitică prezintă şi în prezent o serie de deficienţe serioase. Printre cele mai importante se pot cita următoarele:

a) O eficienţă redusă de utilizare a energiei electrice consumate pentru depunerea cromului. În medie numai 15% din această energie se consumă pentru depunere, restul se pierde prin degajarea hidrogenului gazos şi prin alte reacţii secundare.

b) O neuniformitate a depunerii cromului pe întreaga suprafaţă a catodului, ca urmare a unei capacităţi de dispersie scăzute (maximum —13%) a electrolitului obişnuit de cromare. Pentru îmbunătăţirea acesteia sînt necesare diferite ecrane catodice suplimentare precum şi anozi profilaţi.

c) O dependenţă exagerată a proprietăţilor cromului depus electrolitic în raport cu compoziţia electrolitului şi cu regimul de electroliză (temperatura şi densitatea de curent).

d) Toxicitatea ridicată a electrolitului obişnuit de cromare necesită utilizarea unor instalaţii speciale pentru eliminarea gazelor şi particulelor fine degajate în timpul electrolizei.

Aceste principale neajunsuri au ca rezultat limitarea posibilităţilor de utilizare a cromării electrolitice. Pentru remedierea acestora într-o măsură cît mai mare, cercetători din diferite ţări s-au preocupat continuu de acest proces, tinzînd a înlătura deficienţele existente, prin crearea unor electroliţi noi pentru cromare, cu regimuri de electroliză mai economice şi mai perfecţionate.

Astfel, pe lîngă electroliţii pentru cromare ca: soluţiile de sulfat de crom [1]...[4], soluţiile complexe [5], sau amestecurile de soluţii [6], s-a realizat în ultimul timp aşa-

[1]) Extras din disertaţia intitulată *Contribuţii la obţinerea electrolitică a policromaţilor folosiţi în procesele de cromare,* susţinută la Institutul politehnic din Iaşi, în ziua de 20 iunie 1962, în vederea obţinerii titlului de candidat în ştiinţe tehnice.

numitul electrolit cu reglare automată (Self-Regulating-High-Speed). Electrolitul cu autoreglare [7]...[9] funcţionează pe baza unor legi fizico-chimice legate de solubilitatea limitată în anhidridă cromică a unor acizi (fluosilicic, hidrofloric) sau a unor săruri (sulfatul de stronţiu, de calciu etc.). Cu aceşti electroliţi se obţin randamente de curent pînă la 18% şi în acest caz procedeele de cromare au o productivitate ridicată.

În cadrul aceloraşi preocupări în vederea intensificării proceselor de cromare s-a propus electrolitul tetracromat. În compoziţia acestuia intră, în afară de anhidridă cromică, hidroxidul de sodiu sau, funcţie de reţetele propuse, săruri de magneziu şi wolfram, carbonat de sodiu sau sulfat de calciu [10]...[13].

Printre cele mai importante calităţi ale acestui electrolit se numără: a) obţinerea unor randamente de curent mai ridicate (peste 30%) în comparaţie cu randamentele de curent obţinute cu electrolitul obişnuit, b) efectuarea cromării la temperatura camerei, c) obţinerea depunerilor de crom mai uniforme, ca urmare a unei capacităţi de dispersie mai bune. Deficienţa principală a acestui electrolit o constituie obţinerea depunerilor de crom de culoare cenuşie, fapt ce necesită lustruirea lor ulterioară.

În ultimii ani cercetătorii sovietici Levin, Faliceva şi Saveliev [14] au obţinut la anod, prin electroliza bicromatului de sodiu, soluţii de policromat (un amestec de acizi policromici şi sărurile lor) care au fost utilizate, cu succes, de aceiaşi cercetători pentru extragerea cromului, obţinînd depuneri de culoare cenuşie. Obţinerea electrolitului tetracromat (policromat) pentru cromare, prin electroliza bicromatului de sodiu, deci nu pe cale chimică (combinarea anhidridei cromice cu hidroxidul de sodiu) şi obţinerea simultană a hidroxidului de sodiu de mare puritate în cazul folosirii unei celule cu catod de mercur, este o problemă interesantă şi deschide posibilităţi largi în ceea ce priveşte realizarea de noi electroliţi pentru cromare.

În acest sens, prezenta lucrare cercetează posibilităţile de obţinere a electrolitului tetracromat (policromat) prin electroliza *cromatului de sodiu*. Pornind de la electroliza cromatului şi nu a bicromatului, sodiul care s-ar pierde sub formă de sulfat, la faza chimică de trecere a cromatului în bicromat (prin atac cu acid sulfuric), este recuperat prin electroliză, sub formă de hidroxid de sodiu de mare puritate.

În cele ce urmează ne vom referi la posibilităţile de obţinere a soluţiilor de policromat prin electroliza cromatului de sodiu şi anume, vom întreprinde un studiu al curbelor de polarizare anodică şi catodică obţinute la electroliza cromatului în comparaţie cu cele obţinute la electroliza bicromatului de sodiu. Final se stabilesc condiţiile optime de electroliză în vederea formării soluţiilor de policromat.

Într-o lucrare ulterioară vom cerceta depunerile de crom realizate din soluţiile de policromat respective, în ceea ce priveşte microduritatea şi porozitatea lor precum şi randamentul de curent funcţie de diferiţi factori ce intervin în electroliză.

2. Partea experimentală

a) Studiul curbelor de polarizare

Un studiu al electrolizei cromatului de sodiu în scopul obţinerii soluţiilor de policromat şi folosirii lor ca electroliţi pentru cromare nu a fost întreprins pînă în prezent; acest studiu necesită cunoaşterea proceselor de electrod care au loc în timpul electrolizei. Aceste procese au fost cercetate de noi cu ajutorul curbelor de polarizare, care permit, de asemenea, stabilirea tensiunii minime necesare electrolizei. Astfel, s-au trasat curbe de polarizare anodică şi catodică pentru soluţiile de cromat şi bicromat de sodiu, folosind ca anozi următoarele metale: platina, fierul, plumbul şi oţelul inoxidabil. Schema de electroliză folosită pentru

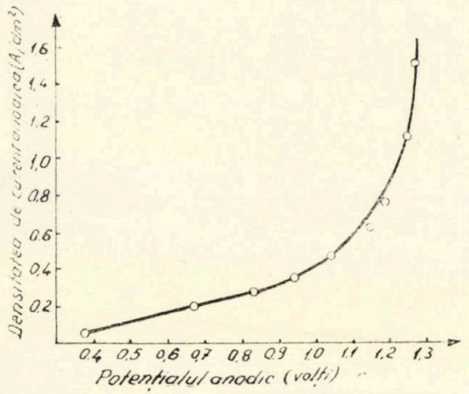


Fig. 3. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de cromat de sodiu; electrod de platină.

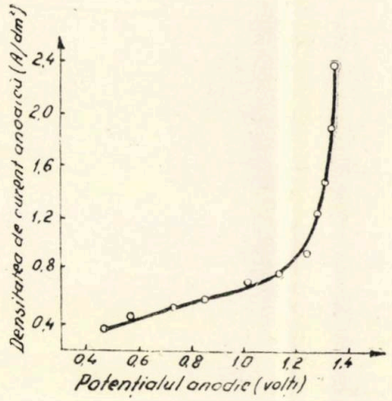


Fig. 4. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de cromat de sodiu; electrod de plumb.

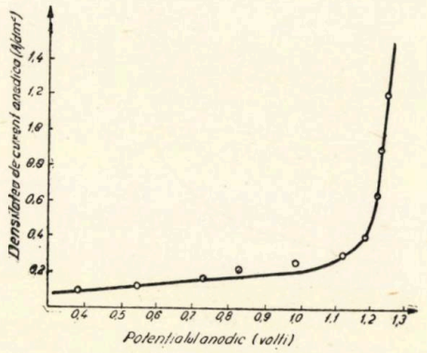


Fig. 5. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de cromat de sodiu; electrod de fier.

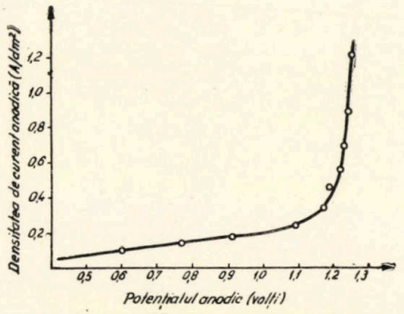


Fig. 6. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de cromat de sodiu; electrod de oţel inoxidabil.

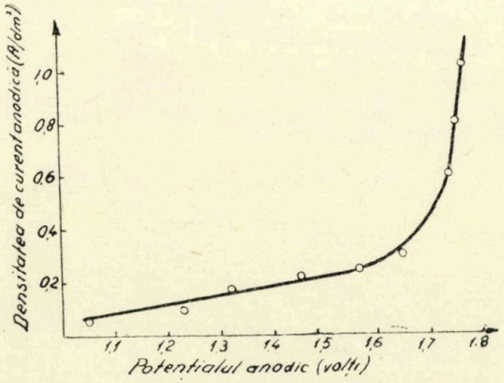


Fig. 7. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de bicromat de sodiu; electrod de platină.

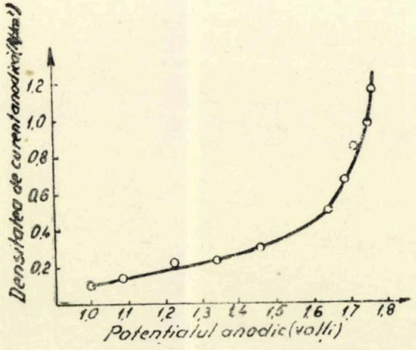


Fig. 8. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de bicromat de sodiu; electrod de plumb.

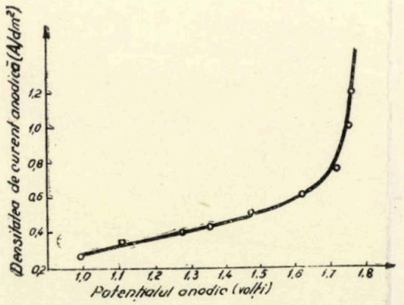


Fig. 9. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de bicromat de sodiu; electrod de fier.

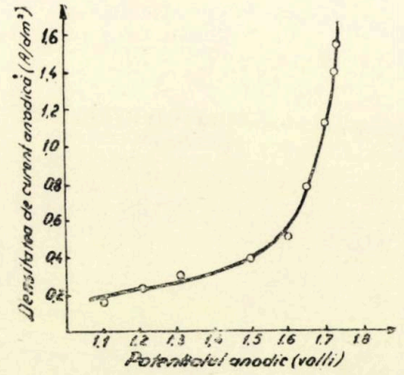
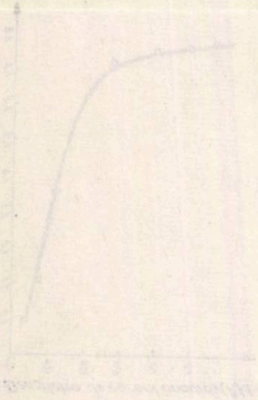
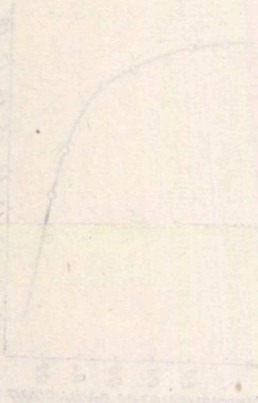


Fig. 10. — Curba de polarizare anodică. Soluţie de bicromat de sodiu; electrod de oţel inoxidabil.





trasarea curbelor de polarizare anodică este redată în fig. 1, iar cea pentru cele de polarizare catodică în fig. 2. Soluțiile de cromat și bicromat de sodiu folosite au avut aceeași concentrație (300 g/l).

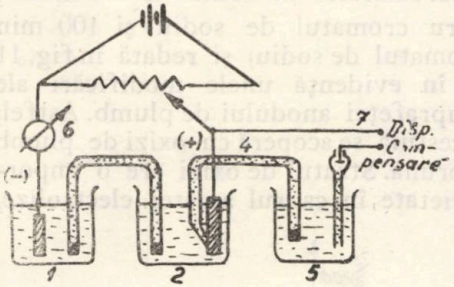


Fig. 1. — Schema de electroliză pentru trasarea curbelor de polarizare anodică. *1* — spațiul anodic; *2* — spațiul catodic; *3* — electrodul de cercetat; *4* — capilara Luggin; *5* — electrodul de calomel saturat; *6* — miliampermetru.

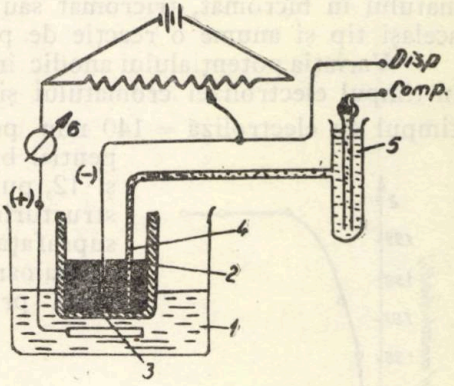


Fig. 2. — Schema de electroliză pentru trasarea curbelor de polarizare catodică. *1* — spațiul anodic; *2* — diafragma poroasă; *3* — catodul de mercur; *4* — capilara Luggin; *5* — electrodul de calomel saturat; *6* — miliampermetru.

Prin electroliza cromatului sau a bicromatului de sodiu, la anod are loc o degajare de oxigen, iar la catod fie o degajare de hidrogen, fie separarea sodiului, fapt ce depinde atît de condițiile experienței cît și de construcția celulei de electroliză.

Degajarea anodică a oxigenului poate avea loc ca urmare a următoarelor reacții electrodice posibile:

(1) $4\,OH^- \rightleftarrows 2H_2 + O_2 + 4e$, (2) $2H_2O - 4e \rightleftarrows O_2 + 4H^+$,

(3) $2H_2O - 4e \rightleftarrows H_2O_2 + 2H^+$, (4) $H_2O - 2e \rightleftarrows O_{(g)} + 2H^+$.

Potențialele standard ale reacțiilor de mai sus sînt: 0,401; 1,229; 1,77; 2,42 V. Valoarea 0,401 V reprezintă potențialul standard al electrodului de oxigen determinat indirect prin metode termodinamice [15].

Curbele de polarizare obținute cu ambele soluții pentru electrolizi de platină, plumb, fier și oțel inoxidabil, sînt redate în fig. 3...10.

Analiza acestor curbe arată că, indiferent de natura anodului, potențialul este cuprins între 1,2 și 1,25 V pentru soluția de cromat, și respectiv între 1,7 și 1,8 V pentru soluția de bicromat. În conformitate cu cele arătate mai sus, în acest caz procesul anodic cel mai probabil este cel de descompunere a apei după reacțiile (2) și (3). După cum rezultă din aceleași reacții, descompunerea apei este însoțită de eliberarea hidrogenului, care rămîne în soluție. Ca urmare are loc o scădere continuă a pH-ului soluției anodice. Din această cauză echilibrul existent în soluție:

$$2CrO_4^{2-} + 2H^+ \rightleftarrows 2HCrO_4^- \rightleftarrows Cr_2O_7^{2-} + H_2O$$

se va deplasa în sensul formării ionilor bicromici [16], de asemenea şi a unui rînd de analogi, aşa-numiţii izopoliacizi, cu formula generală $H_2O(CrO_3)_n$ şi cu o serie de proprietăţi comune. Altfel spus, soluţia anodică se va îmbogăţi treptat în anhidridă cromică. Transformarea monocromatului în bicromat, tricromat sau tetracromat, reprezintă o reacţie de acelaşi tip şi anume o reacţie de polimerizare [17].

Variaţia potenţialului anodic în timp, urmărită pe electrodul de plumb în timpul electrolizei cromatului şi bicromatului de sodiu ($D_c = 6$ A/dm^2, timpul de electroliză = 140 min pentru cromatul de sodiu şi 100 min pentru bicromatul de sodiu) şi redată în fig. 11 şi 12, pune în evidenţă unele modificări ale structurii suprafeţei anodului de plumb. Astfel, suprafaţa acestuia se acoperă cu oxizi de plumb de culoare brună. Stratul de oxizi are o importantă proprietate în cadrul acestei electrolize,

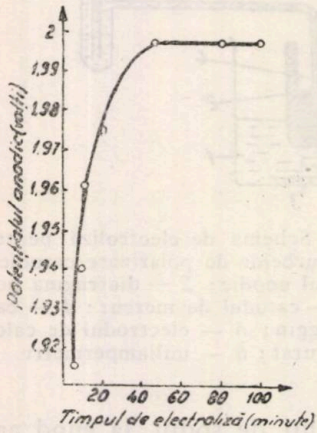


Fig. 11. — Variaţia potenţialului anodic în timp. Soluţie de cromat de sodiu; anod de plumb. Timp de electroliză 140 min.

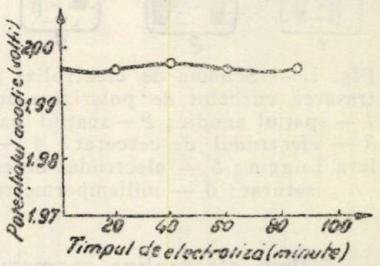


Fig. 12. — Variaţia potenţialului anodic în timp. Soluţie de bicromat de sodiu; anod de plumb. Timp de electroliză 100 min.

şi anume, o proprietate de catalizator în procesul polimerizării anionilor CrO_4^{2-}. În concluzie procesele anodice au aceeaşi esenţă deşi se desfăşoară la potenţiale diferite.

În cazul utilizării celulei de electroliză cu catod de mercur cel mai verosimil proces catodic este acela de reducere a ionilor de sodiu pe electrodul de mercur cu formarea amalgamului:

$$Na^+ + nHg \rightarrow Na(Hg)_n .$$

În afara acestui proces, pe catod mai sînt posibile şi altele. Astfel, la utilizarea în electroliză a unor densităţi de curent ridicate, datorită acumulării sodiului pe suprafaţa amalgamului, posibilitatea descărcării şi a ionilor de hidrogen devine o realitate. Ca urmare, pH-ul catolitului creşte iar echilibrul ionic arătat mai sus se va deplasa în sensul formării ionilor CrO_4^{2-}. Aceştia pot fi adsorbiţi pe electrodul de amalgam şi apoi reduşi parţial:

$$Na(Hg)_n [CrO_4^{2-}]_{ads.} + 3e + 4H^+ \rightleftarrows Cr^{3+} + 4OH^- .$$

Astfel, suprafața electrodului de mercur se pasivizează prin combinații chimice ale cromului trivalent puțin solubile [18]. Un alt proces catodic posibil este cel de reducere a ionilor CrO_4^{2-}. Studiile polarografice [19], [20] arată, în anumite condiții, patru trepte de reducere. Pentru soluția de NaOH *N* rămîne o singură treaptă la −0,85 V, celelalte dispar sau devin difuze, corespunzătoare următoarei reacții de reducere:

$$CrO_4^{2-} + 3e + 4H_2O \rightarrow Cr(OH)_3 + 5OH^- .$$

În sfîrșit mai există posibilitatea migrației ionilor OH^- spre anod și a reducerii, de către aceștia, a produselor formate acolo. Migrația ionilor OH^- spre anod este legată de descompunerea amalgamului în soluții alcaline. Ecuația cinetică a acestei descompuneri este:

$$K' = 2V_{amalg}(f_{Na^+}/f_{Na})^{1/2}(C_i^{1/2} - C_f^{1/2}).$$

Viteza descompunerii amalgamului, $d[Na]/d\tau = K[Na]^{1/2}$, arată că aceasta este proporțională cu rădăcina pătrată a concentrației sodiului în stratul de suprafață al amalgamului [21], [22].

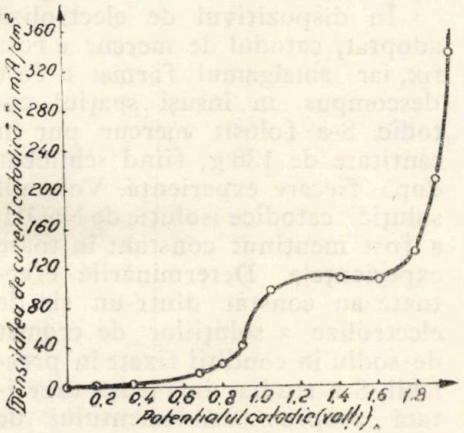


Fig. 13. — Curba de polarizare catodică. Soluție de cromat de sodiu; electrod de mercur.

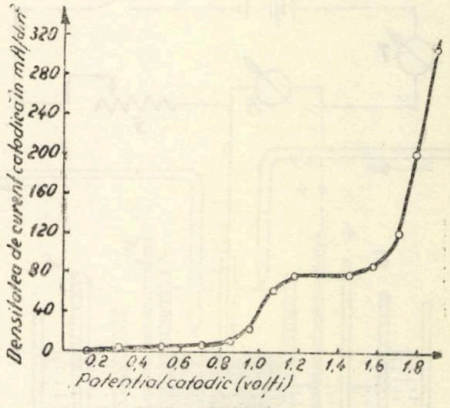


Fig. 14. — Curba de polarizare catodică. Soluție de bicromat de sodiu; electrod de mercur.

Analiza curbelor de polarizare catodică obținute cu ambele soluții și redate în fig. 13 și 14 arată că pe electrodul de mercur se desfășoară două procese: primul proces are loc la un potențial cuprins între −0,8 și −0,9 V și caracterizează reducerea catodică a ionilor CrO_4^{2-} pînă la $Cr(OH)_3$. Experiențe executate pînă la atingerea unui potențial catodic de −1 V au arătat că suprafața interioară a vasului poros ce constituia spațiul catodic și care era în contact cu mercurul, s-a acoperit cu un strat foarte fin de culoare verde, culoarea hidroxidului cromic. Creșterea potențialului catodic (−1,7 V și −1,8 V) determină separarea sodiului pe catodul de mercur, fapt pus ușor în evidență de reacția alcalină a soluției rezultate din dezamalgamarea mercurului folosit drept catod

Curbele de polarizare catodică obţinute fără separarea celor două spaţii printr-o diafragmă poroasă, nu au dat nici un rezultat căci procesul determinant observat a fost cel de reducere a ionilor CrO_4^{2-}. Pe acest considerent, separarea celor două spaţii devine o condiţie principală în efectuarea electrolizei cromatului de sodiu pentru obţinerea soluţiilor de policromat.

În concluzie, cu privire la fenomenele catodice se poate spune că există două procese: reducerea anionilor CrO_4^{2-} şi separarea sodiului, fenomene ce decurg la potenţiale catodice diferite. Tensiunea necesară electrolizei cromatului sau bicromatului de sodiu este cuprinsă între 3 V şi 3,5 V. Funcţie de rezistenţa diafragmei poroase folosite, tensiunea va creşte în mod corespunzător.

b) *Stabilirea condiţiilor optime de obţinere a policromaţilor prin electroliza cromatului de sodiu*

Experienţele de bază necesare stabilirii condiţiilor optime de obţinere a soluţiilor de policromat au fost efectuate într-un dispozitiv de electroliză din sticlă redat în fig. 15.

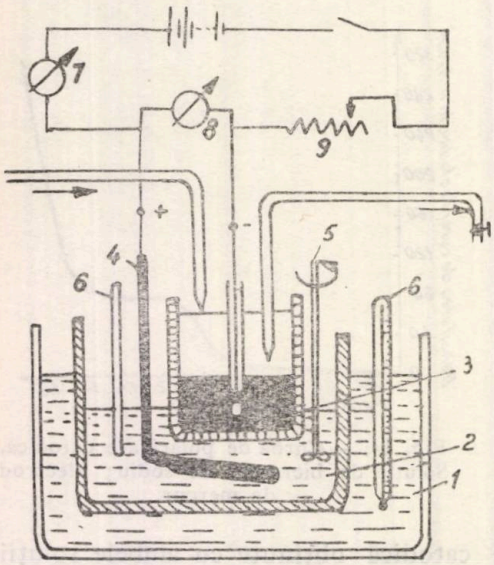


Fig. 15. — Dispozitivul de electroliză folosit pentru determinarea condiţiilor optime. *1* — termostat ; *2* — spaţiul anodic ; *3*—spaţiul catodic ; *4* — anodul de plumb ; *5* —agitator ; *6* — termometru ; *7* — ampermetru ; *8* — voltmetru ; *9* — rezistenţă reglabilă.

În dispozitivul de electroliză adoptat, catodul de mercur a fost fix, iar amalgamul format a fost descompus în însuşi spaţiul catodic. S-a folosit mercur pur în cantitate de 136 g, fiind schimbat după fiecare experienţă. Volumul soluţiei catodice (soluţie de NaOH) a fost menţinut constant în toate experienţele. Determinările efectuate au constat dintr-un şir de electrolize a soluţiilor de cromat de sodiu în condiţii fixate în prealabil. S-a studiat influenţa exercitată asupra: randamentului de curent, cantităţii de sodiu separate, respectiv cantităţii de policromat formate, a următorilor parametri: a) concentraţia iniţială în cromat de sodiu, b) densitatea de curent, c) temperatura şi d) timpul de electroliză.

Soluţiile de cromat de sodiu folosite au fost obţinute din cromat de sodiu pur realizat prin două cristalizări succesive. S-au studiat următoarele concentraţii: 200; 400; 600; 800 g/l, adică soluţii diluate pînă aproape de saturaţie.

Influenţa densităţii de curent a fost cercetată pentru valorile: 15; 20; 25 A/dm^2, iar pentru soluţia de 200 g cromat de sodiu la litru,

la încă două valori și anume 5 și 10 A/dm². Alegerea acestor densități de curent a fost condiționată de proporțiile electrolizorului adoptat. Temperatura a fost menținută constantă (30°C) în toate experiențele. Influența ei asupra procesului de electroliză a fost cercetată cu soluția de 400 g Na_2CrO_4/l la o densitate de curent de 15 A/dm², timpul de electroliză 120 min, pentru următoarele valori: 45; 55; 65° C. Timpul de electroliză, egal cu 120 min, a permis transformarea cromatului în bi- și policromat de sodiu.

Timpul de electroliză a variat în limite largi, de la zeci de minute pînă la aproximativ 5 ore. Alegerea sa a fost funcție de condițiile în care s-a studiat electroliza respectivă. Transformarea soluției de cromat în bi- sau policromat (soluție de 400 g Na_2CrO_4/l, în condițiile fixate pentru cercetarea influenței temperaturii) în timpul electrolizei a fost studiată prin analiză chimică, prin măsurători de pH și de conductibilitate specifică.

Randamentul de curent, cantitatea de sodiu separată, respectiv cantitatea de policromat formată, au fost determinate cu ajutorul probelor luate din soluția anodică la intervale de timp anumite, egale cu 20 și 40 min. Aceste probe constituie pînă la un anumit timp de electroliză, amestecuri de cromat și bicromat, iar pentru un alt timp de electroliză mai îndelungat, amestecuri de bicromat și anhidridă cromică (policromat). Dintre metodele de analiză indicate în literatura de specialitate [23]...[27] pentru asemenea amestecuri, s-a utilizat o combinație între metoda clasică iodometrică și o variantă a metodei potențiometrice. Metoda de control folosită a fost verificată în prealabil și precizia obținută a fost acceptabilă în toate cazurile.

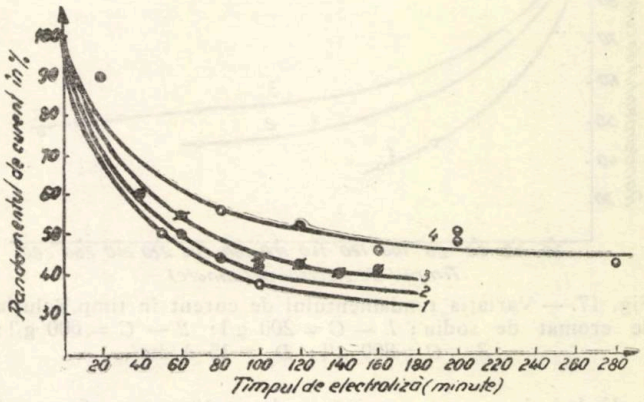


Fig. 16. — Variația randamentului de curent în timp. Soluția de cromat de sodiu $C = 200$ g/l; $1 - D_c = 25$ A/dm²; $2 - D_c = 15$ A/dm²; $3 - D_c = 10$ A/dm²; $4 - D_c = 5$ A/dm².

Influența exercitată de către: densitatea de curent, concentrația inițială de cromat de sodiu, temperatură și timpul de electroliză, sînt redate în fig. 16, 17.

Din analiza acestor curbe se observă că randamentul de curent scade pe măsura creșterii densității de curent. Cauzele care determină această scădere sînt fenomenele catodice. În cazul electrolizorului adoptat în experiențe are loc o puternică polarizare a catodului. Această polarizare se datorește, pe lîngă cauzele arătate mai sus (§ 2 a), și creșterii excesive a concentrației sodiului în stratul de suprafață al mercurului. Viteza de difuzie insuficientă a amalgamului format către interiorul catodului fix, are ca rezultat o scădere a supratensiunii hidrogenului pe acest electrod și separarea lui simultană cu sodiu. Concentrația ridicată a ionilor

OH^-, ca urmare atît a degajării hidrogenului cît şi a descompunerii amalgamului format în însăşi spaţiul catodic (condiţie impusă de alegerea electrolizorului), determină migrarea lor prin diafragma poroasă spre anod şi reducerea compuşilor formaţi acolo. Măsurătorile de pH executate după începerea electrolizei asupra stratului de soluţie anodică ce vine în contact cu partea exterioară a diafragmei poroase, au arătat valori cuprinse între 8,5 şi 9, valori ce confirmă cele afirmat mai sus.

Valorile ridicate ale concentraţiei iniţiale în cromat de sodiu au efect favorabil asupra randamentului de curent: acesta creşte în medie cu 10% pentru o creştere a concentraţiei de Na_2CrO_4 cu 200 g/l.

Creşterea temperaturii exercită asupra randamentului de curent un efect negativ. Astfel, creşterea temperaturii de electroliză cu 35° C determină o scădere a randamentului de curent cu aproximativ 10%. Influenţa negativă a temperaturii ridicate îşi găseşte explicaţia în valoarea supratensiunii hidrogenului care scade cu creşterea-temperaturii.

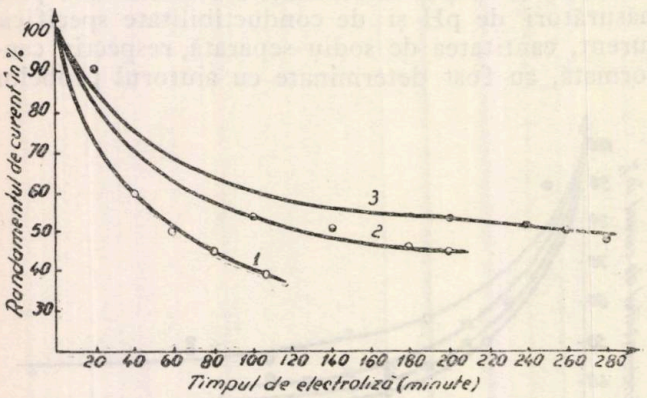


Fig. 17. — Variaţia randamentului de curent în timp. Soluţia de cromat de sodiu; *1* — $C = 200$ g/l; *2* — $C = 600$ g/l; *3* — $C = 800$ g/l; $D_c = 15$ A/dm².

Influenţa exercitată de către: densitatea de curent, concentraţia iniţială în cromat de sodiu şi timpul de electroliză asupra gradului de separare a sodiului şi asupra cantităţii de policromat formată (redată sub formă de anhidridă cromică) este prezentată în fig. 18...23.

După cum rezultă din fig. 18, 19 şi 20, pentru soluţia de o aceeaşi concentraţie, la timpuri de electroliză egale, gradul de separare a sodiului creşte o dată cu creşterea densităţii de curent. Acesta tinde însă spre o valoare limită după un anumit timp de electroliză, timp ce depinde de concentraţia iniţială a soluţiei cît şi de densitatea de curent utilizată. Influenţa exercitată de aceiaşi parametri asupra cantităţii de policromat formată (redată în fig. 21, 22 şi 23 sub formă de anhidridă cromică), arată că primele cantităţi din această soluţie se formează abia după separarea a peste 50% din cantitatea de sodiu existentă în soluţie. Măsurătorile de pH şi de conductibilitate specifică redate în curbele din fig. 24 şi 25, confirmă cele afirmate mai sus.

După ce se separă jumătate din cantitatea de sodiu, pH-ul anolitului scade brusc indicînd o puternică aciditate. De asemenea, conductibilitatea specifică a aceleiaşi soluţii creşte brusc, pentru acelaşi grad de separare a sodiului, tinzînd spre conductibilitatea acidului bicromic pur.

Calculul stoechiometric arată că din 800 g Na_2CrO_4 se obţin 187 g NaOH, respectiv 234 g CrO_3, în presupunerea că separarea sodiului se

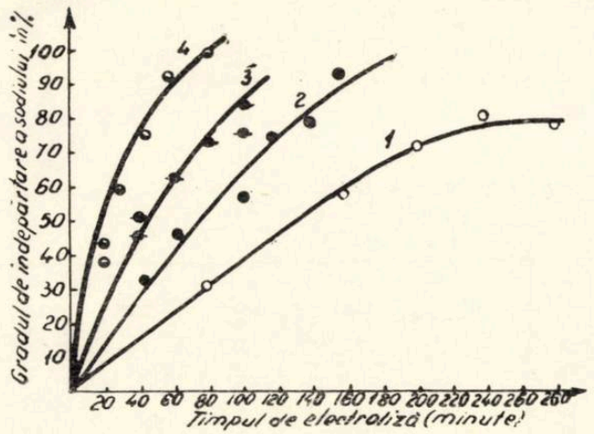


Fig. 18. — Variaţia procentuală a gradului de separare a sodiului. Soluţia de Na_2CrO_4, $C = 200$ g/l; *1* — $D_c = 5$ A/dm²; *2* — $D_c = 10$ A/dm², *3* — $D_c = 15$ A/dm²; *4* — $D_c = 20$ A/dm².

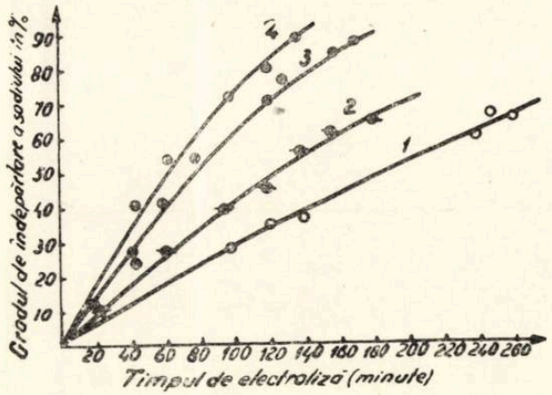


Fig. 19. — Variaţia procentuală a gradului de separare a sodiului. Soluţia de Na_2CrO_4, $C = 400$ g/l; *1* — $D_c = 10$ A/dm²; *2* — $D_c = 15$ A/dm²; *3* — $D_c = 20$ A/dm²; *4* — $D_c = 25$ A/dm².

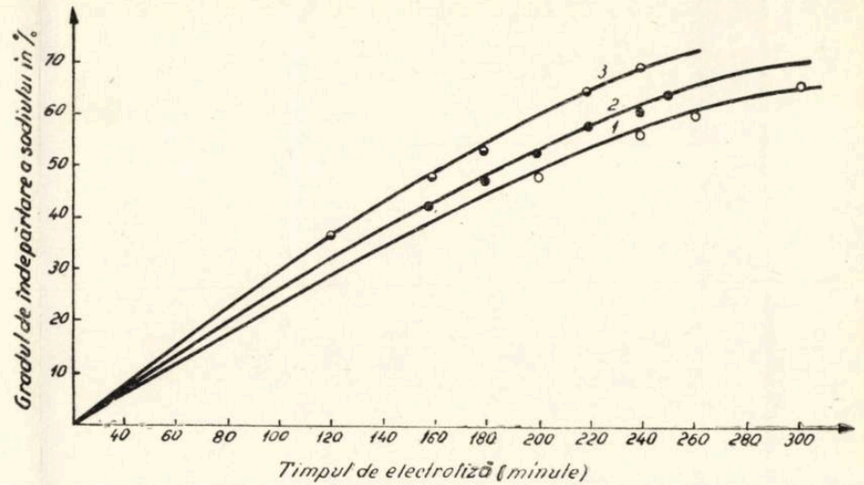


Fig. 20. — Variaţia procentuală a gradului de separare a sodiului. Soluţia de Na_2CrO_4, $C = 800$ g/l; *1* — $D_c = 15$ A/dm²; *2* — $D_c = 20$ A/dm²; *3* — $D_c = 25$ A/dm².

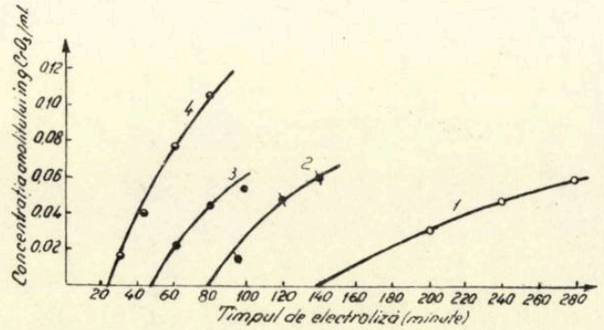


Fig. 21. — Variaţia concentraţiei în CrO_3 a soluţiei anodice, în timp. Soluţia de Na_2CrO_4, $C = 200$ g/l; *1* — $D_c = 5$ A/dm²; *2* — $D_c = 10$ A/dm²; *3* — $D_c = 15$ A/dm²; *4* — $D_c = 20$ A/dm².

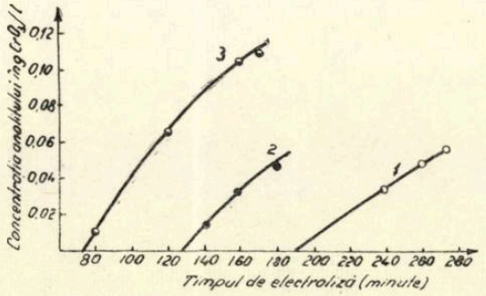


Fig. 22 — Variaţia concentraţiei în CrO_3 a soluţiei anodice, în timp. Soluţia de Na_2CrO_4, $C = 400$ g/l; *1* — $D_c = 10$ A/dm²; *2* — $D_c = 15$ A/dm²; *3* — $D_c = 20$ A/dm².

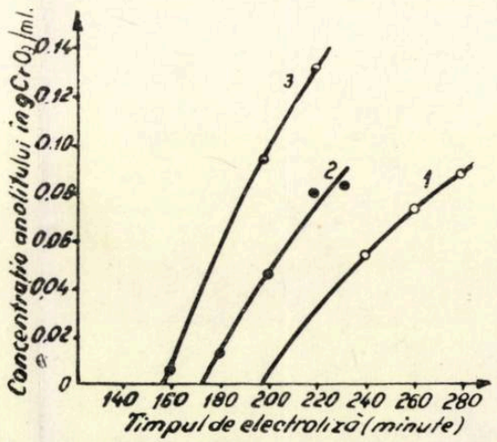
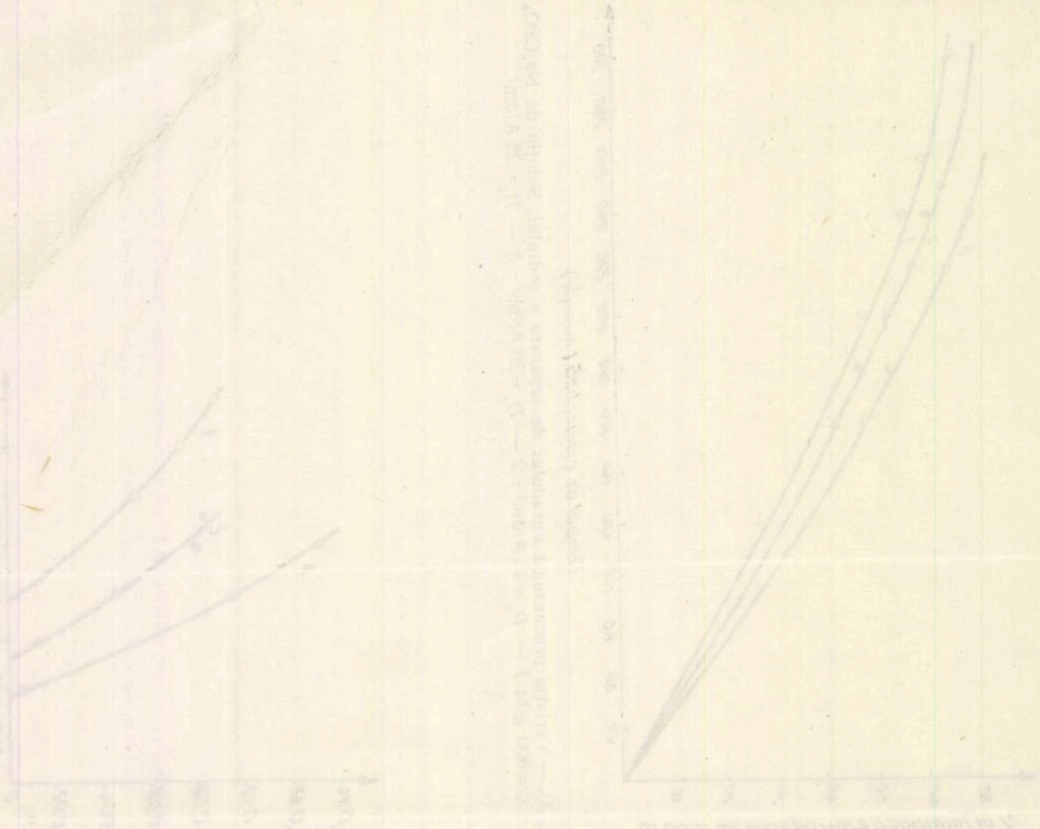
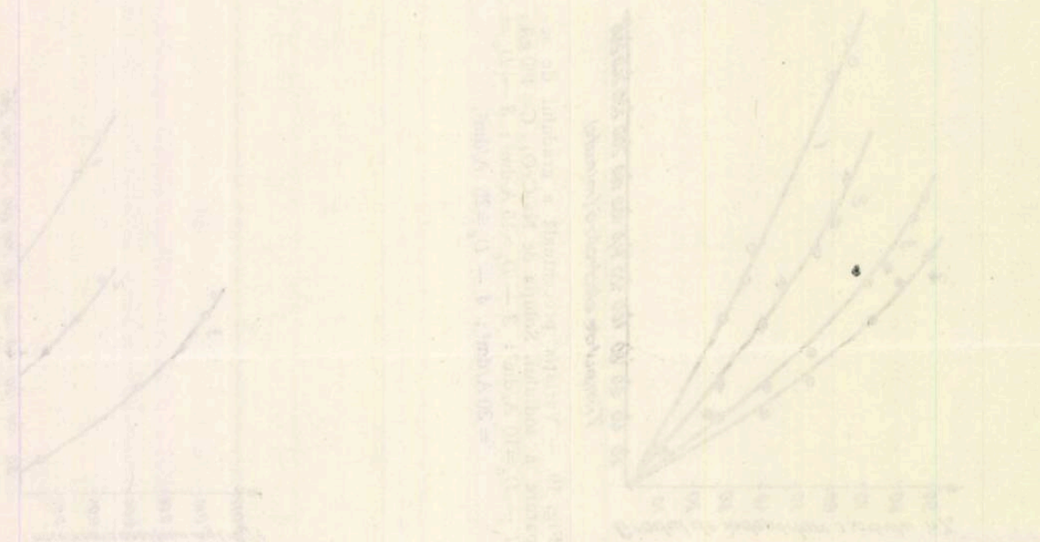


Fig. 23. — Variaţia concentraţiei în CrO_3 a soluţiei anodice în funcţie de timp. Soluţia de Na_2CrO_4, $C = 800$ g/l; *1* — $D_c = 15$ A/dm²; *2* — $D_c = 20$ A/dm²; *3* — $D_c = 25$ A/dm².





face în proporție de 100%. Pentru obținerea soluțiilor de policromat cu un conținut ridicat de anhidridă cromică — în cazul electrolizorului adoptat — ele au fost concentrate în însăși dispozitivul de electroliză, prin adăugarea — pe măsura formării policromatului — de noi cantități de cromat de sodiu cristalizat. Astfel, spre exemplu, pentru obținerea unei soluții de policromat cu 400 g CrO_3/l s-au adăugat în plus

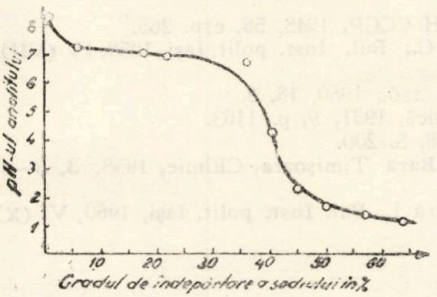


Fig. 24. — Variația pH-ului soluției anodice în funcție de timp. Soluția de Na_2CrO_4. C=400 g/l; D_c=15 A/dm²; t=30°C

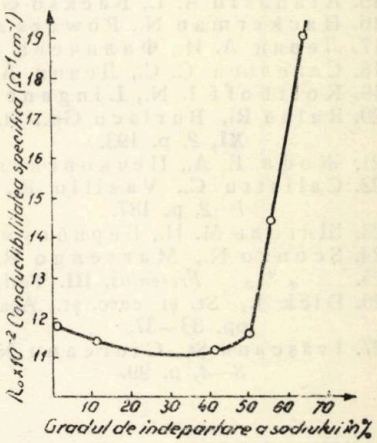


Fig. 25. — Variația conductibilității specifice a soluției anodice în funcție de timp. Soluția de Na_2CrO_4 C=400 g/l; D_c=14 A/dm²; t=30°C.

1 000 g cromat (adică diferența dintre 1 800 g cromat necesar formării soluției de policromat cu 400 g CrO_3/l și 800 g cromat din soluția inițială). Sub un randament de curent mediu egal cu 60% s-au obținut aproximativ 320 g NaOH de mare puritate.

3. Concluzii

Cele mai bune condiții pentru obținerea soluțiilor de policromat de concentrații diferite în anhidridă cromică, sînt (pentru cazurile studiate): utilizarea unor concentrații ridicate de cromat de sodiu, temperaturi de electroliză cît mai scăzute și, în sfîrșit, utilizarea unor densități de curent nu prea ridicate.

Primit la 27 VI 1962

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie fizică,
Laboratorul de electrochimie

BIBLIOGRAFIE

1. Firoiu C., Bul. Inst. polit., Buc., 1958, **XX**, *1*, pp. 53—56.
2. Гуревич Н. Е., ЖПХ, 1956, **29**, *3*, стр. 652—657.
3. Томилов В. И., Ibid., 1957, **30**, *12*, стр. 1785—1790.
4. Zell M., Metal Finishing, 1957, **1**, *55*, pp. 57—58.
5. Parry R. W., Swann S. J., Bailar J. C., J. El. Soc., 1947, **92**, p. 507.
6. Morriset P., Oswald J., Draper C., Pinner R., *Chromium Plating*, Teddington Middles, England, 1954.
7. Сысоев А. Н., Добранцева Н. Т., ЖПХ, 1960, **33**, *10*, стр. 2261—2267.
8. Семин В. М., *Теория и практика электролитического хромирования*, Изд. АН СССР, М., 1957.
9. Socha J., Przegl. mech., 1957, **16**, *6*, pp. 232—239.
10. Taylor F., Electroplating, 1952, **5**, *4*, p. 109.
11. Риабой А. Л., Слугер М. А., ЖПХ, 1959, **32**, *3*, стр. 588—595.

12. Фадеева С. М., *Хромирование в холодном тетрахроматном электролите*, Изд. Госплана СССР, М., 1958.
13. * * * Patent R.F.G. 033906, (Metaloberfläche, 1956, *2*).
14. Левин А. И., Савелиев С.С., ДАН СССР, 1958, **119**, *1*, стр. 110—112.
15. Atanasiu A. I., Fackso G., *Electrochimie. Principii Teoretice*, Ed. Tehn., Buc., 1958.
16. Hackerman N., Powers A., J. Phys. Chem. 1953, **57**, *2*, p. 139.
17. Левин А. И., Фаличева А. И., ЖПХ, 1959, **32**, стр. 308.
18. Савельев С. С., Левин А. И., Ibid., 1959, **32**, *1*, стр. 138.
19. Kolthoff I. N., Lingane J. J., J. Am. Chem., Soc., 1940, *62*, p. 852.
20. Ralea R., Burlacu Gh., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, Chimie, 1960, **XI**, *2*, p. 193.
21. Жофа Е. А., Печковская Е. В., ДАН СССР, 1948, **56**, стр. 265.
22. Calistru C., Vasiliu R., Leonte C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VII)**, *1—2*, p. 187.
23. Щиголь М. Н., Бирнбаум С. В., Зав. лаб., 1950, **16**, *2*.
24. Sconzo N., Marsengo R., Ind. Chimică, 1931, *9*, p. 1163.
25. * * * *Fresenius*, **III**. Teil, Berlin, 1958, S. 200.
26. Dick J., St. şi cerc. şt., Acad. R. P.R., Baza Timişoara, Chimie, 1958, **3**, *3—4* pp. 33—37.
27. Ivăşcanu Şt., Ciureanu N., Ciochină I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)** *3—4*, p. 99.

ИЗУЧЕНИЕ УСЛОВИЙ ПОЛУЧЕНИЯ ПОЛИХРОМАТОВ ЭЛЕКТРОЛИЗОМ ХРОМАТА НАТРИЯ

(Резюме)

Изучаются возможности получения электролита тетрахромата (полихромата) натрия путем электролиза хромата натрия. С этой целью используется электролизер с диафрагмой и ртутным катодом. Для познания электродных процессов изучаются кривые анодной и катодной поляризации растворов хромата и бихромата натрия.

Устанавливаются оптимальные условия электролиза для получения растворов, полихромата в зависимости от следующих параметров: концентрации растворов хромата (200 ... 800 г Na_2CrO_4/л), плотности тока (15 ... 25 А/дм^2) и температуры (30 ... 65°С).

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Схема электролиза для установления кривых анодной поляризации *1* — анодное пространство; *2* — катодное пространство; *3* — исследуемый электрод; *4* — капилляр Люжина; *5* — насыщенный каломельный электрод; *6* — милиамперметр.

Рис. 2. — Схема электролиза для установления кривых катодной поляризации *1* — анодное пространство; *2* — пористая диафрагма; *3* — катод из ртути; *4* — капилляр Люжина; *5* — милиамперметр.

Рис. 3. — Кривая анодной поляризации. Раствор хромата натрия; платиновый электрод.

Рис. 4. — Кривая анодной поляризации. Раствор хромата натрия; свинцовый электрод.

Рис. 5. — Кривая анодной поляризации. Раствор хромата натрия; железный электрод.

Рис. 6. — Кривая анодной поляризации. Раствор хромата натрия; стальной неокисляемый электрод.

Рис. 7. — Кривая анодной поляризации. Раствор бихромата натрия; платиновый электрод.

Рис. 8. — Кривая анодной поляризации. Раствор бихромата натрия; свинцовый электрод.

Рис. 9. — Кривая анодной поляризации. Раствор бихромата натрия; железный электрод.

Рис. 10. — Кривая анодной поляризации. Раствор бихромата натрия; стальной неокисляемый электрод.

Рис. 11. — Изменения анодного потенциала. Раствор хромата натрия; свинцовый анод. Продолжительность электролиза — 140 мин.

Рис. 12. — Изменения анодного потенциала. Раствор бихромата натрия; свинцовый анод. Продолжительность электролиза — 100 мин.

Рис. 13. — Кривая катодной поляризации. Раствор хромата натрия; ртутный электрод.

Рис. 14. — Кривая катодной поляризации. Раствор бихромата натрия; ртутный электрод.

Рис. 15. — Установка для электролиза. *1* — термостат; *2* — анодное пространство; *3* — катодное пространство; *4* — свинцовый анод; *5* — мешалка; *6* — термометр; *7* — амперметр; *8* — вольтметр; *9* — реостат.

Рис. 16. — Изменение выхода тока от продолжительности электролиза. Раствор хромата натрия C=200 г/л; *1* — D_c = 25 А/дм²; *2* — D_c = 15 А/дм²; *3* — D_c = 10 А/дм²; *4* — D_c = 5 А/дм².

Рис. 17. — Изменения выхода тока в зависимости от продолжительности электролиза. Раствор хромата натрия; *1* — C = 200 г/л; *2* — C = 600 г/л; *3* — C = 800 г/л; D_c = 15 А/дм².

Рис. 18. — Процентные изменения степени отделения натрия. Раствор хромата натрия C=200 г/л; *1* — D_c = 5 А/дм²; *2* — D_c = 10А/дм²; *3* — D_c = 15 А/дм²; *4* — D_c = = 20 А/дт².

Рис. 19. — Процентные изменения степени отделения натрия. Раствор хромата натрия C = 400 г/л; *1* — D_c = 10 А/дм²; *2* — D_c = 15 А/дм²; *3* — D_c = 20 А/дм²; *4* — D_c = 25 А/дм².

Рис. 20. — Процентные изменения степени отделения натрия. Раствор хромата натрия C = 800 г/л; *1* — D_c = 15 А/дм²; *2* — D_c = 20 А/дм²; *3* — D_c = 25 А/дм².

Рис. 21. — Изменения концентрации CrO_3 в анодном растворе в зависимост;- от времени. Раствор хромата натрия C = 200 г/л; *1* — D_c = 5 А/дм²; *2* — D_c = 10 А/дм *3* — D_c = 15 А/дм²; *4* — D_c = 20 А/дм².

Рис. 22. — Изменения концентрации CrO_3 в анодном пространстве в зависи мости от времени. Раствор хромата натрия C = 400 г/л; *1* — D_c = 10 А/дм²; *2* — D_c =² = 15 А/дм²; *3* — D_c = 20 А/дм².

Рис. 23. — Изменения концентрации CrO_3 в анодном пространстве в зависимости от времени. Раствор хромата натрия C = 800 г/л; *1* — D_c = 15 А/дм²; *2* — D_c = 20 А/дм²; *3* — D_c = 25 А/дм².

Рис. 24. — Изменения pH анодного раствора в зависимости от времени. Раствор хромата натрия C = 400 г/л; D_c = 15 А/дм²; t = 30°С.

Рис. 25. — Изменения удельной электропроводности анодного раствор в зависимости от времени. Раствор хромата натрия C = 400 г/л; D_c = 15 А/дм²; t = 30°С.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES CONDITIONS POUR L'OBTENTION DES POLYCHROMATES PAR L'ÉLECTROLYSE DU CHROMATE DE NATRIUM

(Résumé)

On étudie les possibilités quant à l'obtention de l'électrolyte tetrachromate (polychromate) par l'électrolyse du chromate de natrium, en utilisant un bain d'électrolyse avec diaphragme poreuse et cathode de mercure. Les processus d'électrode sont étudiés à l'aide des courbes de polarisation anodique et cathodique pour les solutions de chromate et bichromate de natrium.

La dernière partie de cette Note est consacrée à l'étude des conditions les plus favorables pour l'obtention des polychromates par rapport aux paramètres suivants: concentration de la solution en chromate (200 ... 800 g Na_2CrO_4/l), densité du courant (15 ... 25 A/dm²) et la température (30 ... 65 °C).

Explication des figures

Fig. 1. — Schéma d'eléctrolyse pour la détermination des courbes de polarisation anodique. *1*—compartiment anodique; *2*—compartiment cathodique; *3*—électrode à étudier; *4* — capillaire de Luggin; *5* — électrode de calomel saturé; *6* — miliampermètre.

Fig. 2. — Schéma d'électrolyse pour la détermination des courbes de polarisation cathodique. *1* — compartiment anodique; *2* — diaphragme poreuse; *3* — cathode de mercure; *4* — capillaire de Luggin; *5* — électrode de calomel saturé; *6* — miliampermètre.

Fig. 3. — Courbe de polarisation anodique. Solution de chromate de natrium; électrode de platine.

Fig. 4. — Courbe de polarisation anodique. Solution de chromate de natrium; électrode de plomb.

Fig. 5. — Courbe de polarisation anodique. Solution de chromate de natrium; électrode de fer.

Fig. 6. — Courbe de polarisation anodique. Solution de chromate de natrium; électrode d'acier inoxidable.

Fig. 7. — Courbe de polarisation anodique. Solution de bichromate de natrium; électrode de platine.

Fig. 8. — Courbe de polarisation anodique. Solution de bichromate de natrium; électrode de plomb.

Fig. 9. — Courbe de polarisation anodique. Solution de bichromate de natrium; électrode de fer.

Fig. 10. — Courbe de polarisation anodique. Solution de bichromate de natrium; électrode d'acier inoxidable.

Fig. 11. — Variation du potentiel anodique par rapport au temps. Solution de chromate de natrium; anode de plomb. Temps d'électrolyse — 140 min.

Fig. 12. — Variation du potentiel anodique par rapport au temps. Solution de bichromate de natrium; anode de plomb. Temps d'électrolyse — 140 min.

Fig. 13. — Courbe de polarisation cathodique. Solution de chromate de natrium; cathode de mercure.

Fig. 14. — Courbe de polarisation cathodique. Solution de bichromate de natrium; cathode de mercure.

Fig. 15. — Bain d'électrolyse utilisé pour la détermination des conditions optimes; *1* — thermostate, *2* — compartiment anodique; *3* — compartiment cathodique; *4* — anode de plomb; *5* — agitateur; *6* — thermomètre; *7* — ampermètre; *8* — voltmètre; *9* — rhéostate.

Fig. 16. — Variation du rendement en courant par rapport au temps. Solution de chromate de natrium $C = 200$ g/l; *1* — $D_c = 25$ A/dm^2; *2* — $D_c = 15$ A/dm^2; *3* — $D_c = 10$ A/dm^2; *4* — $D_c = 5$ A/dm^2.

Fig. 17. — Variation du rendement en courant par rapport au temps. Solution de chromate de natrium; *1* — $C = 200$ g/l; *2* — $C = 600$ g/l; *3* — $C = 800$ g/l; $D_c = 15$ A/dm^2.

Fig. 18. — Variation procentuelle du degré de séparation du natrium. Solution de chromate de natrium $C = 200$ g/l; *1* — $D_c = 5$ A/dm^2; *2* — $D_c = 10$ A/dm^2; *3* — $D_c = 15$ A/dm^2; *4* — $D_c = 20$ A/dm^2.

Fig. 19. — Variation procentuelle du degré de séparation du natrium. Solution de chromate de natrium $C = 400$ g/l; *1* — $D_c = 10$ A/dm^2; *2* — $D_c = 15$ A/dm^2; *3* — $D_c = 20$ A/dm^2; *4* — $D_c = 25$ A/dm^2.

Fig. 20. — Variation procentuelle du degré de séparation du natrium. Solution de chromate de natrium $C = 800$ g/l; *1* — $D_c = 15$ A/dm^2; *2* — $D_c = 20$ A/dm^2; *3* — $D_c = 25$ A/dm^2.

Fig. 21. — Variation de la concentration en CrO_3 de la solution anodique par rapport au temps. Solution de chromate de natrium $C = 200$ g/l; *1* — $D_c = 5$ A/dm^2; *2* — $D_c = 10$ A/dm^2; *3* — $D_c = 15$ A/dm^2; *4* — $D_c = 20$ A/dm^2.

Fig. 22. — Variation de la concentration en CrO_3 de la solution anodique par rapport au temps. Solution de chromate de natrium $C = 400$ g/l; *1* — $D_c = 5$ A/dm^2; *2* — $D_c = 15$ A/dm^2; *3* — $D_c = 20$ A/dm^2.

Fig. 23. — Variation de la concentration en CrO_3 de la solution anodique par rapport au temps. Solution de chromate de natrium $C = 800$ g/l; *1* — $D_c = 15$ A/dm^2; *2* — $D_c = 20$ A/dm^2; *3* — $D_c = 25$ A/dm^2.

Fig. 24. — Variation du pH de la solution anodique par rapport au temps. Solution de chromate de natrium $C = 400$ g/l; $D_c = 15$ A/dm^2; $t = 30°$ C.

Fig. 25. — Variation de la conductibilité specifique de la solution anodique par rapport au temps. Solution de chromate de natrium $C = 400$ g/l; $D_c = 15$ A/dm^2; $t = 30°$ C.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 66.013.5

FENOMENUL DE ÎNEC ÎN CURGEREA PELICULARĂ LICHID-GAZ, ÎN CONTRACURENT

Nota I

STUDIUL FENOMENULUI ÎN TUBURI VERTICALE

DE

TEODOR SĂVEANU şi RADU TUDOSE

1. Introducere

Studiul curgerii peliculare cu două faze lichid-gaz a constituit preocuparea multor cercetători. În literatura recentă au apărut un mare număr de lucrări teoretice şi experimentale în care sînt prezentate rezultatele obţinute referitoare la studiul curgerii peliculare lichid-gaz în diverse condiţii. Astfel s-a studiat curgerea lichid-gaz prin tuburi orizontale şi verticale, în contracurent sau echicurent, în sus şi în jos, sau curgerea prin umplutură de diferite forme şi dimensiuni. În general toate aceste categorii de curgeri au fost studiate ca urmare a problemelor ridicate de practică.

Curgerea cu două faze diferă mult de curgerea cu o singură fază. Caracterul curgerii cu două faze nu poate fi descris pe calea simplă utilizată la studiul curgerii cu o singură fază în regim laminar, intermediar şi turbulent, din cauza variaţiei raportului cantităţilor celor două faze şi a dispersării fazelor una în alta. Datorită complexităţii curgerii cu două faze relaţiile care descriu această curgere sînt mult mai complexe decît cele pentru curgerea cu o singură fază.

Pentru descrierea curgerii cu două faze este necesar să se obţină relaţii care să permită stabilirea caracterului curgerii, a raportului cantităţilor fazelor în aparat şi a căderii de presiune, funcţie de variabilele de bază ce intervin în curgere, referitoare la: a) proprietăţile lichidului: γ_l, μ_l, σ (lichid-gaz); b) proprietăţile gazului: γ_g, μ_g; c) geometria aparatului: d, δ / d, h.

Diverşi cercetători au studiat influenţa acestor factori stabilind ecuaţii mai mult sau mai puţin exacte. Într-o serie de lucrări mai vechi, şi în unele de dată mai recentă, se studiază curgerea peliculară numai a fazei lichide [1]...[4], ale cărei legi nu sînt încă suficient cunoscute.

O teorie a curgerii peliculare lichid-gaz într-un tub vertical în echicurent a fost dezvoltată de S. Calvert şi B. Williams [5]. Ei consideră filmul de lichid format dintr-un strat laminar lîngă perete şi un strat turbulent de partea gazului. În stratul laminar ei admit o distribuţie liniară a vitezei, iar pentru stratul turbulent folosesc ecuaţia clasică a lui Prandtl. Pe această cale obţin o ecuaţie pentru debitul de lichid în stratul laminar şi turbulent.

G. H. Anderson şi B. G. Mantzouranis [6], [7] consideră: grosimea filmului de lichid uniformă în orice secţiune transversală a tubului, gradientul de presiune la axa tubului egal cu zero, la interfaţa lichid-gaz precum şi la cea lichid-solid nu există discontinuitate de viteză, profilul vitezei în lichid urmează profilul universal al vitezei al lui Kármán şi proprietăţile lichidului γ_l şi μ_l în film—constante. Pornind de la aceste consideraţii autorii citaţi au stabilit o ecuaţie care face legătura dintre debitul de lichid, grosimea filmului şi căderea de presiune. Aceiaşi autori au studiat antrenarea picăturilor de apă de către un curent de aer în sus şi au găsit că în aceste

condiţii cantitatea de apă antrenată sub formă de picături variază cu viteza aerului la puterea 2,6 şi cu viteza lichidului la puterea 1,5.

A. P. Semenov [8] studiind curgerea unui film de lichid în prezenţa unui gradient de presiune constant, dat de un curent de gaz în lungul unui tub, a integrat ecuaţia lui Navier-Stokes, obţinînd relaţii pentru calculul vitezei de curgere. Ecuaţia a fost verificată experimental şi s-a găsit că concordă pînă la o grosime a filmului de 150 μ. Peste această valoare viteza reală de curgere a lichidului este mai mică decît aceea rezultată din ecuaţie, ca urmare a energiei consumate pentru formarea valurilor. Semenov a studiat regimurile de curgere care apar la curgerea peliculară cu două faze într-un tub vertical şi a găsit că în raport cu viteza gazului sînt posibile şase regimuri de curgere a lichidului.

Într-o altă lucrare [9] Semenov a ţinut seama de prezenţa valurilor în curgerea peliculară, considerînd valurile de amplitudine infinit mică.

Konobeev, Maliusov şi Javoronkov [10], studiind curgerea peliculară lichid-gaz în contracurent, într-un tub vertical, şi plecînd de la ecuaţia stabilită de Semenov, au completat-o cu un nou termen care ţine seama de acea mărime a căderii de presiune care este necesară pentru formarea profilului vitezelor, adică pentru a transmite lichidului energia cinetică corespunzătoare. Ei au verificat experimental ecuaţiile stabilite şi au găsit o concordanţă satisfăcătoare între rezultatele teoretice şi cele experimentale. Aceste ecuaţii sînt aplicabile pînă la punctul de inversiune a fazelor.

Contactul direct între gaz şi lichide duce la o influenţare reciprocă a comportării celor două faze în curgere. Tensiunea tangenţială care se manifestă la interfaţa lichid-gaz joacă, în acest caz, un rol hotărîtor.

Pentru stabilirea legii de interacţiune între faze Brauer [11] a folosit tensiunea tangenţială la interfaţă sub formă adimensională. Pe această cale el stabileşte o ecuaţie cu ajutorul căreia se poate calcula căderea de presiune sau viteza medie a gazului. Plecînd de la teoria curgerii cu două faze a dat o lege unitară a rezistentei

$$\Psi = 16 / Re_g k,$$

în care atît Re_g cît şi k depind de mărimile adimensionale Re_l, R/δ, μ_g/μ_l şi γ_g/γ_l. Legea de rezistenţă se referă la curgerea lichidului fără valuri.

W. Wilke [12] studiind cîmpul temperaturilor într-un film lichid în curgere peliculară a găsit în zona valurilor o temperatură practic constantă, de unde rezultă că în această zonă amestecarea este intensă, ceea ce necesită un consum de energie.

A. G. Németh [13] studiază curgerea a două faze în echicurent, în sus, în tuburi verticale, şi determină căderea de presiune la transportul cantităţii maxime de lichid

Influenţa reciprocă a fost studiată de V. V. Kafarov [14] şi prezentată sub forma unui factor f, numit factor de variaţie dinamică a suprafeţei, care poate fi calculat cu una din ecuaţiile:

$$f = (\Delta p_{g-l} - \Delta p_g) / \Delta p_g, \quad f = A (L/G)^m (\gamma_g/\gamma_l)^n (\mu_l/\mu_g)^q.$$

Într-un studiu cuprinzător G. W. Govier şi colaboratorii [15]...[17] s-au ocupat de problema curgerii izoterme în echicurent, în sus, în tuburi verticale. Pornind de la ecuaţiile diferenţiale ale bilanţului de energie, ei stabilesc metode care permit calculul caracterului curgerii, a cantităţii de lichid reţinută în aparat şi a căderii de presiune. În lucrările citate sînt studiate: efectul debitului de aer, densităţii fazei gazoase şi diametrului tubului, asupra caracterului curgerii.

J. A. R. Bennett şi J. D. Thornton [18] şi-au propus să studieze curgerea neizotermă a două faze în echicurent, în tuburi verticale, şi să o compare cu curgerea izotermă. Într-o lucrare preliminară ei studiază căderea de presiune, stabilind dependenţa coeficientului de frecare funcţie de Re_g şi Re_l.

J. G. Collier şi G. F. Hewitt [19] continuînd studiul lui Bennett şi Thornton, au determinat conductometric grosimea filmului şi au măsurat cantitatea de apă antrenată. Astfel ei au verificat modul de aplicare a teoriilor lui Calvert şi Williams şi a celor ale lui Anderson şi Mantzouranis.

O lucrare care constituie o trecere de la studiul curgerii a două faze în tuburi verticale la studiul curgerii prin umplutură a fost publicată de J. E. Howkins şi J. F.

D a v i d s o n [21]. Ei au întreprins experienţele cu un tub vertical în care au introdus un şir de sfere şi au găsit că se formează valuri staţionare în condiţii de reţinere (looding) şi de înec. Ţinînd seama de similitudinea sistemului tub cu un şir de sfere cu acela al curgerii prin umplutură aşezată neregulat, ei trag concluzia că regimul de reţinere la curgerea prin umplutură este de asemenea datorit formării de valuri staţionare.

2. Consideraţii teoretice

Din analiza lucrărilor mai importante care se ocupă cu studiul curgerii peliculare lichid-gaz rezultă că legile care guvernează aceste curgeri nu sînt încă complet elucidate. Cele mai multe din aceste lucrări se ocupă de curgerea izotermă a sistemului apă-aer. Este de presupus că studiul altor sisteme lichid-gaz în condiţii izoterme şi neizoterme la diverse presiuni va permite să se stabilească mai amănunţit legile acestei curgeri.

Un aspect al curgerii încă insuficient studiat îl reprezintă fenomenul de înec în curgerea peliculară lichid-gaz, în contracurent.

Fenomenul de înec este des întîlnit în practică în aparatele de absorbţie peliculară, în coloanele de distilare, în turnurile de răcire etc. În funcţionarea acestor aparate s-a stabilit că se obţin cele mai bune rezultate la viteze mari ale gazului, foarte aproape de condiţiile de înec.

Fenomenul de înec în curgerea peliculară lichid-gaz, în contracurent, începe în momentul cînd parte din lichid este antrenat de către gaz în sensul mişcării acestuia şi încetează la antrenarea întregii cantităţi de lichid. De aici urmează că la începutul primei perioade a antrenării se aplică legile curgerii peliculare gaz-lichid în contracurent şi că trecerea la înec se face progresiv. La finele perioadei de înec trecerea de la curgerea peliculară lichid-gaz la aceea cu antrenare totală se realizează treptat. În acest domeniu urmează să se aplice legile curgerii peliculare lichid-gaz, în contracurent, de jos în sus. Atît legile curgerii peliculare lichid-gaz fără antrenare cît şi cele ale curgerii în condiţii de antrenare fiind încă insuficient cunoscute, ne-am propus, în această lucrare, să ne ocupăm de studiul fenomenului de înec la curgerea peliculară lichid-gaz, în contracurent.

Din legile curgerii peliculare a unui lichid rezultă că grosimea peliculei rămîne aproximativ constantă pe înălţimea tubului [20], atît la curgerea numai a lichidului, cît şi la curgerea cu două faze, în contracurent, dar la viteze mici ale gazului. La viteze mari ale gazului se constată o scădere a grosimii peliculei de lichid de sus în jos.

Ţinînd seama de faptul că introducerea lichidului în tub pe la partea de sus produce inevitabil o îngroşare locală a peliculei de lichid, rezultă că antrenarea trebuie să înceapă în partea de sus a tubului. Această afirmaţie urmează să fie verificată experimental.

În studiile [21], [22] s-a stabilit că curgerea unui lichid pe umplutură prezintă o bună analogie cu curgerea peliculară a unui lichid pe un perete vertical cilindric sau plan. De aici rezultă că concluziile acestui studiu vor servi şi pentru cunoaşterea fenomenului de înec la curgerea prin umplutură.

3. Aparatura şi metoda de lucru

Experienţele s-au întreprins cu o instalaţie a cărei schemă este redată în fig. 1.

Curgerea s-a studiat în tuburi de sticlă cu diametrele de 8; 11,3; 15,8 mm şi lungimea de 1 200 mm. Fiecare tub a fost prevăzut cu două tubuluri laterale, la distanţa de 1 m, care au servit la măsurarea căderii de presiune. Apa se introducea în tub pe la partea superioară, prin deversare, şi ieşea printr-un sifon, pe la partea inferioară.

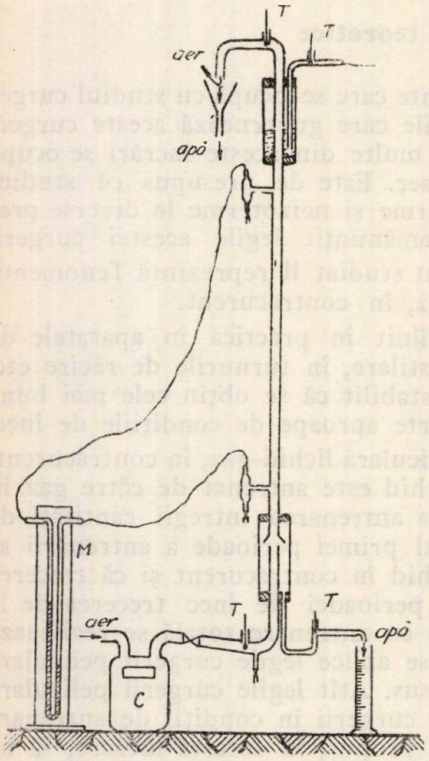


Fig. 1. — Schema instalaţiei.

Aerul s-a trimis pe la partea inferioară, măsurîndu-se în prealabil debitul cu un contor uscat *C*, iar la partea superioară era trecut peste o pîlnie pentru a se separa faza lichidă antrenată. Temperaturile celor două fluide s-au măsurat cu ajutorul termometrelor *T*. Temperatura aerului la intrare a fost $19° \pm 2°C$, la ieşire $15° \pm 1°C$; temperatura apei la intrare $12° \pm 1°C$ şi la ieşire $13° \pm 1°C$.

Experienţele s-au întreprins stabilind în primul rînd un anumit debit de apă, apoi pornind de la antrenarea totală a apei s-a micşorat treptat debitul de aer, pentru fiecare debit măsurîndu-se cantitatea de apă neantrenată şi căderea de presiune. Încercările s-au făcut cu diferite tuburi şi cu diferite debite de apă.

4. Rezultate experimentale

În lucrare s-au urmărit, în primul rînd, particularităţile fenomenului propriu-zis de curgere a celor două faze, care poate fi observat direct prin comportarea fazei lichide. Fenomenul a fost studiat pentru valori a lui Re_l cuprinse între 50 şi 2 400 (respectiv pentru densităţi de stropire cuprinse între 0,0135 şi 0,7000 kg/m sec) şi pentru viteze reale ale aerului cuprinse între 0,5 şi 12 m/sec. Viteza reală a fost calculată cu secţiunea efectivă de curgere a gazului. Pentru calculul grosimii filmului de apă s-au folosit relaţiile lui H. Brauer [3].

Aspectul fenomenului de curgere peliculară apă-aer, în contracurent, este prezentat în fig. 2.

Dacă se realizează un anumit debit de apă, se observă foarte clar valuri pe suprafaţa liberă a lichidului, care la viteze mici ale gazului nu-şi modifică aspectul (fig. 2 a). Cu creşterea vitezei gazului se ajunge

la momentul cînd începe antrenarea apei de către aer. Totdeauna această antrenare începe de la partea superioară a tubului, în locul de intrare a apei (fig. 2 b). Începerea antrenării de la partea superioară se explică prin faptul că grosimea peliculei în această parte este mai mare pe o anumită porţiune a tubului, şi anume pe aceea pe care se formează profilul vitezelor de curgere. Mărind în continuare viteza aerului, cantitatea de apă antrenată pe la partea superioară creşte, iar pe înălţimea tubului, din loc în loc, apar valuri cu amplitudine mult mărită, care au tendinţa de a închide secţiunea coloanei (fig. 2 c). Dacă se măreşte şi mai

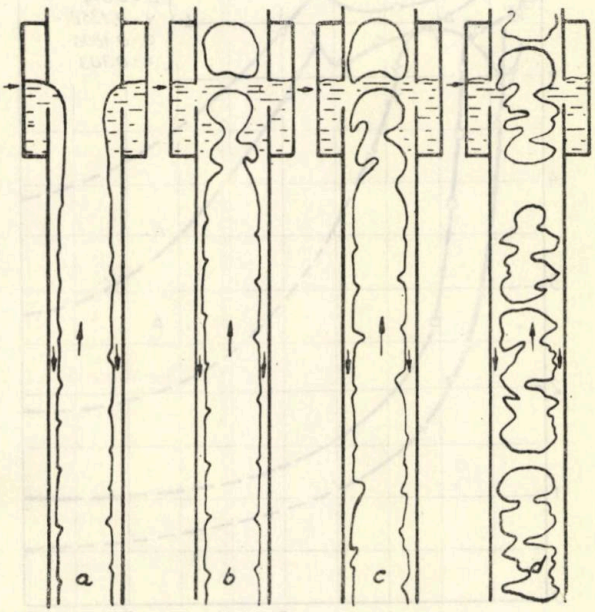


Fig. 2. — Fenomenul de înec în curgerea peliculară.

mult viteza gazului începe procesul de antrenare pe întreaga înălţime a tubului (fig. 2 d).

Antrenarea pe întreaga înălţime începe totdeauna prin formarea unui val, care antrenat de curentul de gaz, închide întreaga secţiune, formîndu-se un „dop" de lichid. Acesta la început se ridică în sus cu viteză mare, apoi înălţimea „dopului" de lichid crescînd, viteza scade. La un moment dat „dopul" se „sparge" şi se formează din nou alte dopuri la partea superioară şi inferioară. Valurile care marchează începutul antrenării pe toată înălţimea tubului apar la diverse înălţimi, fără preferinţă.

În fig. 3, 4 şi 5 s-au reprezentat rezultatele obţinute cu cele trei tuburi de sticlă. În grafice s-a reprezentat variaţia procentuală a apei antrenate în funcţie de viteza reală a gazului, la diverse densităţi de stropire.

Din grafice se constată următoarele: începînd de la antrenarea totală a apei, dacă se micşorează viteza aerului procentul de apă neantrenată creşte foarte puţin pînă la o anumită valoare, după care urmează în continuare o creştere, deşi creşte şi viteza aerului. Curba care reprezintă fenomenul prezintă o inflexiune şi procentul de apă neantrenată creşte continuu cu scăderea vitezei aerului.

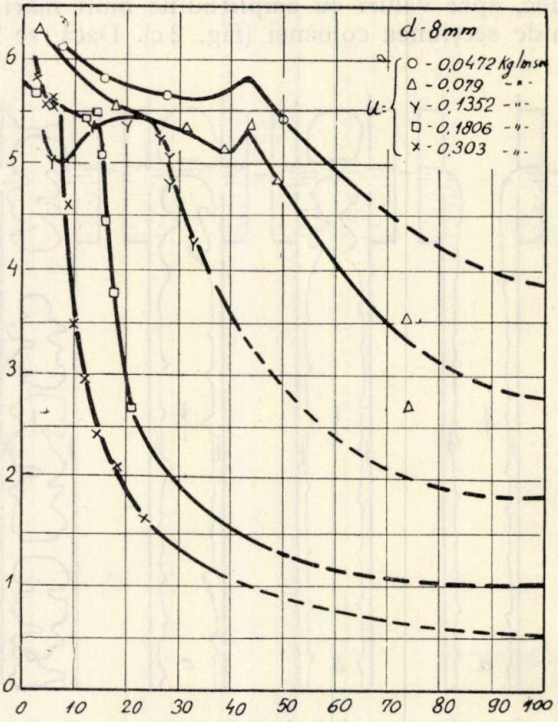


Fig. 3. — Variaţia procentuală a apei neantrenate în funcţie de viteza reală a aerului.

Primul punct de inflexiune al curbei şi creşterea procentului de apă neantrenată cu creşterea vitezei aerului, se justifică prin dispariţia fenomenului de înec pe întreaga înălţime a coloanei şi limitarea lui numai la partea superioară. Prin dispariţia fenomenului de înec pe înălţimea tubului, căderea de presiune scade brusc iar viteza aerului creşte. La densităţi de stropire mari inflexiunea curbelor tinde să dispară.

La aceeaşi viteză a gazului procentul de apă neantrenată scade cu creşterea densităţii de stropire. Pentru aceleaşi viteze ale gazului şi aceleaşi densităţi de stropire procentul de apă neantrenată creşte o dată cu diametrul tubului.

Căderea de presiune s-a măsurat pe o înălţime de 1 m între două puncte situate la 10 cm de capetele tubului.

În fig. 6 s-a reprezentat variaţia căderii de presiune funcţie de viteza reală a gazului, pentru tuburile avînd diametrele de 8 şi 15,8 mm.

Pînă la începerea înecului, pe toată înălţimea tubului (fig. 2 b şi 2 c), căderea de presiune creşte cu viteza gazului după o curbă ce poate fi asimilată cu o dreaptă. În continuare, la o creştere mică a vite-

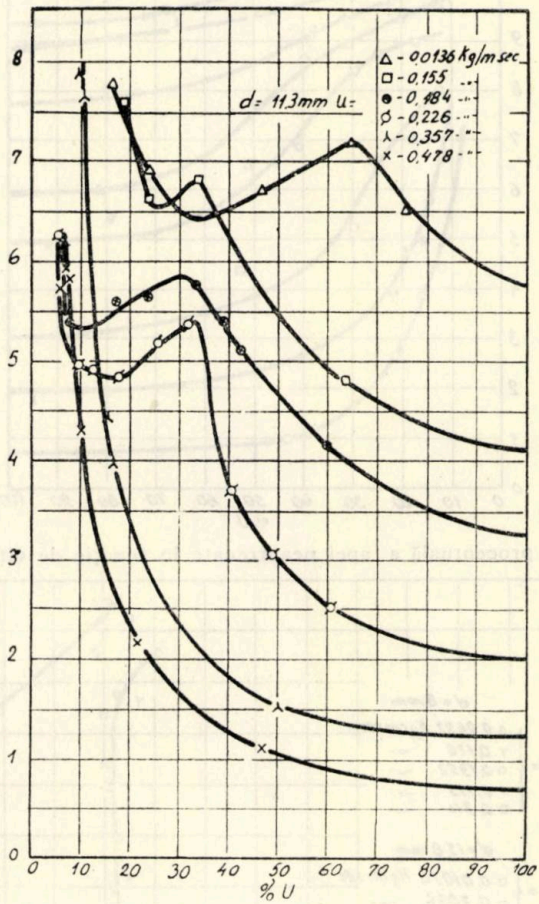


Fig. 4. — Variaţia procentuală a apei neantrenate în funcţie de viteza reală a gazului.

zei gazului, căderea de presiune creşte foarte mult datorită fenomenului de înec pe toată înălţimea tubului (fig. 2 d).

Variaţia debitului de apă neantrenată, pentru diferite densităţi de stropire luate ca parametru, pe un domeniu mare de viteze a gazului, este reprezentată în fig. 7.

În fig. 8 s-au reprezentat în coordonate $Re_g - U$, curbele care marchează începutul înecului la partea superioară a tubului.

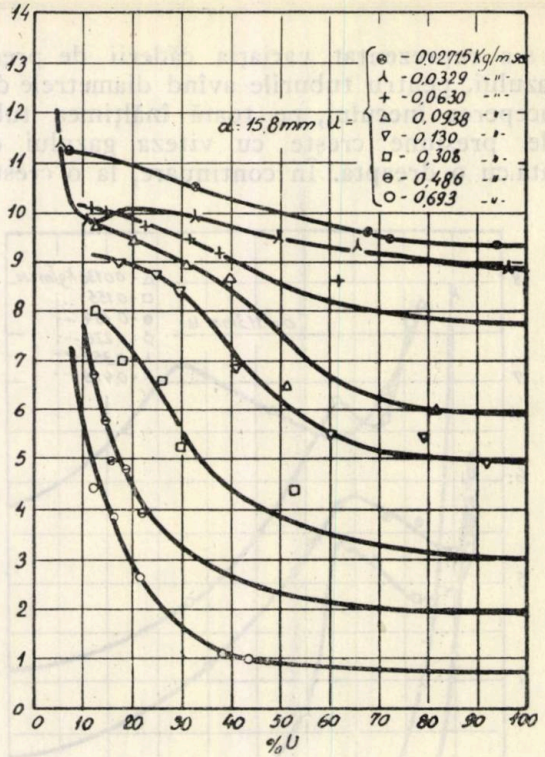


Fig. 5. — Variaţia procentuală a apei neantrenate în funcţie de viteza reală a gazului.

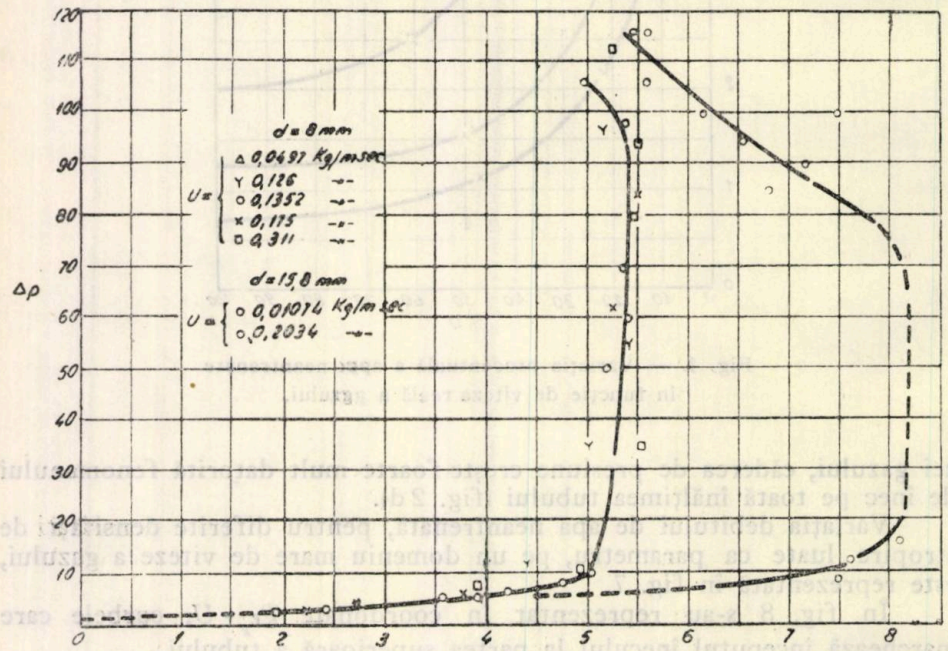


Fig. 6. — Variaţia căderii de presiune în funcţie de viteza reală a gazului.

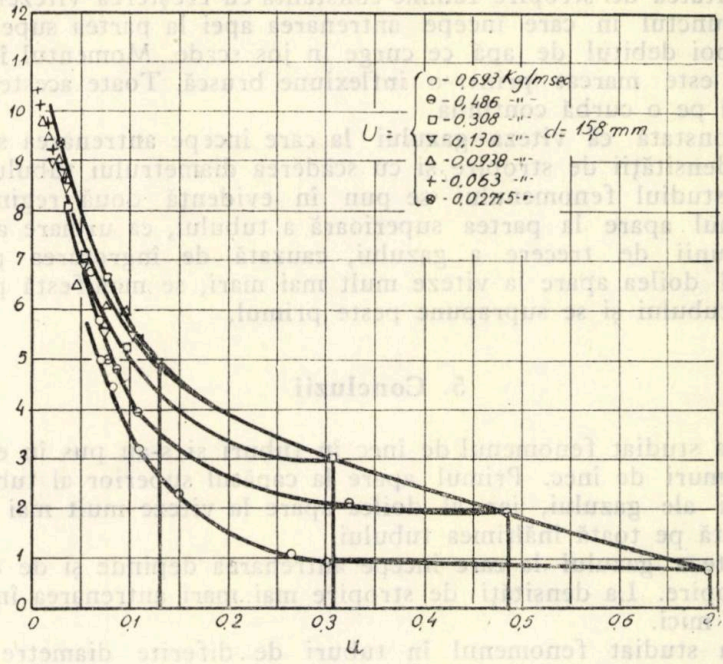


Fig. 7. — Variaţia densităţii de stropire în funcţie de viteza reală a gazului.

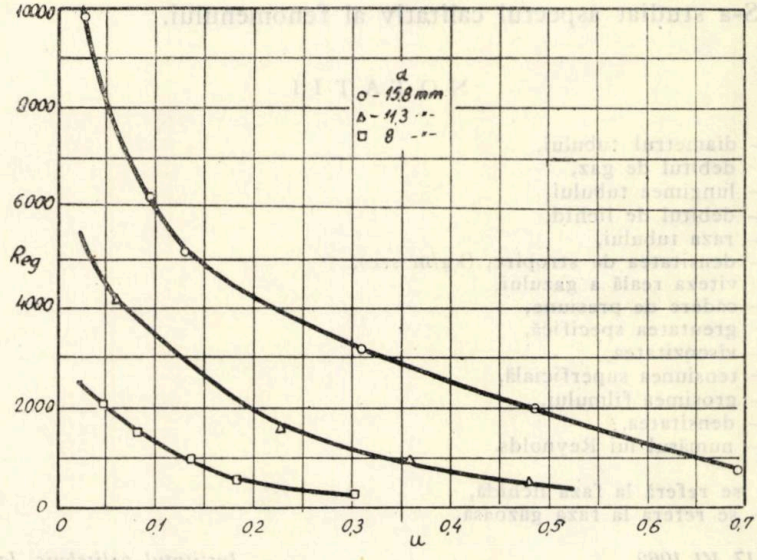


Fig. 8. — Variaţia densităţii de stropire în funcţie de regimul de curgere a fazei gazoase.

Densitatea de stropire rămîne constantă cu creşterea vitezei gazului pînă în punctul în care începe antrenarea apei la partea superioară a tubului, apoi debitul de apă ce curge în jos scade. Momentul începerii antrenării este marcat printr-o inflexiune bruscă. Toate aceste puncte se situează pe o curbă continuă.

Se constată că viteza gazului la care începe antrenarea scade cu creşterea densităţii de stropire şi cu scăderea diametrului tubului.

Din studiul fenomenului se pun în evidenţă două regimuri de înec. Primul apare la partea superioară a tubului, ca urmare a micşorării secţiunii de trecere a gazului, cauzată de îngroşarea peliculei lichide. Al doilea apare la viteze mult mai mari, se manifestă pe toată înălţimea tubului şi se suprapune peste primul.

5. Concluzii

a) S-a studiat fenomenul de înec în tuburi şi s-au pus în evidenţă două regimuri de înec. Primul apare la capătul superior al tubului, la viteze mici ale gazului, iar al doilea apare la viteze mult mai mari şi se manifestă pe toată înălţimea tubului.

b) Viteza gazului la care începe antrenarea depinde şi de densitatea de stropire. La densităţi de stropire mai mari antrenarea începe la viteze mai mici.

c) S-a studiat fenomenul în tuburi de diferite diametre şi s-a constatat că antrenarea în tuburi cu diametre mai mari are loc la viteze mai mari.

d) S-a determinat căderea de presiuni pentru toate condiţiile de curgere, pînă la antrenare totală.

e) S-a studiat aspectul calitativ al fenomenului.

NOTAŢII

d — diametrul tubului,
G — debitul de gaz,
h — lungimea tubului,
L — debitul de lichid,
R — raza tubului,
U — densitatea de stropire, (kg/m sec),
v — viteza reală a gazului,
p — cădere de presiune,
γ — greutatea specifică,
μ — vîscozitatea,
σ — tensiunea superficială,
δ — grosimea filmului,
ϱ — densitatea,
Re — numărul lui Reynolds.

Indici:
l se referă la faza lichidă,
g — se referă la faza gazoasă.

Primit la 17 VI 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie fizică,
Laboratorul de aparate şi procedee

BIBLIOGRAFIE

1. Капица П. Л., ЖЭТФ, 1948, **18**, *1*, стр. 3.
2. — Ibid., 1949, **19**, *2*, стр. 105.
3. Brauer H., Chem. Ing. Techn., 1958, **3**, *2*, p. 75.
4. Tailby S. R., Portalski S., Trans. Instn. Chem. Engrs., 1960, **38**, *6*, p. 324.
5. Calvert S., Williams B., A. I. Ch. E. J., 1958, *1*, p. 78.
6. Anderson G. H., Mantzouranis B. G., Chem. Engng. Sci., 1960, **XII**, *2* p. 109.
7. — Ibid., 1960, **XII**, *4*, p. 233.
8. Семенов П. А., ЖТФ, 1944, **XIV**, стр. 427.
9. — Ibid., 1950, **XX**, стр. 980.
10. Конобеев Б. И., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М., Хим. Пром., 1957, *3*, стр. 38 (166).
11. Brauer H., Chem. Ing. Techn., 1960, **32**, *11*, p. 719.
12. Glaser H., Ibid., 1961, **33**, *3*, p. 146.
13. Német A. G., Ind. Engng. Chem., 1961, **53**, *2*, p. 151.
14. Кафаров В. В., ЖПХ, 1958, **XXXI**, *5*, стр. 706.
15. Govier G. W., Radford B. A., Dunn J. S. C., C. J. Ch. E., 1957, **35**, *2*, p. 58.
16. Govier G. W., Short W. L., Ibid., 1958, **36**, *5*, p. 195.
17. Brown R. A. S., Sullivan G. A., Govier G. W., Ibid., 1960, **38**, *2*, p. 62.
18. Bennett J. A. R., Thornton J. D., Instn. Chem. Engrs., 1961, **39**, *2*, p. 127
19. Collier J. G., Hewitt G. F., Ibid., 1961, **39**, *2*, p. 127.
20. Brauer H., *Strömung und Wärmeübergang bei Rieselfilm*, V. D. I. Forschungsheft *457*, Düsseldorf, 1956.
21. Howkins J. E., Davidson J. F., A. I. Ch. E. J., 1958, *3*, p. 324.
22. Săveanu T., Ibănescu I., Vasiliu M., Tudose R., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *3—4*, p. 127.

ЯВЛЕНИЯ ЗАХЛЕБЫВАНИЯ В ПЛЕНОЧНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТЬАХ-ГАЗ В ПРОТИВОТОКЕ.

Заметка I

Изучение явления в вертикальных трубках

(Резюме)

Авторы, в работе по изучению явлений захлебывания в противоточном течении жидкость-газ, выявили два режима захлебывания. Первый устанавливается при малых скоростях течения жидкости на верхнем конце трубки, второй — при больших скоростях течения проявляется на всем протяжении трубки. Изучено влияние плотности орошения в трубках различных диаметров. Установлен также перепад давления для всех случаев течения до полного уноса.

Объяснения рисунков

Рис. 1. — Схема установки.

Рис. 2. — Явление захлебывания в пленочном течении.

Рис. 3. — Процентное изменение неуносимой воды в зависимости от действительной скорости воздуха.

Рис. 4. — Процентное изменение неуносимой воды в зависимости от действительной скорости воздуха.

Рис. 5. — Процентное изменение неуносимой воды в зависимости от действительной скорости воздуха.

Рис. 6. — Изменение перепада давления в зависимости от действительной скорости газа.

Рис. 7. — Изменение плотности орошения в зависимости от действительной скорости газа.

Рис. 8. — Изменение плотности орошения в зависимости от режима течения газовой фазы.

DER STAUZUSTAND IN RIESELFILM IN GEGENWART EINES IN GEGENSTROM WIRKENDES GASES

I. Mitteilung

Untersuchung in senkrechten Rohren

(Zusammenfassung)

Es wurde der Stauzustand bei einem Rieselfilm in senkrechtem Rohr unter der Einwirkung eines in Gegenstrom wirkendes Gases untersucht. Bei dieser Strömung wurden zwei Stauzustände festgestellt. Der erste kommt bei kleineren Gasgeschwindigkeiten beim oberen Rohrende vor; der zweite erscheint bei grösseren Gasgeschwindigkeiten und offenbart sich in der ganzen Rohrlänge.

Es wurde der Einfluss der Berieselungsdichte bei verschiedenen Rohrdurchmessern untersucht. Die Versuchsergebnisse wurden graphisch dargestellt. Ebenfalls wurde der Druckabfall für alle Strömungsbedingungen bis zum vollständigen Hochreissen der Flüssigkeit festgestellt.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Versuchsapparatur.

Abb. 2. — Der Stauzustand im Rieselfilm unter der Einwirkung eines im Gegenstrom wirkenden Gases.

Abb. 3. — Die prozentuäle Änderung des nicht fortgeriessenen Wassers als Funktion der wahren Gasgeschwindigkeit.

Abb. 4. — Die prozentuäle Änderung des nicht fortgeriessenen Wassers als Funktion der wahren Gasgeschwindigkeit.

Abb. 5. — Die prozentuäle Änderung des nicht fortgeriessenen Wassers als Funktion der wahren Gasgeschwindigkeit.

Abb. 6. — Die Druckabfalländerung als Funktion der wahren Gasgeschwindigkeit.

Abb. 7. — Die Änderung der Berieselungsdichte als Funktion des wahren Gasgeschwindigkeit.

Abb. 8. — Die Änderung der Berieselungsdichte als Funktion der Gasströmungsbedingungen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 547.269.352

SULFAMIDELE ACIZILOR FENOXIACETICI

Nota III

DERIVAŢI DE IMIDAZOLINĂ PROVENIŢI DIN COMPUŞII SULFAMIDAŢI AI ACIDULUI FENOXIACETIC ŞI AI ACIZILOR CREZOXIACETICI ŞI ACŢIUNEA LOR HIPOTENSOARE

DE

GH. BOTEZ şi LONGIN ENESCU

Comunicare prezentată în consfătuirea ştiinţifică regională de farmacie, Iaşi, din 1 — 2 iulie 1961

1. Introducere

În etapa actuală a dezvoltării medicinii studiul medicamentelor vasodilatatoare de sinteză ocupă un loc important în cercetarea ştiinţifică.

Sinteza şi studiul substanţelor dotate cu proprietăţi hipotensive a preocupat şi preocupă pe mulţi cercetători.

Primele cercetări asupra medicamentelor hipotensive, cu acţiune simpaticolitică, au fost întreprinse de E. Fourneau şi D. Bovet, care au studiat eterii fenolici substituiţi cu grupări dietilaminoetilice [1].

S-au sintetizat apoi derivaţi ai β-clor-etil-aminei (Dibenamina) [2], ai imidazolului (Perifenul), produse ce posedă bune proprietăţi vasodilatatoare şi se folosesc curent în terapeutică [3].

La noi în ţară I. Manta şi colaboratorii au adus contribuţiuni importante în problema dilatatorilor coronarieni cu nucleu de cromone şi flavone [4].

Găsirea de noi substanţe cu acţiune hipotensivă, lipsite de toxicitate, este de actualitate şi prezintă importanţă pentru medicină.

2. Partea teoretică

Cercetările noastre s-au îndreptat asupra derivaţilor sulfamidaţi ai acizilor fenoxiacetici, a căror sinteză, sub aspect general, a fost elaborată într-o lucrare anterioară [5]. Motivul care ne-a determinat să studiem acţiunea hipotensivă a acestor compuşi se bazează pe faptul că ei nu sînt toxici, chiar în doze ridicate. Pe lîngă aceasta, unele dintre produsele intermediare obţinute în fazele de preparare ale acizilor sulfonamido-fenoxiacetici au o reactivitate mare şi deci în molecula lor pot fi introduse grupări cu proprietăţi hipotensive.

Astfel se pot sintetiza derivaţi de imidazolină, care au o structură asemănătoare cu cea a perifenului, sau compuşi cu structură apropiată de aceea a eterilor fenolici studiaţi de Fourneau, deosebindu-se de aceştia prin prezenţa grupării sulfonamidice. În consecinţă era indicat de a cerceta influenţa grupării sulfonamidice simple sau substituite asupra

acţiunii hipotensive a eterilor fenolici şi a derivaţilor de imidazolină. În acest scop am preparat o serie de acizi sulfonamido-fenoxiacetici, apoi derivaţii lor dietilaţi la azotul amidic şi derivaţii corespunzători de imidazolină.

La baza sintezei acestor compuşi stă reacţia de clorosulfonare. Deoarece acizii fenoxiacetici nu se pot sulfoclorura direct, este necesar să se protejeze gruparea carboxilică prin esterificare, folosind metodele cunoscute [6].

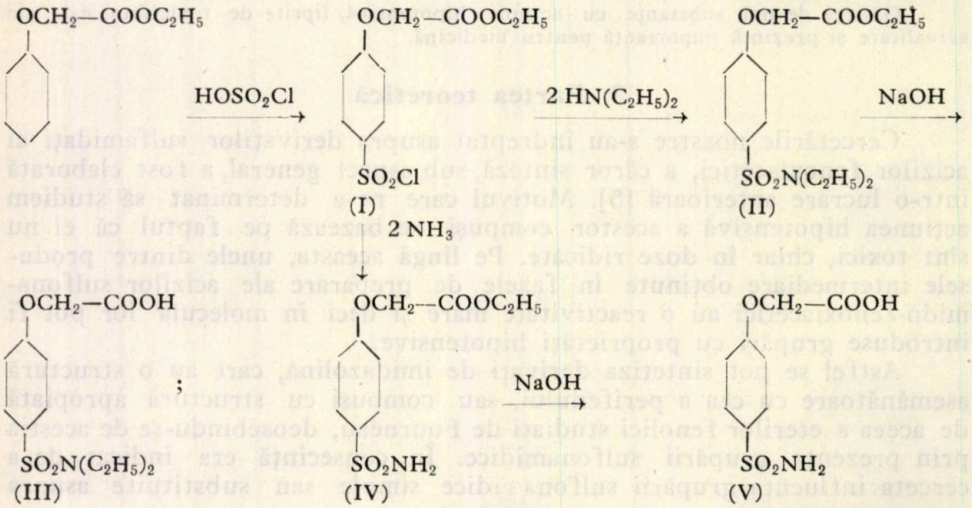
Clorosulfonarea esterilor etilici ai acizilor fenoxiacetici se execută în condiţiuni bune conducînd reacţia la rece (4 ... 10° C) şi folosind un exces de 6 ... 7 moli acid clorsulfonic pentru un mol ester [7]. După descompunerea masei de reacţie, prin aruncare pe gheaţă, se obţin esterii sulfocloruraţi, din care, prin condensare cu alchilamine (2 moli) rezultă esterii dialchil-sulfonamido-fenoxiacetici corespunzători. Aceştia, prin hidroliză alcalină şi acidulare, conduc la acizii dialchil-sulfonamido-fenoxiacetici.

Pe de altă parte, tratînd esterii fenoxiacetici sulfocloruraţi cu amoniac (2 moli), rezultă esterii sulfonamido-fenoxiacetici, din care, prin condensare cu etilen-diamină, se obţin sulfonamido-fenoximetil-imidazolinele respective.

Folosind această metodă generală de sinteză s-au preparat următorii compuşi:

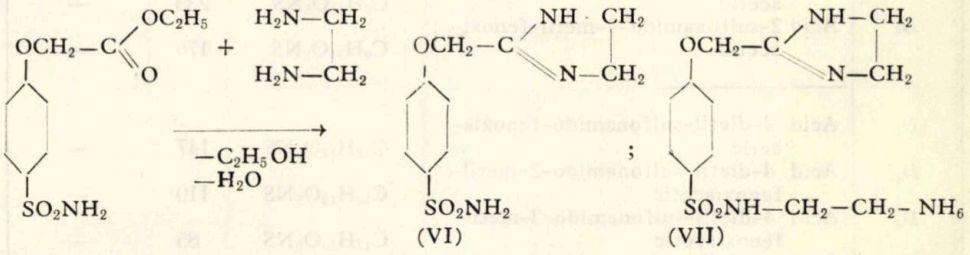
a) *Derivaţi dietil-sulfonamidaţi şi derivaţi de imidazolină proveniţi din acidul fenoxiacetic*

Supunînd reacţiei de clorosufonare fenoxiacetatul de etil se obţine 4-sulfoclorura-fenoxiacetatului de etil (I). Aceasta, la tratare cu dietilamină (2 moli), formează 4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetatul de etil (II), din care, prin hidroliză alcalină, se obţine acidul 4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetic (III).



Pe de altă parte, sulfoclorura esterului fenoxiacetic (I) fiind supusă amidării cu amoniac (cantitate strict stochiometrică), conduce la 4-sulfonamido-fenoxiacetatul de etil (IV), din care, prin hidroliză alcalină, se obţine acidul 4-sulfonamido-fenoxiacetic (V). Acest acid rezultă şi prin hidroliza 4-sulfonamido-fenoxiacetamidei, aşa cum s-a arătat în lucrările precedente.

Prin condensarea 4-sulfonamido-fenoxiacetatului de etil (IV) cu etilen-diamină (1,2 moli), în mediu de alcool absolut la fierbere, rezultă 4-sulfonamido-fenoximetil-imidazolina (VI).



(VI) (VII)

Reacţia de condensare dintre esterul sulfamidat şi etilen-diamină este catalizată de acidul *p*-toluen-sulfonic, catalizator care se foloseşte obişnuit pentru prepararea imidazolinelor [8].

Dacă la condensare se întrebuinţează o cantitate mai mare de etilen-diamină, aceasta reacţionează cu gruparea amidică, prin eliminare de amoniac, rezultînd ca produs secundar compusul amino-etilenic corespunzător (VII).

Încercările întreprinse cu scopul de a sintetiza derivatul imidazolinic din acidul 4-sulfamido-fenoxiacetic şi etilen-diamină, după metoda propusă de Chitwood si Reid [9], nu au dat rezultate.

Structura acestor derivaţi a fost stabilită prin hidroliza acidă a 4-sulfoclorurei-fenoxiacetatului de etil, cînd se obţine acidul fenoxiacetic-4-sulfonic, care se poate prepara şi pe altă cale, după cum s-a arătat în notele precedente. S-a precizat astfel că gruparea metoxi-carboxilică esterificată orientează grupa cloro-sulfonil în poziţia para.

b) *Derivaţi dietil-sulfonamidaţi şi derivaţi de imidazolină proveniţi din acizii crezoxiacetici*

Plecînd de la esterii etilici ai acizilor *o*, *m*, *p*-crezoxiacetici am preparat derivaţii sulfonamidaţi corespunzători, care se deosebesc de cei precedenţi prin aceea că conţin un radical metil substituit în nucleul benzenic. Reacţiile ce au loc la prepararea acestor compuşi decurg în aceleaşi condiţiuni ca şi la obţinerea derivaţilor sulfamidaţi ai acidului fenoxiacetic.

În tabelul 1 sînt redaţi, sub formă centralizată, compuşii sintetizaţi.

Sulfamidele acizilor fenoxiacetici precum şi derivaţii dialchilaţi la azotul amidic sînt substanţe incolore, frumos cristalizate, solubile numai la cald în apă şi alcool, insolubile în alţi solvenţi. Sînt foarte stabile şi au puncte de topire caracteristice (tabelul 1).

Tabelul 1

Notaţia	Denumirea chimică	Formula brută	P. t. °C	P. t. °C clorhidrat
A_1	Acid 4-sulfonamido-fenoxiacetic	$C_8H_9O_5NS$	195,3	—
A_2	Acid 4-sulfonamido-2-metil-fenoxi-acetic	$C_9H_{11}O_5NS$	181	—
A_3	Acid 4-sulfonamido-3-metil-fenoxi-acetic	$C_9H_{11}O_5NS$	233	—
A_4	Acid 2-sulfonamido-4-metil-fenoxi-acetic	$C_9H_{11}O_5NS$	176	—
D_1	Acid 4-dietil-sulfonamido-fenoxia-cetic	$C_{12}H_{17}O_5NS$	147	—
D_2	Acid 4-dietil-sulfonamido-2-metil-fenoxiacetic	$C_{13}H_{19}O_5NS$	110	—
D_3	Acid 4-dietil-sulfonamido-3-metil-fenoxiacetic	$C_{13}H_{19}O_5NS$	85	—
D_4	Acid 2-dietil-sulfonamido-4-metil-fenoxiacetic	$C_{13}H_{19}O_5NS$	106	—
X_1	4-sulfonamido-fenoximetil-imidazo-lina	$C_{10}H_{13}O_3N_3S$	160	251
X_2	4-sulfonamido-2-metil-fenoximetil-imidazolina	$C_{11}H_{15}O_3N_3S$	145	203
X_3	4-sulfonamido-3-metil-fenoximetil-imidazolina	$C_{11}H_{15}O_3N_3S$	147	191
X_4	2-sulfonamido-4-metil-fenoximetil-imidazolina	$C_{11}H_{15}O_3N_3S$	161	150

Cu hidroxizii, carbonaţii şi bicarbonaţii alcalini formează sărurile corespunzătoare. Sărurile de sodiu se prepară tratînd o soluţie concentrată de bicarbonat de sodiu cu acidul sulfamidat şi precipitarea sării prin adăugare de alcool etilic. Sărurile de sodiu şi de potasiu sînt uşor solubile în apă, formînd soluţii cu reacţie slab alcalină.

Derivaţii de imidazolină sînt substanţe solide, amorfe, fiind mai uşor solubile în apă decît compuşii sulfamidaţi din care provin. Sînt solubili în alcool etilic, acetonă, apă, la cald ; insolubile în esteri, hidrocarburi. Au caracter amfoter formînd săruri atît cu acizii cît şi cu metalele alcaline. Clorhidraţii sînt uşor solubili în apă şi au fost folosiţi în cercetările farmacodinamice.

3. Acţiunea farmacodinamică

S-a cercetat experimental acţiunea derivaţilor menţionaţi în tabelul 1 în ceea ce priveşte modificările ce le-ar putea produce asupra tensiunii arteriale şi respiraţiei.

Experienţele au fost făcute pe animale (cîini de 10 ... 12 kg), care au fost narcotizate cu cloraloză (11 cg pe kilo-corp).

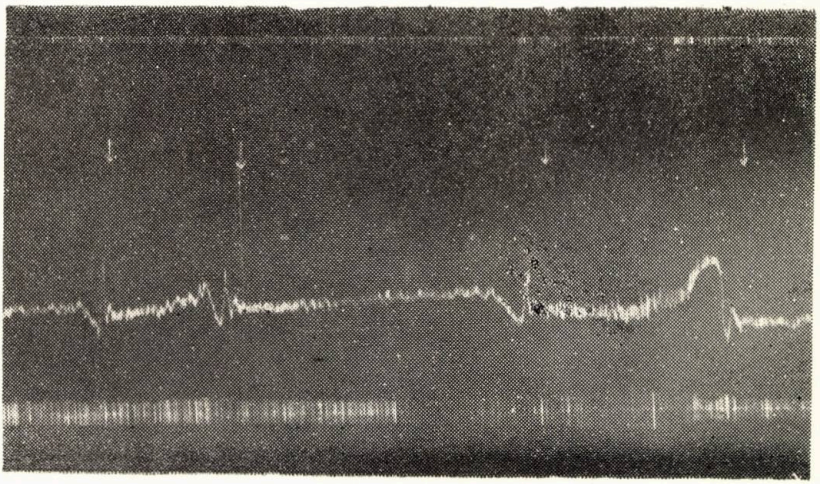


Fig 1

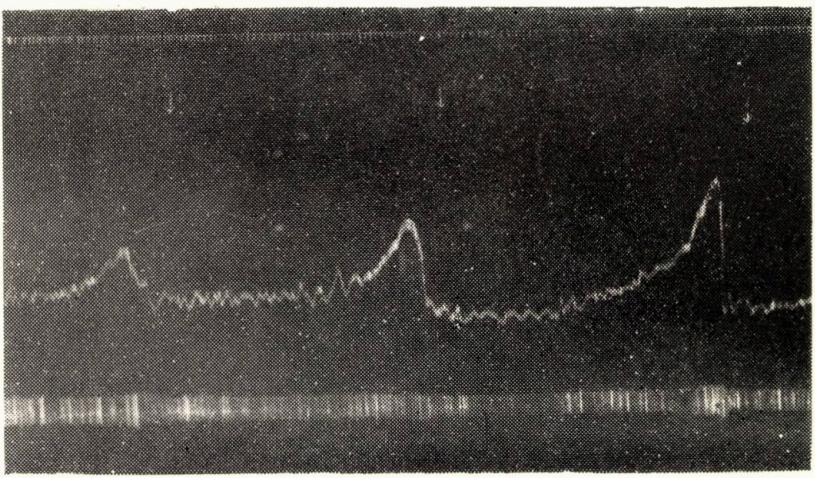


Fig. 2

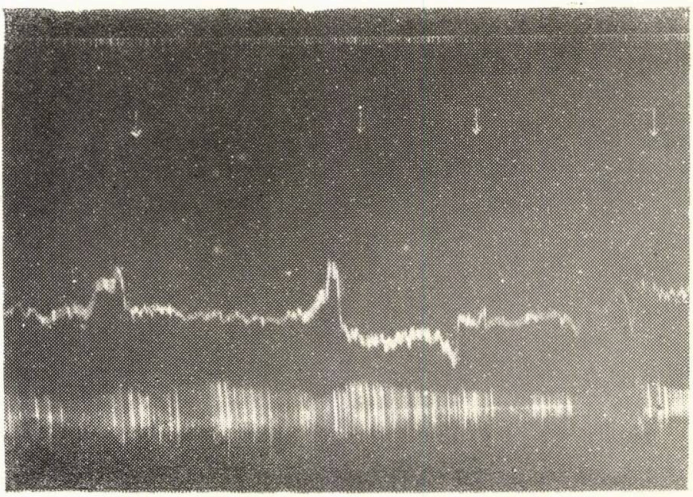


Fig. 3

Tensiunea arterială a fost înregistrată cu ajutorul unui manometru cu mercur, pe cale sîngerîndă, la nivelul arterei carotide.

Modificările respiratorii au fost înregistrate prin conectarea unei canule traheale la o tobiță Marey, prevăzută cu o peniță înscrietoare. Injecțiile au fost efectuate în vena jugulară.

S-au administrat cantități de 0,1 ... 1 g din substanțele $A_1 ... A_4$, solvite în ser fiziologic, în concentrații de 1% și 10%. În aceste condiții tensiunea arterială nu a suferit modificări pregnante și n-au apărut nici modificări respiratorii. Injectîndu-se însă o cantitate mai mare s-a observat o ușoară scădere a tensiunii arteriale.

Substanțele D_1, D_2, D_4, experimentate în aceleași condiții, au prezentat o ușoară acțiune hipotensivă, de scurtă durată, fără modificări respiratorii nete. În cazul administrării unei cantități de 14 cg din substanța D_3, solvită în ser fiziologic, în concentrație de 1%, s-a observat o scădere pronunțată a tensiunii arteriale, care a atins limita inferioară de 5,4 cm (fig. 1).

Răspunsul hipotensiv la acțiunea substanței D_3 a fost trecător (3 ... 4 minute) și a prezentat o intensitate mai mică la administrarea repetată a aceleiași doze, după un interval de 5 ... 6 min.

Ritmul și amplitudinea mișcărilor respiratorii nu au fost influențate decît într-o mică măsură, schițîndu-se o ușoară tahipnee, cu mărirea amplitudinii.

Rezultate bune s-au obținut cu substanța X_1 administrată în aceleași doze în vena jugulară externă. În acest caz căderea tensiunii arteriale a fost precedată de un scurt croșet hipertensiv, care a devenit mai puțin evident după administrări ulterioare (fig. 2). Remarcăm faptul că injectările repetate cu substanța X_1 (în doza inițială) au provocat nu numai scăderea răspunsului hipotensiv dar și o durată scurtă a acestui efect. Ritmul și amplitudinea mișcărilor respiratorii nu au fost modificate în mod esențial.

Injectarea repetată a dozei inițiale din substanța X_1, după o modificare prealabilă a tonusului vascular cu ajutorul perifenului (1 ml soluție perifen 1 la mie injectat în vena jugulară), a determinat un răspuns hipotensiv evident, cu o durată mai prelungită și modificări respiratorii vizibile (fig. 3).

Acțiunea vasodilatatoate a derivaților de imidazolină proveniți din acizii crezoxiacetici sulfonamidați (X_2, X_3, X_4) se studiază în continuare, cu scopul de a stabili influența radicalilor metil din moleculă asupra efectului hipotensiv.

4. Discuția rezultatelor

Din studiul efectuat rezultă că derivații sulfamidați ai acizilor fenoxiacetici, care conțin grupări sulfonamidice nesubstituite, nu produc modificări ale tonusului vascular. În schimb derivații dialchilați la gruparea sulfonamidică au proprietăți hipotensive, care se accentuează în funcție de poziția grupei metil din moleculă.

Astfel, cînd gruparea metil se găseşte în poziţia meta faţă de gruparea metoxi-carboxilică, acţiunea hipotensivă este cea mai ridicată, iar modificările respiratorii devin vizibile.

Compuşii în care radicalii metil ocupă poziţiile orto sau para produc modificări tensionale mai slabe. Se poate deduce că la derivaţii dialchil-sulfamidaţi ai acizilor crezoxiacetici, gruparea metil din poziţia meta imprimă proprietăţi hipotensive nete.

Compusul X_1, care are o structură apropiată de cea a perifenulului, provoacă un răspuns hipotensiv evident. Deoarece acest derivat conţine o grupare sulfonamidică simplă, care după cum s-a văzut nu are acţiune vasodilatatoare şi nu are grupe alchilice în nucleu, se poate preciza că acţiunea hipotensivă se datoreşte ciclului imidazolinic din moleculă.

Ne propunem ca în cercetările ulterioare să studiem influenţa radicalilor metil, izopropil, metoxil, asupra acţiunii hipotensive a derivaţilor de imidazolină sulfonamidaţi.

5. Partea experimentală

4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetatul de etil (II)

5,56 g de 4-sulfoclorură-fenoxiacetat de etil se tratează cu 2,2 g dietil-amină, diluată cu aceeaşi cantitate de apă. Reacţia fiind puternic exotermă se răceşte, apoi se lasă în repaus timp de 12 ore. Se decantează pătura apoasă, care conţine clorhidratul de dietil-amină, iar stratul uleios se spală cu apă şi se separă.

Esterul dietil-sulfonamido-fenoxiacetic se prezintă ca un lichid foarte dens, de culoare galben pal. Se foloseşte ca atare în faza de hidroliză pentru obţinerea acidului corespunzător.

Acidul 4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetic (III)

Esterul dialchilat rezultat se supune hidrolizei prin încălzire timp de 15 min, cu o soluţie de NaOH (5%), care conţine un mic exces de hidroxid faţă de cantitatea stoichiometrică. Se obţine o soluţie a sării de sodiu a acidului respectiv. După răcire se acidulează cu HCl (50%) pînă la pH = 2, cînd produsul precipită; se filtrează, se spală cu apă, apoi se purifică prin recristalizare din apă. Produsul se prezintă sub formă de cristale prizmatice strălucitoare, cu p.t. 147°C.

$C_{12}H_{17}O_5NS$ (287,19)	Calculat:	C%	50,18;	H%	5,84:	N%	4,87,
	Găsit:	C%	49,93;	H%	6,12;	N%	4,73,
			50,21:		5,93;		4,76.

4-sulfonamido-fenoxiacetatul de etil (IV)

5,2 g de 4-sulfoclorură-fenoxiacetat de etil (I), în stare anhidră, se solvă în 10 ml acetonă, se răceşte la gheaţă şi se tratează în porţiuni cu 4 ml soluţie de amoniac (25%). Reacţia este puternic exotermă. Se agită la rece timp de 10 min, cînd precipită esterul sulfamidat. Produsul se filtrează, se spală cu apă pentru îndepărtarea clorurii de amoniu, şi se purifică prin recristalizare din alcool. Substanţa este solubilă în acetonă, în esteri, în alcool la cald, insolubilă în hidrocarburi. Cristalizează în prizme mari, albe, cu p.t. 146°C.

$C_{10}H_{13}O_5NS$ (259,15)	Calculat:	C%	46,33;	H%	5,05;	N%	5,40.
	Găsit:	C%	46,22;	H%	5,12;	N%	5,38.

4-sulfonamido-fenoximetil-imidazolina (VI)

2,6 g ester sulfamidat (IV) se solvă la cald în 10 ml alcool absolut, se adaugă 0,01 g acid *p*-toluen-sulfonic şi urme de sulf (catalizatori), apoi se tratează cu 0,7 g

etilen-diamină dizolvată în 2 ... 3 ml alcool etilic absolut. Soluția se încălzește sub reflux timp de 2 ... 3 ore, pînă ce dispare coloratia vernil apărută. După terminarea reacției se evaporă alcoolul pe baie de apă, iar reziduul se tratează cu 5 ml apă și se ține la rece. Precipitatul format se filtrează, spălîndu-se cu puțină apă.

Produsul brut este format din 4-sulfonamido-fenoximetil-imidazolina rezultată din reacție, din puțin ester nereacționat și cantități mici de derivat imidazolinic substituit la gruparea sulfonamidică cu un rest amino-etilenic (VII). Îndepărtarea compușilor secundari, care impurifică imidazolina, se bazează pe diferența de solubilitate în apă: esterul este insolubil, iar imidazolina substituită la gruparea sulfonamidică este mai greu solubilă în apă decît derivatul nesubstituit.

Pentru purificare produsul brut se tratează cu 5 ml apă și se încălzește la 80°C. Părțile insolubile se filtrează. Din filtrat cristalizează la răcire imidazolina, care după separare se mai purifică o dată din apă. Se obțin 2 g — randament 78%. Pulbere microcristalină albă, cu p.t. 150°C. Clorhidratul are p.t. 251°C. Este solubilă în apă, acetonă, etanol, la cald; insolubilă în hidrocarburi și esteri.

$C_{10}H_{13}O_{33}NS$ (255,18) Calculat: C% 47,02: H% 5,13: N% 16,65.
Găsit: C% 46,94; H% 5,39; N% 16,32; 16,37.

Acidul 4-dietil-sulfonamido-2-metil-fenoxiacetic

Se prepară în același mod ca și derivatul (III). Produsul se purifică din apă; cristali prizmatici albi, cu p.t. 110°C.

$C_{13}H_{19}O_5NS$ (301,20) Calculat: C% 51,79; H% 6,35; N% 4,64.
Găsit: C% 51,63; H% 6,41; N% 4,55.

4-sulfonamido-2-metil-fenoxiacetatul de etil

Se obține în aceleași condiții ca și derivatul (IV). Prin purificare din alcool rezultă cristali prizmatici albi, cu p. t. 137°C.

$C_{11}H_{15}O_5NS$ (273,18) Calculat: C% 48,31; H% 5,53; N% 5,12.
Găsit: C% 48,25; H% 5,64; N% 5,02.

4-sulfonamido-2-metil-fenoximetil-imidazolina

Se prepară pe aceeași cale ca și derivatul (VI). Produsul purificat din apă se prezintă sub forma unui praf alb, cu p.t. 145,5°C. Clorhidratul are p.t. 203°C.

$C_{11}H_{15}O_3N_3S$ (269,20) Calculat: N% 15,61.
Găsit: N% 15,47; 15,53.

Acidul 4-dietil-sulfonamido-3-metil-fenoxiacetic

Se procedează în mod similar ca la prepararea compusului (III). Se purifică din alcool etilic (80%) obținînd produsul pur, cu p.t. 85,5°C.

$C_{13}H_{19}O_5NS$ (301,20) Calculat: C% 51,79; H% 6,35; N% 4,64.
Găsit: C% 51,82; H% 6,43; N% 4,50.

4-sulfonamido-3-metil-fenoxiacetatul de etil

Se obține în aceleași condiții ca și derivatul (IV). După recristalizare din alcool are p.t. 139°C.

$C_{11}H_{15}O_5NS$ (273,18) Calculat: C% 48,31; H% 5,53; N% 5,12.
Găsit: C% 48,36; H% 5,57; N% 4,98; 5,16.

4-sulfonamido-3-metil-fenoximetil-imidazolina

Se prepară după același procedeu ca și compusul (VI). După purificare din apă are p.t. 147°C. Clorhidratul are p.t. 191°C.

$C_{11}H_{15}O_3N_3S$ (273,18) Calculat: N% 15,61.
Găsit: N% 15,57; 15,63.

Acidul-2-dietil-sulfonamido-4-metil-fenoxiacetic

Modul de preparare este identic ca la derivatul (III). Se purifică din etanol (50%); p.t. 106°C.

$C_{13}H_{19}O_5NS$ (301,20) Calculat: C% 51,79; H% 6,35; N% 4,64.
Găsit: C% 51,92; H% 6,32; N% 4,40; 4,55.

2-sulfonamido-4-metil-fenoxiacetatul de etil

Se obţine pe aceeaşi cale ca şi derivatul (IV) şi se purifică prin recristalizare din etanol; are p.t. 135°C.

$C_{11}H_{15}O_5NS$ (273,18) Calculat: C% 48,31; H% 5,53; N% 5,12.
Găsit: C% 48,25; H% 5,62; N% 5,00; 5,03.

2-sulfonamido-4-metil-fenoximetil-imidazolina

Se prepară după procedeul indicat la compusul (VI). Purificat din apă produsul are p.t. 161°C. Clorhidratul are p.t. 150°C. Clorhidratul are punctul de topire mai coborît decît imidazolina bază datorită vecinătăţii grupării sulfonamidice.

$C_{11}H_{15}O_3N_3S$ (269,20) Calculat: N% 15,61
Găsit: N% 15,48; 15,56.

6. Concluzii

Din studiul acţiunii hipotensive a derivaţilor sulfamidaţi simpli şi dialchilaţi ai acizilor fenoxiacetici precum şi a compuşilor imidazolinici corespunzători se pot trage următoarele concluzii:

1. Derivaţii sulfamidaţi ai acizilor fenoxiacetici, care conţin în moleculă grupări sulfonamidice nesubstituite, nu produc modificări ale tonusului vascular. Deoarece unele dintre aceste produse au acţiune anticonvulsivantă [10] se poate prevedea că folosirea lor în terapeutică nu va avea ca urmare efecte secundare nedorite.

2. Derivaţii dietilaţi la azotul amidic au proprietăţi hipotensive, care se accentuează în funcţie de poziţia radicalului metil substituit în nucleul benzenic. Radicalul metil din poziţia meta imprimă proprietăţi hipotensive evidente.

3. Compusul 4-sulfonamido-fenoximetil-imidazolina provoacă un răspuns hipotensiv net, care se datoreşte inelului imidazolinic din moleculă.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică,
Laboratorul de tehnologia produselor farmaceutice
şi
Institutul de medicină şi farmacie „Dr. D. Bagdasar", Iaşi,
Laboratorul de fiziopatologie

BIBLIOGRAFIE

1. Ovet D. B., Fourneau E., Chem. Zentr., 1940, **I**, S. 909.
2. Преображенский Н. А., Генкин Е. И., *Химия органических лекарственных веществ*, М., 1953, стр. 62.
3. Ciorănescu E., *Medicamente de sinteză*, Buc., 1957, p. 168.
4. Manta I., Berger T., Silaghi E., Rev. de Chimie, ASIT, 1959, *2*, p. 69.
5. Botez Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *3 — 4*, p. 133.
6. Fritzsche V., Bl., 1928, **VI**, S. 162, 480, 486.
7. Botez Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *3 — 4*, p. 143.
8. Neniţescu C. D., *Tratat elementar de chimie organică*, Buc., 1958, vol. **II**, p. 666.
9. Chitwood O., Reid Y., Am. Chem. Soc., 1953, p. 4242.
10. Brînzei P., Botez Gh., Rev. Med. Chir., 1961, *2*, p. 487.

СУЛЬФАМИДЫ ФЕНОКСИУКСУСНЫХ КИСЛОТ

Заметка III

Имидазолиновые, производные от сульфамидных соединений феноксиуксусной и крезоксиуксусной кислот

(Резюме)

Ввиду получения новых медикаментов с депрессорной активностью авторы синтетизировали ряд сульфамидных соединений феноксиуксусных кислот, а также соответствующие имидазолиновые производные. Общий метод синтеза состоит в хлоросульфировании этиловых эфиров феноксиуксусных кислот и отделении сульфохлорированных эфиров путем обработки ледом реагирующей массы. Путем конденсации сульфохлорированных эфиров алкиламинами получают соответствие сложные алкилсульфонамидофеноксиуксусные эфиры. Щелочный гидролиз этих эфиров ведет к получению алкилсульфонамидофеноксиуксусных кислот.

С другой стороны обработкой аммиаком сульфохлорированных эфиров (2 моля) получают сульфонамидофеноксиуксные эфиры, из которых конденсацией этилендиамином синтетизируют соответствующие сульфонамидофеноксиметилимидазолиды.

Все перечисленные превращения в различных этапах синтеза дают высокие выходы, за исключением получения имидазолина с выходом равным 68%.

Полученные вещества хорошо кристаллизую, обладают определенными точками плавления; щелочные соли этих производных растворимы в воде.

Опытными данными на животных установленно:

а) Сульфамидные производные феноксиуксусных кислот, содержащие в молекуле сульфонамидные незамещенные группы ($A_1 ... A_4$), не действуют на сосудистую систему.

б) Диэтиловые производные у амидного азота ($D_1 ... D_4$) обладают слабой депрессорной активностью; метил-радикал в мета-положении повышает депрессорную активность (рис. 1).

в) 4-сульфамидофеноксиметиламидазолин (X_1) имеет явную депрессорную активность, благодаря имидазолиновому кольцу (рис. 2).

SULFAMIDES DES ACIDES PHÉNOXIACÉTIQUES

Note III

Dérivés d'imidazoline provenant des composés sulfamidés de l'acide phénoxyacétique et des acides crésoxyacétiques et leur action hypotensive

(Résumé)

En cherchant de nouveaux médicaments hypotensifs les Auteurs ont synthétisé une série de composés sulfamidés des acides phénoxyacétiques ainsi que leurs dérivés d'imidazoline.

La méthode générale de synthèse de ces composés consiste dans la chlorosulfonation des esthers éthyliques des acides phénoxyacétiques et la séparation des esters sulfochlorurés par la décomposition de la masse de réaction dans la glace

Par la condensation des esthers sulfochlorurés avec des alkileamines, il en résulte des esthers alkyle-sulfonamido-phénoxyacétiques correspondants ; ceux-ci, par hydrolise alcaline, conduisent aux acides alkyle-sulfonamido-phénoxyacétiques.

D'autre part par traitement des esthers sulfochlorurés avec de l'ammoniaque (2 mols) on obtient des esthers sulfonamido-phénoxyacétiques, à partir desquels, par condensation avec l'ethylène-diamine, il en résulte les sulfonamido-phénoxymethyle-imidazolines respectives.

Toutes les transformations qui ont lieu en différentes phases du processus de synthèse ont des rendements assez élevés, exceptant la préparation de l'imidazoline qui a un rendement de 68%.

Les substances obtenues sont bien cristalysées, ayant des points de fusion caractéristiques et peuvent être facilement transformées en sels alcalins, solubles dans l'eau.

En étudiant expérimentalement, sur des animaux, l'action hypotensive des dérivés synthétisés (tab. 1), les Auteurs ont abouti aux conclusions suivantes :

a) Les dérivés sulfamidés des acides phénoxyacétiques qui contiennent dans leur molécule des groupements sulfonamidiques non substitués ($A_1 \ldots A_4$) ne produisent pas des modifications du volume vasculaire.

b) Les dérivés diéthylés à l'azote amidique ($D_1 \ldots D_4$) présentent de faibles propriétés hypotensives. Le radical méthyle en méta imprime des propriétés hypotensives plus marquées.

c) Le composé 4-sulfonamido-phénoxyméthyle-imidazoline (X_1) a un effet hypotensif évident, du à l'anneau imidazolinique de la molecule (fig. 2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. K. 628.54

EINIGE PROBLEME DER MECHANISIERUNG, BZW. AUTOMATISIERUNG DER GERBEREIEN

VON

V. KUBELKA

1. Einleitung. Begriff und Wesen der Mechanisation

In den letzten Jahren spricht man oft und viel von der „Mechanisierung" und „Automatisierung" der Lederfabriken. Manche Fachgenossen sehen in dieser technischen Neuerung direkt eine Lösung aller schwierigen Probleme der Ledererzeugung. Es ist zur Mode geworden, beim jeden Entwicklungsplan für die Zukunft der Gerberei diese Worte als einen allgemeinen Wegweiser zu verwenden. Das ist jedenfalls übertrieben. Die Mechanisation und noch mehr die Automatisation eines industriellen Betriebes macht sich in sehr verschiedenem Masse nützlich, je nach dem, um welchen Industriezweig es sich handelt. Um die Bedeutung dieser technischen Änderungen für den Betrieb einer Gerberei zu beurteilen, müssen wir uns einige allgemein gültige Tatsachen vor Augen halten, vor allem über den Begriff „Mechanisation".

Erster Schritt zur Mechanisierung der Gerberei war die Ersetzung der Handarbeit durch die Maschienenarbeit, welche gegen Ende des vorigen Jahrhundertes begann und bis heute noch nicht ihren Höhepunkt erreicht hat [1]).

Alle Arbeiten auf der Haut und auf dem Leder werden durch spezielle Maschinen bewerkstelligt.

Der zweite Schritt besteht in der „Elektrifizierung" der Maschinen, von welchen jede einzelne einen selbständigen Antrieb mit eigenem Elektromotor hat; das ermöglicht die Regulierung, die Kontrolle und ev. Registration der Leistung (Geschwindigkeit), der Laufzeit, die Fernschaltung usw.

Diese erste Etappe der Mechanisierung können wir als schon fast abgeschlossen ansehen; es gibt heute noch kaum eine einzige Teilarbeit in der modernen Gerberei welche nicht mit Hilfe von einer elektrisch angetriebenen Maschine besorgt wäre. Diese erste Etappe hat nicht nur wirtschaftliche Vorteile, sondern — was besonders wichtig ist — auch technologische Vervollkommnung und Erhöhung der Qualität des Leders mit sich gebracht.

Bei der heutigen fast völlig „elektro-maschinisierten" Arbeit wird jedoch — ganz ähnlich wie bei der früheren Handarbeit — jedes Stück Haut bzw. Leder separat behandelt; die ganze Bearbeitung des Leders zerfällt — nach wie vor — in eine Menge von einzelnen Operationen, welche zwar nach einander folgen, dabei aber vollkommen unabhängig voneinander verlaufen — was Zeitdauer, Arbeitsaufwand, Leistung etc. anbelangt.

In der künftigen Entwicklung wird technische Vervollkommnung dieser Einzelnmaschinen angestrebt, welche nicht nur bessere Qualität der Arbeit, höhere Leistun-

[1]) In einer sehr modernen eingerichteten Lederfabrik kann man bei genauer Kontrolle die Menge der mit der Hand bewerkstelligten Arbeiten immer noch auf etwa 29% von dem gesammten Arbeitsaufwand schätzen. In kleineren Gerbereien ist der Anteil der Handarbeit höher (siehe unten).

gen, Herabsetzung der Beschädigungen, aber auch grössere Sicherheit des Arbeiters als Endziel hat.

Das alles ist aber noch keine Mechanisierung des Betriebes.

Die Mechanisierung besteht in der zweckmässigen Anordnung des Transportes im Inneren des Betriebes, durch welche die bearbeiteten Rohwarestücke (Häute) auf dem kürzesten Wege von einer Arbeitsstelle zur anderen in möglichst ununterbrochener Strömung befördert werden, ohne dass irgendwo Unterbrechungen, bzw. Störungen vorkommen, welche Stockung des Materialstromes und dadurch stellenweise Anhäufung der Ware zur Folge hätten.

Als theoretisches Prinzip solcher mechanisierten Werkstätte können wir uns einen laufenden Förderband (Conveyor) vorstellen, welcher durch die ganze Werkstätte läuft; die einzelnen Arbeitseinheiten (Maschine, Arbeiter) sind längst des Bandes in passender Reihenfolge angeordnet.

Solche zentralen Transportbänder bilden Rückrad der mechanisierten Werkstätte in vielen Industriezweigen, in welchen die Mechanisation schon weiter fortgeschritten ist; dieses Prinzip wird in dem jetzigen Stadium der Entwicklung in der Gerberei nachgeahmt, wobei es jedenfalls noch fraglich ist, ob das System als solches für die Gerberei passend ist oder nicht (wie z. B. für die Schuhfabrikation und andere Zweige der rein mechanischen Industrie). Die Tabelle 1 zeigt das Schema einer Anordnung der einzelnen Arbeiten in der Gerberei in einer Reihenfolge wie sie die Mechanisierung erfordert. In der Übersicht sind die einzelnen Arbeitsstellen und daneben die heute üblichen Maschinen und Einrichtungen, Gefässe usw. zusammengestellt. Die schematische Abb. 1 zeigt die mögliche Reihenfolge der heute üblichen Maschinen längst des zentralen Transportbandes in einer mechanisierten Wasserwerkstätte (idealisiert).

Die Bewegung der Häute und der anderen Materialien (Hilfsstoffe) zu dem vorausgesetzten „zentrallen Förderband" welcher das eigentliche Rückrad des mechanisierten Fabrikationsganges vorstellt, wird bewerkstelligt mit Hilfe von einem ganzen Park von Transportwagen, Kranen, Galerien, Rutschbahnen und Transportbändern etc., deren Leistung der ununterbrochenen Vorwärtsbewegung der Hauptförderbahn genau angepasst ist (Synchronisierung).

Die eigentliche Mechanisierung bedeutet demnach dass dieses ganze vorausgesetzte Transportsystem die Ware durch die einzelnen Arbeitsstellen in bestimmter Ordnung vorwärts bringt, sodass die einzelnen Arbeiten bzw. die ganze Bearbeitung von der Haut bis zur fertigen Ware in einem Zuge verläuft; die Zeitleistung solcher ununterbrochenen Reihe kann einheitlich beherrscht und reguliert werden. Die Zeitleistung jeder einzelnen Operation wird von der Zeitleistung der benachbahrten bzw. der folgenden Maschine bestimmt (beeinflusst).

Die Produktivität der Arbeit in der Gerberei ist vor allem von der Organisierung des inneren Transportes in der Werkstätte abhängig; in älteren Gerbereien wird oft mehr als 50% der gesammten menschlichen Arbeit durch den Transport der Ware von einer Arbeitsstelle zur anderen verbraucht.

Nachdem die Häute in dem Lager zum geeigneten „Plan" gewählt und aussortiert sind, werden sie mit Hilfe vom Laufkraan erfasst und die ganze Partie an dem supponierten Hauptförderband absetzt. Entlang des Förderbandes *A* stehen die einzelnen Einrichtungen und Bearbeitungsmaschinen — die Haspeln (*2*), die Äschergruben (*4*), die Enthaarmaschine (*5*), Entfleischmaschinen (*6,6*), Spülkasten (*7*), Streichmaschinen (*8*), Kantierbäume (*9*) usw. Am Ende des ersten Teile des Bandes steht die Spaltmaschine, ev. Kopfspaltmaschine (*10*). Dann folgt die Crouponierung (in der Blösse), Anbinden und Beförderung (Rahmenkraan) zu dem Farbgang. Der Lauf der Maschinen ist synchronisiert. Die Häute, bzw. Blössen werden von den Arbeitern ergriffen, den Bearbeitungsmaschinen zugeführt, um nach durchgeführten Operation wieder auf den Transportband geworfen zu werden.

Die „Synchronisierung" aller Arbeiten (Maschinen) ist die wichtigste Bedingung der Mechanisierung, welche auf diese Art und Weise bis zum gewissen Grade auch mit den heute üblichen Arbeitsmaschinen und den heutigen eingelernten Arbeitern bewerkstelligt werden kann. Für die Zukunft muss jedenfalls die Vervollkommnung der Maschinen auf bessere Möglichkeit einer exakten Synchronisierung ihres Laufes hinauszielen. Die ganze Arbeit in einer mechanisierten Werkstätte soll nach einem Harmonogram dirigiert werden und unter ständiger Aufmerksamkeit und iniziativer Betätigung aller beteiligten Mitarbeiter fortschreiten. Aus diesem Grunde müssen auch auf die Qualifikation der Lederarbeiter andere Forderungen gestellt werden, als es heute

Tabelle 1

Beispiel der Reihenfolge der Arbeiten und Maschinen in einer Oberlederfabrik (ausgerüstet mit den heute üblichen Maschinentypen)

Arbeitsfolge, Lager, Sortieren, Vorbereitung des Planes	Chemikalien Bad (Brühe)	Maschinen, Gerbgeschirre und Einrichtungen, Sortiertische	Abfall zum Abtransportieren
I. *Wasserwerkstatt*			
Weichen	gesalzene Häute	Haspeln	*2*
Weichgewichtfeststellen	Wasser	Plattformwage	*3*
Äschern	Schwefelnatrium, Kalk	Äscher- und Waschfass	
		Äscherhaspel	*4*
Enthaaren (streichen)		Enthaar- und Glättmasc.	*5*
Entfleischen		Entfleischmaschine, Leimfleder	*6*
Kantieren, Sortieren		Plattformwagen,Kantierbaum	*7*
Wässern		Spülkasten (Grube)	*8*
Übersehen		Kantierbaum	*9*
Spalten		Bandmessermaschine	*10*
Spalte crouponieren		Beschneidetisch	*11*
Aasspalte (Nachäschern)		Haspel	*12*
Entkälken, Beizen		Haspel	*13*
Spaltgerbung		Fass	*13 a*
II. *Gerberei*			
Blössegew. bestimmen		Plattformwaage	*14*
Crouponieren		Crouponiertisch	*15*
Chromgerben	$NaCl$, H_2SO_4, CrO_3	Gerbfass	*16*
Abwelken		Wringmaschine oder Reihentischmaschine	*17*
Falzen		Falzmaschine, Falzspäne	*18*
Falzgewicht nehmen		Plattformwaage	*19*
Neutralisieren	Gerb- und Farbstoffe, Öl	Gerb- und Färbfass	*20*
Nachgerben, fetten Färben		Färbfass	*21*
Abwelken		Wringmaschine	*22*
Ausrecken		Walzenmaschine	*23*
Trocknen		Klebertrockner	*24*
III. *Zurichtung*			
Weichmachen		Sägmehlkasten	*25*
Untersichziehen		Krispelmaschine	*26*
Narben schleifen (2)	Schleifpapier	Schleifmaschine, Schleifstaub	*27*
Entstauben	Komprimierte Luft	Blasluftmaschine, Schleifstaub	*28*
Appretieren	Farben, Lösungsmittel	Appretierband	
Trocknen		Tuneltrockner	*29*
Farbspritzen	Farben, Lösungsmittel	Spritzband mech.	*30*
Nachstollen		Stollmaschine	*31*
Bügeln		Hydraulische Presse	*32*
Messen		Messmaschine	*33*
Fertiglager			*34*
Expedition			*35*

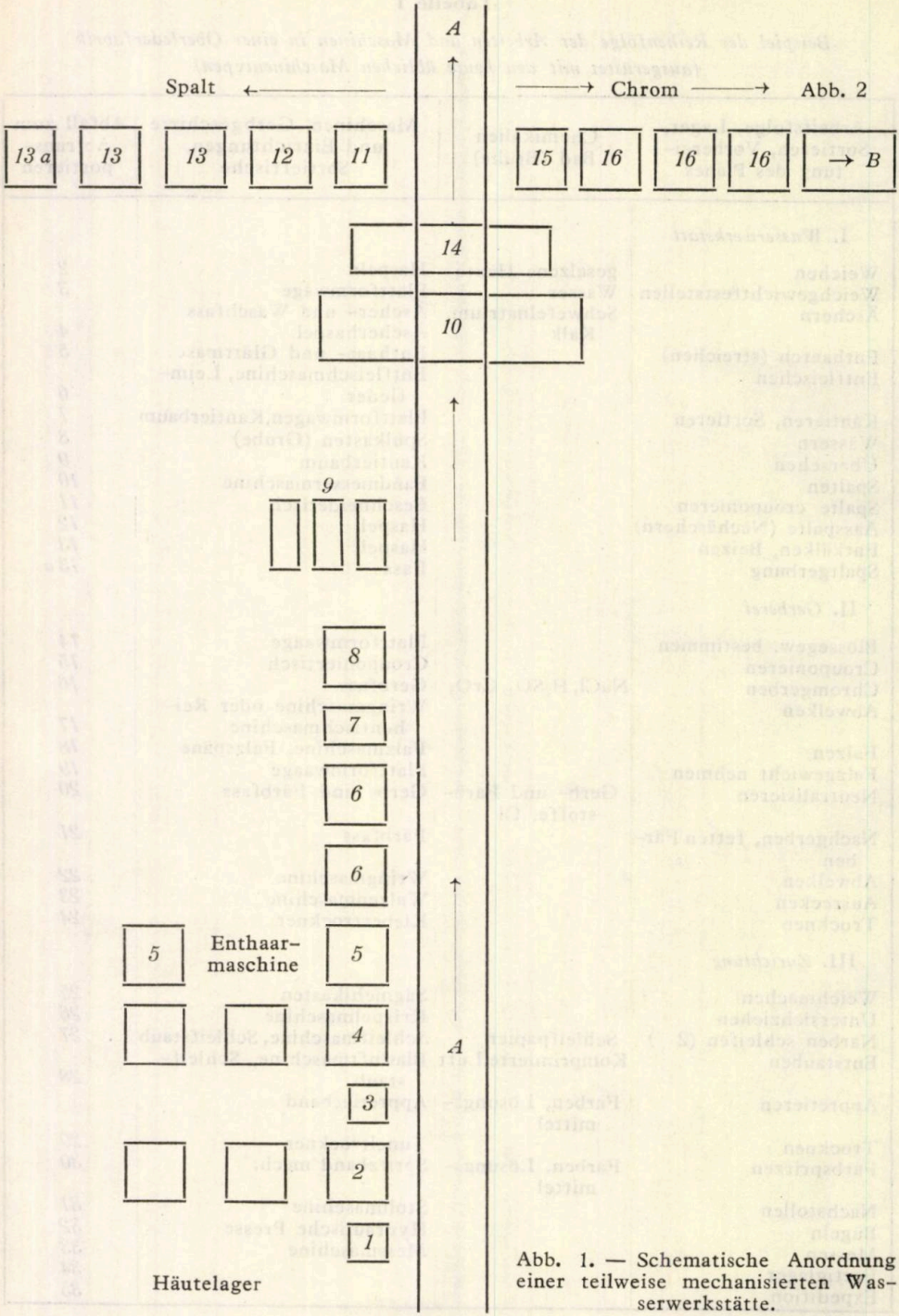


Abb. 1. — Schematische Anordnung einer teilweise mechanisierten Wasserwerkstätte.

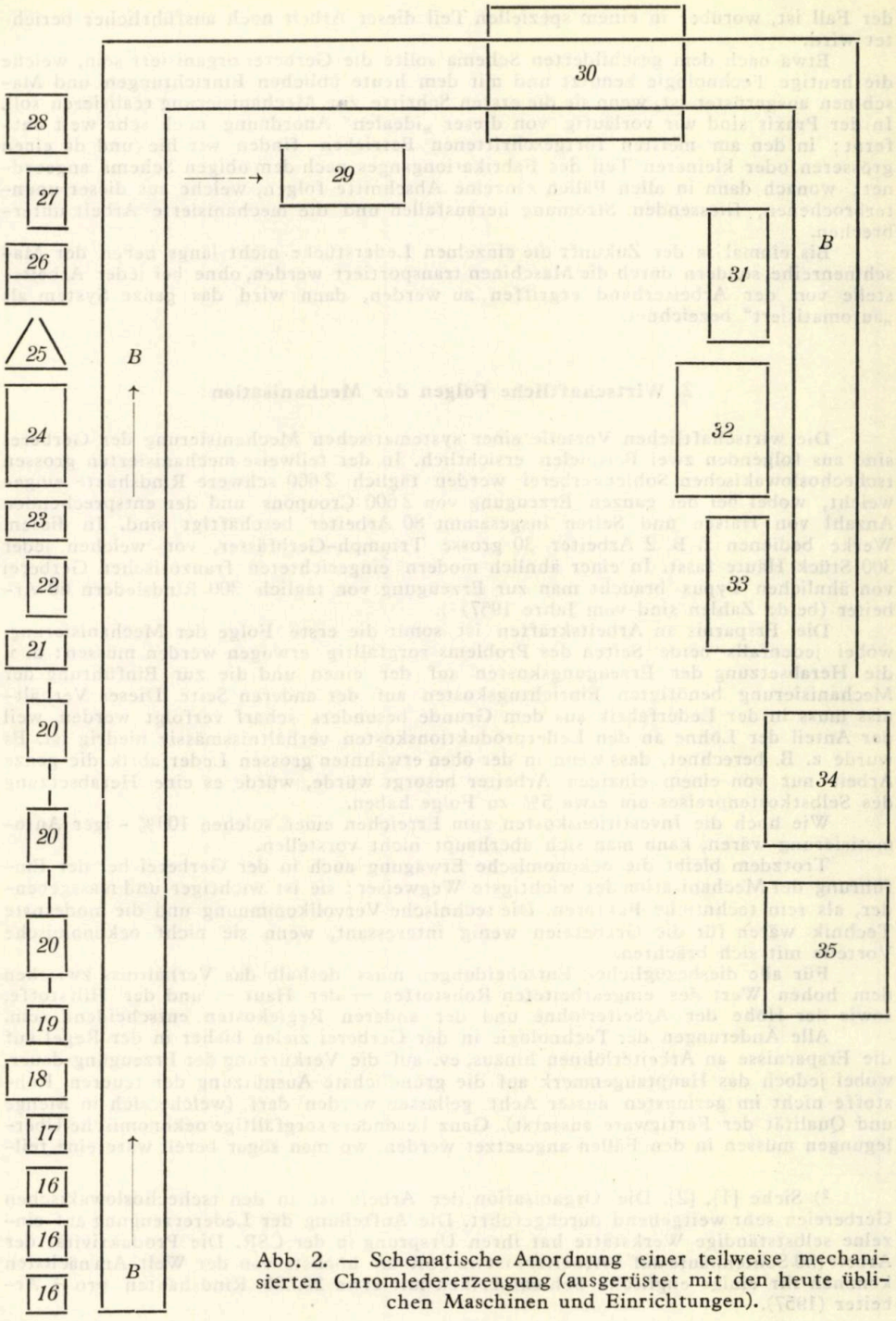


Abb. 2. — Schematische Anordnung einer teilweise mechanisierten Chromledererzeugung (ausgerüstet mit den heute üblichen Maschinen und Einrichtungen).

der Fall ist, worüber in einem speziellen Teil dieser Arbeit noch ausführlicher berichtet wird.

Etwa nach dem geschilderten Schema sollte die Gerberei organisiert sein, welche die heutige Technologie benutzt und mit dem heute üblichen Einrichtungen und Maschinen ausgerüstet ist, wenn sie die ersten Schritte zur Mechanisierung realisieren soll. In der Praxis sind wir vorläufig von dieser „idealen" Anordnung noch sehr weit entfernt; in den am meisten fortgeschrittenen Betrieben finden wir hie und da einen grösseren oder kleineren Teil des Fabrikationganges nach dem obigen Schema angeordnet; wonach dann in allen Fällen einzelne Abschnitte folgen, welche aus dieser ununterbrochenen, fliessenden Strömung herausfallen und die mechanisierte Arbeit unterbrechen.

Bis einmal in der Zukunft die einzelnen Lederstücke nicht längs neben der Maschinenreihe, sondern durch die Maschinen transportiert werden, ohne bei jeder Arbeitsstelle von der Arbeiterhand ergriffen zu werden, dann wird das ganze System als „automatisiert" bezeichnet.

2. Wirtschaftliche Folgen der Mechanisation

Die wirtschaftlichen Vorteile einer systematischen Mechanisierung der Gerberei sind aus folgenden zwei Beispielen ersichtlich. In der teilweise mechanisierten grossen tschechoslowakischen Sohlengerberei werden täglich 2 600 schwere Rindshäute eingeweicht, wobei bei der ganzen Erzeugung von 2 600 Croupons und der entsprechenden Anzahl von Hälsen und Seiten insgesammt 80 Arbeiter beschäftigt sind. In diesem Werke bedienen z. B. 2 Arbeiter 30 grosse Triumph-Gerbfässer, von welchen jeder 300 Stück Häute fasst. In einer ähnlich modern eingerichteten französischen Gerberei von ähnlichen Typus braucht man zur Erzeugung von täglich 300 Rindsledern 60 Arbeiter (beide Zahlen sind vom Jahre 1957) [2].

Die Ersparnis an Arbeitskräften ist somit die erste Folge der Mechanisierung, wobei jedenfalls beide Seiten des Problems sorgfälltig erwogen werden müssen: d. i. die Herabsetzung der Erzeugungskosten auf der einen und die zur Einführung der Mechanisierung benötigten Einrichtugskosten auf der anderen Seite. Dieses Verhältniss muss in der Lederfabrik aus dem Grunde besonders scharf verfolgt werden, weil der Anteil der Löhne an den Lederproduktionskosten verhältnissmässig niedrig ist. Es wurde z. B. berechnet, dass wenn in der oben erwähnten grossen Lederfabrik die ganze Arbeit nur von einem einzigen Arbeiter besorgt würde, würde es eine Herabsetzung des Selbstkostenpreises um etwa 5% zu Folge haben.

Wie hoch die Investitionskosten zum Erreichen einer solchen 100% - iger Automatisierung wären, kann man sich überhaupt nicht vorstellen.

Trotzdem bleibt die oekonomische Erwägung auch in der Gerberei bei der Einführung der Mechanisation der wichtigste Wegweiser; sie ist wichtiger und massgebender, als rein technische Faktoren. Die technische Vervollkommnung und die modernste Technik wären für die Gerbereien wenig interessant, wenn sie nicht oekonomische Vorteile mit sich brächten.

Für alle diesbezüglichen Entscheidungen muss deshalb das Verhältniss zwischen dem hohen Wert des eingearbeiteten Rohstoffes — der Haut — und der Hilfstoffe, sowie der Höhe der Arbeiterlöhne und der anderen Regiekosten entscheidend sein.

Alle Änderungen der Technologie in der Gerberei zielen bisher in der Regel auf die Ersparnisse an Arbeiterlöhnen hinaus, ev. auf die Verkürzung der Erzeugungsdauer, wobei jedoch das Hauptaugenmerk auf die gründlichste Ausnützung der teueren Rohstoffe nicht im geringsten ausser Acht gellassen werden darf (welche sich in Menge und Qualität der Fertigware äusserst). Ganz besonders sorgfälltige oekonomische Überlegungen müssen in den Fällen angesetzet werden, wo man sogar bereit wäre eine teil-

[2]) Siehe [1], [2]. Die Organisation der Arbeit ist in den tschechoslowakischen Gerbereien sehr weitgehend durchgeführt. Die Aufteilung der Ledererzeugung auf einzelne selbstständige Werkstätte hat ihren Ursprung in der ČSR. Die Produktivität der Arbeit (50 Sohlenhäute auf 1 Arbeiter) ist in ČSR die höchste von der Welt. Am nächsten kommen ihr einige englische Sohlenfabriken mit etwa 26...30 Rindshäuten pro 1 Arbeiter (1957).

weise Herabsetzung der Qualität des Leders, bzw. teilweise Abänderung der bisjetzt geförderten Eigenschaften der Fertigware in Kauf zu nehmen, nur um auf dem Wege der höheren Mechanisierung die Produktivität der Arbeit zu erhöhen und die Kosten der Erzeugung herabzusetzen.

In der Gerberei kann sich der direkte wirtschaftliche Erfolg — wie aus den angeführten Beispielen hervorgeht — nur in verhältnissmässig engen Grenzen bewegen. Somit müssen bei der höheren Stufe der Mechanisierung gleichzeitig immer auch andere Ziele im Auge gehalten werden, damit die erhöhten Investitionskosten begründet erscheinen. Es sind dies hauptsächlich:

a) *die höhere Qualitätsergebnisse* der einzelnen Operationen, welche durch die Vervollkommnung der Maschinen ermöglich werden. Es sei in diesem Zusammenhang auf der Qualitätsverbesserung hingewiessen, welche zur Zeit die Spaltmaschine, die Falzmaschine und manche andere Fertigstellungsmaschinen gebracht haben:

b) *die Beschleunigung der Arbeit,* welche eine Verkürzung der Erzeugungsdauer ermöglicht, und dadurch eine rasche Zirkulation des Betriebskapitals und bessere Ausnützung der Arbeitsräume mit sich bringt, welche ihrerseits wieder die Herabsetzung der Erzeugungskosten (wenn auch indirekte) zur Folge hat;

c) *die Arbeitssicherheit (Unfallverhütung)* muss bei der erhöhten Mechanisierung besonders sorgfältig angestrebt werden, damit die Zahl der Unfälle, d. i. der Absentionen, herabgesetzt wird (und nicht umgekehrt). Die Unfallmöglichkeit darf durch die Erhöhung der Arbeitsleistung der Maschinen keine Steigerung erfahren;

d) *die hygienischen Umstände* der Arbeit — besonders in der Wasserwerkstatt müssen verbessert werden, damit die Arbeitsverhältnisse in Bezug auf Hygiene, Gefährlichkeit usw. gebessert werden, nur so wird es möglich sein, für die Gerberei unter der Jugend den besseren und inteligenteren Nachwuchs zu gewinnen, als es heute der Fall ist. Die Gefahr der Gesundheitsbeschädigung durch mechanische Unfälle, aber auch durch chemische Wirkung von giftigen Chemikalien, Dämpfen und Lösungen kann bei richtiger Mechanisation weitgehend herabgesetzt werden;

e) *ein bisher wenig besprochener Vorteil der richtigen Mechanisation* der Arbeitsprozesse in der Gerberei liegt in vollkommener Abschaffung derjenigen Reste der Handarbeit, welche besonders anstrengend und gesundheitsschädlich sind.

Als solche sind vor allem alle von Hand besorgte Operationen in der Äscherwerkstatt zu bezeichnen [3]), aber auch manche Arbeiten bei der Fertigstellung des Leders, z. B. das Auftragen und das Spritzen von Farben und Appreturen, welche in giftigen Lösungsmitteln gelöst sind und das Bearbeiten des Appretierten Leders (Bügeln etc.).

Diese Operationen sollen und können bei der Mechanisierung des Betriebes von geeigneten automatischen Maschinen besorgt werden. Als Beispiel sei die automatische Spritz- und Trockenanlage angeführt, welche heute fast allgemein eingeführt wird und ausser den genannten Vorteilen auch bedeutende Ersparnisse an teueren Farbstoffen, Pigmenten und Lacken mit sich bringt.

3. Schwierigkeiten, mit welchen die Mechanisierung einer Gerberei verbunden ist

Die Mechanisierung und Automatisation des Betriebes, deren Zweck, Aufgaben und technische Prinzipien, sowie auch erreichbare oekonomische Möglichkeiten oben in Kürze besprochen wurden, begegnen bei ihrer praktischen Einführung Schwierigkeiten, welche in der Lederindustrie besonders umfangreich sind. Diese Schwierigkeiten sind Ursache davon, dass die Gerberei im Vergleich zu anderen Industriezweigen sehr konservativ geblieben ist. Auch für die Zukunft muss man damit rechnen, dass die Mechanisierung und Automatisierung in der Gerberei langsamer fortschreiten werden, als in denjenigen Industriezweigen, in welchen grosse homogenisierungsfähige Mengen von Rohmaterial (z. B. Textilfasern, Getreidekorn usw.) auf gleiche Art und Weise behandelt werden. Das Problem, wie diese Schwierigkeiten zu überwinden sind, ist eines der Schlüsselprobleme der Gerbereiforschung der nächsten Zukunft. Ohne seine Lösung

---

[3]) welche vor allem im Umziehen der schweren Häute von einer Grube in die andere bestehen; nur die Transporte der Häute in der Äscherwerkstatt machen 10...15% von dem gesamten Energieverbrauch einer Gerberei aus.

sind keine bahnbrechenden Fortschritte der Gerbereitechnik zu erwarten. Mit dem jetztigen Zustande muss man in der Zukunft so lange rechnen, bis die Häute auf irgend welche neuartige Art gegerbt werden, mit anderen Worten bis in die Gerbereiprozesse neue Technologie eingeführt wird.

Bevor es dazu kommt, wird die Entwicklung der Gerbereimaschinen wahrscheinlich nur auf die Vervollkommnung der jetzt verwendeten Maschinen hinauszielen. Es wird die Stundenleistung und die Arbeitsqualität, speziell die Gleichmässigkeit der Arbeit erhöht, die erforderliche Antriebskraft (Energieaufwand) und die Unfallsmöglichkeiten herabgesetzt usw. Auch den äusseren Formen der Maschinen wird Aufmerksamkeit gewidmet. Aber das eigentliche innere Prinzip der Maschinen, welches in der mehr weniger volkommenen Nachahmung der alten Handarbeit besteht, bleibt wahrscheinlich noch lange erhalten.

Der systematischen Mechanisierung stellt sich in den Weg besonders die sehr verschiedene Zeitdauer, welche die einzelnen Operationen im Verlaufe der Gerbung und der Lederzurichtung in Anspruch nehmen. Dieser Umstand macht sich besonders in den ersten Stadien der Ledererzeugung unangenehm fühlbar, d.i. bei der Weiche, bei der Äscherung, bei der Bearbeitung der Blöse, der Gerbung u.s.w. bis zu der ersten Trocknung. In diesem Erzeugungsstadium folgen nacheinander in verschiedensten Reihenfolgen die mechanische Behandlung der Häute, der Blössen und der Lederstücke und die chemische Einwirkung verschiedener wässrigen Bäder (Wasser, Kalkmilch, Säurelösungen, Gerbbrühen etc.). Diese werden in Gruben, Haspeln, Drehfässern usw. auf die Haut, oder auf das Leder appliziert. Die Einwirkung dieser Bäder dauert bei Häuten verschiedener Herkunft verschieden lange Zeit. Die dazu verwendeten Apparate lassen sich bis jetzt sehr schwer in den Plan einer mechanisierten „fliessenden" Arbeitsordnung einreihen; sie sind fast ausnahmsloss nur zur unterbrochenen diskontinuierlichen Partienarbeit geeignet.

Die Häute müssen dem Einflusse einzelner Chemikalienlösungen so ausgesetzt werden, dass ihre ganze Oberfläche während der ganzen Reaktionszeit im ständigen Kontakt mit der Brühe bleibt. Dabei sind die wichtigsten Umstände die benötigte Menge der wässrigen Lösung, das Verhältniss der Brühenmenge zum Häutegewicht, die Zusammensetzung der Lösung, ihre Konzentration, ev. das nötige mechanische Durcharbeiten der Häute mit der Flüssigkeit usw. Das alles ändert sich bei verschiedenen Häuten in ziemlich breiten Grenzen. Die Menge der wässrigen Brühen in der Gerberei kann mit grober Annäherung etwa auf das 100 fache des Hautgewichtes geschätzt werden, also auf 100 l für 1 kg Rohhaut. Dadurch ist die durchschnittliche Grösse der Gefässe bestimmt. Die Einwirkung der Brühen und Lösungen auf die Rohhäute wird in einen konsequent rationalisierten Betriebe in der Zukunft durch ununterbrochen arbeitende Durchgangs-Apparate besorgt.

Vorläufig sind solche Einrichtungen in der grossen Praxis nur in Ausnahmsfällen versuchsweise eingeführt; bevor solche konstruiert, bzw. erfunden werden, wird deren Wirkung dadurch nachgeahmt, dass der chemischen Einwirkung eine grosse Anzahl von Häuten auf einmal ausgesetzt wird, sodass ein Vorrat an chemisch praeparierten (eingeweichten, geäscherten, gebeizten usw.) Häuten entsteht, welcher zur Versorgung eines ununterbrochenen verlaufenden Arbeitsganges auf längere Zeit (d.i.z.B. auf die Dauer von einem ganzen Arbeitstage) genügende Anzahl von Hautstücken zu liefern vermag.

Zu diesem Zwecke dienen grossdimensionierte Gruben, Fässer, Haspeln etc., welche durch mächtige elektrische Krane oder andere Transportmittel auf einmal mit grosser Anzahl von Häuten beschickt werden. So wird z.B. in der eingangs erwähnten grossen teilweise mechanisierten Gerberei jede Äschergrube auf einmal mit 300 schweren Häuten beschickt und diese werden nach der vorgesehenen Einwirkungsdauer wieder auf einmal aus der Grube ausgehoben und in die andere Grube oder einen Riesenfass (3×3,5 m) versenkt. Der ganze Transport dieser Häutepartie nimmt kaum 10 Minuten in Anspruch. Die Fässer können vorteilhaft zwecks schnelleren Manipulation mit sehr grossen Türen (2×1 m) versehen werden, deren Verschluss an und für sich ein Detail-Problem für die Fässererzeuer darstellt.

Die ganze Bedienung einer so teilweise mechanisierten Wasserwerkstatt bzw. des Farbganges geschieht von der Kabine des Transportkraneführers. Die chemisch vorbereiteten Häute (Leder) werden vom Katter des Kranes aufgestappelt und dann einzeln auf den supponierten Hauptförderband (s.o.) geworfen und der ersten Arbeitsmaschine in der Reihe (Durchgangspresse) zugeführt (vgl. Abb. 1 u. 2). Eines der wich-

tigsten Probleme der Mechanisierung der Gerberei ist die Erfindung von neuen Typen von Apparaten, in welchen Lösungen der wirksamen Stoffe in einem ununterbrochenen Gang auf die Häute appliziert werden und welche dann „synchronisiert" werden können mit der Arbeit von mechanischen Bearbeitungsmaschinen längst des supponierten laufenden Bandes. Ein kühner Versuch solcher mechanisierungsfähigen Neuapparatur ist z.B. der lange „Schneckenfass" für die Wasserwerkstatt, welcher in der Sowjetunion entwickelt worden ist.

Die Bereitung von grossen Mengen Lösungen, Brühen und Mischungen, deren Kontrolle[4]), Aufbewahrung, Zuleitung auf die Arbeitsstelle des mechanisierten Fabrikationsganges, deren Auswirkung auf die Haut[5]) und Abführung der benützten Flüssigkeiten (Abwasser) — das alles erfordert spezielle Einrichtungen, welche ihrerseits ebenfalls mechanisiert bzw. automatisiert werden müssen, um mit dem anderen (mechanischen) Kreise der Fabrikation zusammen zu einem ununterbrochenen Kreis der Prozesse vereinigt zu werden. Die Bereitung der Lösungen und Brühen muss auch mechanisiert werden, wozu ununterbrochen arbeitende Dosierungsmaschienen, und zahlreiche andere Einrichtungen projektiert werden, wie Ventile, Pumpen, Ablassschieber etc. Die alle müssen in der Zukunft von einer Stelle (Komandobrücke) elektrisch beherrscht und dirigiert werden.

Bedeutende Schwierigkeiten bei dem Ersetzen der Handarbeit durch die mechanisierten Arbeitsmaschinen bei der Lederbearbeitung bildete und bildet die ungleichmässige Entwicklung der einzelnen Häute, besonders was Gewicht, Flächenausmass, Dicke, Kernigkeit usw. an verschiedenen Hautstellen betrifft und überhaupt die grossen Differenzen in der individuellen Beschaffenheit einzelner Häute.

Die mechanisierte Maschinenarbeit in der Gerberei muss — trotzdem die Maschine sich niemals soweit den Verschiedenheiten der einzelnen Hautstellen anpassen kann wie die Handarbeit eines ausgelertnen Gerbers — dieselbe oder ähnliche Ergebnisse liefern. Insbesondere muss die Maschinenarbeit das gleiche Flächenrendement, ev. Gewichtsrendement, bzw. Volumrendement ergeben, wie die Handarbeit.

Auch die anderen Qualitätseigenschaften der Fertigware dürfen nach Einführung der ununterbrochenen Maschinenarbeit nicht schlechter sein, as die des handbearbeiteten bzw. einzelnindividuell bearbeiteten Leders (die Gleichmässigkeit, die Dicke, die Beschaffenheit des Narbens etc.).

Diese technische Schwierigkeiten haben zur Folge, dass sich die Handarbeit in einigen Abschnitten der Gerberei bis zu den heutigen Tagen immer noch erhält, trotz der grossen Fortschritte, welche die Einführung von neuen Maschinen in den letzten 25 Jahren gemacht hat. Es wird behauptet (und oft mit Recht), dass die Handarbeit eines ausgelernten Gerbers auch den geringsten Unterschieden in der Beschaffenheit der verschiedenen Stellen der Haut besser Rechnung tragen kann, als die uniformierende Maschinenarbeit. Die Vervollkommnung der Maschienenarbeit in dieser Richtung ist eines der wichtigsten Probleme, ohne deren Lösung kein grosszügiger Fortschritt in der Mechanisierung des Gerbereibetriebes zu erwarten ist.

4. Neue Probleme, welche die systematische Mechanisierung hervorruft

Die Mechanisation und Automatisation in einem Werk kann sich jedenfalls nur dann voll auswirken, d.h. eine Erhöhung der Arbeitsleistung des Menschen mit sich bringen, wenn auch alle anderen äussere Bedingungen diesem Zwecke angepasst sind. Eine Sanierung und Gestaltung der Arbeitsräume, nach hygienischen Gesichtspunkten, die Schaffung entsprechend grosser Räume, gute Beleuchtung, Ventilation, Klimatisation, Heizung, Entstäubung, Entfernung unnötigen Lärmes usw. unterstützen die durch Mechanisierung angestrebte höhere Produktivität der Arbeit — sie tragen zur höchsten Arbeitsleistung des Menschen bei und setzen seine Ermüdung herab.

Die mechanisierte Werkstätte muss unbedingt über eine ganze Menge von womöglich automatischen Kontrolleinrichtungen verfügen zum Verfolgen der Arbeitsleistung, der Zeit des Laufes der einzelnen Fabrikationsabschnitte, der Dauer der Störungen etc.

---

[4]) Zusammensetzung, Konzentration, Temperatur bzw. Reinheitsgrad, Volumen, spezifisches Gewicht, Leitungsdruck etc.

[5]) benötigtes Mischen, Walken, Schütteln, Auspressen, Auswaschen usw.

Die heutigen Lederfabriken sind grösstenteils alte Betriebe, welche innerhalb mehrerer Jahrzehnte entstanden und erweitert wurden und daher auch sehr verschachtelt gebaut sind, was die Mechanisierung des innerbetrieblichen Transportes erschwert, manchmal sogar unmöglicht macht und für jedes einzelne Betrieb eigene Probleme stellt. Die zur richtigen Mechanisierung nötige Anordnung der einzelnen Maschinen erfordert geeignete Räume — gewöhnlich grosse lange Hallen — welche in den älteren Lederfabriken nur selten vorhanden sind. Bei der Tendenz, der bestehenden Raum der Werkstätte bestens auszunützen, werden verschiedene Probleme gelöst; so hat z.B. eine Gerberei den ganzen Trockenapparat auf der Decke aufgehängt und die Spannrahmen mit elektrischem Kran nach oben und nach unten befördert.

Das wichtigste oekonomische Problem bei dem Aufbau von neuen Lederfabriken aber auch (und besonders) bei dem Umbau von alten Gerbereien ist das richtige Verhältniss der Bauinvestitionskosten zu den Maschineninvestitionen. In den meisten Ländern[6]) besonders im europaeischen Klima betragen heute die Bauinvestitionen etwa 70%, die Maschinen etwa 30% der gesammten Errichtungskosten einer neuen Gerberei. Dabei ist der Fortschritt, d.i. die Vervollkomnung der Gerbereitechnologie von den Maschinen und deren Entwicklung abhängig, welchen mehr Aufmerksamkeit und mehr Forschungskosten gewidmet werden sollten, als es bisjetzt der Fall war und ist. Das heisst, die Lederindustrie muss billigere leichtere Bauten bauen und mehr Investitionen der maschinellen Einrichtung widmen. Dass ein besseres Verhältniss zwischen den beiden Investitionsgruppen erreichbar ist, sehen wir an Beispielen in UdSSR und USA. Mit Rücksicht auf die oben begründeten Schwierigkeiten welche mit dem Umbau von alten Gerbereien für die Zwecke der Mechanisierung und Automatisierung des Betriebes verbunden sind, ist es oft oekonomische Notwendigkeit genau zu prüfen, ob der Bau neuer Betriebsgebäude nicht wirtschaftlicher wäre (*à la longue!*) als das Umbauen von alten Gebäuden, welches niemals vollkommen entsprechende und befriedigende Bedingungen für die Mechanisation ergibt.

Die erhöhte Arbeitsleistung der ununterbrochen laufenden Maschinen erfordert verschiedenste Einrichtungen, welche die höhere Anstrengung des Arbeiters ermöglichen. Darunter sind besonders die hygienischen Massnahmen wie Reinhaltung der Luft etc. So ist z.B. die Entstäubung in der modernen Gerberei zu einem Problem geworden, nachdem die Erzeugung von geschliffenen Ledersorten zugenommen hat (Schweinsrücken). Anstatt der jetzt üblichen Staubfiltern etc. wird die verstaubte Luft in einem zylinderförmigen hochstehenden Behälter durch herabsprühendes Wasser vom Staub befreit, wobei dieser in die Kanalisation abgeleitet wird, während die Luft nach oben entweicht.

5. Erhaltung der Maschinen

Die meisten Gerbereimaschinen arbeiten in den ungünstigen äusseren Bedingungen — in feuchten Räumen, manchmal in korrosiver Atmosphäre: sie sind sehr ungleichmässig belastet und unterliegen überhaupt vielen schädlichen Einflüssen. Aus dem Grunde muss ihrer Wartung und Pflege grosse Sorge gewidmet werden, damit nicht nur ihre Leistung, aber auch ihre Lebensdauer nicht leidet.

Das ist ein wichtiges Problem der Mechanisierung, welche zumal diese zur Folge hat, dass die Maschinen in ununterbrochener Arbeit viel mehr leisten müssen, als bei dem langsamen Arbeitstempo einer nicht mechanisierten Gerberei von heute.

Die weitgehende Mechanisation der Lederfabriken hat der Industrie ein neues Problem gebracht. Es ist die leistungsfähige Reparatur — bzw. Konstruktionswerkstätte, welche bei einer grösseren Lederfabrik oft die Grösse einer bedeutenden Maschinenfabrik erreicht. In derselben werden nicht nur die grossen Reparaturen aller Gerbereimaschinen durchgeführt, sondern auch die kleinen Verbesserungen. In einer modernen konsekvent mechanisierten Gerberei darf nämlich der Meister oder Vorarbeiter keine, wenn auch noch so geringfühige Störung an einer Maschine selbst in der Gerberei beheben. Die mangelhafte Maschine wird gleich nach dem sie aus dem Arbeitskreis ausfällt, mit Hilfe von einer geeigneten Transporteinrichtung aus der Werkstätte in die Reparatur gebracht und mit einwandfreien Maschine, welche in dem Maschinenlager bereit gestanden hat, ersetzt. Dieses Prinzip soll bei der Mechanisie-

[6]) mit Ausnahme von USA und UdSSR.

rung der Fabrik konsekvent und ausnahmslos eingehalten werden — es spart Zeit, Qualität und schützt den Maschinenpark vor Beschädigung durch ungeübte Hand. Das wichtige Problem ist nun die Organisation der Reparaturwerkstätte. In den Staaten mit sozialistischer Wirtschaft, wie z.B. in der ČSSR, DDR, werden Zentrallreparaturwerkstätte für die ganze Industrie errichtet, welche nicht nur die Reparaturen, sondern auch den Umbau ja auch den Neubau der Maschinen für alle Gerbereien im Staate oder im grösseren Gebiet desselben besorgen. Sonst muss jede mechanisierte Gerberei solche Maschinenwerkstätten selbst errichten und erhalten. Die weitgehende Mechanisierung erhebt aber nicht nur Ansprüche auf besser geeignete Konstruktion der einzelnen Arbeitsmaschinen. Sie erfordert in erster Linie auch speziell anders ausgebildete Arbeiterschaft als die heutige, wenn auch mit Maschinen reichlich versehene Gerberei, worüber im letzten Abschnitte dieser Arbeit noch ausführlicher berichtet wird.

6. Schlussfolgerungen

Um die gesammte Problematik der Mechanisation ev. Automatisation einer Lederfabrik übersichtlich darzustellen, führe ich folgendes an.

Die nächsten zu lösenden Probleme resp. Aufgaben für die Konstrukteure von Gerbereieinrichtungen sind:

a) Konstruktion von neuartigen Bearbeitungsmaschinen, welche ununterbrochene Durchgangsarbeit (Fliessarbeit) ermöglichen und zur Einreihung der Maschinen in einen Arbeitsstrom geeignet sind. Dazu gehört auch die Konstruktion der Einrichtungen, welche ähnliche Durchgangsarbeit bei der Einwirkung von Lösungen und Brühen auf die Haut und Leder ermöglichen.

b) Der interoperative Transport von Häuten, Ledern und von Bädern welcher die Realisation des *sub* a) erwähnten Arbeitsganges ermöglicht. Die Fernkontrolle der Qualität, der Menge und des Transportes (Verteilung) der Brühen und des Materials sowie auch des Ganges der Maschinen.

c) Die Regulierung (Leitung) des Nachschubes aller Materialien von einer Stelle aus (Befehlskabine).

d) Automatische Verfolgung, Registrierung und Signalisierung des gesammten Produktion verlaufes der *sub* a)...c) erwähnten Prozesse.

e) Die bautechnische und maschinentechnische Umgestaltung (Umbau) der Werkstätten zur ununterbrochenen Arbeit; Sanierung der Arbeitsräume, Heizung, Ventilation, Entnebelung, Luftkonditionierung etc., etc.

Die Konstrukteure von künftigen Gerbereimaschinen stehen vor dem Problem, welcher von den zwei möglichen Wegen jetzt anzutreten ist: entweder Konstruktion von Durchgangsmaschinen, von welchen jede einzelne nur eine Operation vollendet, oder Konstruktion von Compound-Aggregaten, welche auf einmal gleichzeitig mehrere Einzeloperationen auf jedem Lederstück durchführen, dabei aber event. in unterbrochenen Zeitabschnitten arbeiten.

Die meisten Konstrukteure ziehen vor, in der nächsten Zukunft, die Maschinen des ersten Typus zu entwickeln, wobei hauptsächlich die Walzenmaschinen bevorzugt werden, welche für die Fliessarbeit am leichtesten anzupassen sind. Die Mechanisierung wird besonders in der Unterlederfabrikation angestrebt, wobei nicht nur oekonomische Vorteile, aber gleichzeitig auch die Entlastung der Arbeiter von den mühevollsten und ungesunden Arbeiten erzielt wird. Manche Durchgangsmaschinen sind schon in unseren Fabriken eingeführt z.B.: die Walzenpressmaschine, die Walzenaböl-, Bügel-, Ausstoss- und Blanchiermaschinen, welche stellenweise schon in kontinuierliche Reihen angeordnet werden. Die für die Mechanisierung am meisten erwunschten Arbeitsabschnitte d.i. die Wasserwerkstatt (Enthaaren, Entfleischen etc.) bleiben im diesen Sinne vorläufig noch ungelöstes Problem!

In einigen Gerbereien werden schon vereinzelnte erfolgreiche Versuche gemacht, die heute üblichen Maschinen in einen mechanisierten Abschnitt zusammen zu fassen. Es wurden auch einige Maschinen und Einrichtungen auf ganz neuen Prinzipen vorgeschlagen, welche für die Mechanisation besser geeignet sind als die heute üblichen klassischen Gerbereibehelfe, besonders was die altehrwürdigen Gruben, Haspeln und Fässer anbelangt.

Das alles sind aber vorläufig im Vergleich mit anderen Industriezweigen insbesondere mit den Maschinenfabriken nur die ersten nüchternden Schritte auf

dem Wege zur wirklichen systematischen Mechanisierung und Automatisierung der gerberischen Technologie.

Trotzdem haben schon diese ersten Kinderschritte der Mechanisierung in manchen Detailproblemen der Ledererzeugung tiefe Spuren hinterlassen. Ich habe schon in dervorhergehenden Abschnitten einigemal ausdrücklich betont, dass die Mechanisation mit einer erhöhten Produktivität der Arbeit identisch ist. Deutlich gesagt: in einer mechanisierten Werkstätte produziert ein Arbeiter mehr Erzeugnisse, als in einer nicht mechanisierten Gerberei. Das bedeutet, dass für dieselbe Produktion weniger Arbeiter benötigt werden — nicht nur in der Ledererzeugung, aber in allen Industriezweigen. Und über die Folge dieser allgemeinen Entwicklung für die allgemeine wirtschaftliche Lage der Welt seien einige Beispiele aus USA ausgeführt, wo die Mechanisation und Automatisation in den allerletzten 2...5 Jahren grosse Fortschritte verzeichnet.

Die ganze Industrieproduktion der USA stieg in den erwähnten Jahren um 16% [7]) und hat somit ungefähr die Höhe der Konjunktur des Jahres 1957 erreicht [3]. Dabei bleibt aber etwa 20% der Erzeugungskapazität der Fabriken unausgenützt, was eine Erhöhung der Anzahl der Nichtbeschäftigten zur Folge hatte (gegenüber 1957 um etwa 4,5 Millionen).

Die zwei grössten amerikanischen Automobilfabriken (General Motors und Ford) haben im Dezember 1958 um 60 000 Automobile mehr erzeugt, als im Dezember 1957, haben aber dabei 33 400 weniger Arbeiter beschäftigt!

Schon in Oktober 1958 hat die Stahlproduktion in USA diejenige des ganzen Jahres 1957 um 2% überstiegen — dabei waren aber von den 1 250 000 Hütenarbeitern von Jahre 1957 mehr als 600 000 arbeitslos, oder Kurzarbeiter mit weniger als 40 Stunden wöchentlich.

Ähnliche Beispiele können wir in allen Industriezweigen anführen. Ursache ist überall dieselbe: ungeheuere Fortschritte in der Mechanisation und Automatisierung der Betriebe. Und so wächst vor uns in der kapitalistischen Welt eine früher unbekannte Krisis: die Nichtbeschäftigung in der Zeit einer steigenden Produktion. Die USA Oekonomen nennen es: „Produktivitäts-Krisis".

Die Lederindustrie hat jedenfalls — wie aus den Ausführungen der obigen Abschnitte deutlich zu ersehen ist — noch Zeit genug, sich mit dem Arbeiterproblem aus diesem Titel zu beschäftigen.

Demgegenüber läst ein anderes Problem nicht lange auf sich warten, welches denselben Ursprung hat.

Die auch teilweise Mechanisation und Automatisation der Gerbereibetriebe wird die Lederindustrie schon in absehbarer Zeit vor ein wichtiges Problem stellen, nämlich die gegenseitige Relation zwischen der Arbeiterzahl und der Beamtenzahl. In USA stieg die Gesammtzahl der Beschäftigten, welche direkt in der Industrieproduktion arbeiten von Jahre 1947 bis 1957 um 1%, die Anzahl der Beamten aber um 55%. Seit dem Jahre 1956 ist die Anzahl der Beamten in USA dauernd grösser, als die Anzahl der produktiven Arbeiter [4]. Alle produktiven Zweige der USA-Nationalwirtschaft (Industrie, Bauwesen, Landwirtschaft, Transportwesen, Energetik usw.) beschäftigten im Jahre 1958 dieselbe Anzahl von Arbeitern wie im Jahre 1948; die Anzahl der Beschäftigten in unproduktiven Wirtschaftszweigen (Handel, Banken, Versicherungsanstalten Staatsdienst etc.) stieg aber in derselben Zeit um mehr als einen Fünftel [5].

Eine ähnliche Entwicklung ist in der nächsten Zukunft auch in der Lederindustrie zu erwarten. Damit entsteht für uns die Aufgabe, wie diese allgemeine unausbleibliche Tatsache unsere Lehrantalten, unser Lehrlingswesen und die Ausbildung des technischen Personales für die Gerbereien beeinflussen wird. Diesem für die künftige Entwicklung der Gerberei wichtigsten Problem soll eine spezielle Arbeit gewidmet werden.

Eingegangen am 1 VI 1961

Technische Hochschule, Bratislava,
Tschechoslowakische Sozialistische Republik

[7]) Die angegebenen Ziffern sollen kritisch nachgeprüft werden.

LITERATURVERZEICHNIS

1. * * * Rev. techn. ind. cuir, 1958, *3*, p. 50.
2. Plecháč B., Rev. mens. tchécosl., sc. et techn. pour l'ind. lourde, 1957, *2*.
3. * * * U. S. News a. World Report, 16 III 1959.
4. * * * Nation, 31 I 1959.
5. * * * USA News a. World Report, 6 II 1959.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИЗАЦИИ И АВТОМАТИЗАЦИИ КОЖЕВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

(Резюме)

Автор, проведя в первых трех параграфах, посвященных соответственно определению и существу механизации, экономическим следствиям механизации, трудностям связанным с механизацией кожевенных предприятий, ряд подробностей относящихся к их заглавиям, останавливается в последных двух параграфах на обсуждении некоторых новых задач встречающихся при проведении полной механизации и на вопросе об обслуживании машин.

Так например, в ряде задач предстояших быть разрешенными конструкторами кожевенных предприятий стоят следующие: а) построение новых обрабатывающих сырье машин, позволяющих их внедрение в непрерывный рабочий поток; б) оперативный транспорт кожи, ванн и др., способствующий реализации рабочего процесса указанного а); в) регулирование притока всех материалов из одной диспечерской кабины; г) автоматическая слежка, регистрация и сигнализация всеобщего хода производства проходящих под а)... в) процессов; д) техническое и механическое оборудование соответствующее цели установления непрерывной работы, санитарный надзор над предприятием отопление, вентиляция и др.

Статья заканчивается просмотром некоторых данных и результатов автоматизации производственных процессов на современных кожевенных предприятиях, подчеркивая, в частности, отрицательное влияние автоматизации на рост безработицы в странах капиталистического мира и в особенности в США.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Схематическое распределение частично механизированного кожевенного промывочного цеха.

Рис. 2. — Схематическое распределение частично механизированного цеха производящего хромовую кожу (оснастка соответствующая современно принятым машинам и установкам).

UNELE PROBLEME RELATIVE LA MECANIZAREA ŞI AUTOMATIZAREA ÎNTREPRINDERILOR DE PIELĂRIE

(Rezumat)

Autorul, trecînd în revistă în primele trei paragrafe, consacrate respectiv definiţiei şi esenţei mecanizării, consecinţelor economice ale mecanizării şi dificultăţilor legate de mecanizarea întreprinderilor de pielărie, unele probleme ce se referă la titlurile paragrafelor menţionate, se opreşte în detaliu în ultimele două paragrafe la discutarea unor probleme noi ce se întîlnesc astăzi în cazul realizării mecanizării complete şi deservirii corespunzătoare a maşinilor.

Astfel de exemplu, în şirul de probleme ce urmează a fi rezolvate de către constructorii întreprinderilor de pielărie se situează următoarele: a) construirea noilor maşini de prelucrare a materiei prime capabile a fi introduse în procesul neîntrerupt de producţie; b) transportul operativ al pieilor, băilor de spălat etc., menit a contribui din plin la realizarea procesului de producţie indicat la p. a).; c) reglarea fluxului tuturor materialelor dintr-o singură cabină de comandă; d) urmărirea automată, în-

registrarea şi semnalizarea întregului proces de producţie indicat la punctele a)...c): e) înzestrarea tehnică şi mecanică corespunzătoare scopului de asigurare a procesului neîntrerupt de producţie, controlul sanitar, încălzitul, ventilaţia etc.

Articolul se încheie cu trecerea în revistă a unor date şi consecinţe ale automatizării în unele întreprinderi moderne, subliniindu-se cu acest prilej influenţa negativă a automatizării asupra creşterii sensibile a şomajului în lumea capitalului şi îndeosebi în SUA.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Structura schematică a uuei hale de spălat piei, parţial mecanizată.

Fig. 2. — Structura schematică a unei hale de fabricaţie a pielei tanate cu crom, parţial mecanizată.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. K. 676.1.023.7

DIE VERWENDUNG VON KATIONAKTIVEN STOFFEN ALS AUSFLOCKUNGSVERMITTLER DER PAPIERLEIMDISPERSIONEN

VON

CRISTOFOR SIMIONESCU
Korrespondierendes Mitglied der Akademie der R. V. R.
und
EMANUEL POPPEL

1. Einführung. Theoretische Überlegungen

Das Problem der Papierleimung bildet schon seit längerer Zeit den Gegenstand unserer Forschungsarbeit. Wir erwähnen von unseren diesbezüglichen Arbeiten die Papierleimungsverfahren in alkalischen und neutralem Medium [1]...[4], sowie die Beiträge zum Vorgang der Hydrophobisierung von Zellstoffasern mittels Dispersionen von Kolophonium in neutralem Medium [5]...[8].

Die Anwendung dieser neuen Leimvorgänge – bei Verwendung von Natriumaluminat — führt zu augenscheinlichen technisch-wirtschaflichen Vorteilen [2], [8], da die erhaltenen Erzeugnisse ausgeprägt hochwertige physikalisch-mechanische Kennzeichen,ein praktisch neutrales pH aufweisen und sich viel besser bei einer längere Aufbewahrung bewähren [2], [9].

Da gelegentlich Papiererzeugnisse angefordert werden, welche nicht nur einen neutralen oder schwach sauren Charakter aufweisen, sonderen die auch einen Minimalgehalt an Elektrolyten haben sollen, haben wir uns in der vorliegenden Arbeit die Aufgabe gestellt, von der Erwägung der kolloidchemischen Vorgänge des Leimungsprozesses ausgehend, die Herstellung solcher Papiere zu studieren.

Die Papierleimung kann durch das Prisma der modernen Erkenntnisse der Kolloidchemie als ein typisch kolloidaler Vorgang angesehen werden [10]. So kann die dem Leimungsvorgang unterworfenen Papierstoff als ein komplexes System angesehen werden, das von den Zellstofffasern, den Partikeln des Leimstoffes, von Stabilisatoren und Elektrolyten gebildet wird. Die Bestandteile dieses komplexen Systems befinden sich im Leimungsmedium in gegenseitiger Einwirkung, wobei unter bestimmten Umständen eine Unbeständigkeit des Systems eintreten kann.

Dieser Verlust der Stabilität dank der gegenseitigen Einwirkung der beiden Hauptbestandteile – Zellstoffasern und disperser Leimstoff — soll gelenkt werden in Richtung einer Heterokoagulierung, da nur dieser

Weg zu einer Qualitätsleimung führt, welche dem Papier die gewünschten Eigenschaften verleiht.

Das Studium der Instabilisierung des Systems durch Heterokoagulierung des dispersen Leimstoffes setzt die Kenntniss der Ursachen voraus, welche die Stabilität der Zellstoffasersuspension und der dispersen Kolophoniumpartikeln bedingen.

Die Stabilität der Suspension beruht einerseits auf der Bildung von molekularen Hydratationsfilmen auf der Oberfläche der Fasern, infolge der Adsorbtion der Wasserdipole seitens der polaren Cellulosegruppen [11], wie auch anderseits dem Auftreten von ionisierten Schutzschichten, eine Erscheinung die durch den Wert und das Vorzeichen des elektrokinetischen Potentials bestimmt wird.

Die Leimtpartikeln sind stabil dank des Vorhandenseins der Ionen-Schutzschichte, welche durch selektive Adsorbtion einer Art von Ionen der ionisierten Stabilisatormolekeln an der Oberfläche gebildet wird. Die so entstandenen lyophoben Mizellen sind im Falle der gewöhnlich verwendeten Leimstoffe elektronegativ, und besitzen ziemlich hohe elektrokinetische Potentiale (70 ... 80 mV).

Es ergibt sich also in vorliegendem Fall, im welchem sowohl das Adsorbens (der Zellstoff) wie auch das Adsorptiv (die Leimpartikeln) verhältnismässig hohe elektrokinetische Potentiale aufweisen, die das gleiche Vorzeichen tragen, dass ihre gegenseitige Einwirkung unbedeutend ist.

Deshalb ist es im Falle der Leimung von Zellstoffasern mittels gewöhnlicher Leimstoffdispersionen zur Steigerung der Heterokoagulierung unbedingt nötig, entweder die Stabilität eines oder beider Bestandteile zu verkleinern (durch teilweise oder völlige Zerstörung der molekulären oder ionischen Schutzschichten) oder aber das Vorzeichen der elektrischen Ladung eines der beiden Bestandteile zu ändern.

Im nachfolgenden werden schematisch, in Tabelle 1 [11], die oben skizzierten Wege sowie die zur Verwirklichung einer bessern gegenseitigen Einwirkung von Zellstoffasern und Leimpartikeln, möglichen Lösungen vorgelegt.

Ohne auf alle erwähnten Lösungen näher eizugehn, bemerken wir, dass die unter der Punkten 1 bis 4 angegeben wenig wirksam und unwirtschaftlich sind, wobei sie im allgemein Homokoagulierung der Leimdispersion bedingen.

Von den anderen Mitteln, die — bei maximaler Abwesenheit von Elektrolyten — zu einer entsprechenden Heterokoagulierung führen, empfiehlt sich gegebenenfalls die Möglichkeit der Änderung des Vorzeichens des elektrokinetischen Potentials der Zellstoffasern durch Behandlung mit kationaktiven Stoffen.

Durch die Adsorbtion der oben erwähnten Stoffe verleit man den Fasern eine positive Ladung. Solcherart verläuft die gegenseitige Einwirkung des Zellstoffs und der Kolophoniumpartikeln der Leimdispersion, bezw. des Stabilisators der letztern (Natriumresinat) in folgender Weise:

$$\text{Cell. } RNC_nH_n^+ \,|\, Br^- + Na^+ \,|\, {-}OCOR'\text{Koloph.} \rightarrow$$

$$\text{Cell. } RNC_nH_nOCOR'\text{Koloph.} + Br^- \,|\, Na^+$$

Hier bedeutet RNC_nH_nBr die kationaktive Substanz und R'COONa das Natriumresinat.

Es entsteht also eine sogenannte Brücke zwischen den Zellstofffasern und den Partikeln des Kolophoniumleims.

Tabelle 1

Die Methoden zur Verringerung der Stabilität der Bestandteile

Die Wege zur Verbesserung der gegenseitigen Einwirkung der Bestandteile	Bezeichnung des Bestandteils	Die Methoden zur Verringerung der Stabilität oder zur Änderung des Vorzeichens der elektrischen Ladung (der „Umladung") der Bestandteile durch:	Anmerkungen
A — Instabilisierung der Systembestandteile	Zellstoffasern	1. Behandlung mit Gerbstoffen 2. Blockieren der polaren Gruppen (Hydroxyle) 3. Thermische Behandlung (Erhitzen auf $t > 100°C$) 4. Zusatz von nichtkoagulierenden Elektrolyten (mit einerwertigen Kationen)	Es wird die Zerstörung des stabilisierenden molekularen Schutzfilms verfolgt
	Partikeln der Leimdispersion	5. Zusatz von koagulierenden Elektrolyten (mit polyvalenten Kationen)	Es wird die Zerstörung der stabilisierenden Ionen-Schutzschichte verfolgt. Beeinflusst gleichzeitig auch den Zellstoff
	Beide Bestandteile	6. Idem	
B — Die Änderung des Vorzeichens der elektrischen Ladung eines der Bestandteile	Zellstoffasern	7. Direkte Behandlung mit Aluminiumsalzen (dreiwertige Kationen) 8. Behandlung mit Aluminiumhydroxid 9. Animalisierung der Fasern 10. Behandlung mit kationaktiven Stoffen	Praktisch schwer zu verwirklichen
	Partikeln der Leimstoffdispersion	11. Idem 12. Zusatz von Elektrolyten mit polyvalenten Kationen 13. Ansäuerung	Bedingt Homokoagulation der Dispersion

Die vorgetragene Lösung ist jener einer Instabilisierung der Bestandteile unbedingt überlegen, da im gegebenen Fall das Ansetzen der Leimpartikeln auf den Zellstoffasern sowohl den van der Waals-Kräften als auch ihren elektrostatischen Zwischenwirkungen zuzuschreiben ist, während bei den Verleimungen mittels Instabilisierung des komplexen Systems, die Ablagerung des dispersen Leimstoffes nur den van der Walls-Kräften zukommt.

Es muss hervorgehoben werden das die Erscheinung der Ablagerung von Leimpartikeln auf den Zellstoffassern, die durch Adsorbtion kationaktiver Stoffe positiv aufgeladen wurden, nicht als einfache elektrostatische Anziehung der beiden Bestandteile betrachtet werden darf. Gemäss den modernen Theorien der Kolloidchemie *begünstigt* das entgegengesetzte Vorzeichen der stabilisierenden Ionnenschichten die gegenseitige Einwirkung mit dem Stabilisator der Leimdispersion und die Ablagerung des Leimstoffes auf den Zellstoffasern.

Es besteht also die tatsächliche, theoretisch begründete Möglichkeit, kationaktive Stoffe bei der Papierleimung zu verwenden. Diese Möglichkeit konnte praktisch nicht ausgewertet werden, vor allem, weil sich wirtschaftliche Schwierigkeiten ergaben [11].

Die oberflächaktiven Stoffe haben trotzdem sie seit vielen Jahren bekannt sind, eine besondere Beachtung erst in allerletzter Zeit gefunden. Heute werden in Weltmasstab immer grössere Mengen kation- und anionaktiver Stoffe sowie auch nichtionogene Stoffe erzeugt, die in den verschiedenen Zweigen der chemischen (Petroleum-, Textil-, Nahrungsmittel-, etc.) Industrie Verwendung finden. In der Papierindustrie werden bis nun wenige Versuche zur Verwendung von oberflächaktiven Wirkstoffen verzeichnet.

So, studieren R. V. Touchette und L. J. Jennes [12] die Verwendungsmöglichkeiten dieser Erzeugnisse zur Verbesserung der Papierstoffentwässerung und verfolgen die physikalish-mechanischen Kennwerte der erhaltenen Papiere. Man zitiert gleichfalls Versuche, Bromcetyl-pyridin bei der Verleimung von Papier zu verwenden [11]; das Erzeugniss ist aber in wirtschaftlicher Hinsicht unzugänglich. Weiter erwähnen wir die Hinwiese der Firma BASF Ludwigshafen, die sich auf die Verwendung des kationaktiven Erzeugniss „F. P.-Pulver" beziehen [13].

Damit die praktische Anwendung der von uns erhaltenen Ergebnisse nicht von präparativen Schwierigkeiten sowie von den hohen Preisen der kationaktiven Stoffe gehemmt werden, haben wir unsere Aufmerksamkeit auf Hilfstoffe gerichtet, die bei der Fertigstellung in der Textilindustrie weite Anwendung finden, bisher aber noch nicht bei der Erzeugung von geleimten Papiersorten bei maximaler Abwesenheit von Elektrolyten erwähnt wurden. In dieser Hinsicht wurde eine Reihe von Erzeugnissen studiert : Wofafix (D. D. R.), Colorfix (U. V. R.), Sintefix (C. S. R.) etc.

Da die besten Ergebnisse mit Sintefix erhalten wurden, beschränken sich unsere Studien nur auf diesen Stoff.

2. Experimenteller Teil

Die Arbeitweise wird wie folgt beschrieben.

Das Fasermaterial (gebleichter Sulfitzellstoff-IA und ungebleichter Zellstoff-IB) wurde im Holländer Rieth zu einer Konsistenz von 4% bis auf 45° Sch. R. vermahlen und mit ansteigenden Mengen — bis zu 5% — Sintefix behandelt; dan wurde mit einem Zusatz von 3% vollverseiften Kolophoniumleim, geleimt.

Das verwendete Sintefix ist ein technisches Erzeugnis, das den Textilfabriken hierzulande seitens der tschechoslowakischen chemischen Industrie geliefert wird; es hat eine dem Fixator DTM analoge Zusammensetzung [14]: ein Kupferkomplex des Acetates eines Kondensats von Dicyandiamid mit Formaldehid.

Wir haben parallel mit einer Vergleichsprobe, bei welcher als fällender Elektrolyt 5% Aluminiumsulfat verwendet wurde, fortschreitend Versuche zum Ersatz des Sulfats mit gleichwertigen Prozentsätzen von Sintefix ausgeführt, so dass die Gesammtmenge von Aluminiumsulfat und Sintefix bei einen Werte von 5% gehalten wurde. Gleichfalls wurden beim Studium der Papierleimung mit minimalen Mengen Sintefix und Sulfat, Proben ausgeführt, bei welchen der Zusatz von Sintefix konstant (1%) gehalten wurde; den Gehalt an Aluminiumsulfat liess man fortschreitend bis auf 5% ansteigen. Wechselseitig wurde bei konstantem Sulfatgehalt (1%) die Menge der kationaktiven Substanz abgewandelt.

Die Verleimung wurde unter Rührung durchgeführt, und zwar in folgender Ordnung:

Zellstoff—kationaktiver Stoff—Leim, bzw.

Zellstoff—kationaktiver Stoff—Leim—Aluminiumsulfat.

Bei der Vergleichsprobe war die Ordnung der Bestandteile normal, d. h.: Zellstoff—Leim—Aluminiumsulfat.

Es ist zu erwähnen, dass das Sintefix wie auch die andern ähnlichen kationaktiven Erzeugnisse, besonders nach Einführung des Kolophoniumleims, ein Schäumen der Papiermasse hervorrufen. Diese Auswirkung ist bei kleinen Zusätzen von Sintefix geringfügig, besonders wenn man gegen Ende der Leimung eine minimale Menge von Aluminiumsulfat verwendet. Bei ausschliesslicher Anwendung von Sintefix kann die unerwünschte Erscheinung des Schäumens durch Anwendung eines Schaumbekämpfungsmittels beseitigt werden.

Nach der Bestimmung der pH-Werte der verleimten Zellstoffe wurden diese auf dem Apparate Rapid Koethen verarbeitet um Blätter von 75...80 g/m² Flächengewicht zu erhalten.

Nach der Konditionierung (bei $t = 20°C$ und $\varphi = 65\%$) wurden folgende Kennziffern bestimmt: der Leimgrad, der Weissgrad, die Reisslänge, die Dehnung, sowie die Doppelfalzzahl. Es wurde die Methode nach Jayme zur Bestimmung des Leimgrades [15] verwendet, da sie Genauigkeit und Empfindlichkeit in höherem Masse als andere Verfahren und besonders als die Linienmethode bietet [3].

Die Ergebnisse unserer an gebleichten Sulfitzellstoff erhaltenen Bestimmungen sind in Tabelle 2 und den Abb. 1 ... 4 enthalten; für ungebleichten Sulfitzellstoff gilt Tabelle 3 und die Abb. 5 ... 8.

Tabelle 2

Verleimung von gebleichten Sulfitzellstoff (IA), auf 45° Sch. R. vermahlen, bei Behandlung mit Sintefix, mit 3% Kolophoniumleim

Probe nr.	Zusatz % Al-sulfat	Zusatz % Sintefix	pH	Flächengewicht g/m²	Reisslänge m	Dehnung %	Doppelfalzzahl	Weissgrad %	Rel. Jayme-Leimgrd. %
I	5	—	4,25	72	5 230	3,2	300	67,9	95,0
II	4	1	4,45	71	5 126	3,0	301	67,0	95,1
III	3	2	4,72	68	5 084	3,5	347	67,4	84,0
IV	2	3	6,10	75	4 942	3,5	314	66,7	81,8
V	1	4	6,68	73	4 786	3,2	210	67,6	80,0
VI	—	5	7,95	79	4 554	3,0	276	68,6	54,1
VI'	—	5*)	8,20	77	4 386	2,6	230	69,0	39,6
VII	3	1	4,80	74	5 006	3,0	354	65,4	89,8
VIII	2	1	6,30	70	5 186	3,3	362	66,7	91,9
IX	1	1	6,85	68	5 110	3,7	452	67,4	79,0
X	1	3	7,02	73	4 770	3,2	225	67,0	83,0
XI	1	2	6,90	73	4 906	3,4	248	67,1	86,0
XII	—	4	8,25	78	4 660	2,5	286	67,0	70,0
XIII	—	3	8,32	78	4 540	2,6	248	66,0	50,5
XIV	—	2	8,45	79	4 564	2,5	344	66,5	35,6
XV	—	1	8,55	79	4 648	2,7	555	65,7	31,9

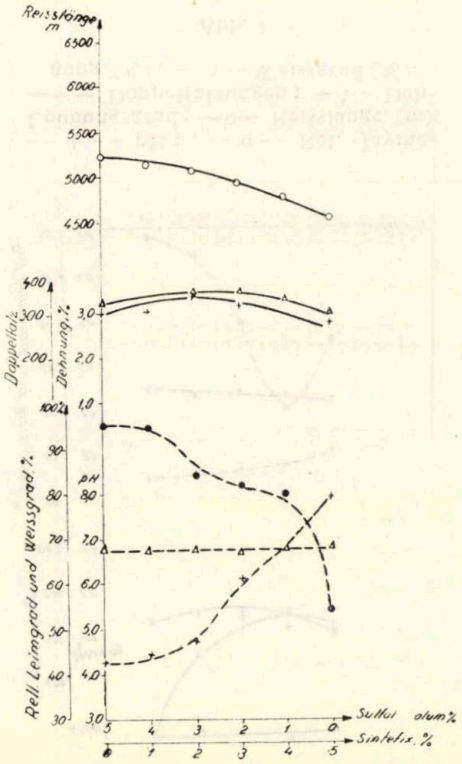
*) Bei dieser Probe wurden 5% Fixier-Pulver verwendet, um dessen Wirkung mit der von Sintefix zu vergleichen (Probe VI).

Tabelle 3

Verleimung von ungebleichten Sulfitzellstoff (IB), auf 45° Sch. R. vermahlen, bei Behandlung mit Sintefix, mit 3% Kolophoniumleim

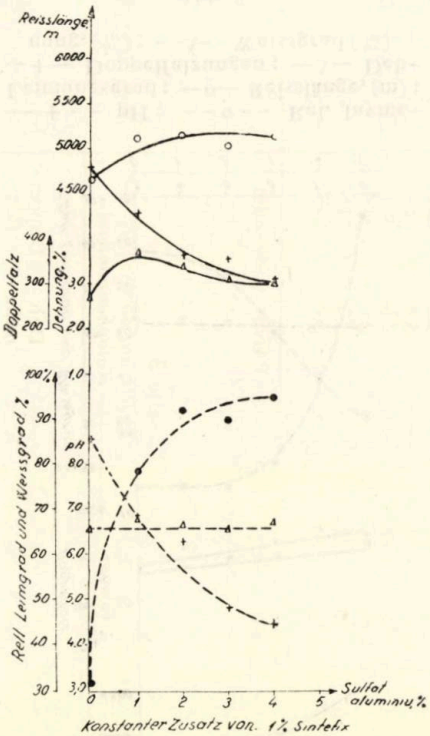
Probe No.	Zusatz % Al-sulfat	Zusatz % Sintefix	pH	Flächengewicht g/m²	Reisslänge m	Dehnung %	Doppelfalzzahl	Weissgrad %	Rel. Jayme-Leimgrd. %
I	5	—	4,20	83	5 400	2,3	223	58,2	94,7
II	4	1	4,32	80	5 300	2,3	184	57,4	94,8
III	3	2	4,78	83	5 400	2,1	209	58,5	94,5
IV	2	3	6,05	82	4 980	2,0	171	59,0	88,9
V	1	4	7,00	79	4 640	1,8	145	58,8	70,8
VI	—	5	7,90	82	4 450	2,1	158	59,2	35,2
VI'	—	5 *)	8,20	78	4 720	2,1	165	57,6	30,8
VII	3	1	5,00	82	5 190	2,2	270	58,4	93,2
VIII	2	1	6,15	76	5 560	2,2	270	57,6	88,7
IX	1	1	6,95	78	5 436	2,2	336	57,6	81,7
X	1	3	7,08	78	4 840	2,2	236	58,9	95,1
XI	1	2	6,90	79	4 900	1,7	259	58,2	95,8
XII	—	4	8,13	81	4 700	1,6	204	60,2	30,4
XIII	—	3	8,28	83	4 950	2,0	253	58,7	28,2
XIV	—	2	8,42	80	5 140	2,0	232	58,9	26,2
XV	—	1	8,52	78	5 040	2,0	234	58,5	22,2
XVI	—	—	—	84	5 134	2,0	263	56,9	21,4

*) Bei dieser Probe wurden 5% Fixier-Pulver verwendet.



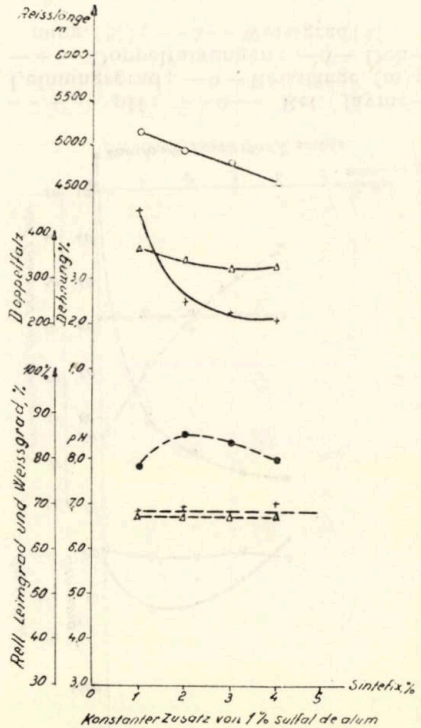
--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o— Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 1



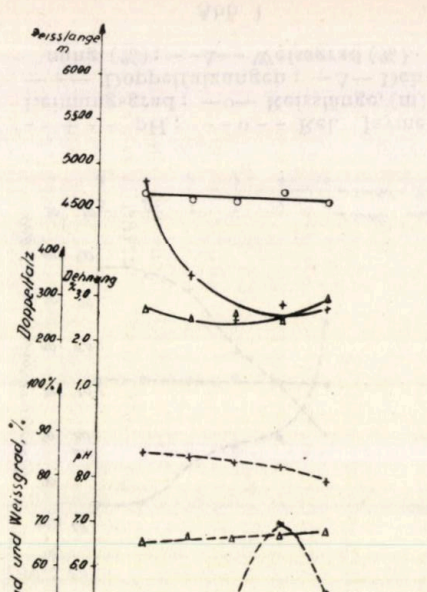
--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o—Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 2



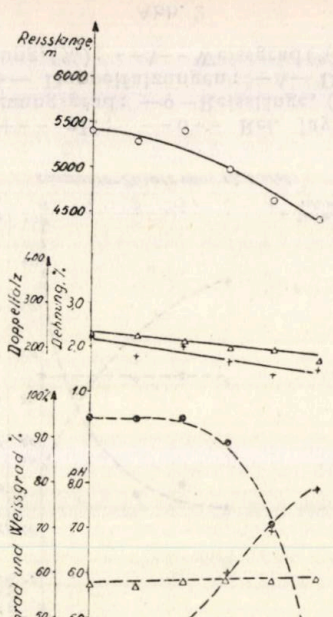
--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o—Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 3



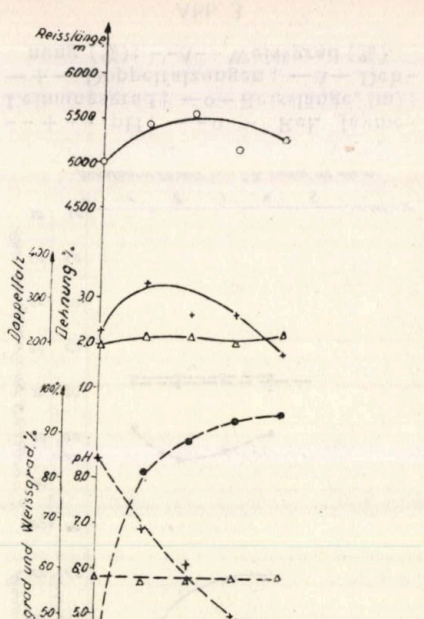
--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o— Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 4



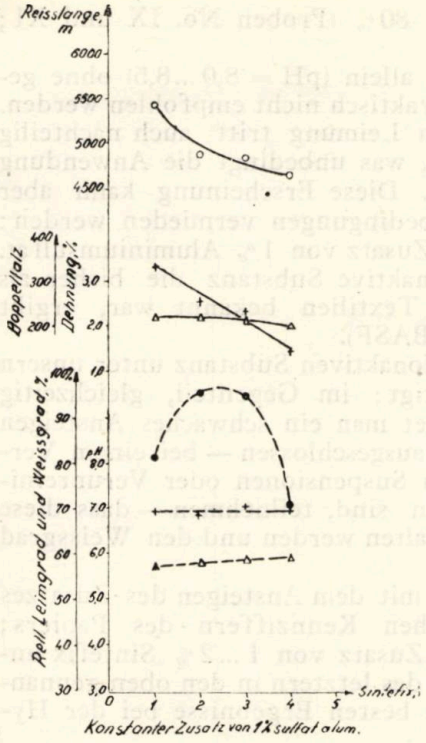
--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o— Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 5



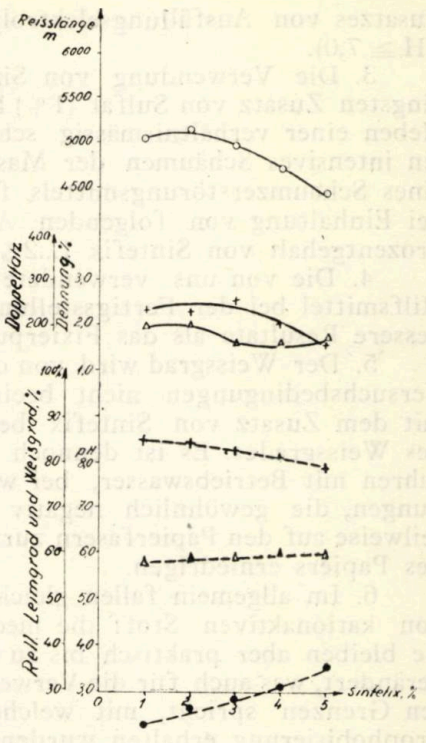
--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o— Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 6



--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o— Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 7



--+-- pH; --o-- Rel. Jayme-Leimungsgrad; —o— Reisslänge, (m); —+— Doppelfalzungen; —Δ— Dehnung, (%); --Δ-- Weissgrad (%).

Abb. 8

Bei der Analyse dieser Angaben an Hand, der oben auseinandergesetzten Überlegungen ergeben sich folgende

3. Schlussfolgerungen

1. Es wurde eine neue Methode der Papierleimung mittels Kolophonium, bei Verwendung von Sintefix — einer kationaktiven Substanz— ausgearbeitet, welche zur Herstellung von speziellen Sorten geleimten Papiers mit kleinem Elektrolytgehalt und schwach saurer bis alkalischer Reaktion, dienen.

2. Gute Ergebnisse wurden bei den Zellstoffen IA und IB bei einem Zusatz von 3% Kolophonium und der kombinierten Verwendung von 1 ... 2% Sintefix und 1 ... 4% Aluminiumsulfat erhalten (pH = 4,5...7,0). Die besten und konvenabelsten Proben enthalten 1% Sintefix und 2...3% Aluminiumsulfat (pH = 5,0 ... 6,3, Proben No. VII und VIII). Zufriedenstellende Ergebnisse erhält man sogar bei Verwendung von nur 1 ... 2% Sintefix und 1% Aluminiumsulfat, also bei Erniedrigung des

Zusatzes von Ausfällungselektrolyt um 80% (Proben No. IX und XI; pH ≅ 7,0).

3. Die Verwendung von Sintefix allein (pH = 8,0...8,5) ohne geringsten Zusatz von Sulfat (1%) kann praktisch nicht empfohlen werden. Neben einer verhältnismässig schwachen Leimung tritt auch nachteilig ein intensives Schäumen der Masse auf, was unbedingt die Anwendung eines Schaumzerstörungsmittels fordert. Diese Erscheinung kann aber bei Einhaltung von folgenden Arbeitsbedingungen vermieden werden: Prozentgehalt von Sintefix 1...2% und Zusatz von 1% Aluminiumsulfat.

4. Die von uns verwendete kationaktive Substanz die bisher als Hilfsmittel bei der Fertigsstellung von Textilien bekannt war, ergibt bessere Resultate als das Fixierpulver (BASF).

5. Der Weissgrad wird von der kationaktiven Substanz unter unsern Versuchsbedingungen nicht beeinträchtigt; im Gegenteil, gleichzeitig mit dem Zusatz von Sintefix beobachtet man ein schwaches Ansteigen des Weissgrades. Es ist dennoch nicht ausgeschlossen — bei einem Verfahren mit Betriebswasser, bei welchem Suspensionen oder Verunreinigungen, die gewöhnlich negativ geladen sind, teilnehmen — dass diese teilweise auf den Papierfasern zurückgehalten werden und den Weissgrad des Papiers erniedrigen.

6. Im allgemein fallen gleichzeitig mit dem Ansteigen des Zusatzes von kationaktiven Stoff die mechanischen Kennziffern des Papiers; sie bleiben aber praktisch bis zu einem Zusatz von 1...2% Sintefix unverändert, was auch für die Verwendung des letztern in den oben genannten Grenzen spricht, mit welchen die besten Ergebnisse bei der Hydrophobisierung erhalten wurden.

7. Das Verfahren eröffnet schliesslich Perspektiven für die Verwendung dieses kationaktiven Präparates bei der Erzeugung von stark beschwerten Papier (mit hohem Gehalt an Füllstoffen) mit oder ohne Zusatz von Kolophoniumleim.

Eingegangen am 8 I 1962

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Zellstoff, Papier und Kunstfasern

LITERATUREDRZEICHNIS

1. Simionescu Cr. u. a., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **I** (V), *1 — 2*, pp. 107 — 122.
2. Симионеску К., Поппел Е., Бум. пром., 1956, *12*, стр. 7 — 9.
3. Simionescu Cr., Poppel E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV** (**VIII**), *1 — 2*, pp. 227 — 236.
4. — *Vortrag zur III. Intern. Konf. für Papier- und Polygr.-Ind.*, Budapest, 1959.
5. Simionescu Cr., Zellstoff u. Papier, 1957, *1*, S. 1.
6. Simionescu Cr. u. a., Rev. Ind. Lemnului, Celulozei şi Hîrtiei, 1954, *4*, p. 132.
7. Poppel E., St. cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Chimie, 1957, **8**, *2*, pp. 341—356.
8. Poppel E., *Cercetări de chimie aplicată în tehnologia hîrtiei. Încheierea hîrtiei cu colofoniu în mediu alcalin şi neutru.* Disertaţie, Inst. polit., Iaşi, 1958.
9. Simionescu Cr., Poppel E., Rozmarin Gh., Rev. Celuloză şi Hîrtie, 1961, *11*, pp. 388 — 403.
10. Воюцкий С. С., *Коллоидная теория проклеивания вумаги и картона*, Гизлегпром, М., 1947.
11. — *Сборник статей по теории и практике проклеивания обувных картонов*, Гизлегпром, М., 1952, стр. 5 — 42.

12. Touchette R. V., Jennes C. J., Tappi, 1960, **43**, 5, pp. 484 — 489.
13. Reich J. G., *Vortrag zur III. Intern. Konf. für Papier- und Polygr.-Ind.*, Budapest, 1959.
14. *** *Manualul inginerului textil*, Ed. Tehn., Buc., 1959, p. 756.
15. Jayme G., Arledter H., Das Papier, 1959, 7, S. 9.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КАТИОН-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ КАК КОАГУЛИРУЮЩЕЕ СРЕДСТВО ДЛЯ КЛЕЯЩИХ ДИСПЕРСИИ БУМАГИ

(Резюме)

Разработан новый метод проклейки бумаги канифолью с применением синтефикс-катион-активного вещества для получения специальных сортов бумаги, проклеенных с малым количеством электролитов и обладающих слабокислотной до щелочной реакцией.

Хорошие результаты получены для беленой и небеленой сульфитных целлюлоз при добавке 3% канифоли и при комбинированном применении 1...2% синтефикса и 1 ..4% сульфата алюминия (pH=4,5...7,0). Наилучшие и подходящие пробы оказалось при 1% синтефикса и 2...3% сульфата алюминия (pH = 5,0...6,3; пробы № VII и VIII). Удовлетворительные результаты получены даже в случае использования 1...2% синтефикса и 1% сульфата алюминия, т. е. при сокращении на 80% количества коагулирующего электролита (пробы № IX и XI, pH≅7,0).

Независимое использование синтефикса (pH = 8,0...8,5) без прибавления минимального количества сульфата алюминия (1%) практически не рекомендуется. Кроме сравнительно слабого клеящего действия появляется и сильное вспенивание массы, для избежания чего советуется применение надлежащего средства. Вспенивание можно исключить применением 1...2% синтефикса и 1% сульфата алюминия.

Катион-активное вещество — вспомогательное средство текстильной промышленности — ведет к гораздо лучшим результатам по сравнению с продуктом Fixier Pulver фирмы BASF.

Катион активное вещество не ухудшает степень белизны в данных условиях, напротив, отмечается некоторое улучшение при введении синтефикса. Не исключено, однако, ухудшение степени белизны, в заводских условиях, в ходе технологического процесса (благодаря загрязнениям содержащимися в воде).

По мере повышения содержания катион-активного вещества механические свойства бумаги ухудшаются, однако в пределах 1...2% синтефикса они практически не изменяются, что тем более показывает возможность использования этого вещества в вышеуказанных пределах.

Новый метод отличается перспективностью в области проклеивания бумаг с завышенным содержанием наполнителя, с применением канифоли, или даже без канифольного проклеивания.

UTILIZAREA SUBSTANŢELOR CATION ACTIVE DREPT AGENŢI DE COAGULARE A DISPERSIEI DE ÎNCLEIERE A HÎRTIEI

(Rezumat)

S-a elaborat o nouă metodă de încleiere a hîrtiei cu colofoniu, prin folosirea sintefixului — substanţă cation-activă — pentru producerea unor sorturi speciale de hîrtii încleiate cu un conţinut mic de electroliţi, cu reacţie de la slab acid la alcalin.

Rezultate bune s-au obţinut în cazul celulozelor sulfit IA şi IB, la un adaus de 3% colofoniu şi folosirea combinată a 1 ... 2% sintefix şi 1 ... 4% sulfat de aluminiu (pH = 4,5...7,0). Cele mai bune şi convenabile probe sînt cele cu 1% sintefix şi 2 ... 3% sulfat de aluminiu (pH = 5,0 ... 6,3; probele Nr. VII şi VIII). Rezultate mulţumitoare se obţin chiar utilizînd numai 1 ... 2% sintefix şi 1% sulfat de aluminiu, deci prin reducerea cu 80% a adausului de electrolit coagulat (probele Nr. IX şi XI; pH = 7).

Folosirea independentă a sintefixului (pH=8,0 ... 8,5) fără un adaus minim de sulfat (1%), practic, nu se recomandă. În afară de o încleiere relativ slabă apare şi ne-

ajunsul spumării intense a pastei, ceea ce reclamă utilizarea neapărată a unui antispumant. Acest fenomen poate fi însă evitat în condiţiile de lucru utilizînd pînă 1...2% sintefix şi cu un adaus de 1% sulfat de aluminiu.

Substanţa cation-activă utilizată şi cunoscută pînă în prezent ca auxiliar în sectorul de finisaj textil, conduce la rezultate mai bune decît produsul Fixier Pulver, patent al firmei BASF.

Gradul de alb nu a fost afectat de substanţa cation-activă în condiţiile experimentale date; din contra, o dată cu adausul sintefixului se remarcă o slabă creştere a gradului de alb. Nu este totuşi exclus, pentru procese cu apă de fabricaţie în care sînt prezente impurităţi — de regulă încărcate negativ — ca acestea să fie în parte reţinute pe fibrele papetare şi să reducă gradul de alb al hîrtiei.

În genere, o dată cu creşterea adausului de substanţă cation-activă scad proprietăţile mecanice ale hîrtiei, ele păstrîndu-se însă practic nemodificate pînă la un adaus de 1 ... 2% sintefix, ceea ce justifică, în plus, folosirea acestuia, în limitele mai sus menţionate, limite pentru care s-au obţinut cele mai bune rezultate de hidrofobizare.

În sfîrşit, metoda deschide perspectivele utilizării acestei substanţe cation-active pentru obţinerea unor hîrtii îngreuiate (cu un procent ridicat de material de umplere) cu sau fără adaus de colofoniu.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 677.31

CONTRIBUŢII LA STUDIUL INFLUENŢEI AGENŢILOR ALCALINI ASUPRA LÎNII

DE

MIŞILIM GRINDEA şi SAVEL IFRIM

1. Introducere

Problema tratării lînii cu soluţii de Na_2CO_3, precum şi cu Na_2CO_3 şi detergenţi, prezintă un mare interes teoretic şi practic.

În literatură se întîlnesc multe lucrări teoretice şi experimentale care se referă la studiul influenţei Na_2CO_3 asupra lînii, dar cercetările referitoare la cunoaşterea acţiunii Na_2CO_3 în prezenţa detergenţilor sînt mult mai puţin numeroase.

În această lucrare se urmăreşte studiul influenţei agenţilor alcalini asupra lînii în condiţii tehnologice apropiate de cele industriale, dar mai severe, deoarece în probele de laborator lîna a fost mai întîi purificată, fiind înlăturată astfel acţiunea de protejare exercitată de diferiţi însoţitori ai lînii în industrie.

Este bine cunoscut faptul că lîna este mai uşor atacată de alcalii decît de acizi. Faţă de amoniac şi faţă de bazele organice, lîna este stabilă [1].

În cazul degradărilor alcaline ale lînii s-a stabilit că temperatura, timpul de tratare şi concentraţia soluţiei alcaline prezintă o deosebită importanţă; temperatura însă exercită cea mai mare influenţă [2].

Tratamentele alcaline conduc, în condiţii determinate, mai ales la distrugerea punţilor de hidrogen, a legăturilor tip sare şi cistinice, şi prin acesta la micşorarea rezistenţei şi posibilităţilor de prelucrare a lînii [3]. În cazul condiţiilor mai severe are loc hidroliza lanţului polipeptidic, ceea ce duce la solvirea lînii.

Din datele experimentale existente în literatură se constată că influenţa alcalină asupra fibrei de lînă nu este încă pe deplin cunoscută şi mecanismul degradării alcaline nu este complet elucidat.

În această lucrare se studiază influenţa Na_2CO_3 asupra lînii, în prezenţa detergenţilor, fără a se urmări şi acţiunea detersivă. Practic se urmăreşte influenţa Na_2CO_3, Na_2CO_3 cu săpun şi Na_2CO_3 cu dodecilbenzen sulfonat de sodiu (D.B.S.). În acest scop probe de lînă brută, după purificare, s-au tratat cu soluţii de Na_2CO_3, Na_2CO_3 şi săpun neutru, precum şi cu Na_2CO_3 şi D.B.S. S-a urmărit influenţa acestor trata-

mente prin solubilitatea în HCl 4*N*, solubilitatea în uree bisulfit, indicele de Cu şi reacţia Pauly cantitativă. Probele experimentale s-au efectuat pe o lînă merinos din regiunea Galaţi.

2. Partea experimentală

a) *Purificarea lînii.* Lîna brută a fost degresată cu Cl_4C în aparatul Soxhlet, spălată apoi cu apă distilată la 33...35°C şi uscată în aer. Impurităţile rămase au fost îndepărtate manual şi final s-a spălat din nou cu Cl_4C.

b) *Tratarea cu soluţii alcaline.* Probele de lînă au fost tratate la termostat timp de 60 min la 50°C şi un raport de flotă de 1/50, în condiţiile indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Condiţiile de tratare a lînii cu soluţii alcaline

Proba	Substanţa în tratare	Concentraţia g/l	pH
I	Na_2CO_3	1	9,5
II	Na_2CO_3	10	10,15
III	Na_2CO_3 + săpun	10 + 1	10,25
IV	Na_2CO_3 + săpun	10 + 10	10,5
V	Na_2CO_3 + săpun	1 + 10	9,75
VI	Na_2CO_3 + D.B.S.	10 + 1	10,2
VII	Na_2CO_3 + D.B.S.	1 + 10	9,55
VIII	Na_2CO_3 + D.B.S.	10 + 10	10,3

Tabelul 2

Solubilitatea lînii în acizi şi în uree bisulfit

Proba de lînă	Solubilitatea în	
	HCl 4*N*	uree-bisulfit
Lînă crudă	7,68	18,46
I	7,82	8,95
II	8,71	1,39
III	8,98	1,13
IV	8,86	0,61
V	8,29	9,89
VI	9,68	1,54
VII	9,17	11,96
VIII	9,94	4,07

După tratare la termostat probele de lînă au fost spălate în mod convenţional cu apă distilată. După spălare lîna s-a uscat în atmosferă la temperatura camerei.

c) *Solubilitatea în acizi.* Determinarea solubilităţii în acizi s-a făcut după metoda lui Zahn şi Würtz [4] utilizînd o soluţie de HCl 4*N* şi un raport de flotă, pentru proba de lînă, de 1/100. Rezultatele sînt consemnate în tabelul 2.

d) *Solubilitatea în uree-bisulfit* s-a determinat după metoda lui K. Less şi F. F. Elsworth [5], [6]. Reactivul se prepară în modul următor: se solvă 200 g uree şi 12 g metabisulfit de potasiu în 150 ml apă caldă şi se aduce la un volum total de 400 ml cu apă distilată. S-a lucrat cu un raport de flotă, pentru proba de lînă, de 1/100. (Nu este indicat să se determine solubilitatea în uree-bisulfit la lîna suprauscată la temperaturi peste 100°C deoarece este cunoscut faptul că acţiunea temperaturii se face simţită asupra solubilităţii lînii în uree-bisulfit începînd de la 60°C [7]). Rezultatele obţinute sînt date în tabelul 2.

e) *Determinarea degradării cu soluţie cupro-amoniacală* [8]. Metoda se bazează pe proprietatea lînii degradate de a absorbi mai mult cupru din soluţia cupro-amoniacală decît o lînă nedegradată. Determinîndu-se iodometric în ambele cazuri cantitatea de Cu rămasă în soluţie după ce s-au tratat probele de lînă, se poate determina degradarea relativă a lînii.

Se observă la acest test că o lînă mai degradată se vopsește mai intens în soluția cupro-amoniacală, decît o lînă nedegradată. Intensitatea vopsirii este suficient de vizibilă pentru a determina comparativ degradarea lînii. La degradări alcaline se obțin vopsiri în nuanțe de gri-verzui.

Practic s-a lucrat numai cu 0,5 g lînă. Rezultatele obținute sînt date în tabelul 3.

Tabelul 3

Degradarea lînii cu soluție cupro-amoniacală

Proba de lînă	Cantitatea de tiosulfat (*N*/10) ml	Media	Diferența față de proba oarbă
Probă oarbă	3,55 3,52	3,535	—
Lînă netratată	2,60 2,63	2,625	0,91
I	—	—	—
II	2,05 2,00	2,025	1,51
III	1,85 1,90	1,875	1,66
IV	2,05 2,00	2,025	1,51
V	2,4 2,35	2,375	1,16
VI	1,99 1,93	1,960	1,575
VII	2,00 2,05	2,025	1,51
VIII	2,20 2,20	2,20	1,235

Tabelul 4

Degradarea lînii prin reacția Pauly cantitativă

Proba de lînă	Cantitatea de β-naftol consumată ml	Media	Diferența față de proba oarbă
Probă oarbă	7 6,8	6,9	—
Lînă netratată	5,2 5,0	5,1	1,8
I	—	—	—
II	3,9 4	3,95	2,95
III	3,5 3,6	3,55	3,35
IV	3,8 3,9	3,85	3,05
V	4,4 4,5	4,45	2,45
VI	3,3 3,3	3,3	3,6
VII	4,1 4,2	4,15	2,75
VIII	4,2 4,2	4,2	2,7

f) *Determinarea degradării lînii prin reacția Pauly cantitativă* [9]. Reacția se bazează pe proprietatea tirozinei din cheratina lînii de a cupla cu săruri de diazoniu, încît fibra să apară colorată. Această reacție este importantă deoarece constituie o indicație asupra accesibilității pătrunderii reactivilor în interiorul fibrei. Metoda cantitativă se bazează pe determinarea prin titrare cu β-naftol a excesului de diazoniu nelegat de fibră. Se utilizează o soluție de β-naftol 1/100. S-a lucrat cu 0,5 g lînă, rezultatele fiind prezentate în tabelul 4.

Deoarece cea mai răspîndită metodă de spălare a lînii utilizează soluții de Na_2CO_3 și săpun, în cele ce urmează ne-am propus să urmărim acțiunea soluțiilor de Na_2CO_3 și săpun, utilizînd o scară mai mare de concentrații, variind totodată și temperatura de lucru.

Lîna purificată s-a tratat la termostat cu soluții de Na_2CO_3 și Na_2CO_3 cu săpun, variind concentrația în agenți alcalini, temperatura și durata de tratare. Influența tratamentului s-a urmărit prin solubilitatea

Tabelul 5

Condițiile de tratare a lînii cu Na_2CO_3 și săpun

Proba de lînă	Concentrația în Na_2CO_3 g/l				
	1	5	10	20	50
I	15 min la 50°C				
II	120 min la 50°C				
III	15 min la 70°C				
IV	120 min la 70°C				
V	120 min la 50°C + 2 g/l săpun				
VI	120 min la 70°C + 2 g/l săpun				
VII	120 min la 50°C + 10 g/l săpun				
VIII	120 min la 70°C + 10 g/l săpun				

Tabelul 6

Solubilitatea în acizi a lînii tratate cu Na_2CO_3 și săpun

Proba de lînă	Concentrația în Na_2CO_3 g/l				
	1	5	10	20	50
I	7,25	7,88	8,55	9,02	9,18
II	8,06	8,90	8,66	9,44	9,53
III	9,42	10,69	11,52	11,73	11,99
IV	9,70	11,71	11,56	12,56	13,17
V	10,38	11,45	12,49	11,27	12,45
VI	11,35	13,61	13,92	13,47	13,40
VII	9,39	10,57	10,68	11,13	12,29
VIII	12,24	12,85	13,78	13,34	13,18

Tabelul 7

Rezistența la rupere

Proba de lînă	Concentrația în Na_2CO_3 g/l				
	1	5	10	20	50
I	20,55	20,50	20,16	19,30	18,70
II	20,40	18,30	16,70	16,50	15,50
III	19,00	17,30	17,00	15,50	15,50
IV	18,33	17,20	16,50	15,00	14,20
V	19,80	18,95	17,50	16,65	15,22
VI	18,35	17,25	16,50	15,00	13,57
VII	17,50	17,55	16,95	15,35	14,90
VIII	16,45	15,50	15,20	13,90	13,50

Tabelul 8

Alungirea

Proba de lînă	Concentrația în Na_2CO_3 g/l				
	1	5	10	20	50
I	34,8	34,5	35	36,2	36,7
II	38,3	36,2	33,4	33,3	35,3
III	33	30,7	30,1	31	27,1
IV	31,9	31,3	33,5	31,5	29,2
V	35,6	34,9	32,8	32,1	30,9
VI	36,3	35,3	32,5	30,9	31,1
VII	33,4	35,9	35,2	34	35,6
VIII	33,5	32	31,6	30,4	29,9

in HCl 4*N*, precum și prin indici fizico-mecanici (rezistența la rupere și alungirea fibrei).

Condițiile de tratare sînt indicate în tabelul 5.

g) *Solubilitatea în acizi a lînii tratate cu Na_2CO_3 și săpun* s-a determinat cu ajutorul aceleiași metode (a lui Zahn și Würtz), rezultatele obținute fiind prezentate în tabelul 6.

h) *Determinarea indicilor fizico-mecanici.* S-au făcut determinări de rezistență și alungire a fibrei. Măsurătorile au fost efectuate utilizînd un dinamometru Schoper. Rezultatele obținute referitoare la rezistența la rupere sînt prezentate în tabelul 7, iar cele referitoare la alungire sînt date în tabelul 8.

Lîna crudă are rezistența la rupere de 20,65 g iar alungirea pentru fibra de lînă crudă este 35,8%.

3. Interpretarea rezultatelor

a) *Solubilitatea în HCl 4N.* Din studiul solubilității în HCl 4*N* (tabelul 2) se constată că față de lîna crudă solubilitatea crește foarte puțin la proba I și, așa cum este de așteptat, crește mai mult la proba II. În prezența săpunului (probele III și IV) există o ușoară creștere a solubilității, în concordanță cu pH-urile care sînt ceva mai mari. Această creștere a solubilității se explică prin mărirea ușoară a alcalinității soluției de tratare în prezența săpunului, ceea ce are drept efect o mărire a degradării de tip alcalin. Proba V dă o solubilitate mai mică, pH-ul soluției de tratare fiind mult mai mic, totuși solubilitatea este mai mare decît în cazul tratamentului I, unde avem și pH-ul mai mic. Din datele obținute se constată că în toate cazurile prezența săpunului are drept efect creșterea solubilității în HCl, lîna fiind mai degradată. Comparînd însă probele III și IV se constată că la o aceeași concentrație în Na_2CO_3 o cantitate mai mare de săpun deși face să crească pH-ul, totuși contribuie la scăderea solubilității în HCl. Prin urmare, în concentrație mai ridicată săpunul joacă un rol protector față de fibra de lînă. Această acțiune se explică prin adsorbția moleculelor de săpun pe suprafața fibrei, protejînd-o contra atacului alcalin. În toate cazurile studiate privind solubilitatea în HCl 4*N* a probelor tratate cu Na_2CO_3 și detergenți, se constată că solubilitatea este totdeauna mai mare în prezența detergenților decît în cazul tratării numai cu Na_2CO_3.

Proba VI arată o creștere a solubilității față de proba II, deși pH-ul nu diferă esențial, precum și față de proba III. Această creștere a solubilității se explică printr-un atac sporit al soluției alcaline favorizat de prezența D.B.S-ului, prin acțiunea lui de udare a fibrei.

Proba VII, deși are numai 1 g/l Na_2CO_3 și pH-ul mai mic decît proba V, posedă o solubilitate mai mare decît proba V și o solubilitate mai mare decît în cazul probei I. Comportarea diferită a probelor IV și VI, cu aceeași concentrație în Na_2CO_3, trebuie căutată în faptul că în proba IV intervine săpunul, care exercită o acțiune de protejare, iar în proba VI intervine D.B.S.-ul, căruia îi atribuim o influență negativă, datorită proprietăților sale tensioactive (acțiune de udare și umflare mai accentuată a fibrei), favorizînd în acest mod atacul alcalin. Aceeași

acţiune de mărire a degradării se constată şi la proba VIII la care deşi pH-ul nu diferă sensibil de cel al probei II, prezenţa D.B.S.-ului ridică mult indicele de solubilitate. Aceeaşi solubilitate mărită se observă şi faţă de proba IV, deşi la aceasta pH-ul este puţin mai mare. Din examinarea datelor cuprinse în tabelul 2 se constată că D.B.S.-ul favorizează atacul alcalin. Comparînd probele VI cu VIII se constată că acţiunea D.B.S.-ului variază puţin cu concentraţia folosită.

b) *Testul uree-bisulfit.* Autorii metodei solubili ăţii lînii în uree bisulfit, Less şi Elsworth (*op. cit.*), precum şi alţi cercetători, ca Kessler şi Zahn [10], [11], constată că acţiunea alcaliilor asupra lînii are ca efect o scădere a solubilităţii în uree-bisulfit, care nu poate fi explicată fără să se admită conversia legăturii cistinice în legătură lantioninică. La o aceeaşi concluzie ajunge şi P. T. Speakman [12].

Din rezultatele obţinute şi prezentate în tabelul 2 se constată de asemenea că influenţa alcaliilor asupra lînii atrage o scădere a solubilităţii în uree bisulfit.

Probele I şi II, comparativ cu lîna netratată, arată o scădere mare a solubilităţii, în conformitate şi cu datele autorilor metodei. Adausul de 1 g/l săpun (proba III) micşorează puţin indicele de solubilitate, iar la un adaus de 10 g/l săpun (proba IV) indicele scade simţitor. Acest fapt arată că prezenţa săpunului în aceste cazuri contribuie la formarea punţilor lantioninice. Şi prin această metodă se constată că săpunul favorizează atacul alcalin în concordanţă cu rezultatele studiului solubilităţii în HCl 4*N*.

Proba V, cu 1 g/l Na_2CO_3 şi 10 g/l săpun, dă un indice de solubilitate relativ mare, acest fapt putînd fi explicat prin aceea că principalul factor de formare a lantioninei este Na_2CO_3, care la această probă se găseşte în cantitate mică. Dar, comparînd rezultatele obţinute la proba V cu cele căpătate la proba I, la care cantitatea de Na_2CO_3 este aceeaşi, se constată că solubilitatea este mai mare la proba V, deci săpunul în cantitate mai mare în prezenţa unei mici cantităţi de Na_2CO_3 inhibă oricum atacul alcalin asupra punţii cistinice, deci a formării lantioninei.

În proba VI prezenţa unei cantităţi de 1 g/l D.B.S. nu pune în evidenţă decît o foarte redusă influenţă, practic neglijabilă faţă de proba II. Dar în proba VIII, la care concentraţia este de 10 g/l D.B.S., se constată evident o influenţă inhibitoare a D.B.S.-ului asupra formării lantioninei. Aceeaşi influenţă inhibitoare se constată la proba VII faţă de proba V. Comparînd însă între ele rezultatele obţinute la probele I, V şi VII (cînd tratarea s-a făcut cu cantităţi mici de Na_2CO_3 şi cu cantităţi mari de detergent), se constată acţiunea inhibitoare asupra formării lantioninei atît în cazul săpunului cît şi a D.B.S.-ului, mai pronunţată fiind însă acţiunea acestuia din urmă. Comparînd între ele rezultatele obţinute asupra probelor II şi VIII se constată că şi în aceste condiţii D.B.S.-ul inhibă formarea lantioninei, acţiunea lui fiind însă mai slabă deoarece Na_2CO_3 este în concentraţie mai mare; comparînd aceste probe cu proba IV se constată că săpunul, în aceleaşi condiţii de lucru ca şi D.B.S.-ul, ajută la formarea lantioninei. Deci în toate cazurile de tratare D.B.S.-ul opreşte formarea punţii lantioninice.

c) *Indicele de cupru.* Comparînd probele II și III se constată că la un mic adaus de săpun degradarea este ușor accentuată, așa cum rezultă din tabelul 3. Aceasta se explică prin acțiunea săpunului ca agent de udare. În proba IV indicele de Cu nu diferă de cel din proba II și se poate presupune că acțiunea de udare a săpunului este compensată de acțiunea de protejare prin formare de micele adsorbite ca și în cazul solubilității în acizi. Se constată deci o concordanță cu solubilitatea în HCl 4*N*. În proba V, ținînd seama de pH-ul mai mic al soluției de tratare, se constată și o degradare mai redusă, și ținînd seama de creșterea redusă a indicelui de Cu față de proba de lînă martor (netratată) se poate presupune încă odată existența unei acțiuni de protejare a săpunului. Această presupunere este întărită și de proba VII la care deși pH-ul este și mai mic degradarea este mai mare.

Proba VI arată că o concentrație mică de D.B.S. exercită o aceeași influență de favorizare a degradării la o aceeași concentrație în Na_2CO_3, ca și o concentrație mică de săpun (proba III). La proba VIII se constată că mărind concentrația în D.B.S. la o aceeași concentrație în Na_2CO_3 degradarea este micșorată.

d) *Reacția Pauly cantitativă.* Comparînd rezultatul obținut la proba II cu cel obținut la proba martor se constată o scădere a cantității de β-naftol consumat, deci o creștere a cantității de diazoic legat de lînă, ceea ce indică o degradare a lînii. Ca și la absorbția de Cu, cantitatea de diazoic legat crește la proba III, unde avem o concentrație mică în săpun, și scade din nou, apropiindu-se de cea de la proba II, la concentrații mai mari în săpun (probele IV și V). La aceste probe se observă același sens al degradării, constatate cu ajutorul indicelui de Cu.

Înlocuirea săpunului cu D.B.S. (probele VI și VII) la o aceeași concentrație în Na_2CO_3 arată aceleași variații ale cantității de diazoic legat ca și la testul cuproamoniacal. Astfel, la 1 g/l de D.B.S. degradarea crește simțitor, iar la concentrații mai mari de D.B.S. degradarea scade, deci și acest test arată posibilitatea unei acțiuni protectoare a D.B.S.-ului în concentrații mari. Comparînd proba V cu proba VII rezultă de asemenea degradări mai mici corespunzătoare cu alcalinitatea mai mică, dar se constată că la aceste alcalinități săpunul are o acțiune de protejare mai mare decît D.B.S.-ul.

Din analiza datelor cuprinse în tabelul 6 rezultă că la probele I...IV (probe tratate numai cu Na_2CO_3) solubilitatea în HCl 4*N* crește în toate cazurile o dată cu creșterea concentrației în Na_2CO_3. De asemenea solubilitatea crește și cu creșterea timpului de tratare precum și cu temperatu a. Comparînd rezultatele probei II cu cele ale probei III se constată, așa precum se vede în fig. 1, că temperatura reprezintă factorul cel mai important în tratarea alcalină a lînii [2], mult mai important decît factorul timp. Acest aspect rezultă și din faptul că solubilitățile probelor I și II sînt mai apropiate între ele deși diferența între timpurile de tratare este mare (observație valabilă și pentru probele III și IV).

Comparînd rezultatele probei I cu cele ale probei III sau rezultatele probei II cu cele ale probei IV, unde timpul de tratare era constant și numai temperaturile erau diferite, se observă că solubilitățile sînt mult

mai mari pentru probele tratate la 70°C decît pentru cele tratate la 50°C. Această constatare concordă cu datele din literatură [13], [14].

În acelaşi sens influenţează temperatura şi concentraţia Na_2CO_3 şi în cazul tratării lînii cu Na_2CO_3 şi săpun, aşa precum se observă în fig. 2.

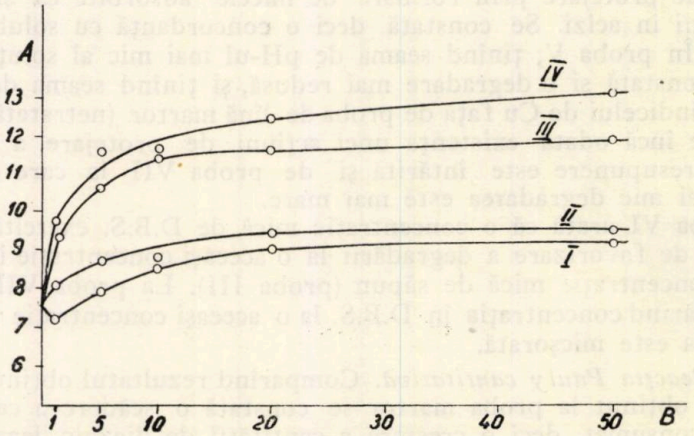


Fig. 1. — Solubilitatea în HCl 4*N* (%), (*A*), în funcţie de concentraţia în Na_2CO_3 (g/l), (*B*), la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3.

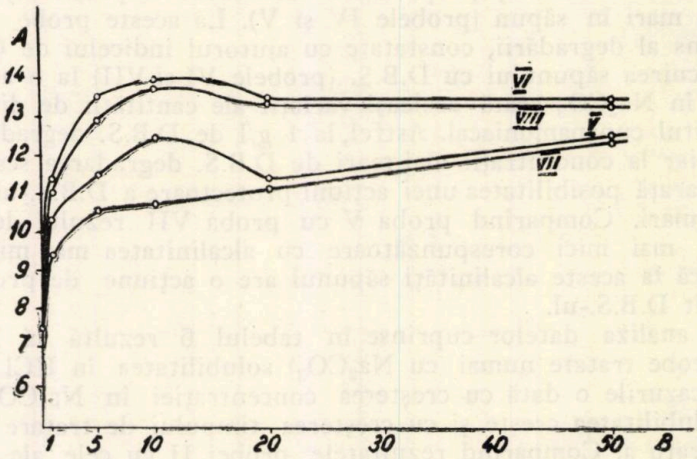


Fig. 2. — Solubilitatea în HCl 4*N* (%), (*A*), în funcţie de concentraţia în Na_2CO_3 (g/l), (*B*), la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3 şi săpun.

Dacă se urmăreşte însă acţiunea săpunului în prezenţa Na_2CO_3 se constată că în toate cazurile prezenţa săpunului măreşte solubilitatea în HCl 4*N*, comparativ cu probele tratate numai cu Na_2CO_3. Dar comparînd rezultatele probelor V şi VII precum şi cele ale probelor VI şi VIII, se constată că în cazurile cînd săpunul este în cantitate mai mare

(probele VII și VIII) scade solubilitatea față de probele unde avem o concentrație în săpun mai mică (probele V și VI), deci săpunul în concentrație mai mare exercită o acțiune protectoare asupra lînii, așa cum s-a constatat mai sus.

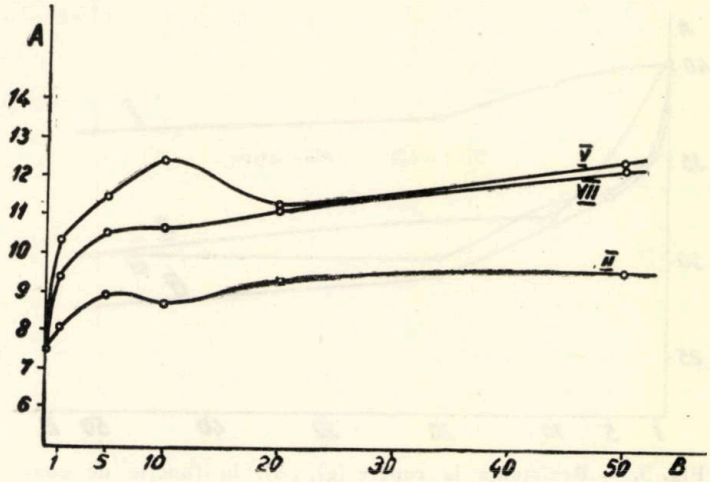


Fig. 3. — Solubilitatea în HCl 4*N* (%), (*A*), în funcție de concentrația în Na_2CO_3 (g/l), (*B*), la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3 și la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3 și săpun.

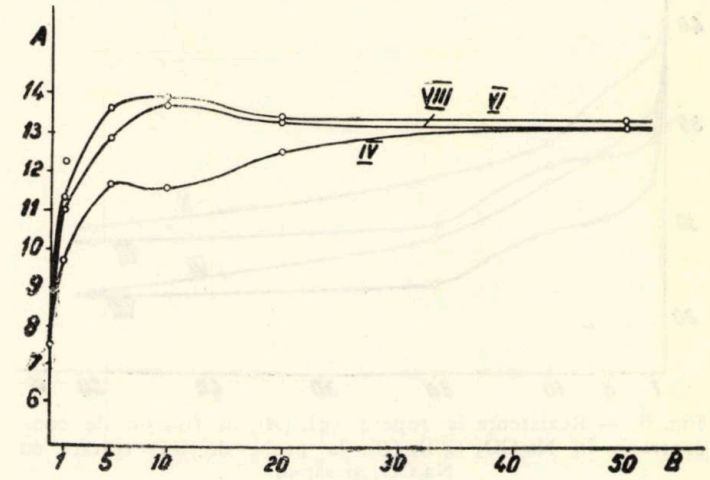


Fig. 4. — Solubilitatea în HCl 4*N* (%), (*A*), în funcție de concentrația în Na_2CO_3 (g/l), (*B*), la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3 și la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3 și săpun.

Acțiunea protectoare a săpunului se menține indiferent de concentrația în Na_2CO_3 sau de temperatura de lucru, așa cum se vede în fig. 3 și 4.

e) *Rezistenţa la rupere.* Din analizele datelor din tabelul 7 se observă că rezistenţa la rupere scade, în toate cazurile de tratare, o dată cu creşterea concentraţiei în Na_2CO_3, aşa precum se constată şi din fig. 5 şi 6. Rezistenţa la rupere scade de asemenea cu timpul de tratare precum şi cu temperatura de lucru.

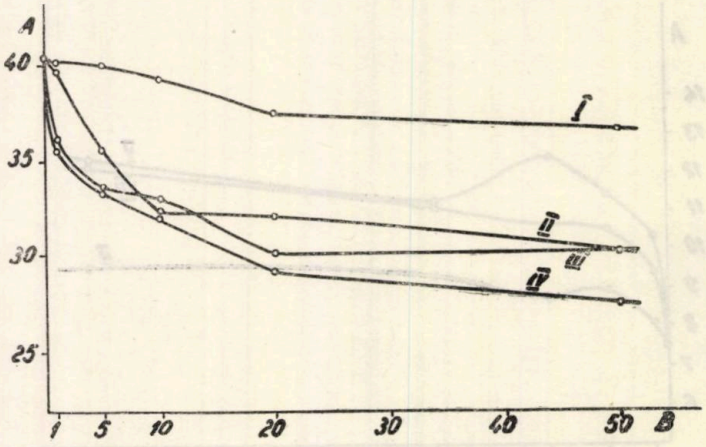


Fig. 5. — Rezistenţa la rupere (g), (*A*), în funcţie de concentraţia în Na_2CO_3 (g/l), (*B*), la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3.

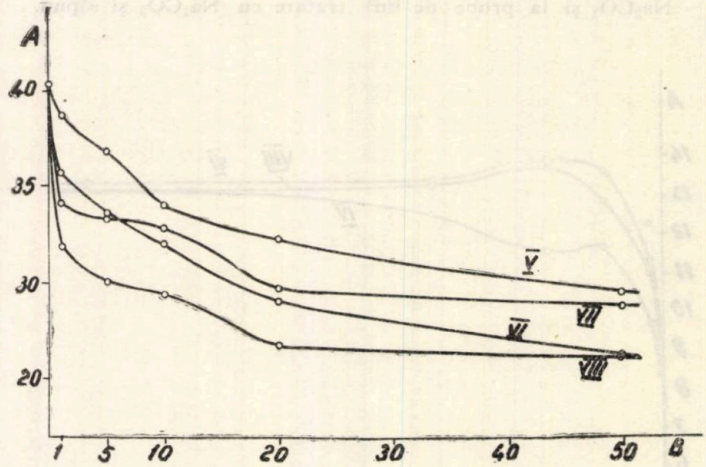


Fig. 6. — Rezistenţa la rupere (g), (*A*), în funcţie de concentraţia în Na_2CO_3 (g/l), (*B*), la probe de lînă tratate cu Na_2CO_3 şi săpun.

Urmărind rezistenţa la rupere în cazul probelor tratate numai cu Na_2CO_3 (fig. 5 se dovedeşte şi pe această cale că factorul temperatură are cea mai mare importanţă în degradarea alcalină a lînii. Rezultatele obţinute la proba III sînt mult mai mici decît în cazul probei I şi de asemenea mai mici decît în cazul probei II. Acelaşi fenomen se constată şi în cazul IV, comparativ cu probele II sau III.

Analizînd rezistența la rupere în cazul probelor tratate cu Na_2CO_3 și săpun se constată de asemenea că aceasta scade o dată cu creșterea concentrației în Na_2CO_3 precum și funcție de temperatură. Și în acest caz se observă (fig. 6) că temperatura reprezintă factorul cel mai important în tratarea alcalină a lînii. Prezența săpunului nu modifică esențial rezistența la rupere a fibrei de lînă.

f) *Alungirea.* Dacă se analizează rezultatele din tabelul 8 se observă că, în general, alungirea fibrei de lînă scade puțin cu concentrația în Na_2CO_3, însă datele în cazul acestui indice nu dau posibilitatea să se tragă concluzii mai precise.

4. Concluzii

Din studiul influenței Na_2CO_3 asupra lînii, în prezența de detergenți, prin testuri de solubilitate, accesibilitate și indici fizico-mecanici, rezultă următoarele concluzii:

1. Prezența săpunului și a D.B.S.-ului în soluțiile de Na_2CO_3 mărește solubilitatea în HCl 4*N* a lînii tratată cu aceste soluții. O concentrație mai ridicată în detergenți joacă un rol protector față de fibra de lînă.

2. Prezența D.B.S.-ului favorizează mai mult solubilitatea în HCl 4*N* decît prezența săpunului.

3. Prezența săpunului scade mai mult solubilitatea în uree-bisulfit decît D.B.S.-ul, deci contribuie în mai mare măsură la transformarea punții cistinice în punte lantioninică decît acesta din urmă.

4. Cu ajutorul indicelui de Cu se constată că atît D.B.S.-ul cît și săpunul măresc degradarea lînii, creșterea concentrației atît în săpun cît și în D.B.S. exercită însă și o acțiune protectoare asupra lînii.

5. Prin reacția Pauly cantitativă se constată că prezența săpunului și a D.B.S.-ului în soluțiile de Na_2CO_3 accentuează degradarea lînii. Și prin acest test se pune în evidență faptul că mărirea concentrației în săpun și în D.B.S. conduce la o acțiune de protejare a fibrei de lînă.

6. Acțiunea protectoare a săpunului se menține indiferent de concentrația în Na_2CO_3 și de temperatura de lucru.

7. Rezistența la rupere a fibrei tratată alcalin scade pe măsură ce crește concentrația în agent alcalin, timpul și temperatura de tratare.

8. Prezența săpunului nu modifică esențial rezistența la rupere a fibrei de lînă. Alungirea nu dă indicații concludente.

Primit la 10 V 1962

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologie chimică textilă

BIBLIOGRAFIE

1. *** Mell. Textber., 1940, **21**, S. 420.
2. Mazingue G., van Overbèke M., Bull. I. T. Fr., 1956, *59*, p. 23.
3. Satlow G., Mell. Textber., 1959, **40**, *12*, S. 1426.
4. Zahn H., Würtz A., Bull. I. T. Fr., 1954, *39*, p. 75.
5. Less K., Elsworth F. F., J. S. D. C., 1952, **68**, p. 207.
6. — *Proc. Internat. Wool Textile Res. Conf.*, Australia, 1955, vol. **C**, p. 363.
7. Gianola G., Meyer O., Grillot R., Bull. I. T. Fr., 1959, *79*, p. 47.
8. Nitschke G., Faserforschung u. Textiltechnik, 1956, **7**, S. 120.
9. Agster H., *Färberei und textil chemische Untersuchungen*, Springer Verlag, Berlin 1956, S. 353.

10. Kessler H., Zahn H., J. Text. Inst., 1958, **49 A**, *8*, p. 466.
11. — Text. Res. J., 1958, **28**, p. 357.
12. Speakman P. T., J. Text. Inst., 1957, **48 A**, *11*, p. 635.
13. Robinet M., Bielen R., Ibid., 1957, **48 A**, *4*, p. 227.
14. — Bull. I. T. Fr., 1957, *67*, p. 128.

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ЩЕЛОЧНЫХ АГЕНТОВ НА ШЕРСТЬ

(Резюме)

Изучается влияние углекислого натря в присутствии моющих веществ (мыло и додецилбензолсулфоновокислый натрии (Д. Б. С.)) на шерсть. Констатируется, что наличие моющих веществ пониженной концентрации повышает растворимость в соляной кислоте, однако более высокая концентрация моющих веществ оказывает защитное действие на шерсть. Отмечается также, что как мыло так и Д.Б.С., при повышенной концентрации, подавляет процесс образования лантионина.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Растворимость, (*A*), в 4*N* растворе HCl (в %) в зависимости от концентрации (г/л) Na_2CO_3, (*B*), для проб шерсти, обработанных Na_2CO_3.

Рис. 2. — Растворимость, (*A*), в 4*N* растворе HCl (в %) в зависимости от концентрации (г/л) Na_2CO_3, (*B*), для проб шерсти, обработанной Na_2CO_3 и мылом.

Рис. 3. — Растворимость, (*A*), в 4*N* растворе HCl (в %) в зависимости от концентрации (г/л) Na_2CO_3, (*B*), для проб шерсти, обработанных отдельно Na_2CO_3 и Na_2CO_3 + мыло.

Рис. 4. — Растворимость, (*A*), в 4*N* растворе HCl (в %) в зависимости от концентрации (г/л) Na_2CO_3, (*B*), для проб шерсти, обработанных Na_2CO_3 и отдельно Na_2CO_3 + мыло.

Рис. 5. — Сопротивление разрыву (г), (*A*), в зависимости от концентрации Na_2CO_3 (г/л), (*B*), для проб шерсти, обработанных Na_2CO_3.

Рис. 6. — Сопротивление разрыву (г), (*A*), в зависимости от концентрации Na_2CO_3 (г/л), (*B*), для проб шерсти, обработанных Na_2CO_3 и мылом.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE L'INFLUENCE DES AGENTS ALCALINS SUR LA LAINE

(Résumé)

On a étudié l'action du carbonate de natrium en présence des détergents (savon et dodécilebenzène sulphonate de natrium (D.B.N.)) sur la laine. On a trouvé que la présence des détergents en faible concentration augmente la solubilité dans HCl, mais à une concentration plus élevée les détergents protègent la laine. On a trouvé qu'autant le savon que le D.B.N., aux concentration plus élevées, exercitent une action inhibitrice sur la formation de la lanthyonine.

Explication des figures

Fig. 1. — Solubilité dans HCl 4*N* (%), (*A*), en fonction de la concentration en Na_2CO_3 (g/l), (*B*) ; éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3.

Fig. 2. — Solubilité dans HCl 4*N* (%), (*A*), en fonction de la concentration en Na_2CO_3 (g/l), (*B*) ; éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3.

Fig. 3. — Solubilité dans HCl 4*N* (%), (*A*), en fonction de la concentration en Na_2CO_3 (g/l), (*B*) ; éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3 et éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3 et savon.

Fig. 4. - Solubilité dans HCl 4*N* (%), (*A*), en fonction de la concentration en Na_2CO_3 (g/l), (*B*) ; éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3 et éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3 et savon.

Fig. 5. — Résistance dynamométrique (g), (*A*), en fonction de la concentration en Na_2CO_3 (g/l), (*B*) ; éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3.

Fig. 6. — Résistance dynamométrique (g), (*A*), en fonction de la concentration en Na_2CO_3 (g/l), (*B*) ; éprouvettes de laine traitées avec Na_2CO_3 et savon.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 1—2 1962

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 621.318.423

CIRCUITE CU REACTANŢE SEMICOMPENSATE

DE

D. BĂRBULESCU

1. Introducere

În circuite care conţin reactanţe inductive şi capacitive, grupate în serie sau paralel, se poate obţine situaţia în care reactanţa inductivă este egală cu jumătate sau cu dublul reactanţei capacitive. Circuitele a căror reactanţă respectă această condiţie le numim *circuite cu reactanţe semicompensate*. În aceste cazuri parametrii L, C ai circuitului sînt legaţi prin relaţii foarte simple în care intervine şi frecvenţa sursei de alimentare. Semicompensarea reactanţelor poate fi uşor pusă în evidenţă datorită proprietăţilor de care se bucură circuitele în această situaţie particulară.

Literatura de specialitate cuprinde referiri puţine şi disparate cu privire la proprietăţile deosebite ale acestor circuite [1]...[3].

În cele ce urmează se analizează circuitele cu reactanţe semicompensate, grupate în serie şi în derivaţie, scoţîndu-se în evidenţă proprietăţile lor.

2. Circuite serie cu reactanţe semicompensate

2.1 Circuit serie capacitiv ; reactanţa inductivă compensează jumătate din reactanţa capacitivă

Circuitul reprezentat în fig. 1 conţine rezistenţa R, inductanţa L şi capacitatea C grupate în serie. Ecuaţia de tensiuni a acestui circuit este:

$$\underline{U} = \{R + j\,[L\omega - 1/(C\omega)]\}\,\underline{I}, \tag{1}$$

unde $\underline{U}$ — tensiunea aplicată.

Dacă reactanţa inductivă este egală cu jumătate din reactanţa capacitivă ($L\omega = 1/(2C\omega)$) este îndeplinită condiţia:

$$LC\omega^2 = 1/2. \tag{2}$$

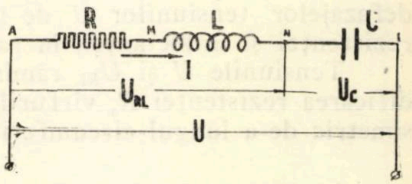


Fig. 1

În acest caz relaţia (1) devine $\underline{U} = (R - jL\omega)\,\underline{I}$, cu modulul:

$$U = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \tag{3}$$

şi argumentul:

(4) $$\varphi = -\operatorname{arctg}(L\omega/R).$$

Tensiunea U_{RL} la bornele inductanţei şi rezistenţei are expresia $\underline{U}_{RL} = (R + jL\omega)\,\underline{I}$, cu modulul:

(5) $$U_{RL} = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

şi argumentul:

(6) $$\varphi_{RL} = \operatorname{arctg}(L\omega/R).$$

Din relaţiile (3) şi (5) rezultă:

(7) $$U = U_{RL},$$

iar din relaţiile (6) şi (4)

(8) $$\varphi = -\varphi_{RL}.$$

În fig. 2 este reprezentată diagrama vectorială a tensiunilor, alegînd curentul drept origine de fază.

Din relaţiile de mai sus, precum şi din diagrama vectorială, rezultă următoarele observaţii cu privire la circuitul serie capacitiv cu reactanţe semicompensate (care îndeplinesc condiţia (2)):

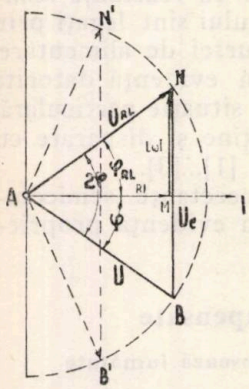


Fig. 2

a) Tensiunea U_{RL} de la bornele inductanţei şi rezistenţei este egală cu tensiunea sursei de alimentare U, indiferent de valoarea rezistenţei R, conform relaţiei (7).

b) Tensiunea sursei U este decalată totdeauna în întîrziere cu unghiul φ faţă de curent, iar tensiunea U_{RL} de la bornele inductanţei şi rezistenţei este decalată simetric în avans, conform relaţiilor (4), (6) şi (8).

c) Scurtcircuitarea condensatorului C are drept consecinţă rotirea vectorului $\underline{U}_{RL}$ cu unghiul 2φ, punctul N suprapunîndu-se peste punctul B şi deci $\underline{U}_{RL}$ peste $\underline{U}$.

d) Variaţia rezistenţei R are drept consecinţă modificarea curentului I, a tensiunii U_C la bornele condensatorului şi a defazajelor tensiunilor U de la bornele sursei şi U_{RL} de la bornele rezistenţei şi inductanţei, în raport cu curentul I.

Tensiunile U şi U_{RL} rămînînd egale în modul, independent de modificarea rezistenţei R, vîrfurile vectorilor reprezentativi se deplasează simetric de-a lungul circumferinţei cercului punctat (fig. 2).

2.2. Circuit serie inductiv; reactanţa capacitivă compensează jumătate din reactanţa inductivă

a) *Circuit serie inductiv cu bobină ideală (lipsită de rezistenţă)*

Circuitul reprezentat în fig. 3 conţine rezistenţa R, capacitatea C şi bobina de inductanţă L, presupusă lipsită de rezistenţă.

Dacă reactanța capacitivă este egală cu jumătate din reactanța inductivă, este îndeplinită condiția $1/(C\omega) = L\omega/2$ sau

$$LC\omega^2 = 2. \tag{9}$$

În acest caz relația (1) devine $\underline{U} = [R + j/(C\omega)]\,\underline{I}$, având modulul:

$$U = I\sqrt{R^2 + 1/(C^2\omega^2)} \tag{10}$$

iar argumentul:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\,[1/(\omega CR)]. \tag{11}$$

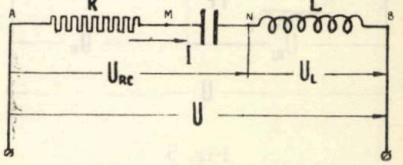


Fig. 3

Tensiunea U_{RC} da la bornele rezistenței și capacității se exprimă prin relația $\underline{U}_{RC} = [R - j/(C\omega)]\,\underline{I}$, având modulul:

$$U_{RC} = \sqrt{R^2 + 1/(C^2\omega^2)}\,I \tag{12}$$

iar argumentul:

$$\varphi_{RC} = -\operatorname{arctg}\,[1/(\omega CR)]. \tag{13}$$

Din relațiile (10) și (12) se deduce:

$$U = U_{RC}, \tag{14}$$

iar din relațiile (11) și (13) rezultă:

$$\varphi = -\varphi_{RC}. \tag{15}$$

Din relațiile deduse cît și din diagrama vectorială din fig. 4 rezultă următoarele proprietăți ale circuitului serie inductiv ideal cu reactanțe semicompensate (îndeplinind condiția (9)):

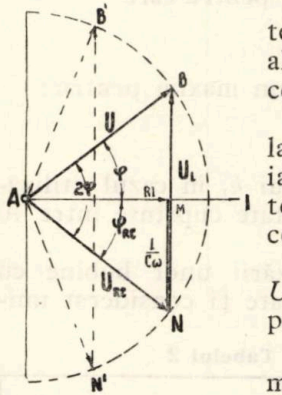


Fig. 5

a) Tensiunea U_{RC} de la bornele grupului rezistență-capacitate este egală cu tensiunea sursei de alimentare U indiferent de valoarea rezistenței R, conform relației (14).

b) Tensiunea U de la bornele sursei este decalată totdeauna în avans cu unghiul φ față de curent iar tensiunea U_{RC} de la bornele ansamblului rezistență-capacitate este decalată simetric în întîrziere, conform relațiilor (11), (13) și (15).

c) Prin scurtcircuitarea inductanței L tensiunea U_{RC} se rotește cu unghiul 2φ, punctul N suprapunîndu-se peste punctul B și deci U_{RC} peste U.

d) Variația rezistenței R are drept consecințe modificarea curentului I, a tensiunii U_L de la bornele inductanței și a defazajelor tensiunilor de alimentare U și de la bornele grupului rezistență-capacitate U_{RC}, în raport cu curentul I. Tensiunile U și U_{RC} rămînînd egale în modul, independent de modificarea rezistenței R, vîrfurile vectorilor reprezentativi se deplasează simetric de-a lungul circumferinței cercului punctat.

b) *Circuit serie inductiv cu bobină reală*

Dacă se consideră că bobina are rezistenţa proprie r (fig. 5) şi că reactanţele circuitului îndeplinesc condiţia de semicompensare exprimată prin relaţia (9), se poate scrie relaţia $\underline{U} = [R + r + j/(C\omega)]\,\underline{I}$, cu modulul :

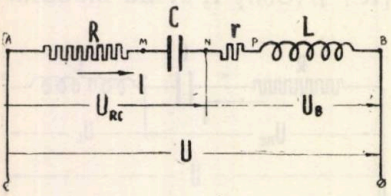


Fig. 5

$$U = \sqrt{(R + r)^2 + 1/(C^2\omega^2)}\, I \tag{16}$$

şi argumentul :

$$\varphi = \operatorname{arctg}\{1/[(R + r)\, C\omega]\}. \tag{17}$$

Considerînd raportul modulilor tensiunilor U şi U_{RC}, rezultă :

$$U/U_{RC} = \sqrt{1 + (2Rr + r^2)/[R^2 + 1/(C^2\omega^2)]},$$

sau

$$U = k_1 U_{RC}\,, \tag{18}$$

unde

$$k_1 = \sqrt{1 + (2Rr + r^2)/[R^2 + 1/(C^2\omega^2)]}. \tag{19}$$

Introducînd în relaţia (19) factorul de calitate al bobinei $Q = L\omega/r = 2/(rC\omega)$, expresia coeficientului k_1 devine :

$$k_1 = \sqrt{1 + 4\,(1 + 2m)/(Q^2 + 4m^2)}, \tag{20}$$

unde s-a notat $m = R/r$.

Dînd diferite valori posibile lui m şi Q, rezultă valorile coeficientului k_1 trecute în tabelul 1.

Maximele funcţiei k_1 sînt date de valorile lui m pentru care

$$\mathrm{d}k_1/\mathrm{d}m = 0. \tag{21}$$

Din relaţia (21) rezultă că funcţia k_1 admite un maxim pentru :

$$m = (\sqrt{Q^2 + 1} - 1)/2\,. \tag{22}$$

În tabelul 2 s-au trecut valorile maxime ale lui k_1 în cazul utilizării unor bobine avînd valoarea factorului de calitate cuprinse între 10 şi 100.

Din tabelele 1 şi 2 rezultă că în cazul utilizării unor bobine cu factor de calitate ridicat ($Q \geqslant 100$) factorul k_1 poate fi considerat uni-

Tabelul 1

m \ Q	10	20	50	100
1	1,07	1,013	1,002	1
10	1,08	1,05	1,015	1,002
100	1,01	1,01	1,009	1,007

Tabelul 2

Q	10	20	50	100
m	4,75	9,5	24,5	49,5
$k_{1\,max}$	1,11	1,05	1,03	1,01

tar cu o eroare mai mică decît 1%. În acest caz tensiunile U şi U_{RC} sînt egale pentru oricare valoare a rezistenţei R, relaţia (18) putînd fi aproximată prin relaţia (14), cu precizia indicată.

Relaţia (17) se mai poate scrie sub forma:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\{[1/(\omega CR)]\,[m/(m+1)]\}, \tag{23}$$

de unde rezultă:

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\{[m/(m+1)]\operatorname{tg}\varphi_{RC}\}.$$

Datele din tabelul 3 arată că în cazul utilizării unor bobine cu factor de calitate ridicat argumentele tensiunilor U şi U_{RC} nu se pot considera egale decît numai pentru valori mari ale parametrului m (rezistenţe mari, unghiuri mici). Pentru $m \geqslant 100$ eroarea este sub 1%. În cazurile $m < 100$ argumentele tensiunilor U şi U_{RC} se vor calcula cu relaţiile (13), respectiv (23).

Tabelul 3

m	1	10	100
$\frac{m}{m+1}$	0,5	0,91	0,99

c) *Circuit serie inductiv, cu bobină reală, în cazul* R = 0

Se consideră circuitul reprezentat în fig. 6 care conţine o capacitate C şi o bobină de parametri L, r, grupate în serie. Ecuaţia de tensiuni a circuitului este $\underline{U} = \{r + j[L\omega - 1/(C\omega)]\}\,\underline{I}$.

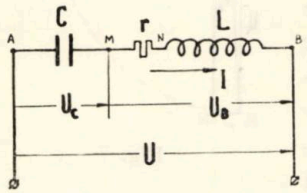


Fig. 6

Dacă reactanţele circuitului îndeplinesc condiţia de semicompensare (relaţia (9)), rezultă $\underline{U} = [r + j/(C\omega)]\,\underline{I}$, cu modulul:

$$U = \sqrt{r^2 + 1/(C^2\omega^2)}\,I$$

şi argumentul:

$$\varphi = \operatorname{arctg}[1/(\omega Cr)].$$

Considerînd raportul modulilor tensiunilor U şi U_C, rezultă:

$$U/U_C = \sqrt{r^2 C^2\omega^2 + 1},$$

sau

$$U = k_2 U_C, \tag{24}$$

unde

$$k_2 = \sqrt{r^2 C^2\omega^2 + 1}. \tag{25}$$

Introducînd în relaţia (25) factorul de calitate al bobinei rezultă:

$$k_2 = \sqrt{(Q^2 + 4)/Q^2}. \tag{26}$$

În relaţia (26), dînd diferite valori factorului de calitate Q rezultă că funcţia $k_2 = f(Q)$ tinde repede către unitate. Practic, după cum arată datele din tabelul 4, k_2 poate fi socotit unitar, cu o precizie mai mare decît 1%, pentru bobine cu factor de calitate mai mare decît 20.

Tabelul 4

Q	10	20	50	100
k_2	1,02	1,01	1,002	1

Din cele de mai sus rezultă următoarele observaţii cu privire la circuitul considerat:

a) În cazul circuitelor cu factor de calitate mai mare decît 20, dacă este îndeplinită condiţia de semicompensare a reactanţelor (relaţia (9)), tensiunea sursei U şi tensiunea de la bornele condensatorului U_C sînt egale, cu o precizie mai mare de 1%.

b) La variaţia capacităţii C se modifică curentul I şi tensiunile de la bornele bobinei şi capacităţii. În diagrama vectorială din fig. 7, unde curentul este luat drept origine de fază, vîrful vectorului reprezentînd tensiunea aplicată se deplasează pe circumferinţa cu centrul în A, astfel încît argumentul tensiunii U_B de la bornele bobinei rămîne neschimbat.

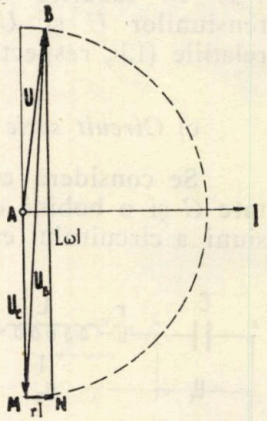


Fig. 7

Proprietatea generală a circuitelor serie de a pune în evidenţă momentul semicompensării reactanţelor prin egalitatea a două tensiuni, poate fi pusă în valoare prin realizarea unor metode de măsurare a inductanţelor şi capacităţilor care să utilizeze relaţii tot atît de simple ca şi metodele de rezonanţă [1], [4]. În unele cazuri metodele de măsurare bazate pe semicompensarea reactanţelor pot rezulta avantajoase prin faptul că nu depind de factorul de calitate, cum este cazul semicompensării reactanţelor în circuitele serie capacitive.

3. Circuite derivaţie cu reactanţe semicompensate[1)]

3.1. Reactanţa ramurii inductive compensează jumătate din reactanţa ramurii capacitive

Circuitul reprezentat în fig. 8 conţine pe o ramură un condensator fără pierderi, de capacitate C, iar pe alta o inductanţă L, în serie cu rezistenţa R.

Impedanţa complexă a circuitului se exprimă prin relaţia:

$$\underline{Z} = (R + j\omega L)/(1 - LC\omega^2 + j\omega CR).$$

[1)] În cazul circuitelor derivaţie prin reactanţe se înţeleg reactanţele ramurilor izolate: reactanţa ramurii inductive $x_L = L\omega$ şi reactanţa ramurii capacitive $x_C = 1/(C\omega)$.

Dacă reactanța ramurii inductive este egală cu jumătatea reactanței ramurii capacitive este satisfăcută condiția (2).

În această situație impedanța circuitului devine:

$$Z = 2L\omega(R + jL\omega)/(L\omega + jR), \tag{27}$$

de forma $\underline{Z} = Z|\varphi$.

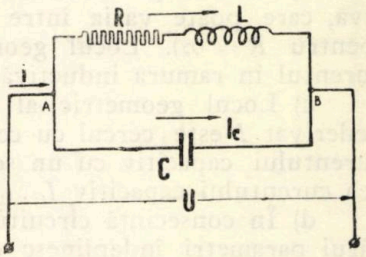


Fig 8

Din relația (27) rezultă modulul impedanței:

$$Z = 1/(C\omega), \tag{28}$$

și argumentul ei:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\{[L\omega/R - R/(L\omega)]/2\}. \tag{29}$$

Notînd

$$\psi = \operatorname{arctg}(L\omega/R) \tag{30}$$

și înlocuind (30) în (29) se deduce argumentul impedanței:

$$\varphi = 2\psi - \pi/2. \tag{31}$$

Deoarece curentul nederivat este dat de relația $\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z} = (U/Z)|-\varphi$, introducînd modulul Z din relația (28) rezultă

$$\underline{I} = I|-\varphi, \tag{32}$$

unde modulul curentului nederivat este:

$$I = UC\omega. \tag{33}$$

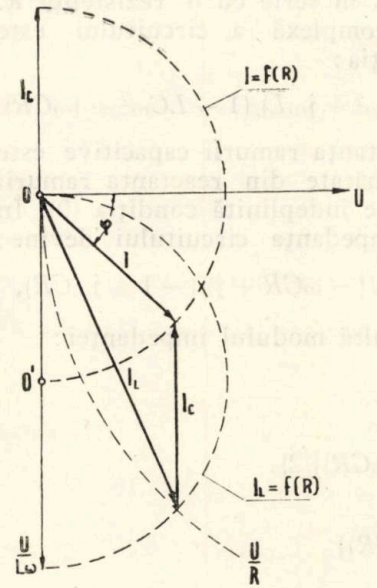


Fig. 9

Curentul prin ramura ce conține capacitatea C fiind

$$I_C = UC\omega \tag{34}$$

rezultă din (33) și (34):

$$I = I_C. \tag{35}$$

Diagrama din fig. 9, construită prin urme [5], reprezintă locul geometric al curentului în ramura inductivă și a curentului nederivat, la variația rezistenței R.

Rezultă următoarele proprietăți ale circuitului derivație în care parametrii ramurilor respectă condiția (2):

a) Impedanța circuitului este constantă în modul și egală cu reactanța ramurii capacitive, independent de valoarea rezistenței R, conform relației (28). Ca urmare curentul nederivat I este constant și egal cu curentul I_C din ramura capacitivă, indiferent de valoarea rezistenței R, conform

relației (35). Întreruperea ramurii inductive nu modifică valoarea curentului nederivat deoarece egalitatea curenților se păstrează, inclusiv pentru $R = \infty$.

b) La variația rezistenței R se modifică curentul din ramura inductivă, care poate varia între limitele $I_L = 2I_C$ (pentru $R = 0$) și $I_L = 0$ (pentru $R = \infty$). Locul geometric al vîrfului vectorului reprezentînd curentul în ramura inductivă I_L este cercul cu centrul în O'.

c) Locul geometric al vîrfului vectorului reprezentînd curentul nederivat I este cercul cu centrul în O, deplasat față de O' pe direcția curentului capacitiv cu un segment a cărui mărime este egală cu valoarea curentului capacitiv I_C.

d) În consecință circuitul derivație cu reactanțe semicompensate, ai cărui parametri îndeplinesc condiția (2), este echivalent unei impedanțe de modul constant și argument variabil:

$$\underline{Z} = \text{const.} \mid \varphi(R).$$

Circuitul reprezintă un defazor de curent cu ajutorul căruia, prin variația rezistenței R, se poate defaza curentul în circuitul nederivat, în raport cu tensiunea aplicată, cu un unghi cuprins între $-90°$ și $+90°$, adică pe un interval unghiular de 180°.

3.2 Reactanța ramurii capacitive compensează jumătate din reactanța ramurii inductive

a) *Circuit cu bobină ideală*

Circuitul reprezentat în fig. 10 conține pe o ramură o bobină ideală de inductanță L, iar pe alta o capacitate C în serie cu o rezistență R. Impedanța complexă a circuitului este dată de relația:

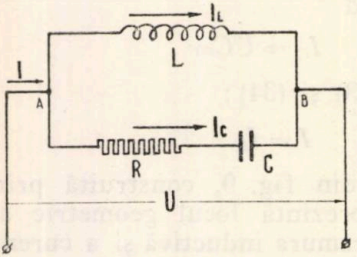


Fig. 10

$$\underline{Z} = (-RLC\omega^2 + j\omega L)/(1 - LC\omega^2 + j\omega CR).$$

Dacă reactanța ramurii capacitive este egală cu jumătate din reactanța ramurii inductive este îndeplinită condiția (9). În acest caz impedanța circuitului devine:

$$\underline{Z} = \omega L\,(-\omega CR + j)/(-1 + j\omega CR), \tag{36}$$

de unde rezultă modulul impedanței:

$$Z = L\omega \tag{37}$$

și argumentul său:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\{[\omega CR - 1/(\omega CR)]/2\}. \tag{38}$$

Notînd

$$\psi = \operatorname{arctg}[1/(\omega CR)] \tag{39}$$

și înlocuind (39) în (38) rezultă:

$$\varphi = \pi/2 - 2\psi. \tag{40}$$

Deoarece curentul nederivat este $\underline{I} = U/Z = (U/Z)\,|\,-\varphi$, rezultă, după introducerea modulului impedanței Z exprimat prin relația (37):

$$\underline{I} = I\,|\,-\varphi, \tag{41}$$

unde modulul curentului nederivat este:

$$I = U/(L\omega). \tag{42}$$

Curentul prin ramura cu inductanță având modulul:

$$I_L = U/(L\omega), \tag{43}$$

din (42) și (43) rezultă:

$$I = I_L. \tag{44}$$

Diagrama vectorială din fig. 11 indică locul geometric al curentului nederivat și al curentului prin ramura capacitivă. Din relațiile deduse mai sus precum și din diagrama vectorială rezultă următoarele observații cu privire la circuitul derivație în care parametrii circuitului satisfac condiția (9):

a) Impedanța circuitului este constantă în modul și egală cu reactanța ramurii inductive, indiferent de valoarea rezistenței R, conform relației (37). Ca urmare curentul nederivat I este constant și egal cu curentul din ramura inductivă I_L indiferent de valoarea rezistenței R, conform relației (44). Întreruperea ramurii capacitive nu modifică valoarea curentului nederivat deoarece egalitatea curenților se păstrează inclusiv pentru $R = \infty$.

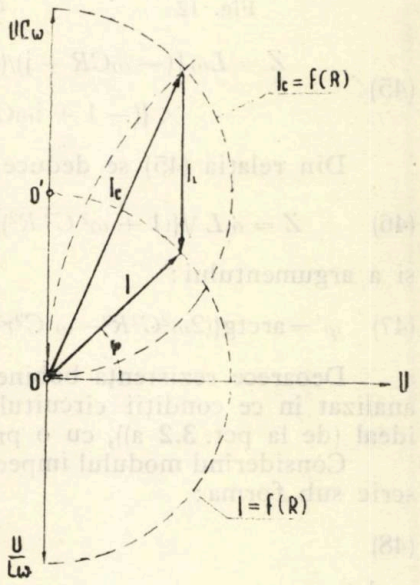


Fig. 11

b) La variația rezistenței R se modifică curentul din ramura capacitivă care poate varia între limitele $I_C = 2I_L$ (pentru $R=0$) și $I_C=0$ (pentru $R=\infty$). Locul geometric al vîrfului vectorului reprezentînd curentul în ramura capacitivă este cercul cu centrul în O'.

c) Locul geometric al vîrfului vectorului reprezentînd curentul nederivat I este cercul cu centrul în O, deplasat față de O' pe direcția curentului inductiv, cu un segment a cărui mărime este egală cu valoarea curentului inductiv I_L.

d) În consecință, circuitul derivație cu reactanțe semicompensate (fig. 10) ai cărui parametri îndeplinesc condiția (9) este echivalent unei impedanțe de modul constant și argument variabil:

$$\underline{Z} = \text{const.}\,|\,\varphi\,(R).$$

Circuitul reprezintă un defazor de curent, cu ajutorul căruia, prin variaţia rezistenţei R, se poate defaza curentul nederivat în raport cu tensiunea aplicată, cu un unghi cuprins între $-90°$ şi $+90°$, adică pe un interval unghiular de 180°.

b) *Circuit cu bobină reală*

Considerînd că circuitul derivaţie conţine pe ramura inductivă o bobină de parametri L, r (fig. 12) impedanţa complexă a circuitului este:

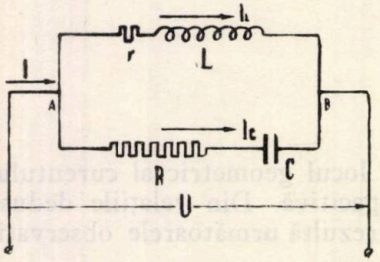


Fig. 12

$$\underline{Z} = (r + j\omega L)\,[R + 1/(j\omega C)]/[r + R + \\ + j\omega L + 1/(j\omega C)]\,.$$

Dacă reactanţele ramurilor inductivă şi capacitivă îndeplinesc condiţia de semicompensare, exprimată prin relaţia (9), după transformări simple expresia impedanţei complexe devine:

$$\underline{Z} = L\omega\,[(-\omega CR + j)/(-1 + j\omega CR)]\,[(r + j\omega L)/(j\omega L)] \times \\ \times \{(-1 + j\omega CR)/[-1 + j\omega C(R + r)]\}\,. \tag{45}$$

Din relaţia (45) se deduce expresia modulului:

$$Z = \omega L \sqrt{\{(1 + \omega^2 C^2 R^2)/[1 + \omega^2 C^2 (R + r)^2]\}\,[1 + r^2/(\omega^2 L^2)]} \tag{46}$$

şi a argumentului:

$$\varphi' = \operatorname{arctg}\{(2\omega^2C^2R^2 - \omega^2C^2r^2 - 2)/[\omega C(\omega^2C^2r^2R + \omega^2C^2R^2r + 4R + r)]\}. \tag{47}$$

Deoarece rezistenţa bobinei nu poate fi anulată, este important de analizat în ce condiţii circuitul cu bobină reală poate înlocui circuitul ideal (de la pct. **3.2** a)), cu o precizie satisfăcătoare.

Considerînd modulul impedanţei dat de relaţia (46), aceasta se poate scrie sub forma:

$$Z = k_3\,\omega L\,, \tag{48}$$

unde:

$$k_3 = \sqrt{\{(1 + \omega^2 C^2 R^2)/[1 + \omega^2 C^2 (R + r)^2]\}\,[1 + r^2/(\omega^2 L^2)]}\,. \tag{49}$$

Din relaţia (48) rezultă că modulul impedanţei va putea fi considerat constant şi egal cu reactanţa inductivă a circuitului cînd coeficientul k_3 va putea fi socotit unitar, cu o suficientă precizie.

Introducînd în expresia coeficientului k_3 factorul de calitate al bobinei $Q = L\omega/r = 2/(C\omega r)$, şi notînd $\omega CR = A$, rezultă:

$$k_3 = \sqrt{(1 + A^2)\,(1 + 1/Q^2)/(1 + A^2 + 4\,A/Q + 4/Q^2)}\,. \tag{50}$$

Valorile coeficientului k_3 depind de parametrii A și Q; dînd diferite valori acestor parametri rezultă valorile coeficientului k_3 indicate în tabelul 5.

Funcția $k_3 = f(A)$ trece printr-un minim pentru valorile lui A care anulează derivata funcției ($dk_3/dA = 0$). După efectuarea operațiilor rezultă că minimul lui k_3 se obține pentru valoarea lui A dată de:

(51) $$A = \sqrt{(Q^2 + 1)/Q^2 - 1/Q}.$$

Valorile lui A, deduse din relația (51) pentru diverși factori de calitate Q, precum și valorile minime ale lui k_3 rezultate din relația (50), sînt trecute în tabelul 6.

Tabelul 5

A \ Q	10	20	50	100
0,1	0,968	0,988	0,998	0,999
1	0,913	0,955	0,985	0,995
10	0,986	0,992	0,999	1
100	1	1	1	1

Din tabelul 5 rezultă că în cazul utilizării unor bobine cu factori de calitate ridicați, practic mai mari decît 50, coeficientul k_3 poate fi socotit unitar și deci în acest caz impedanța circuitului posedă un modul constant $Z = L\omega$, independent de rezistența R a circuitului. În cazurile în care se poate considera $k_3 = 1$, $I = U/Z = U/L\omega = I_L$. Rezultă deci că într-un asemenea circuit curentul nederivat este egal cu curentul din ramura inductivă independent de rezistența circuitului. Tabelul 6 arată că cele mai mari abateri de la unitate ale lui k_3 nu depășesc 0,5% pentru bobine cu factor de calitate $Q = 100$.

Tabelul 6

Q	10	20	50	100
A	0,905	0,95	0,98	0,99
$k_{3\,min}$	0,91	0,952	0,985	0,995

Introducînd factorul de calitate al bobinei Q în relația (47), argumentul impedanței se poate deduce din:

$$\varphi' = \operatorname{arctg}\left[(\omega^2 C^2 R^2 - 1 - 2/Q^2)/(2\omega CR\{1 + 1/Q^2 + [\omega CR + 1/(\omega CR)]/(2Q)\})\right].$$

Neglijînd, pentru bobine cu factor de calitate ridicat, termenii care conțin Q^2 la numitor, se obține

(52) $$\varphi' = \operatorname{arctg}\left(\{[\omega CR - 1/(\omega CR)]/2\}/\{1 + [\omega CR + 1/(\omega CR)]/(2Q)\}\right).$$

Observînd că numărătorul fracției din relația (52) reprezintă argumentul impedanței cu bobină ideală (relația (38)), rezultă $\operatorname{tg}\varphi' = (1/k_4)\operatorname{tg}\varphi$, unde:

(53) $$k_4 = 1 + [\omega CR + 1/(\omega CR)]/(2Q),$$

sau, folosind notația $A = \omega CR$,

(54) $$k_4 = 1 + [1/(2Q)]\,[(A^2 + 1)/A].$$

Pentru un factor de calitate dat valoarea lui k_4 depinde de funcția $X = (A^2 + 1)/A$, care admite un minim pentru valorile lui A care anulează derivata dX/dA. Rezolvînd ecuația $dX/dA = 0$ se obține soluția

$A = 1$. Observînd că în cazul $A = 1$, $\varphi' = 0$, conform relaţiei (52), rezultă că nu se va putea considera k_4 egal cu unitatea decît pentru acest caz particular. Abaterea termenului A de la unitate duce la creşterea lui k_4, ceea ce atrage introducerea unor erori apreciabile în cazul utilizării relaţiilor simple pentru determinarea argumentului, aşa cum arată datele din tabelul 7. De aceea, în toate cazurile cînd A diferă mult de unitate, argumentul se poate determina cu ajutorul relaţiei:

Tabelul 7

A \ Q	10	20	50	100
0,1	1,5	1,252	1,1	1,05
1	1,1	1,05	1,02	1,01
10	1,5	1,252	1,1	1,05
100	6	3,5	2	1,5

(55) $$\varphi' = \operatorname{arctg}\{(A^2-1)/[2A+(A^2+1)/Q]\}.$$

Din cele de mai sus rezultă că circuitul derivaţie cu bobină reală, în cazul cînd parametrii ramurilor îndeplinesc condiţia (9), este echivalent unei impedanţe cu modul constant (independent de R) şi argument variabil, dacă factorul de calitate al bobinei este ridicat. Modulul impedanţei este dat de relaţia simplă $Z = L\omega$, pe cînd argumentul trebuie determinat de relaţia (55) care se reduce la relaţia simplă (38) numai într-un caz particular ($A = 1$, $Q > 100$).

c) *Circuit derivaţie cu bobină reală în cazul* R = 0

Circuitul din fig. 13 conţine o bobină de parametri L, r în derivaţie cu un condensator de capacitate C. Impedanţa circuitului este dată de relaţia:

$$\underline{Z} = \{(r+j\omega L)[1/(j\omega C)]\}/[r+j\omega L+1/(j\omega C)],$$

care, în cazul cînd parametrii circuitului satisfac condiţia (9) devine:

$$\underline{Z} = (r + j\omega L)/(-1 + j\omega Cr).$$

Modulul impedanţei este:

$$Z = \sqrt{(r^2 + \omega^2 L^2)/(1 + \omega^2 C^2 r^2)}.$$

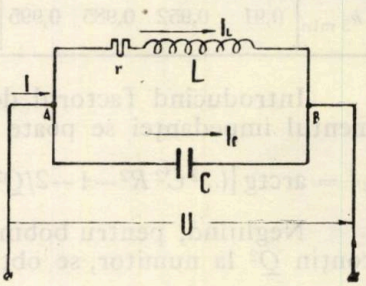


Fig. 13

Curentul nederivat are expresia:

$$I = U\sqrt{(1 + \omega^2 C^2 r^2)/(r^2 + \omega^2 L^2)},$$

iar curentul prin bobină:

$$I_L = U/\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}.$$

Raportul celor doi curenţi este:

$$I/I_L = \sqrt{\omega^2 C^2 r^2 + 1},$$

sau

(56) $$I = k_2 I_L,$$

unde k_2 este exprimat de relația (25) care se referă la circuitul serie inductiv.

Din tabelul 4 se observă că se poate considera $k_2 = 1$ pentru bobine cu factor de calitate mai mare decît 20. Rezultă că în cazul circuitelor cu factor de calitate mai mare decît 20 curentul nederivat I este egal cu curentul I_L din ramura inductivă, conform relației (56).

Proprietatea generală a circuitelor derivație de a pune în evidență, în momentul semicompensării reactanțelor ramurilor, egalitatea a doi curenți, și anume a curentului nederivat cu curentul din una din ramuri, poate fi pusă în valoare prin realizarea unor metode de măsurare a inductanțelor și capacităților bazate pe acest principiu. În cazul utilizării circuitelor derivație în acest scop, relațiile de calcul sînt simple, fiind identice cu cele utilizate în cazul circuitelor serie cu reactanțe semicompensate.

Circuitele derivație cu reactanțe semicompensate, în special cele care îndeplinesc condiția (2), pot de asemenea constitui circuite defazoare de curent, permițînd decalarea curentului cu $\pm 90°$ în raport cu tensiunea aplicată, prin modificarea rezistenței uneia din ramuri.

Primit la 28 VI 1962

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Nicolau Ed., *Măsurări în radiotehnică,* E.E.S., Buc., 1955, vol. **I**, p. 281.
2. Quinet J., *Théorie et pratique des circuits de l'électronique et des amplificateurs,* Dunod, Paris, 1960, t. **I**, p. 251, t. **II**, p. 354.
3. Zaițev I. A., Lurie A. G., *Culegere de probleme de electrotehnică teoretică,* E.E.S., Buc., 1953, p. 96, (trad. din l. rusă).
4. Полулях К. С., *Электронные резонансные измерительные приборы,* Харьков, 1961.
5. Neiman L. R., Kalantarov P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii,* E.E.S., Buc., 1955, vol. **II**, p. 48, (trad. din l. rusă).

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ПОЛУКОМПЕНСИРУЮЩИМИ РЕАКТАНСАМИ

(Резюме)

В случае электрических цепей с реактансами противоположных знаков в последовательном или пареллельном соединении, выявляются некоторые простые отношения связывающие параметры L, C и угловую частоту ω, в случае когда одна из реактанс равна половине реактансы противоположного знака.

Полукомпенсации реактанс имеют место при равенстве двух напряжений — в случае реактанс находящихся в последовательном соединении, или же равенстве двух токов — в случае реактанс состоящие в параллельном соединении.

Анализ различных цепей этого типа приводит к выявлению свойств этих цепей, при помощи которых выводятся простые методы измерений индуктивностей и емкостей, а также и создаются фазовращающие цепи с угловым интервалом в 180°.

CIRCUITS ÉLECTRIQUES À RÉACTANCES SÉMICOMPENSÉES

(Résumé)

Les circuits électriques ayant des réactances de signes contraires, groupées en série où bien en parallèle, permettent à obtenir quelques relations, simples, de liaison entre les paramètres L, C et la fréquence angulaire ω, lorsque l'une des réactances est égale à la moitié de la réactance de signe contraire.

On met en évidence la réalisation de la compensation des réactances par l'égalité de deux tensions, dans le cas des réactances groupées en série, où de deux courants, dans le c s des réactances groupées en parallèle.

En analysant quelques circuits de ce type et leurs propriétés, on met en évidence la possibilité d'obtenir des méthodes nouvelles, simples, pour la mésure des inductances et des capacités et toutefois, de réaliser des circuits déphaseurs à intervalle angulaire de 180°.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 621.3.013.23

UN CÎMP MAGNETIC ALTERNATIV SINUSOIDAL RADIAL CU REPARTIŢIE SINUSOIDALĂ MONOPOLARĂ

DE

AUREL POPOVICI, GH. ŞERBAN, I. SUCHAR şi VITALIE VASILACHE

1. Introducere

Este cunoscut faptul că în maşinile electrice de curent alternativ care funcţionează pe principiul cîmpului magnetic învîrtitor, acest cîmp este realizat cu un număr întreg de perechi de poli, repartizaţi pe periferia activă a maşinii. În construcţiile maşinilor electrice de tip clasic periferia activă este extinsă pe întreaga circumferinţă a armăturii, fiecăreia din cele p perechi de poli revenindu-i $2\pi/p$ radiani.

La maşinile cu statorul în formă de arc, la care lungimea activă a întrefierului este mai mică decît circumferinţa rotorului, periferia activă este reprezentată de un unghi geometric $\alpha < 2\pi$ radiani, iar fiecare pereche de poli este repartizată în spaţiu pe α/p radiani. Ca urmare a acestei repartiţii, viteza unghiulară de rotaţie Ω a cîmpului învîrtitor produs în maşină de curenţii de pulsaţie ω este:

a) $\Omega = \omega/p$ rad/sec sau $n = 60f/p$ rot/min la maşinile clasice şi

b) $\Omega = (\omega/p)\,[\alpha/2\pi)]$ rad/sec sau $n = (60\,f/p)\,[\alpha/(2\pi)]$ rot/min la maşinile cu statorul în formă de arc.

Astfel, la frecvenţa de 50 Hz, viteza maximă a cîmpului obţinută la $p=1$ este $n=3000$ rot/min la maşinile de construcţie clasică, dar este inferioară acestei viteze la maşinile realizate cu statorul în formă de arc. În situaţiile practice în care este necesară acţionarea anumitor dispozitive care să funcţioneze la viteze superioare celei de 3000 rot/min — de exemplu la filaturile de mătase sau la anumite maşini pentru prelucrarea lemnului, diferite maşini unelte portative — este necesar fie să se folosească sisteme mecanice pentru multiplicarea vitezei, fie să se recurgă la alimentarea motoarelor nu direct de la reţeaua electrică de frecvenţă industrială, ci prin intermediul unui convertizor de frecvenţă, sau să se recurgă la maşina cu rotor dublu, sau la soluţia mai puţin comodă a maşinii cu dublă alimentare.

Datorită faptului că orice bobină realizată pe o armătură circulară dă naştere la o pereche de poli, tratarea clasică a problemei vitezei maşinilor electrice de curent alternativ presupune întotdeauna existenţa unui număr par de poli, numărul minim de paşi polari pe periferia maşinii fiind egal cu doi.

În cele ce urmează se va arăta faptul nesemnalat în literatură că prezenţa unui număr par de paşi polari pe periferia unei maşini electrice de curent alternativ nu este obligatorie, aşa cum s-a considerat pînă în prezent; există posibilitatea de a produce un cîmp magnetic cu repartiţie sinusoidală radială sau axială, astfel încît la o circumferinţă (2π radiani) să corespundă un singur pas polar, ceea ce permite să se obţină o viteză de rotaţie a cîmpului învîrtitor de două ori mai mare decît în cazul maşinii bipolare alimentate cu curenţi de aceeaşi frecvenţă. *Pentru cîmpul care pe 2π radiani geometrici are un singur pas polar vom folosi denumirea de cîmp monopolar.*

În realizarea practică a unei maşini electrice de curent alternativ monofazat, avînd cîmpul magnetic monopolar cu variaţie sinusoidală în timp şi în spaţiu, se pot adopta diferite variante: astfel se poate distribui sinusoidal inducţia pe o suprafaţă activă de lăţime uniformă, fie prin folosirea unui sistem magnetic primar excitat de o bobină unică, distribuţia sinusoidală a inducţiei fiind realizată prin variaţia lungimii întrefierului, fie prin utilizarea unui sistem inductor cu bobină unică, la care însă întrefierul este de lungime constantă pe toată periferia maşinii dar lăţimea zonei sale active variază sinusoidal. Menţionăm că rotorul unei astfel de maşini poate fi realizat sub forma unui cilindru străbătut în sens radial de liniile de inducţie magnetică (maşină monopolară cu cîmp radial), sau în formă de disc, liniile de inducţie magnetică în întrefier fiind paralele cu axul discului (maşină monopolară cu cîmp axial).

Cîmpul care se obţine pe această cale nu contravine legilor cunoscute ale cîmpului alternativ, însă în acest caz numărul de perechi de paşi polari revine la $p = 1/2$.

2. Consideraţii teoretice

Se consideră expresia cîmpului radial b cu variaţie şi repartiţie sinusoidală în întrefierul unei maşini:

$$b = B_m \cos \omega t \cos p\alpha , \tag{1}$$

în care: B_m — amplitudinea cîmpului alternativ, ω — pulsaţia cîmpului alternativ, $2p$ — numărul de poli sau paşi polari ai înfăşurării primare, t — timpul, α — unghiul geometric la centru care defineşte poziţia unui punct din întrefier în raport cu axa unui pol inductor, luată ca origine.

După teorema lui M. Leblanc se ştie că acest cîmp se poate descompune în două cîmpuri radiale distribuite sinusoidal, de amplitudine $B_m/2$, care se rotesc în sensuri contrare cu viteza unghiulară $\Omega = \omega/p$.

Dacă însă — spre deosebire de modul clasic de prezentare a diverselor înfăşurări de maşini electrice de construcţie normală, la care numărul de paşi polari pe periferie este totdeauna par — se consideră cazul în care pe întreaga periferie a maşinii este distribuit sinusoidal un singur pas polar al unui cîmp radial cu variaţie sinusoidală în timp, se ajunge la rezultate interesante. În adevăr, exprimînd pentru această situaţie relaţia clasică $2\pi = 2p\tau$ între lungimea întrefierului 2π şi pasul polar τ, ambele exprimate în radiani, se obţine $2\pi = \tau$; deci pentru cîmpul repartizat astfel rezultă $p = 1/2$.

Admiţînd ca posibilă realizarea unui astfel de cîmp, aşa cum s-a specificat la pct. 1, şi înlocuind $p = 1/2$ în expresia (1), adică

$$b = B_m \cos \omega t \cos (\alpha/2), \tag{2}$$

rezultă, fireşte, că acest cîmp se poate descompune în două cîmpuri radiale învîrtitoare:

$$b_1 = \frac{1}{2} B_m \cos (\alpha/2 - \omega t) \quad \text{şi} \quad b_2 = \frac{1}{2} B_m \cos (\alpha/2 + \omega t), \tag{3}$$

a căror viteză unghiulară este $\Omega = \pm 2\omega$.

Faţă de cazul clasic, faptul că acest cîmp alternativ radial are pe întreaga circumferinţă un singur pas polar, atrage după sine aspecte deosebite pentru cîmpurile învîrtitoare componente, aspecte de care trebuie să se ţină seama în utilizarea lor practică. Aceste particularităţi nu se observă uşor din expresia analitică, de aceea le vom pune în evidenţă utilizînd, direct pe periferia întrefierului, demonstraţia grafică [1] a distribuţiei cîmpurilor componente (3).

Demonstraţia grafică se execută în următoarele premise:

a) conform expresiei (2) cîmpul este radial, cu repartiţie sinusoidală monopolară şi este produs de un curent alternativ sinusoidal de pulsaţie ω;

b) cîmpul se presupune localizat în întrefierul unei maşini cu rotorul cilindric, al cărei circuit magnetic permite închiderea corespunzătoare a liniilor de inducţie magnetică, situaţie practic realizabilă.

În fig. 1, ca linie de referinţă pentru reprezentarea cîmpului sinusoidal şi a componentelor sale radiale s-a ales linia întrefierului (cercul de rază R trasat cu linie plină), iar ca origine a unghiurilor α — axa de simetrie Oa_0 a cîmpului inductor. Curba b este locul geometric al extremităţii vectorilor ce reprezintă cîmpul alternativ radial monopolar; amplitudinea b_0 a acestui cîmp are loc în orice moment în punctul a_0, dar sensul şi valoarea sa variază în timp după ecuaţia (2). În mod analog curbele b_d şi b_i reprezintă cîmpul rotitor direct şi cel invers, ale căror valori maxime sînt situate în punctele a_2 şi a_2' pentru care $p\alpha = \pm\omega t$ adică $\alpha/2 = \pm \omega t$.

Pentru a obţine această diagramă, din fiecare punct al întrefierului, definit printr-un unghi la centru α, s-a trasat sub unghiul $p\alpha = \alpha/2$ faţă de direcţia radială, axa după care se descompune cîmpul B_m. Vectorii B_d şi B_i, care sînt componentele directă şi inversă ale lui b şi au modulul $B_m/2$, se trasează pe direcţii ce formează cu această axă unghiurile $\pm\omega t$, iar proiecţiile lor pe direcţia radială reprezintă componentele radiale b_d şi b_i în punctul considerat (de exemplu b_{d1} şi b_{i1} în punctul a_1).

Diagrama corespunde momentului cînd $\omega t = 60°$. În punctul a_0 sînt puse în evidenţă argumentele $-\omega t$ şi $+\omega t$ ale cîmpurilor B_d şi B_i faţă de axa de descompunere, care în acest caz corespunde cu direcţia radială. În a_1 sînt indicate unghiurile pe care le fac B_d şi B_i cu direcţia radială, conform relaţiei (3). În a_2 se observă cum B_d coincide cu direcţia radială, marcînd valoarea maximă a cîmpului direct; în a_2' are loc o situaţie analogă pentru cîmpul B_i.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Privind în ansamblu, se observă că în timp ce cîmpul alternativ radial b este repartizat spaţial continuu pe o singură alternanţă, fără nici un caracter deosebit, cîmpurile radiale învîrtitoare componente b_d

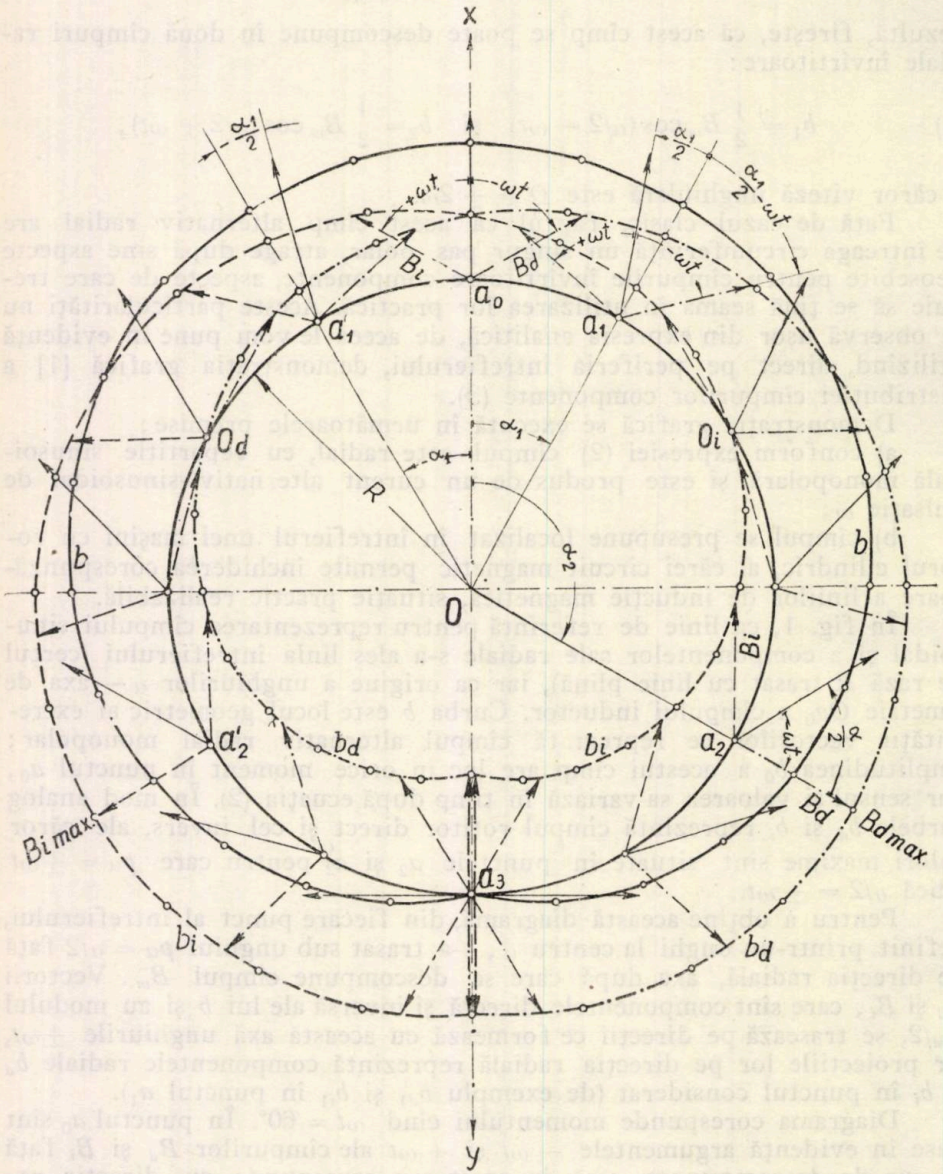


Fig. 1

şi b_i, repartizate pe periferie de asemenea sinusoidal, cuprind în mişcarea lor de rotaţie porţiuni variabile din ambele alternanţe, respectiv o porţiune de pol nord şi una de pol sud, totalizînd în mod permanent

un singur pas polar. Acest fapt este pus în evidenţă în fig. 2, în care, pentru diferite momente din decursul unei perioade, s-au reprezentat diagramele de repartiţie pe periferia întrefierului numai pentru cîmpul învîrtitor radial direct b_d al cărui maxim B_{dm} se observă că se roteşte în sensul orar. Pentru cîmpul invers b_i, la aceleaşi momente, se obţin diagrame simetrice faţă de axa verticală, considerată ca poziţie iniţială, sensul lor de rotaţie fiind cel antiorar. Linia care pleacă din centrul diagramei şi trece în orice moment prin valoarea maximă B_{dm} reprezintă axa polului rotitor, iar prelungirea ei în sens invers — linia neutră, cu semnificaţia ei clasică. Această linie, pe care o vom numi *axa dinamică* a cîmpului b_d, cuprinde deci axa dinamică a polului şi în prelungirea ei, de cealaltă parte a centrului diagramei, linia neutră dinamică. În mişcarea de rotaţie, apariţia polului de sens contrar se face în mod progresiv în raport cu linia neutră dinamică. De o parte şi de alta a liniei neutre dinamice avem în general poli de semne contrarii, în afară de momentele cînd ea coincide, în mişcarea de rotaţie, cu linia neutră statică (segmentul Oa_3, fig. 2a şi 2g), în care caz, de ambele părţi ale liniei neutre cîmpul are aceeaşi polaritate. De asemenea trebuie subliniat aspectul deosebit al cîmpului rotitor la trecerea prin axa neutră statică, pe care aici o vom numi şi axă de discontinuitate. Astfel, la axa neutră statică se constată că trecerea cîmpului rotitor se face printr-o discontinuitate, de la o valoare de un semn — dependentă de momentul considerat — la valoarea egală de semn contrar (fig. 2b...2f şi fig. 2h....2l). Între momentele reprezentate în fig. 2a şi fig. 2g, separate de un interval de timp de jumătate de perioadă, axa dinamică a cîmpului rotitor a efectuat o rotaţie completă, ceea ce arată că spre deosebire de viteza sincronă a maşinilor de concepţie clasică, la care nu se depăşeşte o rotaţie într-o perioadă, la cîmpul monopolar, în timpul unei perioade complete de variaţie a curentului, această axă va efectua două rotaţii. Într-un minut rezultă $n = 60.2f = 120f$ rotaţii.

O altă deosebire faţă de cazul clasic, la care unghiul electric este mai mic sau egal cu unghiul geometric, în cazul cîmpului monopolar unghiul electric este de două ori mai mare decît unghiul geometric.

Fig. 2a se referă la momentul trecerii cîmpului alternativ prin valoarea maximă pozitivă, fig. 2g — la momentul trecerii prin valoarea maximă negativă, iar fig. 2d şi fig. 2j — la trecerea acestui cîmp prin zero. Fig. 2a şi 2g corespund momentelor în care cîmpul direct şi cel invers coincid, iar fig. 2d şi 2g — momentelor cînd aceste cîmpuri sînt în opoziţie. Cîmpul invers a fost figurat cu linie întreruptă (fig. 2d şi 2j).

Să stabilim în cazul de faţă interpretările analoge celor folosite la cîmpul rotitor clasic, pentru a arăta mai sugestiv elementele ce caracterizează mişcarea sincronă şi repartiţia cîmpului sincron.

Faţă de cîmpul rotitor clasic, la care repartiţia cîmpului pe periferie este reprezentată de una sau mai multe perioade întregi ale unei sinusoide indeformabile, care se deplasează cu viteză sincronă de-a lungul întrefierului, la cîmpul monopolar avem pe întrefier numai o jumătate de perioadă a sinusoidei, la care aspectul indeformabil rămîne valabil numai pentru valoarea absolută a cîmpului. Din fig. 2, precum şi din

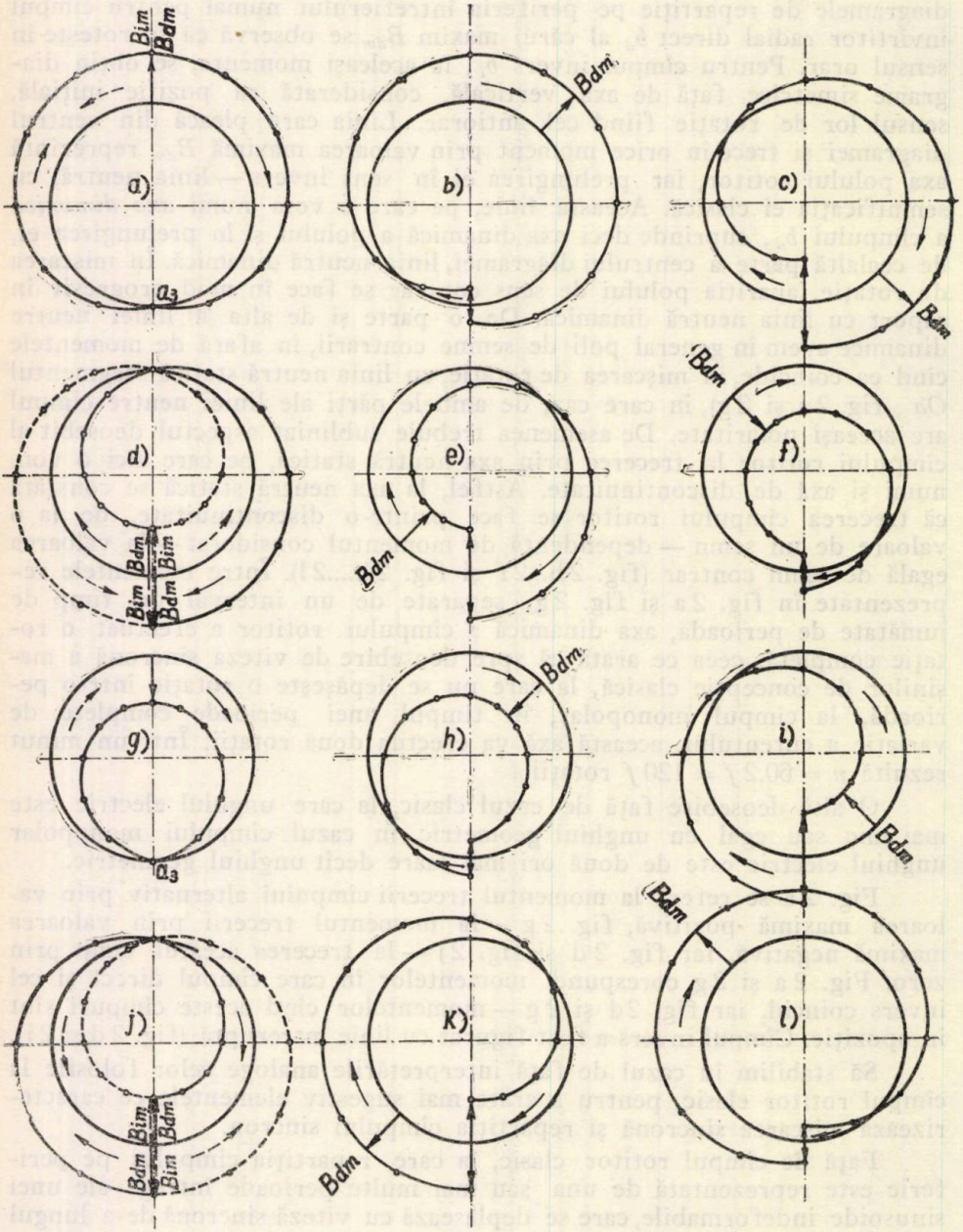


Fig. 2

reprezentarea panoramică (fig. 3), se observă că semnul cîmpului este totdeauna diferit pe porţiunea $a_3 O_d$ faţă de cel din porţiunea $O_d a_3'$, schimbarea de semn din punctul comun $a_3 a_3'$ făcîndu-se prin discontinuitate. Porţiunea $a_3 a_3'$ reprezintă desfăşurarea întrefierului (360° geometrice, respectiv 180° electrice), O_d şi O_d' — intersecţia întrefierului cu liniile neutre dinamice ale cîmpului rotitor direct, la care se face schimbarea de polaritate *SN* respectiv *NS*, iar a_3 şi repetarea lui, a_3' — punctul fix de intersecţie a liniei neutre statice cu periferia. Diversele situaţii în timp ale cîmpului sincron direct, dintre care numai cîteva sînt redate în fig. 3, pot fi găsite din aproape în aproape deplasînd liniar, unidirecţional în raport cu punctul fix a_3, punctul O_d (sau O_d') solidar cu sinusoida căreia îi aparţine. Se observă lesne că valorile inducţiei în a_3 şi a_3' (punctul de discontinuitate) sînt în permanenţă egale şi de semne contrarii, decalajul între ele pe sinusoidă fiind de 180°. Această deplasare pe diagramă reprezintă în realitate mişcarea de rotaţie unidirecţională a cîmpului învîrtitor.

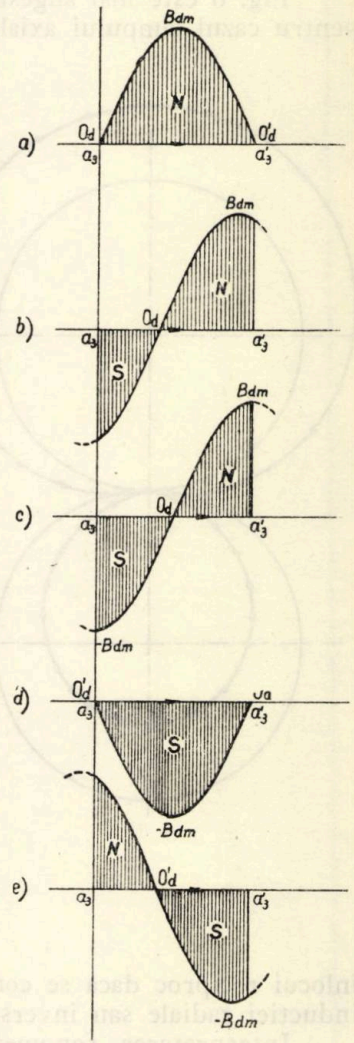


Fig. 3

Din cele arătate mai sus reiese că la cîmpul învîrtitor cu repartiţie monopolară, în orice punct al întrefierului care se mişcă cu viteza de sincronism 2ω, valoarea inducţiei rămîne constantă şi îşi păstrează sensul în tot decursul unei rotaţii, la fel ca în cazul clasic, însă după fiecare rotaţie, cînd punctul considerat depăşeşte axa de discontinuitate, sensul cîmpului se schimbă. Astfel, aspectul valorii constante a inducţiei în mişcarea sincronă, pe care îl prezintă cîmpul învîrtitor clasic, îl regăsim la cîmpul învîrtitor cu repartiţie monopolară numai în privinţa valorii absolute.

Faptul că la axa de discontinuitate Oa_3 — şi numai aici — apar permanent două valori egale şi opuse, care se deplasează în acelaşi sens, atît pentru valori oarecare cît şi pentru valorile maxime, impun interpretarea cîmpului monopolar, distribuit sinusoidal pe o circumferinţă, ca fiind una din părţile componente ale unui cîmp alternativ bipolar cu o distribuţie pe un întrefier conceput sub forma a două cercuri tangente (fig. 4 şi fig. 5). Acest cîmp bipolar distribuit pe 4π radiani îl vom numi *cîmp bipolar bicircular*. Aplicînd cîmpului alternativ bipolar bicircular teorema lui M. Leblanc, reiese în mod evi-

dent că fiecare din cele două cîmpuri învîrtitoare componente reprezintă, din punct de vedere al repartiţiei, o perioadă completă a unei unde, care în mişcarea ei de rotaţie sincronă, parcurge simultan cu viteza 2ω ambele întrefieruri circulare, descriind o traiectorie în formă de opt (fig. 6 şi fig. 7).

Fig. 6 este mai sugestivă pentru cazul cîmpului radial, iar fig. 7 pentru cazul cîmpului axial; după împrejurări, aceste reprezentări se pot

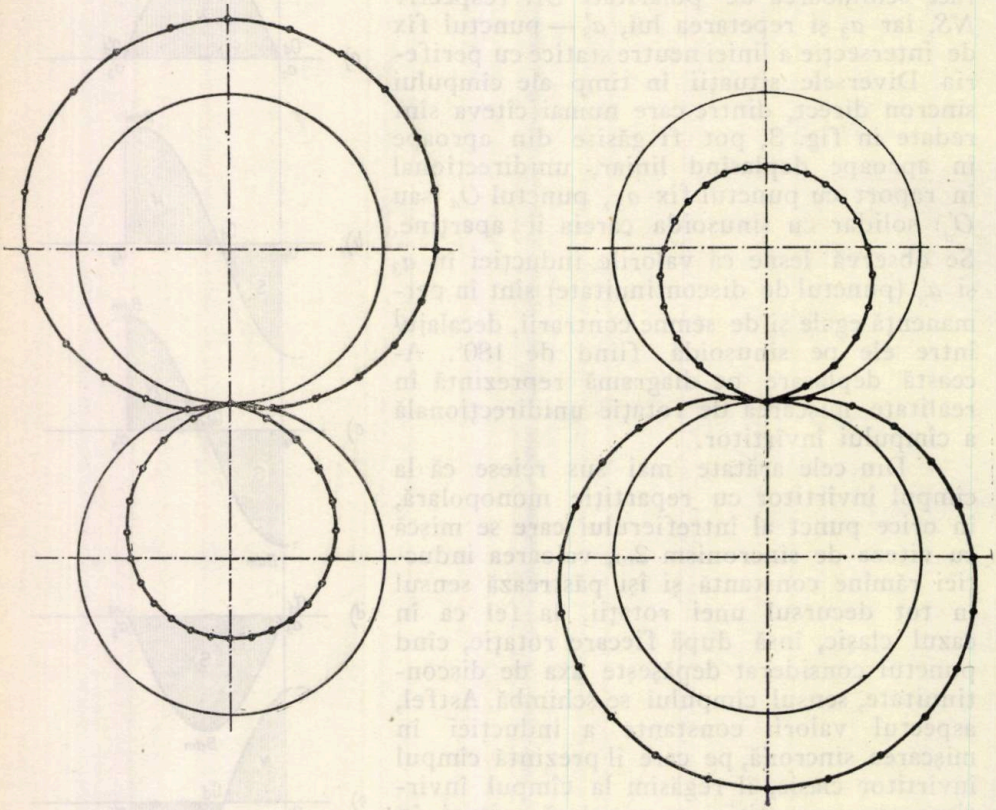


Fig. 4

înlocui reciproc dacă se consideră reprezentate pe direcţie axială valorile inducţiei radiale sau invers.

Interpretarea fenomenelor menţionate pe ansamblul celor două cercuri se referă la cîmpul bipolar bicircular, în timp ce prin tratarea independentă a ceea ce se petrece numai pe una dintre traiectoriile circulare se regăseşte cîmpul monopolar circular cu toate proprietăţile lui expuse mai sus. Menţionăm că repartizarea cîmpului alternativ bipolar pe două circumferinţe tangente nu exclude dar nici nu implică legătura magnetică a celor doi poli. Aşa cum s-a arătat, existenţa cîmpului pe unul dintre paşii polari poate fi concepută în practică chiar în absenţa

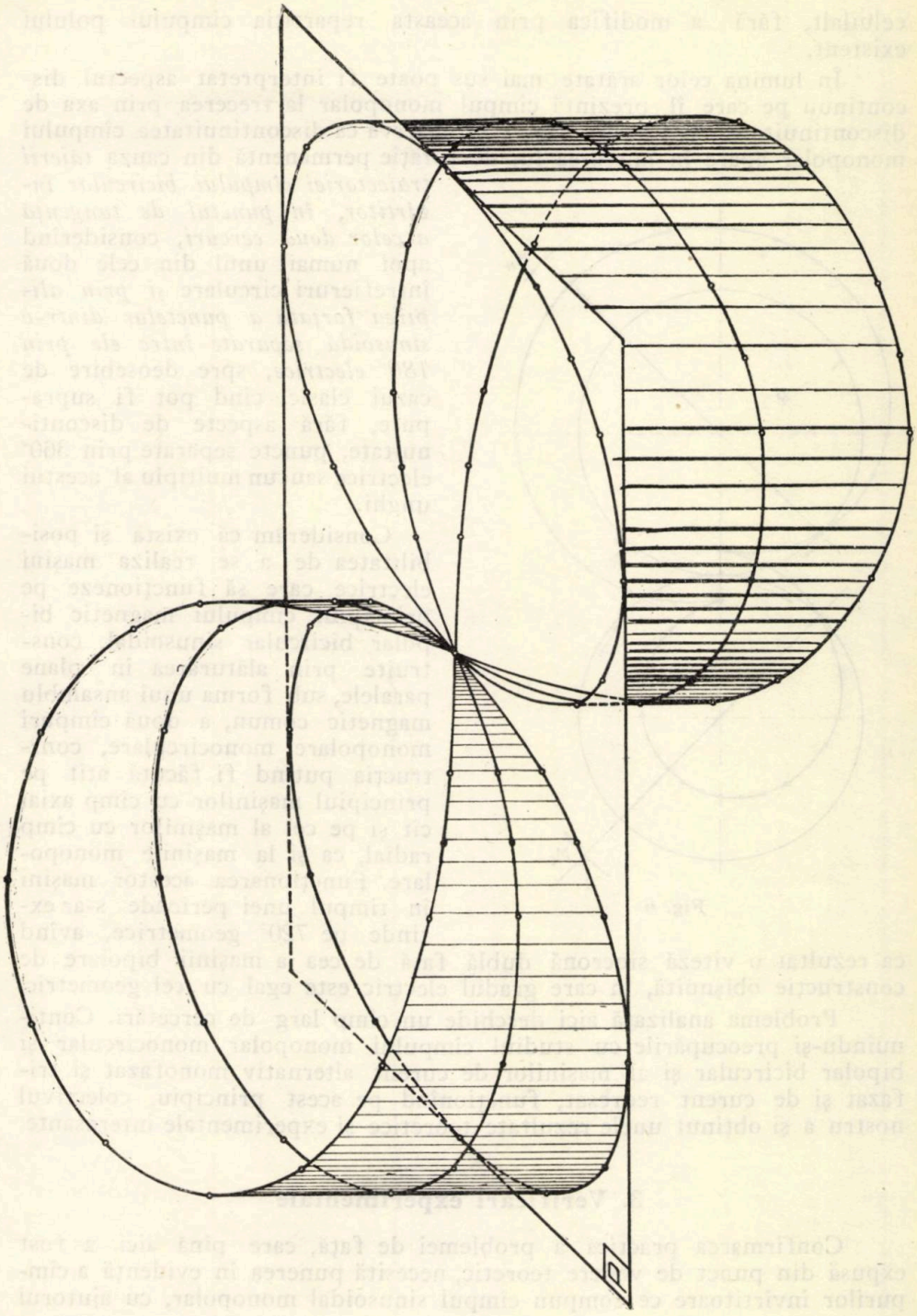


Fig. 5

celuilalt, fără a modifica prin aceasta repartiţia cîmpului polului existent.

În lumina celor arătate mai sus poate fi interpretat aspectul discontinuu pe care îl prezintă cîmpul monopolar la trecerea prin axa de discontinuitate. Astfel, din fig. 7 se observă că discontinuitatea cîmpului monopolar apare în mişcarea lui de rotaţie permanentă din cauza *tăierii traiectoriei cîmpului bicircular învîrtitor, în punctul de tangenţă a celor două cercuri,* considerînd apoi numai unul din cele două întrefieruri circulare *şi prin alipirea forţată a punctelor dintr-o sinusoidă separate între ele prin 180° electrice,* spre deosebire de cazul clasic, cînd pot fi suprapuse, fără aspecte de discontinuitate, puncte separate prin 360° electrice sau un multiplu al acestui unghi.

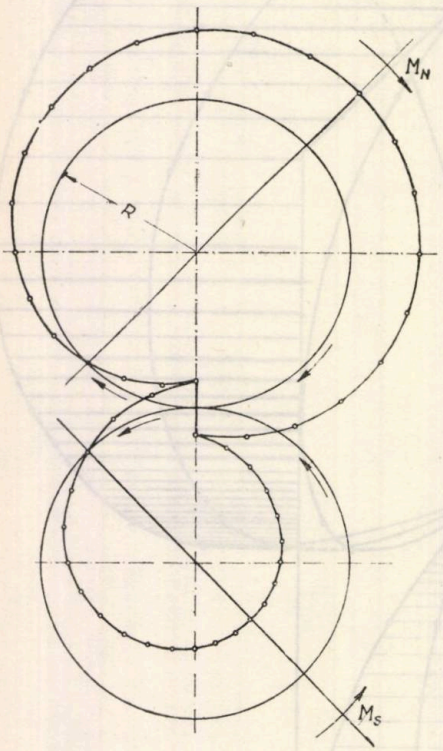


Fig. 6

Considerăm că există şi posibilitatea de a se realiza maşini electrice care să funcţioneze pe principiul cîmpului magnetic bipolar bicircular sinusoidal, construite prin alăturarea în plane paralele, sub forma unui ansamblu magnetic comun, a două cîmpuri monopolare monocirculare, construcţia putînd fi făcută atît pe principiul maşinilor cu cîmp axial cît şi pe cel al maşinilor cu cîmp radial, ca şi la maşinile monopolare. Funcţionarea acestor maşini în timpul unei perioade s-ar extinde pe 720° geometrice, avînd ca rezultat o viteză sincronă dublă faţă de cea a maşinii bipolare de construcţie obişnuită, în care gradul electric este egal cu cel geometric.

Problema analizată aici deschide un cîmp larg de cercetări. Continuîndu-şi preocupările cu studiul cîmpului monopolar monocircular şi bipolar bicircular şi al maşinilor de curent alternativ monofazat şi trifazat şi de curent redresat, funcţionînd pe acest principiu, colectivul nostru a şi obţinut unele rezultate teoretice şi experimentale interesante.

3. Verificări experimentale

Confirmarea practică a problemei de faţă, care pînă aici a fost expusă din punct de vedere teoretic, necesită punerea în evidenţă a cîmpurilor învîrtitoare ce compun cîmpul sinusoidal monopolar, cu ajutorul

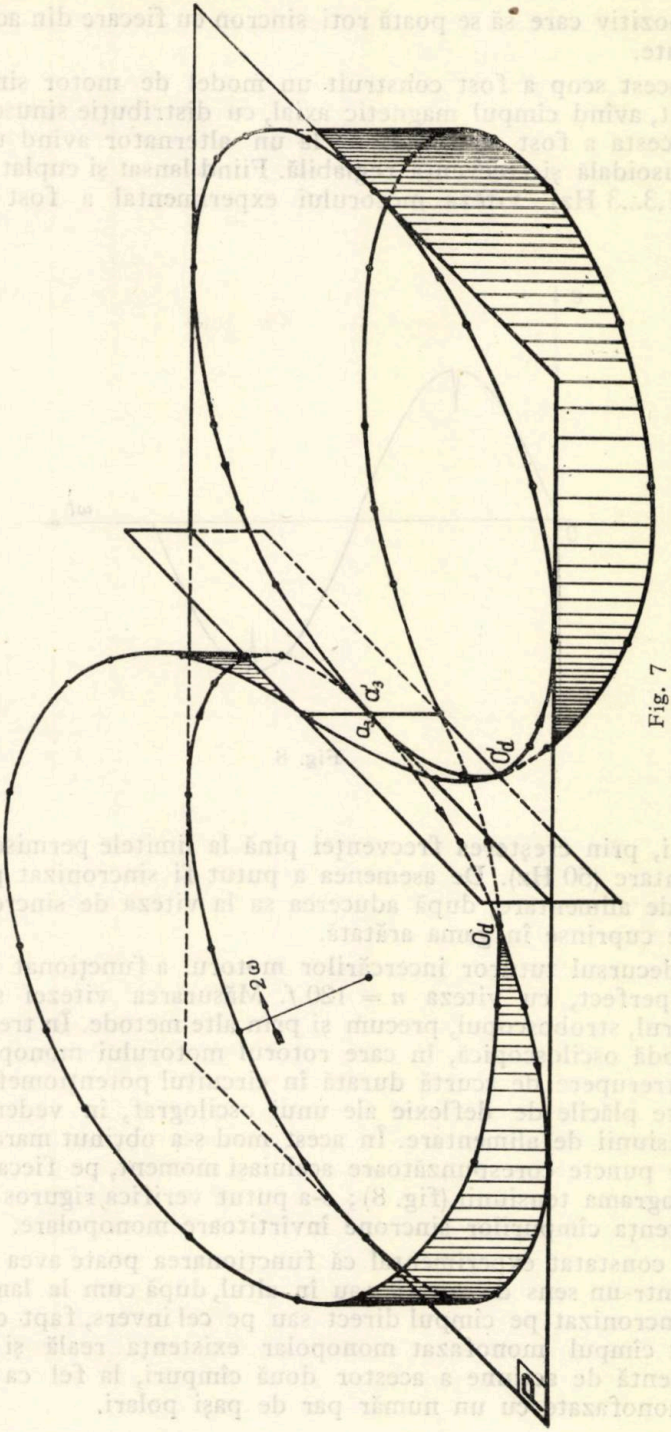


Fig. 7

unui dispozitiv care să se poată roti sincron cu fiecare din aceste cîmpuri componente.

În acest scop a fost construit un model de motor sincron reactiv monofazat, avînd cîmpul magnetic axial, cu distribuţie sinusoidală monopolară. Acesta a fost alimentat de la un alternator avînd unda de tensiune sinusoidală şi frecvenţa reglabilă. Fiind lansat şi cuplat la frecvenţă redusă (1,3...3 Hz), viteza motorului experimental a fost mărită fără

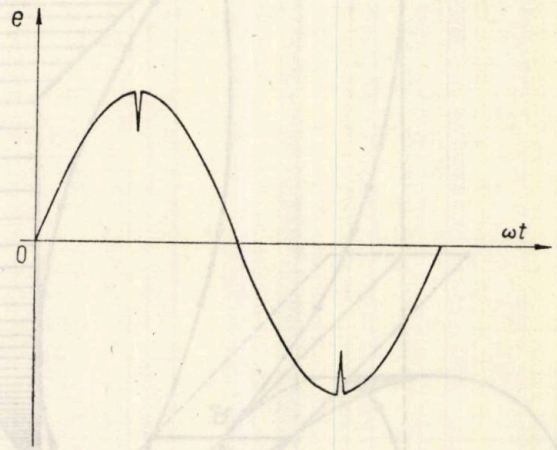


Fig. 8

dificultăţi, prin creşterea frecvenţei pînă la limitele permise de sistemul de alimentare (50 Hz). De asemenea a putut fi sincronizat prin cuplarea la sursa de alimentare, după aducerea sa la viteza de sincronism pentru frecvenţe cuprinse în gama arătată.

În decursul tuturor încercărilor motorul a funcţionat numai la sincronism perfect, cu viteza $n = 120 f$. Măsurarea vitezei s-a făcut cu tachometrul, stroboscopul, precum şi prin alte metode. În treacăt amintim şi o metodă osciloscopică, în care rotorul motorului monopolar produce cîte o întrerupere de scurtă durată în circuitul potenţiometrului în care sînt legate plăcile de deflexie ale unui oscilograf, în vederea oscilografierii tensiunii de alimentare. În acest mod s-a obţinut marcarea fiecărei rotaţii în puncte corespunzătoare aceluiaşi moment, pe fiecare alternanţă din oscilograma tensiunii (fig. 8); s-a putut verifica riguros şi pe această cale existenţa cîmpurilor sincrone învîrtitoare monopolare.

S-a constatat experimental că funcţionarea poate avea loc fără predilecţie într-un sens de rotaţie sau în altul, după cum la lansare motorul a fost sincronizat pe cîmpul direct sau pe cel invers, fapt care confirmă şi pentru cîmpul monofazat monopolar existenţa reală şi posibilitatea independentă de acţiune a acestor două cîmpuri, la fel ca în cazul maşinilor monofazate cu un număr par de paşi polari.

4. Concluzii

În lucrare se demonstrează pentru prima dată şi se confirmă experimental posibilitatea de a produce şi utiliza un cîmp monofazat cu repartiţie monopolară sinusoidală în spaţiu şi variaţie sinusoidală în timp.

Cu ajutorul teoremei lui M. Leblanc şi a unei metode grafice se arată că acest cîmp se descompune în două cîmpuri învîrtitoare de sensuri opuse, fiecare avînd viteza $n = 120f$, adică dublul vitezei de rotaţie a cîmpului sincron bipolar produs de curenţi de aceeaşi frecvenţă.

Se subliniază particularităţile acestor cîmpuri, se introduce noţiunea de cîmp magnetic monofazat monopolar monocircular şi bipolar bicircular sinusoidal — radial sau axial — şi se explică aspectul de discontinuitate care apare la fiecare cîmp rotitor component al cîmpului alternativ monopolar prin tăierea unui pas polar al cîmpului bipolar bicircular, care a fost necesară pentru a face trecerea de la acest cîmp, la cîmpul monopolar monocircular.

Încercările de verificare experimentală a existenţei cîmpurilor învîrtitoare ce compun cîmpul sinusoidal monopolar şi a posibilităţii lor de a acţiona independent au fost făcute pe un model de motor sincron reactiv monofazat, imaginat şi construit în acest scop, avînd un singur pas polar. Încercările au confirmat întru totul concluziile teoretice şi au dovedit posibilitatea de a realiza motoare bazate pe acest principiu.

Se indică de asemenea posibilitatea realizării de maşini monofazate care să funcţioneze pe principiul cîmpului alternativ sinusoidal bipolar bicircular — radial sau axial.

Primit la 17 II 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică,
Laboratorul de electrotehnică generală

BIBLIOGRAFIE

1. Popovîci A., Gavrilaş N., Bul. Inst. polit, Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, pp. 251—260.

ПЕРЕМЕННОЕ СИНУСОИДАЛЬНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ С ОДНОПОЛЮСНЫМ СИНУСОИДАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

(Резюме)

Указывается и экспериментально подтверждается впервые возможность создавать и использовывать однофазное поле с пространственным однополюсным синусоидальным распределением с синусоидальным изменением во времени.

При помощи теоремы Лебланка и графического метода это поле разлагают на два вращающихся поля имеющих скорость $n = 120f$, т. е. вдвое большую чем скорость вращения двухполюсного синхронного поля создаваемого токами той же частоты.

Подчеркиваются особенные свойства этих полей, вводится понятие магнитного поля — однофазного, однополюсного однокругового и двухполюсного двухкругового, радиального или аксиального и объясняется прерывистость вращающихся полей, составляющих переменное однополюсное поле, вызванная исключением одного полярного шага двухполюсного двухкругового поля с целью получения однополюсного однокругового поля.

Экспериментальная проверка существования вращающихся полей в составе синусоидального однополюсного поля и возможности их независимого функционирования производились на специально задуманной и построенной модели однофазного реактивного синхронного двигателя с одним полюсным шагом. Испытания вполне подтверждают теоретические выводы, а также доказывают возможность создания двигателей работающих на основании этого принципа. Указывается также возможность создания однофазных машин работающих по принципу переменного синусоидального двухполюсного двухкругового — радиального или аксиального — магнитного поля.

UN CHAMP MAGNÉTIQUE ALTERNATIF SINUSOÏDAL À DISTRIBUTION SINUSOÏDALE MONOPOLAIRE

(Résumé)

Dans ce travail on relève pour la première fois et on confirme à l'aide des expériences la possibilité de réaliser et d'utiliser un champ monophasé à répartition spatiale monopolaire sinusoïdale, ayant une variation sinusoïdale en temps.

À l'aide du théoreme de M. Leblanc et d'une méthode graphique adéquate on décompose ce champ en deux champs tournants de sens opposés, ayant chacun la vitesse de rotation $n = 120f$, c'est-à-dire le double de la vitesse du champ synchrone bipolaire produit par des courants d'une même fréquence.

On relève les propriétés spécifiques de ces champs, on introduit la notion de champ magnétique monophasé monopolaire monocirculaire et bipolaire bicirculaire — radial ou axial — et on explique l'aspêt de discontinuité présenté par les champs tournants composants du champ alternatif monopolaire, par l'amputation d'un pas polaire du champ bipolaire bicirculaire, nécessaire pour obtenir le champ monopolaire monocirculaire.

Les essais de verification expérimentale quant à l'existence des champs tournants qui composent le champ sinusoïdal monopolaire et de leur possibilité d'actionner indépendement ont été faits sur un modèle de moteur synchrone réactif monophasé, à un seul pas polaire, imaginé et construit en ce but. Les essais ont confirmé entièrement les conclusions théoriques et ont prouvé la possibilité de réaliser des moteurs utilisant ce principe.

On indique aussi la posibilité de réaliser des machines monophasées qui puissent fonctionner sur le principe du champ alternatif sinusoïdal bipolaire bicirculaire — radial ou axial.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 621.313.33

CONSIDERAŢIUNI EXPERIMENTALE ASUPRA FUNCŢIONĂRII UNUI MOTOR ASINCRON ÎN SCURTCIRCUIT, CU STATORUL ALIMENTAT CU TENSIUNI ASIMETRICE

DE

N. V. BOŢAN, V. PRISĂCARU, BORIS PONOMAREV
şi LORIN CANTEMIR

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 4—6 februarie 1960

1. Într-o lucrare anterioară [1] au fost studiate aspectele teoretice în legătură cu alimentarea unui motor asincron trifazat cu tensiuni asimetrice.

De asemenea într-o altă lucrare [2] s-a studiat comportarea unui motor asincron în scurtcircuit atunci cînd funcţionează alimentat cu tensiuni asimetrice în stator, prin introducerea uneia sau a două rezistenţe pe una sau două din fazele statorului.

Din lucrările amintite rezultă că prin acest regim de funcţionare se pot obţine caracteristici mecanice înmuiate, fapt care este avantajos fie pentru reglajul vitezei în limite înguste, fie pentru obţinerea unei alunecări ridicate, favorabilă în cazul cînd motorul asincron funcţionează cu volant.

În vederea completării studiului teoretic [1] cu date experimentale, în lucrarea de faţă se prezintă condiţiile de funcţionare ale motorului asincron în scurtcircuit alimentat cu tensiuni asimetrice, asimetria fiind obţinută prin introducerea de reactanţe inductive sau capacitive, pe una sau două faze ale statorului, sau prin introducerea de rezistenţe şi reactanţe capacitive şi inductive pe două faze ale statorului.

Studiul experimental a fost întreprins asupra cîtorva motoare asincrone în scurtcircuit, rezultatele obţinute fiind în general concordante.

În cele ce urmează sînt indicate rezultatele obţinute pe motorul de 0,6 kW, 220/380 V, 1 460 rot/min, cos $\varphi = 0{,}8$, adică pentru acelaşi motor ca şi în lucrarea [2].

2. Iniţial s-a studiat comportarea motorului în cazul cînd se introduce o reactanţă inductivă pe o singură fază a statorului şi anume, pe faza *3*.

În fig. 1...4 sînt reprezentate respectiv variaţiile curenţilor, puterii, cos φ şi vitezei de rotaţie în funcţie de căderea de tensiune pe faza pe care s-a montat reactanţa inductivă.

După cum se observă, curenţii pe fazele *1* şi *2* (alimentate direct) cresc aproximativ la fel — micile diferenţe putînd fi explicate prin disimetria iniţială pe fazele motorului — în timp ce pe faza *3* curentul scade mult. Astfel, în timp ce pentru o cădere de tensiune de 100 V pe faza *3*, creşterea curenţilor pe fazele *1* şi *2* este de circa 33%, pe faza *3* curentul scade cu 66%. Acelaşi lucru se observă în fig. 2 şi în legătură cu variaţia puterilor. Se constată însă că o dată cu creşterea căderii de tensiune, diferenţa dintre puterile absorbite de fazele *1* şi *2* este mult mai mare, nemaiputînd fi atribuită disimetriei iniţiale. Pe faza *3* puterea scade faţă de valoarea ei nominală ; această diferenţă se datoreşte variaţiei tensiunilor pe cele trei faze, din cauza disimetriei introduse.

Dacă ne referim la aceeași cădere de tensiune de 100 V se observă că în timp ce pe faza *1* puterea crește aproximativ cu 33%, pe faza *2* crește cu aproximativ 82%, iar pe faza *3* scade cu aproximativ 85%.

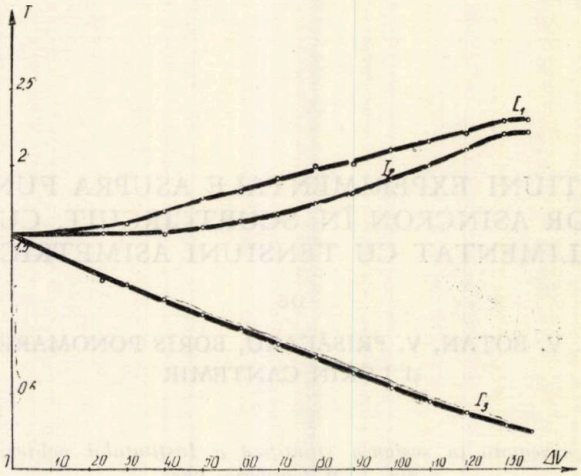


Fig. 1

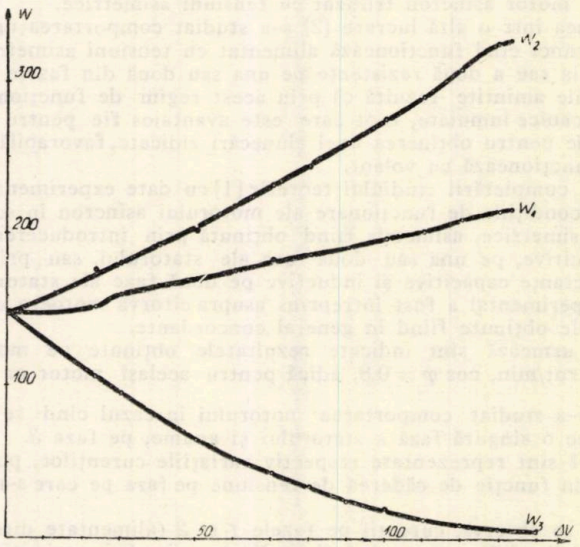


Fig. 2

Cît privește factorul de putere el păstrează în general o aceeași variație ca și puterea pe fază, cu o singură deosebire și anume, în timp ce pe faza *1* se menține aproape constant, pe faza *2* crește aproximativ în aceeași măsură cu care scade pe faza *3*. Viteza scade cu creșterea căderii de tensiune în limite în general mici.

Rezultă deci că metoda de variație a vitezei mașinii prin introducerea unei reactanțe pe una din fazele statorului nu este recomandabilă, întrucît, pe de-o parte duce la încărcări neuniforme ale mașinii pe faze, deci la limitarea posibilităților de încărcare a mașinii, iar pe de altă parte variația de viteză ce se obține este redusă.

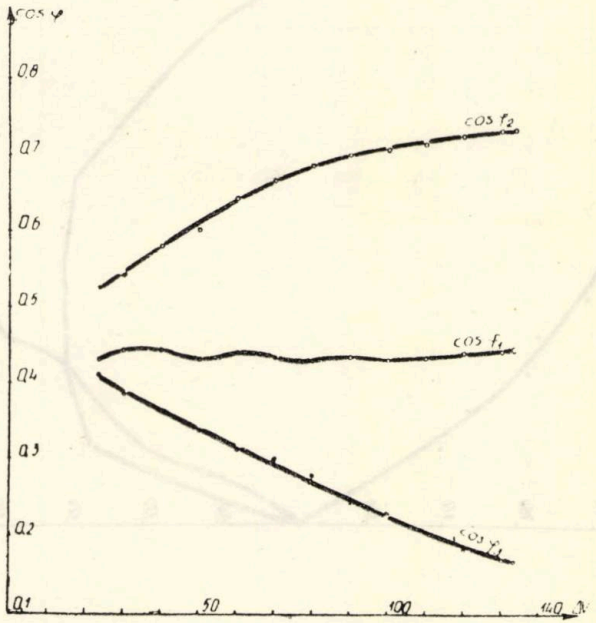


Fig. 3

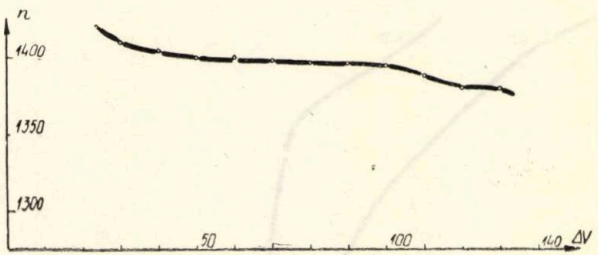


Fig. 4

3. În acest paragraf sînt analizate rezultatele experimentale obținute prin introducerea a două reacțanțe inductive pe fazele *2* și *3* ale statorului.

În fig. 5...8 sînt reprezentate variațiile curenților, puterii, factorului de putere și vitezei de rotație, în funcție de căderile de tensiune, egale pe cele două reactanțe inductive.

După cum se observă din fig. 5, curentul pe faza alimentată normal crește o dată cu creșterea căderilor de tensiune pe celelalte două faze.

Cît privește fazele alimentate prin rezistențe inductive, se observă o scădere bruscă a curentului pe faza *2*, pînă la o anumită valoare a căderii de tensiune, după care curentul începe să crească din nou. Pe faza *3* curentul se menține aproape constant pînă la aceeași valoare a căderii de tensiune, după care crește aproximativ în aceeași măsură ca și curenții de pe celelalte faze.

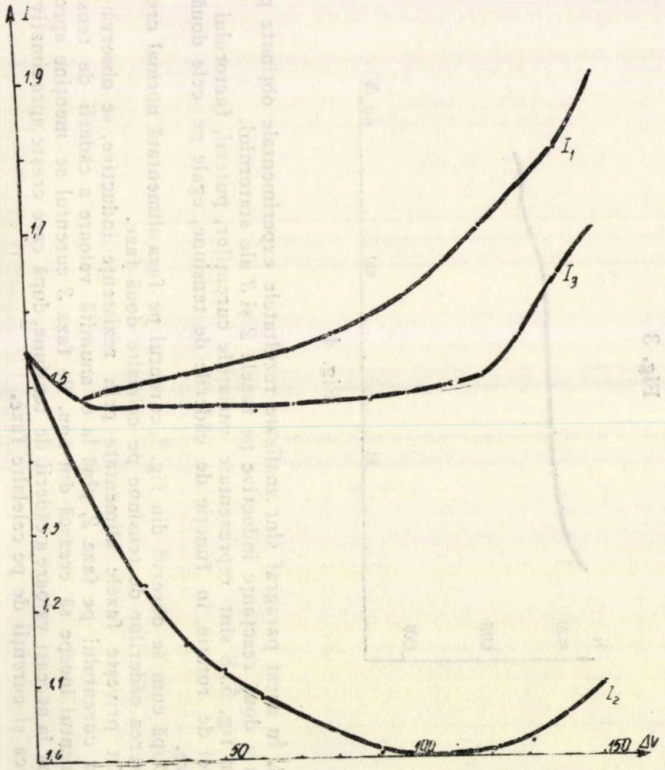

I
1,9
1,7
1,5
1,3
1,2
1,1
1,0
50
100
150 ΔV
I_1
I_3
I_2

Fig. 5

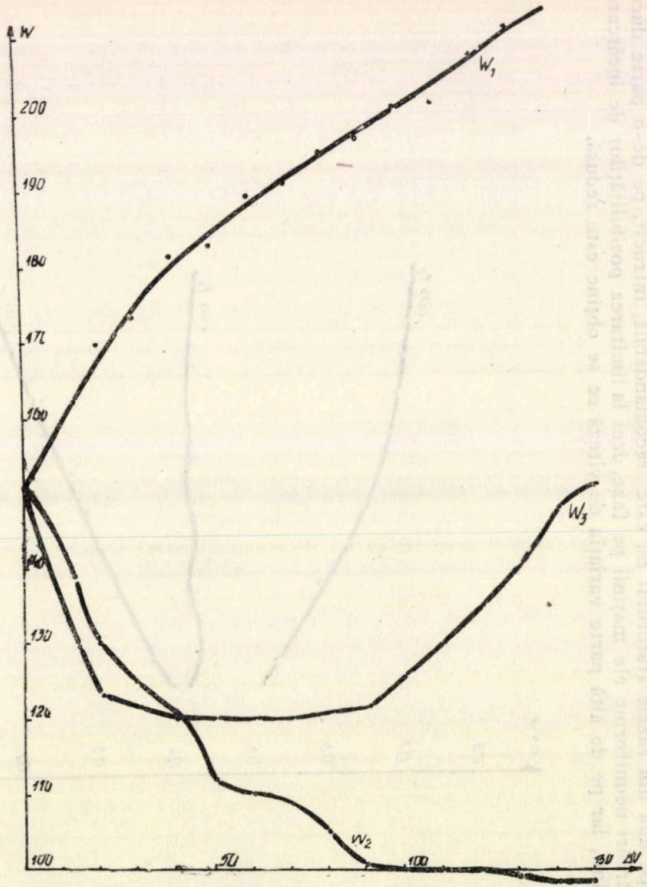

W
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
50
100
150 ΔV
W_1
W_3
W_2

Fig. 6

Apare totuși inexplicabilă diferența mare dintre variația curenților pe fazele alimentate prin intermediul reactanțelor inductive.

Aceeași diferență se observă și în cazul puterilor (fig. 6) precum și a factorului de putere (fig. 7).

Cît privește variația puterilor se observă și o diferență foarte accentuată între puterea pe faza alimentată normal și puterea pe celelalte două faze. Nu ne-am pus problema de a explica acest fenomen întrucît am studiat comportarea motorului din punct de vedere al acționării electrice și nu al fenomenelor care ce produc în cazul alimentării nesimetrice.

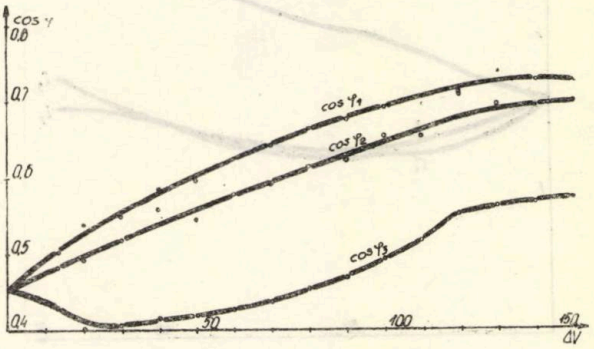


Fig. 7

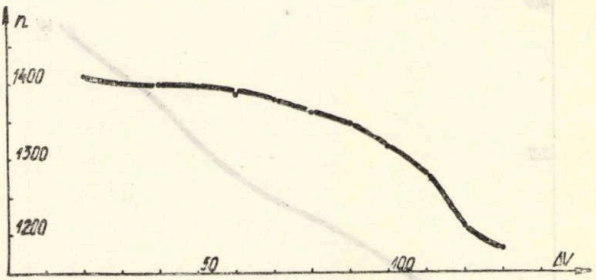


Fig. 8

Din punct de vedere al acționării electrice menționăm că această diferență mare, atît dintre curenți cît și dintre puteri pe diferite faze, este cu totul dezavantajoasă.

Se observă că în acest caz variația de viteză este ceva mai mare, și anume de două ori, față de variația vitezei în cazul alimentării statorului prin intermediul unei rezistențe inductive pe o singură fază.

De asemenea se observă că pentru o cădere de tensiune de 100 V pe fazele *2* și *3* se obține o creștere a alunecării motorului de la 5,33% la 8,67%, fapt care ar fi foarte convenabil în cazul acționării electrice cu volant.

Întrucît însă diferențele de încărcare pe faze sînt foarte accentuate, rezultă că posibilitatea de încărcare a motorului este limitată și prin ur are avantajul obținut prin înmuierea caracteristicii mecanice nu ar putea fi folosit.

De altfel, concluziile în legătură cu utilizarea motoarelor cu alimentare asimetrică prin introducere în stator a reactanțelor inductive pe una sau două din fazele statorului concordă și cu concluziile teoretice stabilite anterior [1].

4. În continuare se studiază datele experimentale obținute prin introducerea unei rezistențe active pe faza *2* și a unei reactanțe inductive pe faza *3* a statorului mașinii asincrone.

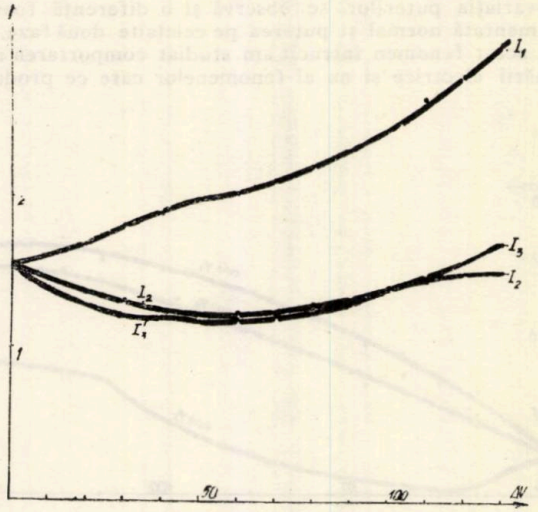


Fig. 9

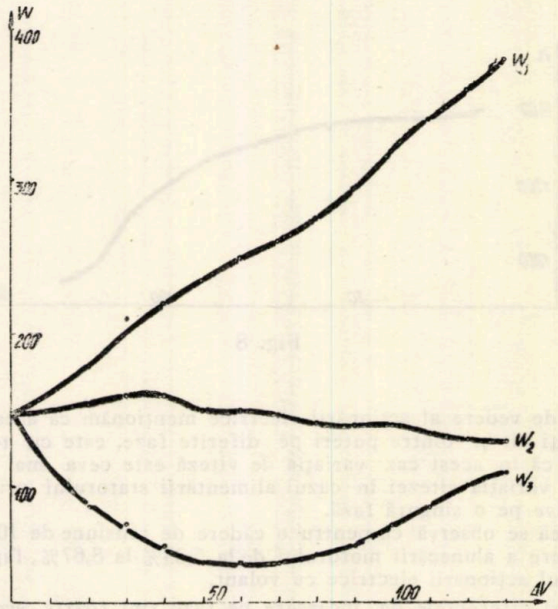


Fig. 10

În fig. 9...12 sînt reprezentate variațiile curenților, puterii, factorului de putere și vitezei de rotație în funcție de căderile de tensiune, egale pe cele două faze ale statorului.

După cum rezultă din fig. 9, curenții pe fazele *2* și *3* se mențin aproape constanți înregistrînd o scădere pînă la o anumită valoare a căderii de tensiune, după care cresc din nou.

Pe faza alimentată normal curentul crește continuu, atingînd la o scădere de tensiune de 100 V, o valoare de aproximativ 150% din valoarea nominală.

O deosebire mai accentuată se observă între puterile pe fazele *2* și *3* (fig. 10) și factorii de putere pe aceleași faze (fig. 11).

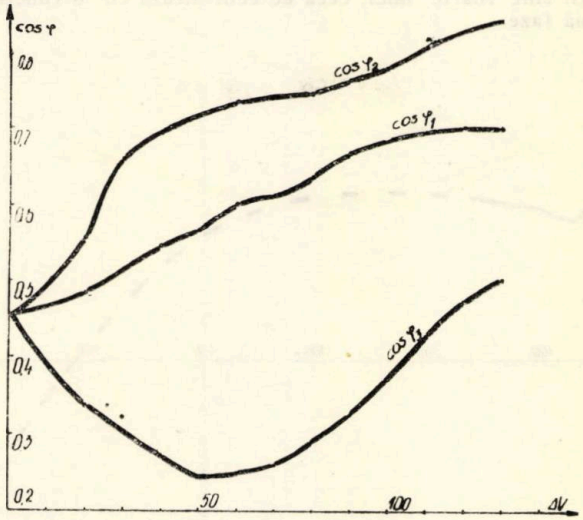


Fig. 11

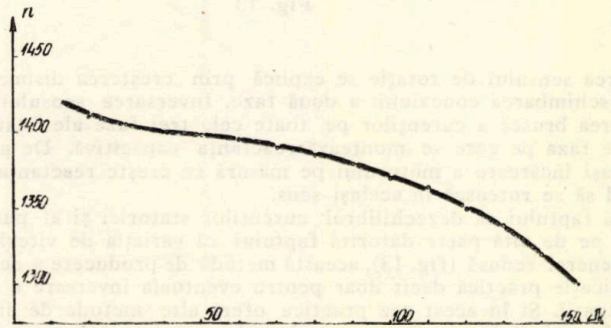


Fig. 12

Cît privește variația de viteză cu căderea de tensiune, ea apare mult mai avantajoasă (fig. 12) ca în cazurile precedente. Astfel, la o cădere de tensiune de 100 V pe faze, alunecarea crește la o valoare dublă față de cea inițială, ceea ce este convenabil din punct de vedere al folosirii motorului în cazul funcționării cu volant, cu atît mai mult cu cît și curenții pe faze sînt mai apropiați ca valoare decît în cazurile precedente.

Metoda apare mai convenabilă decît cele precedente în cazul cînd dorim să obținem o variație de viteză între limite înguste.

5. Scopul acestui paragraf este de a cerceta datele experimentale obţinute prin introducerea unei rezistenţe active pe faza *3* şi a unei reactanţe capacitive pe faza *2* a statorului.

În acest caz curenţii, puterile şi factorii de putere pe cele trei faze sînt de valori foarte diferite, ceea ce indică că motorul nu va putea fi folosit la încărcarea sa nominală. Cît priveşte viteza, aceasta variază foarte puţin cu creşterea căderii de tensiune pe cele două faze. Viteza la început scade, apoi pe măsură ce capacitatea scade viteza începe să crească, iar pentru un anumit raport dintre rezistenţa activă şi reactanţa capacitivă, motorul îşi inversează sensul de rotaţie. Se observă că pe faza *3* a statorului curenţii sînt foarte mici, ceea ce echivalează cu o funcţionare a motorului alimentat pe două faze.

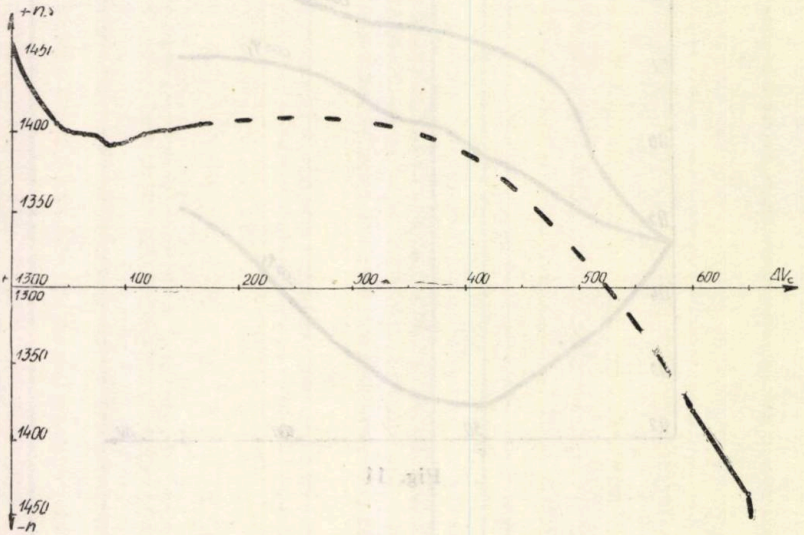


Fig. 13

Inversarea sensului de rotaţie se explică prin creşterea disimetriei care poate fi echivalată cu schimbarea conexiunii a două faze. Inversarea sensului de rotaţie are ca urm re creşterea bruscă a curenţilor pe toate cele trei faze ale statorului şi a căderii de tensiune pe faza pe care se montează reactanţa capacitivă. De altfel curenţii scad pentru o aceeaşi încărcare a motorului pe măsură ce creşte reactanţa capacitivă, motorul continuînd să se rotească în acelaşi sens.

Datorită faptului că dezechilibrul curenţilor statorici şi al puterilor este foarte accentuat, iar pe de altă parte datorită faptului că variaţia de viteză ce poate fi obţinută este în general redusă (fig. 13), această metodă de producere a dezechilibrului nu-şi poate găsi aplicaţie practică decît doar pentru eventuala inversare a sensului de rotaţie în anumite situaţii. Şi în acest caz practica oferă alte metode de inversare a sensului de rotaţie mult mai indicate, fapt care duce la concluzia că acest caz nu merită a fi luat în consideraţie.

6. În cele din urmă se studiază datele experimentale obţinute prin introducerea unei reactanţe capacitive pe faza *2* şi a unei reactanţe inductive pe faza *3* a statorului.

Concluziile ce se desprind din examinarea datelor obţinute privind curenţii, puterile şi factorii de putere, sînt aceleaşi ca şi cele din cazul precedent.

Se constată însă că inversarea sensului de rotaţie are loc pentru o cădere de tensiune, pe faza cu reactanţă capacitivă, mult mai redusă ca în cazul precedent. Se mai constată de asemenea că pentru o anumită valoare a reactanţei capacitive puterea pe faza *3* devine negativă, fiind preluată de faza pe care se montează reactanţa capacitivă.

Variația vitezei cu căderea de tensiune pe faza cu reactanță capacitivă este redusă. Ea însă scade brusc pentru o valoare anumită a acestei căderi de tensiune (fig. 14), fapt care ar putea în anumite condiții să prezinte interes practic pentru frînarea motorului într-un timp scurt. Menționăm însă că din cauza disimetriilor mari ale curenților și puterilor regimul de funcționare cu reactanțe inductive și capacitive pe două din fazele statorului nu poate fi decît un regim tranzitoriu de scurtă durată.

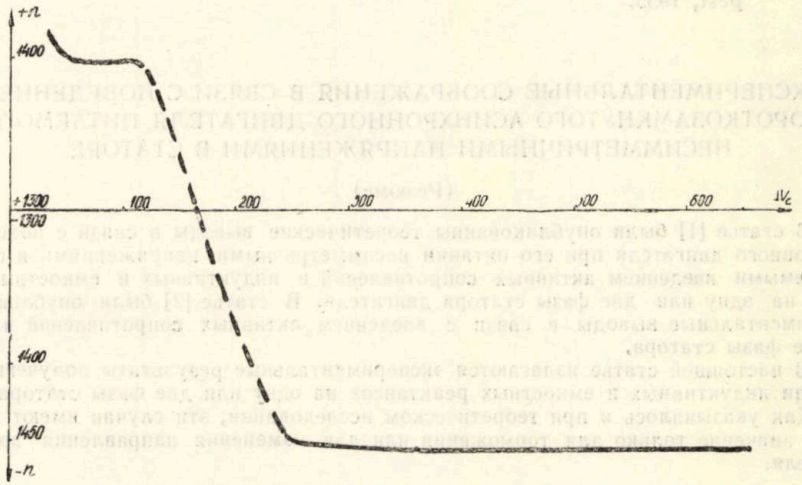


Fig. 14

Concluzii

Din cele arătate mai sus rezultă următoarele concluzii :

a) Alimentarea motorului prin intermediul reactanțelor inductive montate pe una sau două faze ale statorului nu prezintă interes din punct de vedere practic, datorită disimetriilor mari ale curenților și puterilor din statorul motorului și datorită variațiilor relativ mici de viteză ce se pot obține.

b) Alimentarea motorului asincron prin intermediul unei rezistențe active și a unei reactanțe capacitive pe două faze ale statorului, cît și prin intermediul unei reactanțe inductive și a uneia capacitive, nu poate prezenta interes practic din cauza disimetriilor foarte accentuate ale curenților și puterilor. În anumite condiții, care ar comporta însă unele discuții suplimentare, aceste două cazuri ar putea fi folosite fie pentru inversarea sensului de rotație, fie pentru frînarea bruscă a mașinii.

c) Dintre toate cazurile studiate, singurul care ar putea să găsească o utilitate practică, în special atunci cînd este vorba de acționări electrice cu volant, ar fi cazul alimentării motorului asincron prin intermediul unei rezistențe active și a unei reactanțe inductive pe două din fazele statorului.

d) Rezultatele experimentale coincid în general cu rezultatele teoretice stabilite anterior [1], pentru toate cazurile posibile de alimentare asimetrică, prin introducerea de rezistențe active și reactanțe inductive și capacitive pe una sau două faze ale statorului.

e) În general, toate cazurile studiate nu prezintă un interes practic deosebit pentru acționările electrice, deoarece se cunosc metode mai eficiente pentru a obține aceleași rezultate, cu indici de utilizare mult mai convenabili.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Boţan N. V., Trifan Fl., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, Fiz. şi şt. tehn., 1959, **X**, *1*, pp. 73—83.
2. Boţan N. V., Prisăcaru V., Ponomarev B., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, **V (IX)**, *1—2*, pp. 271—276.
3. Burlando M. F., R. G. É., 1949, **58**, pp. 198—207.
4. Kovács K. Pall, *Villamosgépek üzemtana. Aszinkron gépek,* Tankövykiad, Budapest, 1955.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ В СВЯЗИ С ПОВЕДЕНИЕМ КОРОТКОЗАМКНУТОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПИТАЕМОГО НЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ В СТАТОРЕ

(Резюме)

В статье [1] были опубликованны теоретические выводы в связи с поведением асинхронного двигателя при его питании несимметричными напряжениями в статоре, получаемыми введением активных сопротивлений и индуктивных и емкостных реактансов на одну или две фазы статора двигателя. В статье [2] были опубликованны экспериментальные выводы в связи с введением активных сопротивлений на одну или две фазы статора.

В настоящей статье излагаются экспериментальные результаты полученные при введении индуктивных и емкостных реактансов на одну или две фазы статора двигателя. Как указывалось и при теоретическом исследовании, эти случаи имеют практическое значение только для торможения или для изменения направления вращения двигателя.

CONSIDÉRATIONS EXPÉRIMENTALES SUR LE FONCTIONNEMENT D'UN MOTEUR ASYNCHRONE EN COURT-CIRCUIT ALIMENTÉ PAR DES TENSIONS ASYMÉTRIQUES

(Résumé)

Dans une Note précédente [1] on a examiné au point de vue théorique le problème concernant le comportement d'un moteur asynchrone en court-circuit alimenté par des tensions asymétriques obtenues par l'introduction de résistances où de réactances inductives et capacitives sur une où deux des phases du stateur. Dans une autre Note [2] on a étudié par voie expérimentale le comportement du moteur lorsqu'on introduit des résistances sur une où deux des phases du stateur.

Dans cette Note les Auteurs étudient par voie expérimentale le comportement du moteur lorsqu'on introduit des réactances inductives et capacitives sur une où deux des phases du stateur. On aboutit à la conclusion que, au point de vue de la commande électrique, le problème ne présente un intérêt spécial, que dans le cas du freinage où bien celui de l'inversion du sens de rotation du moteur.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 621.3.016.35

ВЛИЯНИЕ СУХОГО ТРЕНИЯ НА ДИНАМИКУ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ[1])

Р. А. НЕЛЕПИН

1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во всех системах автоматического регулирования, имеющих механические трущиеся части, возникают силы сухого трения. Исследования и практика показывают, что если в прямом регулировании сухое трение в большинстве случаев благоприятно влияет на сходимость процесса регулирования, в непрямом регулировании оно чаще оказывает вредное влияние на динамику; во втором случае влияние сухого трения бывает различно и проявляется в зависимости от общих свойств системы и от того, в каком элементе системы оно имеется. В прямом регулировании задача об учете сухого трения в основном решена [7], [19]; в непрямом, несмотря на значительное число исследований ([6], [4] и др.), задача об учете сухого трения не может считаться законченной, поскольку здесь сухое трение учитывалось различными авторами лишь в каком-либо одном, реже — двух элементах системы.

Учет сухого трения делает задачу о динамике регулирования нелинейной и приводит к известным трудностям. Рассмотрение же динамики системы при пренебрежении сухим трением, то есть решение соответствующей линейной задачи, в лучшем случае может дать правильный ответ только на вопрос о том, в каком направлении целесообразно изменять те или иные параметры системы, например, для повышения запаса ее устойчивости. Однако, поскольку между отдельными свойствами систем регулирования, например, между устойчивостью и статической точностью, между устойчивостью и некоторыми показателями качества, имеются противоречия, важно иметь количественные оценки. За неимением достаточного числа, таковых конструкторская практика в большинстве случаев вынуждена полагаться на накопленный опыт, наладочные испытания и пр., что требует времени и средств и не всегда дает возможность найти оптимальное решение задачи.

Более того, в ряде случаев при пренебрежении сухим трением вообще не представляется возможным объяснить некоторые свойства систем регулирования, ибо сухое трение часто играет физически решающую роль при возникновении автоколебаний в системах непрямого регулирования; следовательно, определение границ устойчивости системы, имеющей (пусть небольшое) сухое трение, может быть сделано лишь при учете последнего. Построение же области устойчивости соответствующей системы является первым и одним из основных этапов исследования ее динамики.

В данной работе исследуется система непрямого регулирования при одновременном учете сухого (кулоновского) трения в золотнике и сервомоторе. Эта задача практически интересна тем, что, в случае „неразделимого“ перемещения золотника и

---

[1]) Автором статьи этот вопрос был впервые доложен на семинаре по автоматическому регулированию секции судового машиностроения НТО Судпрома, 12 марта 1957 г.

измерителя [13], например, для многих систем регулирования теплосиловых установок, она рассматривает одновременно сухое трение во всех регулирующих устройствах.

Для исследуемой системы определяются некоторые важные динамические характеристики: границы устойчивости, области автоколебаний, области монотонности.

2. РАССМАТРИВАЕМЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В работе рассматриваются системы непрямого регулирования с регуляторами, имеющими жесткую обратную связь, или, в частном случае, лишенными обратной связи. Жесткая обратная связь может быть конструктивно различной, например, *рычажной*, соединяющей выход сервомотора со входом золотника (рис. 1 *а*), либо *пружинной* („*силовой*“) [3], [12], соединяющей выход сервомотора со входом измерителя (рис. 1 *б*). Последний случай характеризуется тем, что „неравномерность измерителя“ и коэффициент обратной связи здесь, как правило, представляют существенно разные величины [3], [12]. Движения измерителя и золотника в такой системе неразделимы и момент сил сухого трения в этих элементах приводится к одной обобщенной координате. Как видно из ниже записанных уравнений, учет сухого трения в измерителе и золотнике регулятора с силовой обратной связью аналогичен учету сухого трения в золотнике регулятора с рычажной обратной связью. „Золотниками“ регуляторов типа рис. 1 *б* служат обычно элементы со *струйными трубками* (системы „Аскания“) или двухпроточные водоструйные *гидравлические реле* (системы ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова). Оба типа систем (рис. 1 *а*, 1 *б*) имеют широкое применение как в судостроении, так и в стационарной технике. Системы типа рис. 1 *б* применяются для регулирования давления пара в судовых паровых котлах и различных трубопроводах [11], в металлургической и других отраслях промышленности [1].

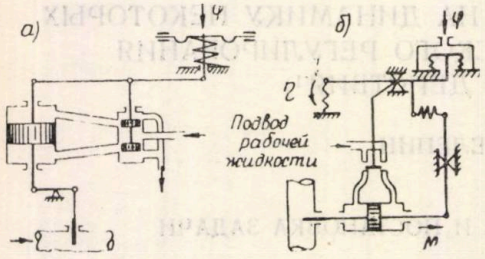


Рис. 1. — *а* — система с рычажной обратной связью; *б* — система с силовой (пружинной) обратной связью.

Сервомотор предполагаем выполненным одним из трех типов:

а) скорость сервомотора вне зоны его нечувствительности пропорциональна отклонению золотника (*сервомотор переменной скорости*), б) скорость сервомотора, если сервомотор в движении, всегда постоянна — *сервомотор постоянной скорости* (это характерно, например, для электромеханических систем) и в) скорость сервомотора вне зоны его нечувствительности пропорциональна отклонению золотника, пока это отклонение не достигнет определенной величины, после чего скорость сервомотора остается постоянной (такой сервомотор назовем *сервомотором переменно-постоянной скорости*). Последний случай наиболее полно, в рамках кусочно-линейной аппроксимации характеристики сервомотора, характеризует движение некоторых типов сервомоторов, например, гидравлических сервомоторов ЦНИИ им. А. Н. Крылова. Причины насыщения характеристики сервомотора при определенных отклонениях золотника могут быть различны: либо ограничена мощность средств, питающих автоматику рабочей жидкостью [11], либо в регуляторе с проточным золотником, максимальный ход золотника больше длины его окон [3], и т. п. Для сервомоторов, управляемых струйной трубкой или гидравлическим реле, нелинейная характеристика типа насыщения лежит в основе физической зависимости между скоростью сервомотора и перемещением управляющего элемента [3]. При этом для исследования динамики системы в целом совершенно безразлично, в каком месте учесть это ограничение мощности усилителя — в характеристике сервомотора или в характеристике золотника, считая золотник неподвижным после достижения входными координатами этого звена определенной величины.

Что касается объекта регулирования, то для него принимаем уравнение динамики первого порядка, причем предполагаем объект либо обладающим некоторым саморегулированием, либо лишенным последнего. Такое уравнение, при известных допуще-

ниях, описывает, например, изменение скорости вращения ротора турбины, давления пара в судовом паровом котле и др., то есть охватывает большое число практически интересных объектов.

В уравнениях движения пренебрегаем инерцией подвижных частей регулирующих устройств, что допустимо для большого числа рассматриваемых схем непрямого регулирования. Далее, полагаем, что силы сухого трения (или, соответственно, момент сил сухого трения) зависят от скорости по закону Кулона.

С учетом вышесказанного, уравнения возмущенного движения исследуемой системы могут быть получены в следующем виде [15], [17], в случае сервомотора переменно-постоянной скорости:

$$T_a \dot{\varphi} + \theta\varphi = \mu, \quad \text{объект регулирования;}$$

(1 а)
$$\left.\begin{aligned} &\gamma\eta + b \operatorname{sign} \dot{\eta} = \varphi + \delta\mu \text{ при } \dot{\eta} \neq 0 \\ &\text{и при } \dot{\eta} = 0, \text{ но } |\gamma\eta - \varphi - \delta\mu| = b, \\ &\eta = \text{const. при } |\gamma\eta - \varphi - \delta\mu| < b, \end{aligned}\right\} \text{ измеритель и золотник;}$$

$$\left.\begin{aligned} &T_s \dot{\mu} - c \operatorname{sign} \eta = -\eta \text{ при } c_1 > |\eta| > c, \\ &\dot{\mu} = 0 \text{ при } |\eta| \leqslant c, \\ &\dot{\mu} = \text{const. при } |\eta| \geqslant c_1. \end{aligned}\right\} \text{ сервомотор.}$$

В случае сервомотора переменной скорости необходимо отбросить в (1 а) условие $\dot{\mu} = \text{const.}$ при $|\eta| \geqslant c_1$. Такую систему назовем (1 б).

В случае сервомотора постоянной скорости уравнение сервомотора, вместо указанного в (1 а), запишется:

$$T_s \dot{\mu} - c \operatorname{sign} \eta = -c_1 \operatorname{sign} \eta \text{ при } |\eta| > c,$$
$$\dot{\mu} = 0 \text{ при } |\eta| \leqslant c.$$

Такую систему назовем (1 в).

В (1 а) обозначено (все в обычно принятых относительных величинах): φ — координата объекта регулирования; μ — координата сервомотора; η — координата золотника (для регулятора рис. 1 *б*, — золотника и измерителя, для регулятора рис. 1 *а* — координата измерителя исключена в силу уравнения последнего); $2b$ — нечувствительность, вызванная сухим трением в золотнике (для регулятора рис. 1 *б* — в золотнике и измерителе); $2c$ — нечувствительность, вызванная сухим трением в сервомоторе; T_a — постоянная времени объекта регулирования, (сек); T_s — постоянная времени сервомотора, (сек); θ — коэффициент саморегулирования объекта; δ — коэффициент обратной связи; γ — коэффициент „неравномерности измерителя" для регулятора типа рис. 1 *б*; для регулятора типа рис. 1 *а* обычно $\gamma = \delta$.

Коэффициенты T_a, T_s, θ, γ, δ, b, c и c_1 считаем положительными постоянными, из них θ, δ, b и c могут быть нулями [2]). В частном случае $\theta = 0$ объект лишен саморегулирования, а при $\delta = 0$ регулятор лишен обратной связи.

Задачи, указанные в § **1**, решаются ниже точным методом, без всяких допущений о малости тех или иных величин, входящих в уравнения движения.

До сих пор был рассмотрен лишь случай системы (1 в) [4]. Что касается первых двух систем, то были рассмотрены лишь их частные случаи — система (1 б) при $c = 0$ в [4], система, подобная (1 а), но при $\delta = 0$ в [5].

Следует отметить, что уравнениями (1 а), (1 б), (1 в) могут быть описаны и несколько иные, чем указано, задачи теории автоматического регулирования. Например, влияние люфта в том или ином элементе системы часто аналогично влиянию кулоновского трения [15]; учтенная нечувствительность сервомотора может быть рассматриваема также как результат, например, перекрышей в окнах золотника. К системе (1 в) приводят также некоторые задачи о релейно управляемом сервомеханизме с одним или двумя каскадами усиления [16], [15].

[2]) Автором рассмотрен также случай $\theta < 0$. Однако, поскольку на практике рассматриваемые системы на объектах с $\theta < 0$ почти не применяются, на данном случае в этом сообщении не останавливаемся.

3. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Для отыскания решений систем (1 а), (1 б), (1 в) может быть применен так называемый метод припасовывания, заключающийся в построении переходных процессов по участкам, на каждом из которых справедлива та или иная система линейных уравнений, с принятием конечных значений переменных предыдущего участка за начальные значения для последующего участка. Однако, этот метод чрезвычайно громоздок. Гораздо более удобно исследовать такую систему, построив так называемый фазовый портрет системы. Этот метод, ведущий свое начало в нелинейной теории регулирования от Леоте [14] и получивший всестороннее развитие в работах А. А. Андронова ([4]...[7] и др.), применившего к изучению автоколебательных систем теорию предельных циклов А. Пуанкаре [18], заключается кратко в следующем.

В случае системы, например, второго порядка, для определения любого частного решения из общего интеграла системы достаточно задания двух начальных условий. Приняв множество этих условий за координаты точки на плоскости, мы ставим во взаимно-однозначное соответствие положение этой точки (изображающей точки) и состояние системы. Исключив из уравнений движения время (или считая его параметром), мы получаем возможность непосредственно проследить движение изображающей точки на плоскости. Этим удается, во-первых, на единицу понизить порядок исследуемой системы, и, во-вторых, „одним глазом" окинуть поведение системы при различных начальных условиях, что существенно при исследовании нелинейных систем, в особенности автоколебательных систем.

Определив возможные в силу уравнений движения положения и перемещения изображающей точки, то есть построив фазовый портрет системы, удобно затем воспользоваться так называемым методом точечных преобразований, ведущим свое начало от работ Пуанкаре, Брауера, Биркгофа ([8] и др.), существенно развитого в трудах А. А. Андронова ([4]...[7] и др.) и заключающегося кратко в следующем. В случае, например, плоского фазового портрета, имея фазовые траектории — траектории изображающей точки (или, грубо говоря, интегральные кривые уравнения, полученного из исходной системы при исключении времени), достаточно проследить за пересечениями каждой из этих траекторий с какой либо кривой L (в частном случае – прямой) на фазовой плоскости при безграничном возрастании времени (рассматриваемого как параметр), чтобы убедиться, будет ли движение сходящимся к состоянию равновесия (и насколько быстро и хорошо сходящимся), периодическим или расходящимся, поскольку ориентация кривой L на фазовой плоскости относительно изображения состояния равновесия системы может быть легко определена. Таким образом, для исследования системы в целом достаточно проследить точечное преобразование кривой L самой в себя в силу уравнений фазовых траекторий. Однако, в случае n-го порядка уравнений фазовое пространство будет иметь n измерений и все исследование значительно усложнится.

Обращаясь к системам (1 а), (1 б), (1 в) видим, что в силу неоднозначности характеристик некоторых их элементов, задание двух начальных условий не определяет частного решения системы; в некоторой области значений переменных для этого необходимо задание не менее трех начальных условий. В соответствии с этим, фазовый портрет такой системы не может быть построен на обычной плоскости.

Для построения фазового портрета такой системы, во-первых, можно выбрать координаты изображающей точки некоторым естественным образом, а именно, принять за эти координаты такие сочетания переменных и параметров системы, задание определеных значений которых однозначно определяет состояния равновесия и все другие возможные состояния системы. Так сделано, например, при изучении подобных систем в [4]...[6]. При этом фазовый портрет может быть построен лишь в некотором вырожденном трехмерном пространстве. В таком пространстве одна из переменных может принимать лишь определенные квантованные значения.

Во вторых, как показали В. В. Казакевич [10], [15], а также В. В. Петров и Г. М. Уланов [16], [15], подобные системы (системы с неоднозначными нелинейными характеристиками, при пренебрежении этими нелинейностями являющиеся системами второго порядка) можно исследовать иным способом — на многолистной фазовой поверхности [15]. При этом за координаты изображающей точки выбираются те из обобщенных координат системы, изменение которых нас более интересует (например, регулируемая величина и ее производная), либо те, в которых более удобно вести исследование. Заданная система уравнений разрешается относительно выбранных

координат; каждое из полученных уравнений отображается на свой лист фазовой поверхности. Затем производится „сшивание" этих листов (при наложении их друг на друга так, чтобы соответствующие координатные оси совпали), основанное на соображении о том, что изображающая точка может покинуть лист фазовой поверхности, на котором она находится, лишь дойдя до его края. Такие многолистные фазовые поверхности аналогичны римановым поверхностям в теории функций комплексной переменной.

Системы (1 а), (1 б), (1 в) также могут быть отображены на многолистные фазовые поверхности. Однако, если число листов такой поверхности велико (для исследуемых систем оно достигает десяти), то могут встретиться затруднения в их правильном выявлении и „сшивании". Кроме того, поскольку основные количественные исследования — точечные преобразования кривых — производятся на уже́ „сшитой" фазовой поверхности, представляется целесообразным указание некоторого приема, позволяющего в ряде случаев строить многолистную фазовую поверхность сразу в уже́ „сшитом", готовом для количественных исследований виде.

Пусть имеется:

$$(2)\qquad x_2 = \psi(x_1) = \begin{cases} f_1(x_1) & \text{при } x_{a1} < x_1 < x_{b1}, \\ f_2(x_1) & \text{при } x_{a2} < x_1 < x_{b2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1) & \text{при } x_{an} < x_1 < x_{bn}, \end{cases}$$

$$\text{причем } \psi(x_1) = -\psi(-x_1),$$

где $\psi(x_1)$ — неоднозначная кусочно-линейная функция аргумента x_1, непрерывная или кусочно-непрерывная, то есть $f_i(x_1) = c_{1i}x_1 + c_{2i}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$; в частности, некоторые из $f_i(x_1)$ могут быть постоянной величиной или нулем. Примерный возможный вид графиков функции $\psi(x_1)$ изображен на рис. 2 *а*, 2 *б* и 3. Будем полагать также, что выполняется одно из условий: либо среди интервалов (x_{ai}, x_{bi}) имеются интервалы, дополняемые заданием определенного $\operatorname{sign}\dot{x}_1$, (3 а); либо в точках разрыва непрерывности функции $\psi(x_1)$ задано направление скачка, совершаемого x_2 при непрерывном изменении x_1, (3 б).

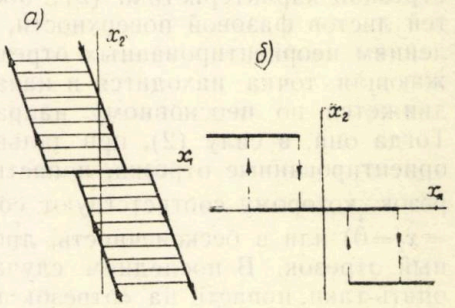


Рис. 2. — *а* — нелинейная характеристика с ориентированными отрезками; *б* — релейная характеристика.

Отрезки характеристики (2), для которых соблюдается условие (3), будем называть *ориентированными*, остальные отрезки — *неориентированными*. В задачах автоматического регулирования неоднозначность нелинейных характеристик отдельных элементов обусловлена обычно такими факторами, как силы сухого трения, гистерезисные свойства электромагнитных реле и др. Во всех таких случаях соответствующие неоднозначные характеристики всегда будут иметь определенное число ориентированных отрезков, в силу физического смысла задачи.

Пусть также имеется уравнение:

$$P_1(x_1) = P_2(x_2), \tag{4}$$

где:

$$P_1(x_1) = a_1(\mathrm{d}^2x_1/\mathrm{d}t^2) + a_2(\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t) + a_3x_1,$$
$$P_2(x_1) = b_1(\mathrm{d}^2x_2/\mathrm{d}t^2) + b_2(\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t) + b_3x_2,$$

причем некоторые из постоянных a_1, a_2, a_3 и из постоянных b_1, b_2, b_3 в частных случаях могут быть нулями.

Исследуем систему (2)...(4). Для этого отобразим ее на многолистную фазовую поверхность с координатами изображающей точки x_1, $\dot{x}_1$ и будем ставить в соответствие друг другу положение изображающей точки в фазовом портрете и положение этой точки на характеристике (2). При этом i-ый лист фазовой поверхности определится заданием интервала (x_{ai}, x_{bi}) и (для листов, соответствующих ориентированным отрезкам) заданием $\operatorname{sign}\dot{x}_1$ на этом интервале. В силу условия (3) на ориентированных отрезках характеристики (2) изображающая точка может двигаться лишь в одном определенном направлении. Такие направления будем считать *основными*. Остальным отрезкам характеристики (2), направление движения изображающей точки на которых условиями задачи не ориетнировано, припишем два рода направлений: *основные и неосновные*. Под основным направлением неориентированного отрезка будем понимать такое, по которому может двигаться на этом отрезке изображающая точки при ее циклическом обходе характеристики (2).

Следуя этому определению, основные направления неориентированных отрезков нетрудно определить непосредственно из (2)...(4).

Совокупность тех частей листов фазовой поверхности, которые соответствуют определенным таким образом основным направлениям отрезков характеристики (2), обозначим через U, а совокупность частей листов фазовой поверхности, соответствующих неосновным направлениям неориентированных отрезков — через V. Пусть теперь изображающая точка находится в начальный момент времени на V, то есть движется по неосновному направлению неориентированного отрезка. Тогда она, в силу (2), при дальнейшем движении может либо, минуя ориентированные отрезки, попасть на «отрезок покоя» (то есть на отрезок, которому соответствуют состояния равновесия системы при $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$) или в бесконечность, либо придти и какой-либо ориентированный отрезок. В последнем случае она, двигаясь далее, может либо, опять-таки, попасть на «отрезок покоя» или в бесконечность, не совершая колебаний (то есть обхода вокруг «отрезка покоя» на фазовой поверхности), либо будет совершать далее колебательное движение, сходящееся к «отрезку покоя», расходящееся в бесконечность или периодическое. Этому колебательному движению, в силу (2)...(4), будет соответствовать вышеуказанный циклический обход изображающей точки по характеристике (2), то есть та часть колебательного решения, которая начнется после прихода изображающей точки на ориентированный отрезок, целиком разместится на поверхности U. Отсюда ясно, что куски семейств фазовых траекторий, расположенные на V, не могут быть

составными частями замкнутых траекторий — предельных циклов системы (2)...(4). Более того, исследуя фазовые траектории, расположенные на поверхности U, мы исследуем, тем самым, характер колебательных движений (сходимость их, расходимость или периодичность) при любых начальных условиях. Из сказанного следует:

(5) *Для исследования системы* (2)...(4) *методом точных преобразований достаточно учесть лишь те части листов многолистной фазовой поверхности системы с координатами* x_1, $\dot{x}_1$, *которые соответствуют основным направлениям отрезков характеристики* (2).

После этого остается учесть те возможные в силу (2)...(4) движения системы, которым соответствует не колебательная устойчивость (сходимость к «отрезку покоя») или неустойчивость (расходимость в бесконечность) при движении изображающей точки на части ее пути по неосновным направлениям неориентированных отрезков. Однако, этот этап исследования уже не требует применения аппарата метода точечных преобразований. В большинстве рассматривавшихся практических задач автоматического регулирования подобного типа число таких особенностей невелико, они непосредственно видны из конкретно заданной системы (2)...(4), и учет их не представляет затруднений. В частности, для систем (1 а), (1 б), (1 в) подобные неосновные направления (при $\delta > 0$, $\theta > 0$) всегда приводят систему к состоянию равновесия.

Построение упрощенного фазового портрета, размещенного на поверхности U, по виду характеристики (2), с учетом основных направлений отрезков последней, позволяет, во-первых, получить многолистную фазовую поверхность в уже «сшитом», готовом для количественных исследований виде (причем автоматически выявляются условия перехода изображающей точки с одного листа многолистной поверхности на другой), и, во-вторых, упрощает графические построения, исключая из рассмотрения на основном этапе исследования ряд участков многолистной фазовой поверхности.

При этом рассмотрение характеристики (2) показывает, в каких интервалах переменной x_1 имеются области, соответствующие наложенным друг на друга листам как фазовой поверхности в целом так и поверхности U.

Для последней эти области значительно сокращаются в сравнении с такими областями для фазофой поверхности в целом и имеют место лишь в тех интервалах переменной x_1, которым, согласно (2), соответствуют разные отрезки с основными направлениями одного знака.

Для того, чтобы построить фазовый портрет динамической системы рассматриваемого типа с неоднозначной кусочно-линейной характеристикой согласно (5), нужно исследуемую систему привести сначала к виду (2), (4), выделив линейную и нелинейную части. Для построения (2) следует объединить нелинейные звенья в одно эквивалентное нелинейное звено.

Отметим одно существенное обстоятельство. На многолистной фазовой поверхности в сложных случаях состояния равновесия системы однозначно не определены. Объем или полоса, которые занимают в

вырожденном трехмерном пространстве состояния равновесия, здесь обычно сжаты в отрезок. Суждение о том, что такой отрезок действительно является «отрезком покоя», можно получить, во-первых, на основании равенства нулю производных от всех координат системы, если изображающая точка находится на этом отрезке, и, во-вторых (в случае, если возможны движения, сходящиеся к состоянию равновесия), на основании решения вопроса о том, как заканчивается на этом отрезке движение изображающей точки, происходившее в фазовом портрете, исходя из условия обращения в нуль всех указанных производных за бесконечное время при «приходе» точки на этот отрезок по «вливающейся» в него или асимптотически наматывающейся на него фазовой траектории.

Отметим еще одно обстоятельство. Если число листов фазовой поверхности велико, то в выполнении самих операций точечных преобразований могут встретиться некоторые затруднения. Для определения последних бывает целесообразно заменить диаграммы обычных точечных преобразований — диаграммы Ламерея — диаграммами некоторых специальных точечных преобразований. Это будет показано ниже на примерах.

4. СИСТЕМА С СЕРВОМОТОРОМ ПЕРЕМЕННО-ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

А. Кулоновское трение в сервомоторе и золотнике. Объект с положительным саморегулированием

С помощью преобразования:

$$x = \varphi + \delta\mu \tag{6}$$

система (1 а) приводится к виду, указанному в § **3**:

$$T_a\ddot{x} + \theta\dot{x} - \delta T_a\ddot{\mu} - (1 + \delta\theta)\dot{\mu} = 0\,, \tag{7}$$

$$\dot{\mu} = \psi_1(x)\,; \tag{8}$$

график функции $\psi_1(x)$ изображен на рис. 3.

При этом μ в (7), (8) соответствует x_2 в (2)...(4), а x в (7), (8) соответствует x_1 в (2)...(4). Определяя основные направления отрезков характеристики (8), строим фазовый портрет системы (7), (8) в координатах x, $\dot{x} \equiv y$, который будет состоять из кусков семейств спиралей, некоторых логарифмических кривых и отрезков прямых (рис. 4). На фазовом портрете рис. 4 точки двух фазовых траекторий обозначены теми же буквами, что и соответствующие им точки характеристики рис. 3. Для

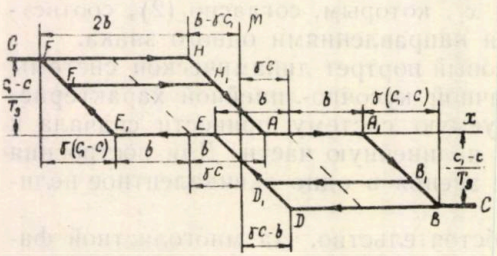


Рис. 3. — Нелинейная характеристика системы (1 а).

исследования этого фазового портрета целесообразно рассмотреть отдельно движения системы при $b+\gamma c \leqslant |x_{\max}| \leqslant b+\gamma c_1$ и при $|x_{\max}| \geqslant b+\gamma c_1$, а затем объединить оба результата в единое целое [3]).

I. Случай $b+\gamma c \leqslant |x_{\max}| \leqslant b+\gamma c_1$.

Возможные в этом случае движения изображающей точки на фазовом портрете рис. 3 можно определить, изучив точечное преобразование

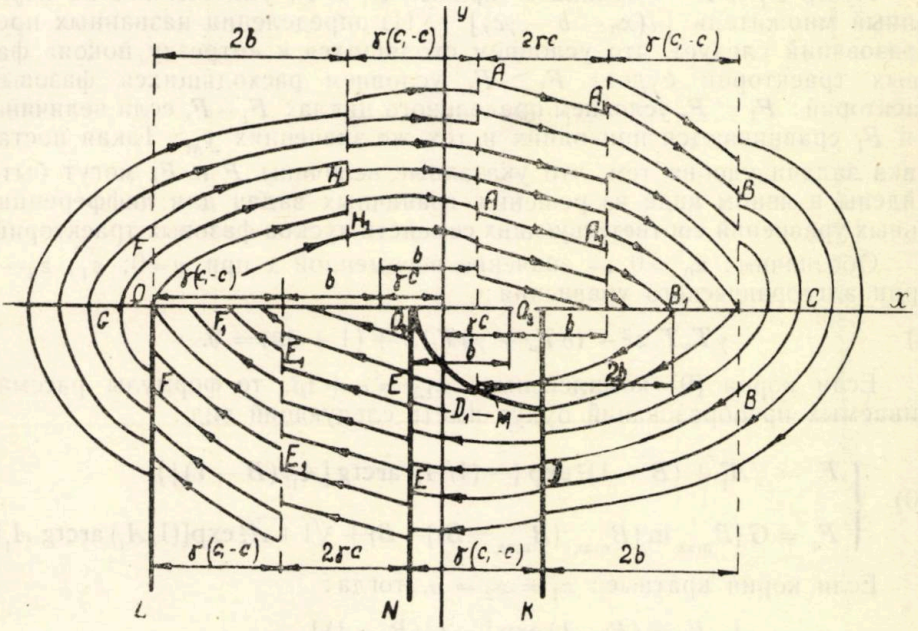


Рис. 4. — Фазовый портрет системы (1 а), построенный при учете лишь основных направлений отрезков характеристики рис. 3.

согласно фазовым траекториям в себя отрезка $y=0$, $b+\gamma c \leqslant x \leqslant b+\gamma c_1$. Однако, в силу симметрии фазового портрета относительно начала координат, рассмотрение этого преобразования можно заменить рассмотрением преобразования вышеуказанного отрезка в отрезок $y=0$, $-b-\gamma c_1 \leqslant x \leqslant -b-\gamma c$. Для решения этой задачи удобно воспользоваться некоторым специальным точечным преобразованием, которое заключается в следующем.

Пусть кривая M есть множество точек $x_M = x_0 - 2b$, $y_M = y^*(x_0)$, образующееся в результате такого перемещения по фазовым траекториям точек отрезка $b+\gamma c \leqslant x \leqslant b+\gamma c_1$, $y=0$, при котором координата x каждой перемещаемой точки уменьшается на $2b$. В указанных ниже преобразованиях будем определять точки кривой M координатой y_M. Определим кривую F как график точечного преобразования кривой M согласно фазовым траекториям в полупрямую $O_1 N$, $(x=\gamma c-b$, $y<0)$. Далее, определим кривую F_1 как график такого преобразования

[3]) $|x_{\max}|$ — наибольшее значение переменной $|x|$ в течение цикла колебаний.

точек кривой M в точки полупрямой O_1N, при котором каждая точка k на M приводится в соответствие с точкой k_1 на O_1N, где точки k (соответственно k_1) есть результат отображения точек $b+\gamma c \leqslant x \leqslant b+\gamma c_1$, $y=0$, (соответственно симметричных последним относительно оси y точек $-b-\gamma c \geqslant x \geqslant -b-\gamma c_1$, $y=0$) согласно фазовым траекториям на кривую M (соответственно на полупрямую $O_1\Lambda$).

Пусть F_1 и F — ординаты кривых $\bar{F}_1$ и $\bar{F}$, умноженные на переменный множитель $[\alpha(x_0-b-\gamma c)]^{-1}$. Из определения названных преобразований следует, что условием сходящихся к «отрезку покоя» фазовых траекторий будет: $F_1 > F$, условием расходящихся фазовых траекторий: $F_1 < F$, условием предельного цикла: $F_1 = F$, если величины F и F_1 сравниваются при одних и тех же значениях y_M. Такая постановка задачи удобна тем, что указанные величины F и F_1 могут быть найдены в явном виде из решения граничных задач для дифференциальных уравнений соответствующих семейств кусков фазовых траекторий.

Обозначим: $x_0 > 0$ — значение переменной x при $y=0$; z_1, z_2 — корни алгебраического уравнения:

$$\gamma T_a T_s z^2 + (\delta T_a + \gamma\theta T_s) z + (1+\delta\theta) = 0. \tag{9}$$

Если корни (9) комплексные: $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то формулы рассматриваемых преобразований будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} F = \sqrt{A_1^2 + (B-1)^2}\exp\{-(1/A_1)\operatorname{arctg}[A_1/(B-1)]\}, \\ F_1 = G\{B_{\max}\ln[B_{\max}/(B_{\max}-B)] - B\} + \sqrt{1+A_1^2}\exp[(1/A_1)\operatorname{arctg} A_1]. \end{cases} \tag{10}$$

Если корни кратные: $z_1 = z_2 = \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} F = (B-1)\exp[-1/(B-1)], \\ F_1 = G\{B_{\max}\ln[B_{\max}/(B_{\max}-B)]\} + l. \end{cases} \tag{11}$$

Наконец, если корни вещественные разные: $z_1 = \alpha$, $z_2 = \alpha_1$, причем $\alpha > \alpha_1$, то

$$\begin{cases} F = (B-1)\exp\{-[A/(A-1)]\ln[(B-1)/(B-A)]\}, \\ F_1 = G\{B_{\max}\ln[B_{\max}/(B_{\max}-B)] - B\} + \exp\{[A/(A-1)]\ln A\}. \end{cases} \tag{12}$$

В (10)...(12) обозначено:

$$G = \gamma c/b > 0, \quad A_1 = -\beta/\alpha > 0, \quad A = \alpha_1/\alpha > 1, \quad B = y_M/[\alpha(x_0-b-\gamma c)].$$

Вывод формул (10)...(12) опущен за недостатком места; они могут быть получены из (7), (8). Здесь аргументом является B, а G, $B_{\max}$ и A_1 (соответственно A) — параметры. Такие параметры называются *существенными*, в теории подобия их называют критериями подобия. Из уравнений (7), (8) можно установить, что B есть монотонно убывающая функция x_0, причем:

$$\lim_{x_0 \to b+\gamma c} B(x_0) = B_{\max} = (1+\delta\theta)/(T_s\theta \mid \alpha \mid \gamma). \tag{13}$$

Изучая уравнения (10)...(12) и временно отвлекаясь от нижнего предела возможных значений B, видим, что кривые $F(B)$ и $F_1(B)$ при любых G, B_{max} и A_1 (или A) в интервале $0<B<B_{max}$ могут либо иметь две точки пересечения, либо две слившиеся (то есть касаться), либо ни одной. В последнем случае будет $F_1>F$ при любом B из указанного интервала, что соответствует сходимости фазовых траекторий в рассматриваемом случае (рис. 5 *а*). Если кривые $F_1(B)$ и $F(B)$ пересекаются дважды, при $B=B_2$ и $B=B_1$, где $B_1>B_2$, то всегда $B_1<B_{max}$. Точке B_1 будет соответствовать неустойчивый, а точке B_2 — устойчивый предельные циклы Пуанкаре, причем устойчивый цикл будет на фазовом портрете охватывать снаружи неустойчивый цикл (рис. 5 *б*). Наконец, если:

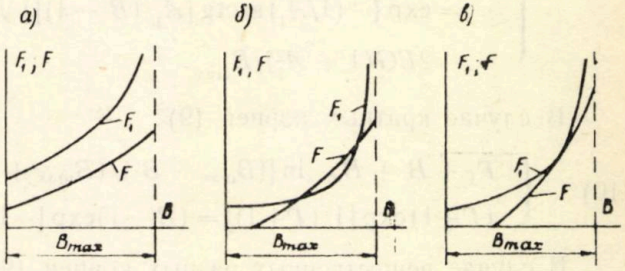


Рис. 5. — Диаграммы точечного преобразования для $|x_{max}|<b+\gamma c_1$.

$$F_1(B_1)=F(B_1),\quad (\partial F_1/\partial B)_{B=B_1}=(\partial F/\partial B)_{B=B_1}, \tag{14}$$

то в системе имеется полуустойчивый предельный цикл при $B=B_1$ (рис. 5 *в*). Случай рис. 5 *в* будет граничным между двумя другими.

Формулы (10) и (11) справедливы при $B>1$. Можно показать, что при $B\leqslant 1$ в (10) всегда $F_1>F$, а согласно (11) переходный процесс при $B\leqslant 1$ монотонно устойчив, так же как и согласно (12) при $B\leqslant A$.

II. Случай $x_{max}\geqslant b+\gamma c_1$.

Для изучения структуры точечного отображения согласно фазовым траекториям полупрямой $x\geqslant b+\gamma c_1$, $y=0$ на полупрямую $x\leqslant -b-\gamma c_1$, $y=0$, воспользуемся в этом случае точечным преобразованием, аналогичным рассмотренному в предыдущем случае.

Определим кривую $\bar{\Gamma}$ как график точечного преобразования согласно фазовым траекториям полупрямой O_2K, $(x=\gamma c_1-b,\ y<0)$, в полупрямую OL, $(x=-b-\gamma c_1,\ y<0)$. Далее, определим кривую Γ_1 как график такого точечного преобразования полупрямой O_2K в полупрямую OL, при котором каждая точка n на O_2K приводится в соответствие с точкой n_1 на OL, где точки n (соответственно n_1) есть результат отображения точек $x\geqslant b+\gamma c_1$, $y=0$, (соответственно симметричных последним относительно оси y точек $x\leqslant -b-\gamma c_1$, $y=0$) согласно фазовым траекториям на полупрямую O_2K (соответственно на полупрямую OL).

Пусть Γ_1 и Γ — ординаты кривых $\bar{\Gamma}_1$ и $\bar{\Gamma}$, умноженные на $[\alpha\gamma(c_1-c)]^{-1}$. Условие сходимости фазовых траекторий в сторону «отрезка покоя» попрежнему будет: $\Gamma_1>\Gamma$, условие расходимости: $\Gamma_1<\Gamma$, условие существования предельного цикла: $\Gamma_1=\Gamma$. Уравнения рассма-

триваемых кривых могут быть получены в неявном виде, в случае комплексных корней (9):

$$(15)\quad \begin{cases} \Gamma_1 + B' + B_{\max} \ln[(B_{\max} - B')/(B_{\max} + \Gamma_1)] = -2E(1 + A_1^2)/B_{\max}, \\ \sqrt{A_1^2 + (\Gamma+1)^2} \exp\{(1/A_1)\operatorname{arctg}[A_1/(\Gamma+1)]\} = \\ \quad = \exp\{-(1/A_1)\operatorname{arctg}[A_1/(B'-1)]\}\sqrt{A_1^2 + (B'-1)^2} - \\ \quad - 2EG(1 + A_1^2)/B_{\max}. \end{cases}$$

В случае кратных корней (9):

$$(16)\quad \begin{cases} \Gamma_1 + B' + B_{\max} \ln[(B_{\max} - B')/(B_{\max} + \Gamma_1)] = -2E/B_{\max}, \\ (\Gamma+1)\exp[1/(\Gamma+1)] = (B'-1)\exp[-1/(B'-1)] - 2EG/B_{\max}, \end{cases}$$

В случае вещественных разных корней (9):

$$(17)\quad \begin{cases} \Gamma_1 + B' + B_{\max} \ln[(B_{\max} - B')/(B_{\max} + \Gamma_1)] = -2EA/B_{\max}, \\ (\Gamma+1)\exp\{[A/(A-1)]\ln[(\Gamma+A)/(\Gamma+1)]\} = \\ \quad = (B'-1)\exp\{-[A/(A-1)]\ln[(B'-1)/(B'-A)]\} - 2EGA/B_{\max}; \end{cases}$$

В (15)...(17) обозначено:

$$E = b/[\gamma(c_1 - c)] > 0, \quad B' = y_{x_0 = \gamma c_1 - b}/[\alpha\gamma(c_1 - c)].$$

Как видим, в случае $|x_{\max}| \geqslant b + \gamma c_1$ появляется четвертый существенный параметр исследуемой системы E. Здесь B' есть аргумент рассматриваемых преобразований, который монотонно возрастает с ростом x_0, причем

$$\lim_{x_0 \to \infty} B'(x_0) = B_{\max},$$

$$\lim_{x_0 \to b + \gamma c_1} B'(x_0) = B_{\min}.$$

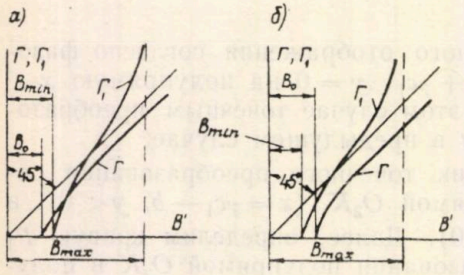


Рис. 6. — Диаграммы точечного преобразования для $|x_{\max}| > b + \gamma c_1$.

Нетрудно видеть, что значение $B_{\min}$ может быть получено из первых уравнений в (15)...(17), если положить в них $\Gamma_1 = 0$. Обозначим $B_0 = (B')_{\Gamma=0}$, то есть B_0 есть решение вторых уравнений в (15)...(17) при $\Gamma = 0$.

Рассматривая далее (15)...(17), можно установить, что при любых G, $B_{\max}$, E, A_1 (или A) и при любых B' из интервала $(B_{\min}, B_{\max})$:

(18 а) если $B_{\min} < B_0$, то $\Gamma_1(B') > \Gamma(B')$, и тогда при $|x_{\max}| \geqslant b + \gamma c_1$ фазовые траектории — сходящиеся в сторону «отрезка покоя»;

(18в) если $B_{\min} > B_0$, то $\Gamma_1(B'_3) = \Gamma(B'_3)$, где $B'_3 > B_{\min}$, причем $(\partial\Gamma_1/\partial B')_{B'=B'_3} > (\partial\Gamma/\partial B')_{B'=B'_3}$, и тогда при $B' = B'_3$ имеется устойчивый предельный цикл.

Полученные в этом случае диаграммы точечных преобразований изображены на рис. 6*а* и 6*б*.

III. Объединим теперь оба рассмотренных случая на основе того, что знание знака неравенства $B_{\min} \gtrless B_0$ определяет картину движения при $|x_{\max}| \geqslant b + \gamma c_1$, и в то же время $B_{\min}$ и B_0 представляют граничные значения соответствующих функций для случая $b + \gamma c \leqslant |x_{\max}| \leqslant b + \gamma c_1$.

Полагая в первом уравнении (15) $\Gamma_1 = 0$, $B' = B_{\min}$, во втором уравнений (15) $\Gamma = 0$, $B' = B_0$, и решая полученные уравнения совместно (исключением E), имеем:

$$G\{B_{\max} \ln [B_{\max}/(B_{\max} - B_{\min})] - B_{\min}\} + \sqrt{1 + A_1^2} \exp [(1/A_1) \operatorname{arctg} A_1] =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + (B_0 - 1)^2} \exp \{-(1/A_1) \operatorname{arctg} [A_1/(B_0 - 1)]\}.$$

Последнее можно записать;

$$F_1(B_{\min}) = F(B_0), \tag{19}$$

где функции F_1 и F — те же, что и в (10).

Аналогичное равенство (19) получается для (16) и (17). Теперь можно указать на следующее разбиение пространства параметров системы на области, соответствующие качественно различным типам движения.

а) Пусть при $b + \gamma c \leqslant |x_{\max}| \leqslant b + \gamma c_1$ имеем $F_1(B) > F(B)$. Тогда из (19) и рис. 5*а* видно, что и при $|x_{\max}| > b + \gamma c_1$ фазовые траектории будут сходящимися; следовательно, система в целом будет устойчива при любых начальных отклонениях (абсолютно устойчива), независимо от значений четвертого существенного параметра E.

Соответствующая область устойчивости располагается в пространстве параметров G, $B_{\max}$, A_1 (или A); границы этой области определяются как решение системы (14) относительно G, $B_{\max}$, A_1 (или A).

б) Пусть при $b + \gamma c \leqslant |x_{\max}| \leqslant b + \gamma c_1$ кривые $F_1(B)$ и $F(B)$ касаются при $B = B_1$. Если при этом $B_{\min} \leqslant B_1$, то, в силу (19), (18) и рис. 5*в*, в системе в целом будет полуустойчивый предельный цикл с «амплитудой» $|x_{\max}| = x_{\text{п}} \leqslant b + \gamma c_1$. Если же $B_{\min} > B_1$, то, в силу (19), (18), и рис. 5*в*, в этом случае система в целом будет абсолютно устойчива, для чего необходимо наложить определенные условия на значение четвертого существенного параметра E в силу первых уравнений (15)...(17) при $\Gamma_1 = 0$, удовлетворив неравенство:

$$E > E^* = \{B_{\max} \ln [B_{\max}/(B_{\max} - B_1)] - B_1\}/(2D). \tag{20}$$

Здесь B_1 определяется решением системы (14) относительно B при значении остальных параметров на границе построенной в предыдущем пункте а) области, а параметр D — по одной из следующих формул:

(20 а) $$D = \begin{cases} (1 + A_1^2)/B_{\max} & \text{— при комплексных корнях (9);} \\ 1/B_{\max} & \text{— при кратных корнях (9);} \\ A/B_{\max} & \text{— при вещественных разных корнях (9).} \end{cases}$$

в) Пусть, наконец, кривые $F_1(B)$ и $F(B)$ пересекаются дважды, как показано на рис. 5 *б*. Тогда если $B_{\min} < B_2$, то, согласно (19), $B_{\min} < B_0$, и, вследствие (18 а), при $|x_{\max}| > b + \gamma c_1$ фазовые траектории сходящиеся. Система в целом является автоколебательной (жесткий

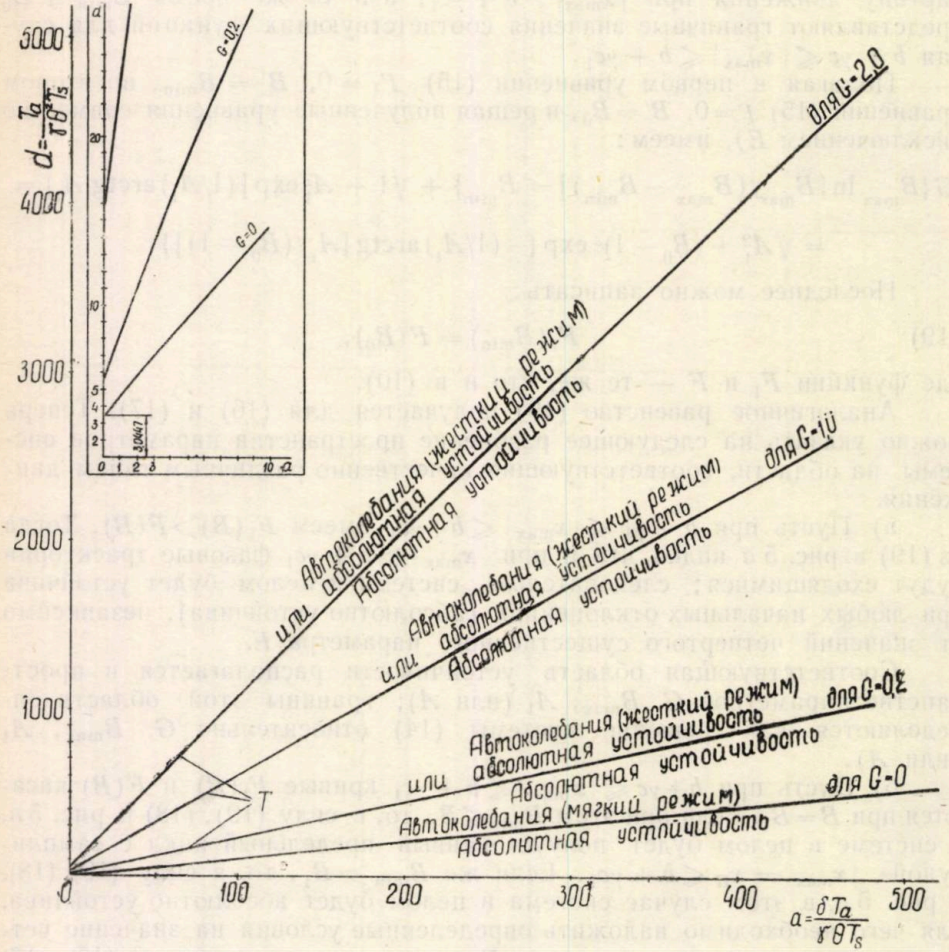


Рис. 7. — Сечения пространства параметров системы (1 а) плоскостями $G = \text{const.}$, и $E = \text{const.} < E^*$.

режим), причем оба предельных цикла располагаются на фазовой поверхности между прямыми $x = b + \gamma c_1$, $x = -b - \gamma c_1$. Если же при этом $B_2 \leqslant B_{\min} < B_1$, то аналогичным образом убеждаемся, что «амплитуда» устойчивого предельного цикла становится равной $|x_{\max}| = x_{\text{п}} \geqslant b + \gamma c_1$.

$G = 0{,}2$			$G = 1{,}0$			$G = 2{,}0$			$G = 3{,}0$			$G = 4{,}0$			$G = 5{,}0$			$G = 6{,}0$			$G = 7{,}0$			$G = 8{,}0$			$G = 9{,}0$			$G = 10{,}0$		
a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*	a	d	E^*
1,054	9,857	5,158	0 9120	22,85	2,026	0,1526	33.39	0,9529	0,6062	64.54	0,9683	1,056	105,7	0,9743	1,507	157,2	0,9797	1,952	218,1	0,9748	0,0112	160,0	0,4305	0,1451	205,1	0,4313	0,2771	255,0	0,4289	0,4121	310,7	0,4281
3,992	16,26	9,411	4,337	47,29	4,702	2,138	61.85	2,038	3,353	119,8	2,048	4,563	196,6	2,054	5,760	291.2	2,054	6,968	405,7	2,044	2,392	288,0	0,9713	2,850	371,5	0,9826	3,290	461,3	0,9762	3,722	559,4	0,9861
6,679	22,80	13.83	9,561	81,06	8,456	7,707	129,7	4,671	11.04	251,5	4,662	14.37	413,6	4,663	17,70	616,1	4,674	21.09	860,7	4,703	8,148	535,8	2,038	9,431	697,8	2,092	10,62	867,0	2,079	11.80	1 054	2,067
10,75	32,40	20,36	15,17	115,5	12,33	16.19	223,9	8,376	22.75	435,4	8,329	29,30	716,8	8,345	35.84	1 067	8,337	42.24	1 477	8,251	24,37	1 142	4,697	27,99	1 495	4,821	31,05	1 826	4,697	33,92	2 177	4,634
13,28	39,19	24,35	25,68	166,7	18,09	25,32	321,0	12,19	35,38	626.6	12.19	45,44	1 033	12,19	55.52	1 542	12.24	65.40	2 139	12,16	48,83	1 969	8,297	55,30	2 520	8,265	61,93	3 156	8,323	68,43	3 849	8,308
13,42	38,53	24,57	29,01	198,4	21,42	39,14	464,5	17.86	54,43	905,8	17,78	69,65	1 490	17,74	85,10	2 231	17,86	100,5	3 117	17,92	75,40	2 843	12,15	85,41	3 648	12,16	45,20	4 532	12,09	106,1	5 630	12,42
13,45	38,61	24,62	29,22	199,1	21,74	47.73	552,0	21,32	66,99	1 089	21,49	85,58	1 788	21,35	104,6	2 682	21,56	122,0	3 700	21,32	115,6	4 136	17,87	130.8	5 296	17,82	145,2	6 531	17,50	160,5	7 986	17,56
13,27	39,80	25,45	29,36	200,5	21,88	48,28	557,4	21,26	69.55	1 125	29,20	88,88	1 858	22,13	108,4	2 764	22,19	123,1	3 727	21,41	141,8	4 958	21,46	160,8	6 383	21,60	176,8	7 723	20.95	198,6	9 765	21,74
16,34	45,31	29,24	30,45	206.9	22,62	50.08	576,0	22,29	80,91	1 288	25,51	103,4	2 123	25,42	126,0	3 165	26,48	123,3	3 729	21,45	148,1	5 184	22,37	166,6	6 617	22,17	187,5	8 340	22,40	205,1	9 988	22,13
23,90	62,18	40,92	35,50	236,4	25,95	58,31	659,6	25,58	116.0	1 785	35,48	148,3	2 948	35,54	180,8	4 409	35,62	128,2	3 881	22,40	170,3	5 818	25,40	193,2	7 505	25,36	215,8	9 378	25,34	239,0	11,52.10³	25,66
31,68	79,19	52,82	51,21	327.4	36,25	83,83	915,5	35,72	152,9	2 305	45,97	195,3	3 805	46,07	237,6	5 675	46,06	148,5	4 412	25,44	244,9	8 151	35,54	275,6	10,35.10³	34,98	307,4	12,91.10³	34,92	341,2	15,92.10³	35,73
39,67	97,04	65,18	66,48	420.4	47,73	110,3	1 175	46,09	190,0	2 824	56,53	242,4	4 652	56,28	234,8	6 934	56,25	212,7	6 130	35,53	323,8	10,62.10³	46,67	364,3	13.49.10³	46,13	405,5	16,75.10³	45,40	477,0	20,38.10³	44,93
55,51	131,6	89,33	84,20	515,7	57,62	137,3	1 444	56,74	264,2	3 856	77.23	336,9	6 353	79,97	411,0	9 536	77,77	279,6	7 893	45,98	399,0	12.83.10³	56,00	450,2	16,38.10³	55,55	503,9	20.56.10³	56,05	554,6	24,96.10³	55,60
87,21	200,6	137,6	117,3	703.1	78.94	119,1	1 971	77.77	412,4	5 909	118.7	525,6	9 728	118,2	639,4	14,537.10³	118,3	347,5	9 690	56,40	553,9	17,48.10³	76,33	626,5	22,44.10³	76,37	702,2	28,27.10³	77,47	773,4	34,36.10³	76,97
165,6	368,2	255,5	183,6	1 077	121.4	298,6	3 022	119,5	781,1	10,98.10³	221,4	996,0	18,11.10³	220,6	1 208	26,88,10³	219,3	488,0	13,24.10³	77,20	867,0	26,99.10³	119,2	978,3	34,49.10³	117,3	1 091	43,08.10³	118,4	1 212	53,20.10³	120,0
244,6	538,4	374,8	347,6	1 989	225 3	564,8	5 590	221,7	1 148	15,99.10³	322.3	1 466	26,48.10³	323,4	1 779	39,35.10³	320,6	752,0	20,22.10³	117,9	1 643	50,29.10³	222,2	1 849	63.94.10³	218,6	2 058	79,42.10³	216,0	2 266	96,52.10³	215,5
322,4	703,1	491,1	512,6	2 913	330,4	832,7	8 192	325,1	1 515	21,02.10³	424,3	1 932	34,71.10³	423,8	2 345	51.60.10³	419,8	1 420	37,40.10³	218,0	2 411	73,13.10³	322,5	2 723	99.66.10³	319,4	3 034	116,6.10³	322,0	3 352	142,7.10³	323,5
635,0	1 368	959.4	675,5	3 810	432,9	1 096	10,71.10³	426.0	2 981	41,05.10³	828,6	3 796	67,56.10³	824,2	4 602	100,3.10³	822,5	2 097	55,08.10³	322,9	3 180	95,99.10³	422,5	3 590	122.8.10³	418,5	3 997	152,7.10³	421,5	4 421	187,3.10³	423,5
947,1	2 030	1 426	1 329	7 429	845.5	2 158	20,92.10³	833,6	4 443	60,95.10³	1 332	5 667	100.7.10³	1 232	6 880	149,9.10³	1 228	2 763	72,12.10³	422,5	6 254	187,4.10³	823,0	7 060	239.8.10³	825,8	7 870	208,9.10³	821,5	8 701	366,2.10³	826,0
1 260	2 692	1 894	1 982	11,04.10³	1 258	3 216	31,05.10³	1 235	5 908	80,94.10³	1 636	7 532	133.6.10³	1 632	9 148	199,1.10³	1 630	4 518	140,0.10³	818,0	9 319	278,3.10³	1 223	10,52.10³	356.1.10³	1 227	11,74.10³	444,6.10³	1 220	12,96.10³	543,0.10³	1 223
1 571	3 352	2 359	2 635	14,65.10³	1 699	4 278	41,26.10³	1 644	7 364	100,7.10³	2 035	9 397	166,6.10³	2 038	11,417.10³	248,0.10³	2 031	8 104	209,4.10³	1 224	12,45.10³	373,10.10³	1 636	14,00.10³	473,8.10³	1 628	15,59.10³	589,0.10³	1 615	17,21.10³	720,0.10³	1 621

Таблица 2

$a=5$		$a=10$		$a=15$		$a=25$		$a=50$		$a=100$		$a=200$		$a=300$		$a=400$		$a=500$		$a=2{,}5\cdot10^3$		$a=5\cdot10^3$		$a=10\cdot10^3$		$a=15\cdot10^3$	
d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*
											$G=0{,}2$																
100	209,2	100	197,0	100	183,7	100	154,7	500	1 070	500	936,8	500	589,5	1 000	1 601	1 000	1 218	1 000	0	50.10^3	$117{,}9.10^3$	50.10^3	$111{,}5.10^3$	50.10^3	$91{,}08.10^3$	50.10^3	$83{,}16.10^3$
200	448,2	200	437,1	200	421,2	200	397,6	1 000	2 296	1 000	2 174	1 000	1 904	1 500	2 881	1 500	2 584	1 500	2 256	100.10^3	$242{,}3.10^3$	100.10^3	$236{,}1.10^3$	100.10^3	$223{,}1.10^3$	100.10^3	$208{,}8.10^3$
300	689,0	300	678,8	300	665,4	300	640,4	1 500	3 527	1 500	3 407	1 500	3 151	2 000	4 131	2 000	3 853	2 000	3 562	150.10^3	$367{,}1.10^3$	150.10^3	$361{,}0.10^3$	150.10^3	$347{,}9.10^3$	150.10^3	$334{,}5.10^3$
400	931,4	400	921,8	400	909,8	400	886,1	2 000	4 762	2 000	4 644	2 000	4 409	2 500	5 378	2 500	5 104	2 500	4 828	200.10^3	$492{,}1.10^3$	200.10^3	$485{,}2.10^3$	200.10^3	$472{,}0.10^3$	200.10^3	$459{,}8.10^3$
500	1 176	500	1 165	500	1 154	500	1 131	2 500	5 995	2 500	5 883	2 500	5 637	3 000	6 612	3 000	6 352	3 000	6 084	250.10^3	$616{,}4\ 10^3$	250.10^3	$609{,}7.10^3$	250.10^3	$597{,}4.10^3$	250.10^3	$585{,}4.10^3$
											$G=1{,}0$																
100	26,59	100	19,34	100	0	100	0	500	129,7	500	0	1 000	0	1 000	0	1 000	0	1 000	0	50.10^3	$17{,}34.10^3$	50.10^3	$14{,}48.10^3$	50.10^3	0	50.10^3	0
200	64,29	200	58,98	200	53,14	200	37,34	1 000	329,8	1 000	271,4	1 500	343,2	1 500	0	1 500	0	1 500	0	100.10^3	$37{,}29.10^3$	100.10^3	$34{,}77.10^3$	100.10^3	$29{,}00.10^3$	100.10^3	$21{,}40.10^3$
300	102,2	300	97,36	300	92,08	300	80,39	1 500	525,3	1 500	473,6	2 000	560,0	2 000	403,2	2 000	0	2 000	0	150.10^3	$57{,}24.10^3$	150.10^3	$54{,}77.10^3$	150.10^3	$49{,}47.10^3$	150.10^3	$43{,}50.10^3$
400	140,4	400	135,7	400	131,3	400	120,3	2 000	721,4	2 000	672,3	2 500	761,4	2 500	633,7	2 500	455,3	2 500	0	200.10^3	$77{,}19.10^3$	200.10^3	$74{,}72.10^3$	200.10^3	$69{,}58.10^3$	200.10^3	$64{,}12.10^3$
500	178,7	500	174,2	500	169,3	500	159,3	2 500	917,7	2 500	868,9	3 000	959,5	3 000	845,4	3 000	703,9	3 000	499,8	250.10^3	$97{,}05.10^3$	250.10^3	$94{,}64.10^3$	250.10^3	$89{,}71.10^3$	250.10^3	$84{,}39.10^3$
											$G=2{,}0$																
100	4,487	100	0			100	0	1 000	98,28	1 000	0	1 000	0							50.10^3	$5{,}493.10^3$	50.10^3	$2{,}778.10^3$	50.10^3	0	50.10^3	0
200	19,39	200	14,90			200	0	1 500	170,6	1 500	130,0	1 500	0							100.10^3	$12{,}85.10^3$	100.10^3	$11{,}03.10^3$	100.10^3	$5{,}594.10^3$	100.10^3	0
300	32,98	300	29,28			300	0	2 000	242,2	2 000	205,6	2 000	0							150.10^3	$20{,}15.10^3$	150.10^3	$18{,}45.10^3$	150.10^3	$14{,}49.10^3$	150.10^3	$8{,}431.10^3$
400	46,43	400	43,14			400	30,32	2 500	313,3	2 500	278,9	2 500	190,0							200.10^3	$27{,}42.10^3$	200.10^3	$25{,}77.10^3$	200.10^3	$22{,}10.10^3$	200.10^3	$17{,}77.10^3$
500	60,36	500	57,12			500	45,57	3 000	384,9	3 000	351,8	3 000	268,7							250.10^3	$34{,}72.10^3$	250.10^3	$33{,}07.10^3$	250.10^3	$29{,}55.10^3$	250.10^3	$25{,}64.10^3$
											$G=3{,}0$																
100	0	100	0			100	0	1 000	37,79			1 000	0							50.10^3	$2{,}352.10^3$	50.10^2	0	50.10^3	0	50.10^3	0
200	7,554	200	0			200	0	1 500	76,54			1 500	0							100.10^3	$6{,}250.10^3$	100.10^3	$4{,}731.10^3$	100.10^3	0	100.10^3	0
300	14,67	300	11,26			300	0	2 000	113,9			2 000	0							150.10^3	$10{,}06.10^3$	150.10^3	$8{,}701.10^3$	150.10^3	$5{,}011.10^3$	150.10^3	0
400	21,66	400	18,72			400	0	2 500	147,0			2 500	0							200.10^3	$13{,}84.10^3$	200.10^3	$12{,}54.10^3$	200.10^3	$9{,}510.10^3$	200.10^3	0
500	28,67	500	25,95			500	14,30	3 000	187,9			3 000	59,40							250.10^3	$17{,}64.10^3$	250.10^3	$16{,}36.10^3$	250.10^3	$13{,}53.10^3$	250.10^3	$10{,}01.10^3$
											$G=4{,}0$																
100	0	100	0					1 000	0											50.10^3	$1{,}048.10^3$	50.10^3	0	50.10^3	0		
200	0	200	0					1 500	38,22											100.10^3	$3{,}555.10^3$	100.10^3	$2{,}135.10^3$	100.10^3	0		
300	7,311	300	0					2 000	61,90											150.10^3	$5{,}905.10^3$	150.10^3	$4{,}745.10^3$	150.10^3	0		
400	11,60	400	8,825					2 500	84,80											200.10^3	$8{,}226.10^3$	200.10^3	$7{,}148.10^3$	200.10^3	$4{,}298.10^3$		
500	15,84	500	13,42					3 000	107,5											250.10^3	$10{,}55.10^3$	250.10^3	$9{,}503.10^3$	250.10^3	$7{,}039.10^3$		
											$G=5{,}0$																
100	0	100	0					1 000	0											50.10^3	0	50.10^3	0	50.10^3	0		
200	0	200	0					1 500	14,01											100.10^3	$2{,}212.10^3$	100.10^3	0	100.10^3	0		
300	3,494	300	0					2 000	36,01											150.10^3	$3{,}816.10^3$	150.10^3	$2{,}771.10^3$	150.10^3	0		
400	6,599	400	0					2 500	51,71											200.10^3	$5{,}382.10^3$	200.10^3	$4{,}441.10^3$	200.10^3	0		
500	9,476	500	7,103					3 000	67,04											250.10^3	$6{,}961.10^2$	250.10^3	$6{,}051\ 10^3$	250.10^3	$3{,}720.10^3$		
											$G=6{,}0$																
100	0							1 000	0											50.10^3	0	50.10^3	0				
200	0							1 500	0											100.10^3	$1{,}440.10^3$	100.10^3	0				
300	0							2 000	20,79											150.10^3	$2{,}611.10^3$	150.10^3	$1{,}630.10^3$				
400	3,730							2 500	32,94											200.10^3	$3{,}749.10^3$	200.10^3	$2{,}907.10^3$				
500	5,887							3 000	44,18											250.10^3	$4{,}891.10^3$	250.10^3	$4{,}087.10^3$				
											$G=7{,}0$																
								1 000	0											50.10^3	0	50.10^3	0				
								1 500	0											100.10^3	$0{,}9578.10^3$	100.10^3	0				
								2 000	0											150.10^3	$1{,}866.10^3$	150.10^3	0				
								2 500	21,66											200.10^3	$2{,}732.10^3$	200.10^3	$1{,}940.10^3$				
								3 000	29,96											250.10^3	$3{,}594.10^3$	250.10^3	$2{,}869.10^3$				
											$G=8{,}0$																
								1 000	0											50.10^3	0	50.10^3	0				
								1 500	0											100.10^3	$0{,}6344.10^3$	100.10^3	0				
								2 000	0											150.10^3	$1{,}734.10^3$	150.10^3	0				
								2 500	12,67											200.10^3	$2{,}049.10^3$	200.10^3	$1{,}298.10^3$				
								3 000	20,43											250.10^3	$2{,}736.10^3$	250.10^3	$2{,}059.10^3$				
											$G=9{,}0$																
								1 000	0											50.10^3	0	50.10^3	0				
								1 500	0											100.10^3	$0{,}3726.10^3$	100.10^3	0				
								2 000	0											150.10^3	$1{,}031.10^3$	150.10^3	0				
								2 500	0											200.10^3	$1{,}582.10^3$	200.10^3	$0{,}7904.10^3$				
								3 000	13,49											250.10^3	$2{,}133.10^3$	250.10^3	$1{,}490.10^3$				
											$G=10{,}0$																
								1 000	0											50.10^3	0	50.10^3	0				
								1 500	0											100.10^3	0	100.10^3	0				
								2 000	0											150.10^3	$0{,}7817.10^3$	150.10^3	0				
								2 500	0											200.10^3	$1{,}244.10^3$	200.10^3	0				
								3 000	8,134											250.10^3	$1{,}692.10^3$	250.10^3	$1{,}072.10^3$				

Наконец, если при этом $B_{\min} > B_1$, то, согласно (18), (19) и рис. 5 *б*, система вновь становится абсолютно устойчивой. Эта область устойчивости располагается в четырехмерном пространстве параметров G, E, $B_{\max}$, A_1 (или A) и определяется решением системы:

$$F_1(B_1) = F(B_1), \quad (\partial F_1/\partial B)_{B=B_1} > (\partial F/\partial B)_{B=B_1}. \tag{21}$$

Решение трех систем: (14); (14), (20); (21), изображено на диаграммах рис. 7, 8 и в табл. 1, 2. При этом параметры $B_{\max}$ и A_1 (или

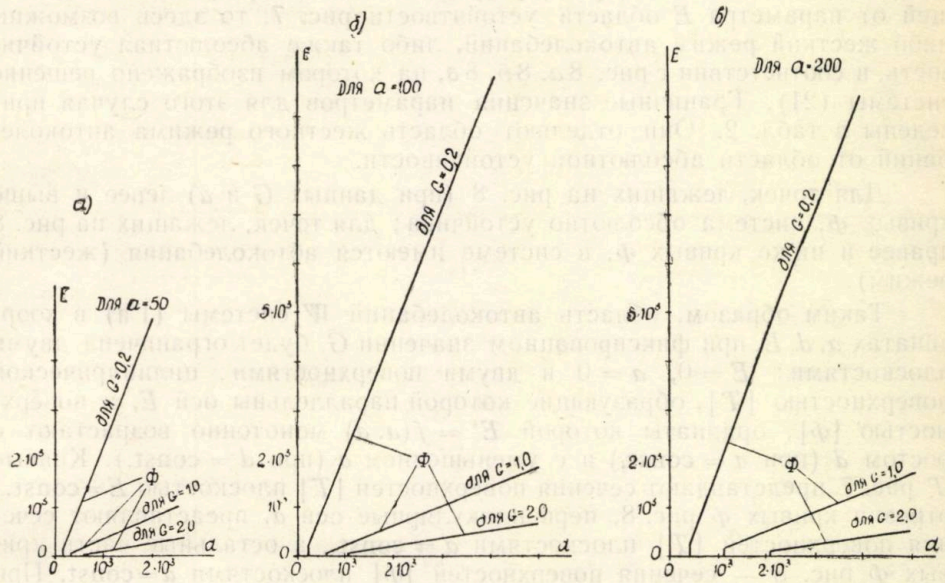


Рис. 8. — Сечения пространства параметров системы (1 а) поверхностями $G = \text{const}$. и $a = \text{const}$.

A), которые были удобны при исследовании, пересчитаны на производные от них и более удобные для практического использования параметры $a = \delta T_a/(\gamma\theta T_s)$, $d = T_a/(\gamma\theta^2 T_s)$, по формулам:

$$\text{(22 а)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 2B_{\max}/(1 + A_1^2) - 1, \\ d = 1 + B_{\max}^2/(1 + A_1^2) - 2B_{\max}/(1 + A_1^2) \end{array} \right\} \text{— для комплексных корней (9);}$$

$$\text{(22 б)} \quad a = 2B_{\max} - 1, \quad d = (B_{\max} - 1)^2 \text{ — для кратных корней (9);}$$

$$\text{(22 в)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = [(1 + A)/A]\, B_{\max} - 1, \\ d = B_{\max}^2/A - [(A + 1)/A]\, B_{\max} + 1 \end{array} \right\} \text{— для вещественных разных корней (9).}$$

На рис. 7 представлены сечения пространства параметров системы различными плоскостями $G = \text{const.}$, построенные, при $G \neq 0$, согласно (14)[4]. Для точек, лежащих внутри области устойчивости рис. 7, то

[4]) Об областях устойчивости и автоколебаний на рис. 7 при $G = 0$ см. ниже в пункте *В*.

есть лежащих правее и ниже кривой T при данном G, автоколебания невозможны ни при каких значениях E. Соответствующие рис. 7 (но в более широком диапазоне чисел) граничные значения параметров приведены в табл. 1. Если система (при $G \neq 0$) находится на границе области устойчивости рис. 7, то будем иметь полуустойчивый предельный цикл (на который «наматываются» снаружи и с которого «сматываются» изнутри фазовые траектории) при $E \leqslant E^*$ (табл. 1) и абсолютную устойчивость при $E > E^*$, где E^* — решение системы (14), (20). Наконец, если система (при $G \neq 0$) находится вне указанной независящей от параметра E области устойчтвости рис. 7, то здесь возможны либо жесткий режим автоколебаний, либо также абсолютная устойчивость, в соответствии с рис. 8 *а*, 8 *б*, 8 *в*, на котором изображено решение системы (21). Граничные значения параметров для этого случая приведены в табл. 2. Они отделяют область жесткого режима автоколебаний от области абсолютной устойчивости.

Для точек, лежащих на рис. 8 (при данных G и a) левее и выше кривых Φ, система обсолютно устойчива; для точек, лежащих на рис. 8 правее и ниже кривых Φ, в системе имеются абтоколебания (жесткий режим).

Таким образом, область автоколебаний W системы (1 а) в координатах a, d, E, при фиксированном значении G, будет ограничена двумя плоскостями: $E = 0$, $a = 0$ и двумя поверхностями: цилиндрической поверхностью $[T]$, образующие которой параллельны оси E, и поверхностью $[\Phi]$, ординаты которой $E^* = f(a, d)$ монотонно возрастают с ростом d (при $a = \text{const.}$) и с уменьшением a (при $d = \text{const.}$). Кривые T рис. 7 представляют сечения поверхностей $[T]$ плоскостью $E = \text{const.}$; отрезки кривых Φ рис. 8, перпендикулярные оси d, представляют сечения поверхностей $[T]$ плоскостями $a = \text{const.}$, а остальные части кривых Φ рис. 8 — сечения поверхностей $[\Phi]$ плоскостями $a = \text{const.}$ При увеличении параметра G область W «сжимается»; при этом указанная цилиндрическая поверхность $[T]$ передвигается при фиксированных значениях a в сторону больших значений d, а поверхность $[\Phi]$ опускается в сторону меньших значений E.

Часть области W (для $G=4$) изображена на рис. 9, где она ограничена произвольными плоскостями $a=20$, $d=500$, $E=20$. Вне области W система абсолютно устойчива.

Таким образом, для подавления автоколебания следует уменьшать d и увеличивать a, G и E.

Изучая фазовый портрет рис. 4, можно найти также многие интересующие нас показатели качества переходного процесса. Ограничимся здесь указанием областей монотонности переходного процесса. Переходный процесс в системе (1 а) будет монотонным (без перерегулирования) для любых $b + \gamma c > |x(0)| < \infty$, $y(0) = 0$, если соблюдаются следующие условия, в случае комплесных корней (9):

$$\text{(23 а)} \qquad \sqrt{A_1^2 + (B_{\max} - 1)^2}\exp\{-(1/A_1)\operatorname{arctg}[A_1/(B_{\max} - 1)]\} \leqslant \leqslant 2GE(1 + A_1^2)/B_{\max};$$

в случае кратных корней (9):

$$B_{\max} \leqslant 1 + 2(GE/B_{\max})\exp[1/(B_{\max}-1)]; \tag{23 б}$$

и в случае вещественных разных корней (9):

$$(B_{\max}-A)\exp\{-[1/(A-1)]\ln[(B_{\max}-1)/(B_{\max}-A)]\} \leqslant \leqslant 2EGA/B_{\max}. \tag{23 в}$$

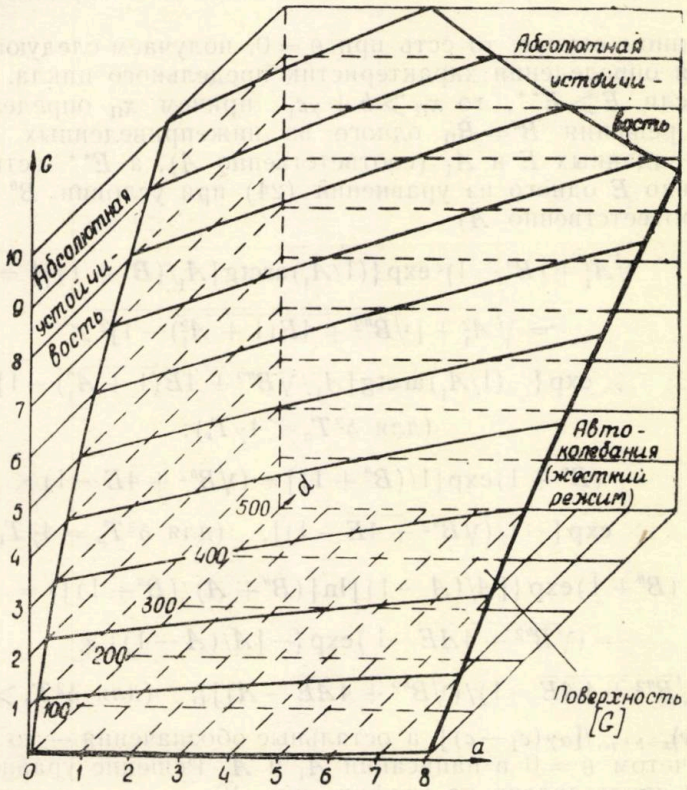


Рис. 9. — Сечения пространства параметров системы (1 а) плоскостью $G = \text{const}$.

Условия (23) являются необходимыми и достаточными. Соответствующие им области монотонности переходного процесса лежат внутри построенных выше областей устойчивости системы.

Б. *Кулоновское трение в сервомоторе и золотнике. Объект без саморегулирования*

В этом случае в уравнениях (1 а) $\theta = 0$, на фазовом портрете рис. 4 семейства кривых B_1D_1, F_1H_1, BD и FH вырождаются в семейства парабол, а отрезки прямых AA_1, EE_1 становятся параллельными оси x. Имеется «отрезок покоя» $y = 0$, $|x| \leqslant b + \gamma c$, концы

которого неустойчивы. В системе имеется единственный устойчивый предельный цикл; «амплитуда» автоколебаний $|x_{max}| = x_{\text{п}}$ может быть определена по выполнении точечных преобразований, в общем аналогичных приведенным выше, исходя из соответствующих условий существования предельных циклов.

Как и в общем случае $\theta \neq 0$, параметры предельного цикла, найденные относительно переменной x, могут быть с помощью уравнений (1 а) пересчитаны относительно любой из координат системы φ, μ, η.

В данном случае, то есть при $\theta = 0$, получаем следующие выражения для определения характеристик предельного цикла.

а) Если $E > E^{**}$, то $x_{\text{п}} > b + \gamma c_1$, причем $x_{\text{п}}$ определяется[5] с помощью решения $B'' = B_{\text{п}}$ одного из нижеприведенных уравнений (24) при заданных E и A_1 (соответственно A), а E^{**} есть решение относительно E одного из уравнений (24) при условии $B'' = 0$ и том же A_1 (соответственно A)

$$\sqrt{A_1^2 + (B''-1)^2}\exp\{(1/A_1)\operatorname{arctg}[A_1/(B''+1)]\} =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + [\sqrt{B''^2 + 4E(1+A_1^2)} - 1]^2} \times \tag{24 а}$$

$$\times \exp\{-(1/A_1)\operatorname{arctg}[A_1/\sqrt{B''^2 + 4E(1+A_1^2)} - 1]\},$$

$$(\text{для } \delta^2 T_a < 4\gamma T_s);$$

$$(B''+1)\exp[1/(B''+1)] = (\sqrt{B''^2 + 4E} - 1) \times \tag{24 б}$$

$$\times \exp[-1/(\sqrt{B''^2 + 4E} - 1)], \quad (\text{для } \delta^2 T_a = 4\gamma T_s);$$

$$(B''+1)\exp\{[A/(A-1)]\ln[(B''+A)/(B''+1)]\} =$$

$$= (\sqrt{B''^2 + 4AE} - 1)\exp\{-[A/(A-1)] \times \tag{24 в}$$

$$\times \ln[(\sqrt{B''^2 + 4AE} - 1)/(\sqrt{B''^2 + 4AE} - A)]\}, \quad (\text{для } \delta^2 T_a > 4\gamma T_s),$$

где $B'' = (y)_{x=b+\gamma c_1}/[\alpha\gamma(c_1 - c)]$, а остальные обозначения — то же, что и выше, с учетом $\theta = 0$ в написании A_1 и A. Решение уравнений (24) при $B'' = 0$ представлено на графике рис. 10.

б) Если $E < E^{**}$, то

$$x_{\text{п}} = b(1 + E^{**})/E^{**} + \gamma c < b + \gamma c_1. \tag{25}$$

в) Наконец, при $E = E^{**}$ имеем:

$$x_{\text{п}} = b + \gamma c_1. \tag{26}$$

Значения параметра E^{**} см. на рис. 10.

Воспользовавшись найденными характеристиками предельных циклов в координатах x, $\dot{x} \equiv y$ и уравнениями (1 а), нетрудно получить

---

[5]) Зависимость $x_{\text{п}}$ от $B_{\text{п}}$ может быть легко выведена на основании уравнений (7), (8) и не приведена здесь, но ниже дана зависимость $\varphi_{\text{п}}$ от $B_{\text{п}}$.

следующие формулы для определения максимального отклонения регулируемой величины $\varphi_{\text{П}}$ в автоколебательном режиме.

а) Если $E > E^{**}$, то

$$\varphi_{\text{П}} = b + \gamma c_1 + T_a(c_1 - c)\delta^2(B_{\text{П}}^2/4 - 1)/(2T_s). \tag{27 а}$$

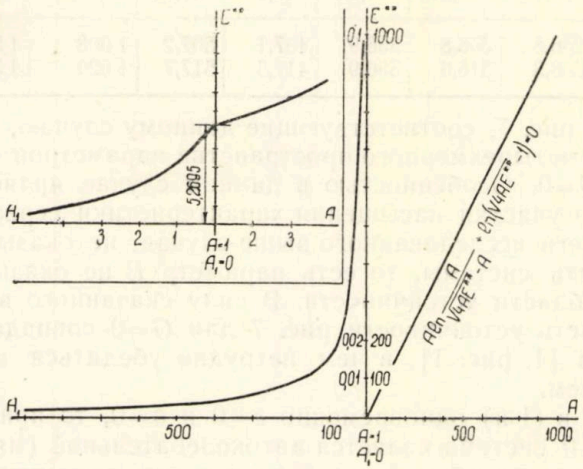


Рис. 10. — Диаграмма для определения параметров предельных циклов систем (1 а) и (1 б) при $\theta = 0$.

б) Если $E < E^{**}$, то

$$\varphi_{\text{П}} = \gamma c + b + (b/E^{**})[1 - \delta^2 T_a/(2\gamma T_s)]. \tag{27 б}$$

в) Если $E = E^{**}$, то тогда

$$\varphi_{\text{П}} = b + \gamma c_1 - (c_1 - c)\delta^2 T_a/(2T_s). \tag{27 в}$$

В. Частный случай отсутствия кулоновского трения в сервомоторе

В этом случае в системе уравнений (1 а) $c = 0$. Из фазового портрета рис. 4 исключаются участки застоя сервомотора

$$-\gamma c + b \leqslant x \leqslant \lambda c + b, \quad y > 0 \quad \text{и} \quad -\gamma c - b \leqslant x \leqslant -b + \gamma c, \quad y = 0.$$

Формулы точечного преобразования могут быть получены из написанных выше для общего случая (см. пункт А), если положить в них $c = 0$, $(G = 0)$. Система либо абсолютно устойчива, либо автоколебательная. В последнем случае имеется единственный устойчивый предельный цикл, режим возникновения автоколебаний — мягкий. Критерий устойчивости в этом более простом случае получается из условия прохождения предельного цикла (вырожденного) через концы отрезка покоя. В соответствии с этим граница устойчивости системы определяется решениями трех уравнений $F_1 = F$, получаемых из формул (10)...(12), если положить в них $G = 0$, $B = B_{\max}$. Области устойчивости и автоколебаний изображены на рис. 7, а граничные значения параметров — в табл. 3.

Таблица 3

a	0,000	1,000	2,148	3,867	6,472	8,089	8,180	8,211	8,517
d	3,045	4,441	5,905	7,977	10,98	12,77	12,89	12,25	13,22
a	11,01	12,94	14,90	25,02	34,87	45,30	55,48	106,0	156,3
d	16,05	18,14	20,21	30,92	40,52	51,94	63,50	114,2	164,9
a	206,4	256,8	306,8	356,9	407,1	507,2	1 008	1 508	2 008
d	215,4	266,3	316,6	366,9	417,5	517,7	1 020	1 520	2 022

Области рис. 7, соответствующие данному случаю, представляют собой сечение четырехмерного пространства параметров системы (1 а) плоскостью $G=0$. Особенностью в данном случае является то обстоятельство, что участки насыщения характеристики сервомотора, в отличие от общего исследованного выше случая, не оказывают влияния на устойчивость системы, то есть параметр E не оказывает влияния на границы области устойчивости. В силу сказанного в частном случае $\gamma=\delta$ область устойчивости рис. 7 для $G=0$ совпадает с таковой, построенной в [4, рис. 1], в чем нетрудно убедиться непосредственным сравнением.

Если же в (1 а) одновременно $c=0$ и $\theta=0$, то при любом коэффициенте $\delta>0$ система является автоколебательной (мягкий режим); «амплитуда» автоколебаний определяется при этом аналогично тому, как это сделано в пункте Б.

Г. *Частный случай отсутствия обратной связи*

В этом случае в уравнениях (1 а) имеем $\delta=0$. Весь анализ аналогичен проделанному выше в пункте А, с тем отличием, что при этом в формулах (20 а) $D=2$, то есть один из существенных параметров ($B_{\max}$) может быть исключен в силу уравнений (20 а), и пространство параметров системы становится трехмерным. Область жесткого режима автоколебаний в пространстве параметров G, d, $h=d/(2E)$ будет заключена между цилиндрической поверхностью $[H]$, образующие которой параллельны оси h, плоскостью $G=0$ и поверхностью, проходящей через ось d. Вне этой области система абсолютно устойчива. На рис. 11 изобра-

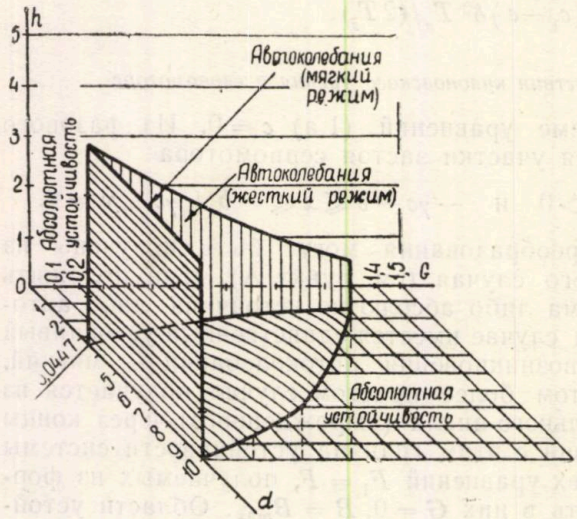


Рис. 11. — Сечение пространства параметров системы (1 а) плоскостью $a=0$.

Таблица 4

$G = 0{,}2$		$G = 1{,}0$		$G = 2{,}0$		$G = 3{,}0$		$G = 4{,}0$		$G = 5{,}0$		$G = 6{,}0$		$G = 7{,}0$		$G = 8{,}0$		$G = 9{,}0$		$G = 10{,}0$	
d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*	d	E^*
100	220,4	100	31,99	100	9,938	100	4,195	100	1,918	100	0	100	0	100	0	100	0	100	0	100	0
200	459,6	200	69,09	200	22,94	200	10,71	200	5,776	200	3,363	200	2,010	200	1,177	200	0	200	0	200	0
300	698,8	300	106,8	300	36,30	300	17,39	300	9,754	300	5,977	300	3,853	300	2,548	300	1,702	300	1,089	300	0,6100
400	943,4	400	144,8	400	49,83	400	24,24	400	13,83	400	8,644	400	5,712	400	3,912	400	2,738	400	1,942	400	1,367
500	1 187	500	183,1	500	63,49	500	31,16	500	17,97	500	11,38	500	7,618	500	5,348	500	3,830	500	2,810	500	2,035
1 000	2 410	1 000	376,2	1 000	132,8	1 000	66,46	1 000	39,19	1 000	25,41	1 000	17,55	1 000	12,72	1 000	9,490	1 000	7,240	1 000	5,620
1 500	3 643	1 500	570,6	1 500	202,8	1 500	102,4	1 500	60,90	1 500	39,87	1 500	27,81	1 500	20,32	1 500	15,36	1 500	11,87	1 500	9,408
2 000	4 872	2 000	765,8	2 000	273,3	2 000	138,6	2 000	82,82	2 000	54,53	2 000	38,14	2 000	28,08	2 000	21,32	2 000	16,62	2 000	13,26
2 500	6 101	2 500	961,4	2 500	344,1	2 500	175,0	2 500	104,8	2 500	69,22	2 500	48,74	2 500	35,95	2 500	27,40	2 500	21,42	2 500	17,24
3 000	7 340	3 000	1 157	3 000	415,1	3 000	211,5	3 000	127,0	3 000	84,08	3 000	59,33	3 000	43,80	3 000	33,54	3 000	26,32	3 000	21,09
50.10^3	$124{,}2.10^3$	50.10^3	$19{,}77.10^3$	50.10^3	7 198	50.10^3	3 724	50.10^3	2 272	50.10^3	1 528	50.10^3	1 097	50.10^3	823,5	50.10^3	641,5	50.10^3	512,5	50.10^3	419,8
100.10^3	$248{,}7.10^3$	100.10^3	$39{,}62.10^3$	100.10^3	$14{,}44.10^3$	100.10^3	7 485	100.10^3	4 572	100.10^3	3 080	100.10^3	2 213	100.10^3	1 666	100.10^3	1 299	100.10^3	1 038	100.10^3	850,5
150.10^3	$373{,}1.10^3$	150.10^3	$59{,}50.10^3$	150.10^3	$21{,}70.10^3$	150.10^3	$11{,}25.10^3$	150.10^3	6 878	150.10^3	4 635	150.10^3	3 335	150.10^3	2 512	150.10^3	1 958	150.10^3	1 567	150.10^3	1 285
200.10^3	$497{,}4.10^3$	200.10^3	$79{,}37.10^3$	200.10^3	$28{,}97.10^3$	200.10^3	$15{,}02.10^3$	200.10^3	9 186	200.10^3	6 197	200.10^3	4 462	200.10^3	3 353	200.10^3	2 623	200.10^3	2 098	200.10^3	1 719
250.10^3	$622{,}2.10^3$	250.10^3	$99{,}26\ 10^3$	250.10^3	$36{,}23.10^3$	250.10^3	$18{,}80\ 10^3$	$250\ 10^3$	$11{,}50.10^3$	250.10^3	7 755	250.10^3	5 580	250.10^3	4 206	250.10^3	3 279	250.10^3	2 630	250.10^3	2 156

жена часть этой области, ограниченная произвольными плоскостями $d=10$, $h=4$. Подобный случай был рассмотрен ранее в [5]. Пространство параметров рис. 11 может быть рассматриваемо как преобразованное сечение четырехмерного пространства параметров A_1 (или A), $B_{\max}$, G, E системы (1 а) поверхностью, пределяемой уравнениями (20 а) при $D=2$, или как сечение пространства параметров a, d, G, E этой системы плоскостью $a=0$. Граничные (между областями устойчивости и жесткого режима автоколебаний) значения параметров для этого случая приведены в табл. 4.

Если в (1 а) одновременно $\delta=0$, $(D=2)$ и $c=0$, $(G=0)$, то, как и в предыдущем пункте В, влияние насыщения характеристики сервомотора (то есть параметра E) исчезает, и устойчивость системы зависит от одного существенного параметра. Граница устойчивости определится здесь из (10) как решение уравнения $F_1=F$, в котором $G=0$, $B=B_{\max}=(1+A_1^2)/2$, откуда получаем известное условие устойчивости в виде:

$$A_1=\sqrt{4\gamma T_a T_s-\gamma^2\theta^2 T_s^2}/(\gamma\theta T_s)<3{,}3435,$$

или

$$d=T_a/(\gamma\theta^2 T_s)<3{,}0447.$$

При обращении последнего неравенства в равенство вырожденный устойчивый предельный цикл проходит через концы отрезка покоя, а при изменении в этом неравенстве знака на обратный в системе возникают автоколебания (мягкий режим).

Д. Частный случай отсутствия кулоновского трения в золотнике

При этом в систему уравнений (1 а) следует подставить значение $b=0$. Из фазового портрета рис. 4 исключаются куски семейств парабол на участках

$$\left.\begin{aligned} -b+\gamma c_1 \leqslant x \leqslant b+\gamma c_1, \quad y<0,\\ -b-\gamma c_1 \leqslant x \leqslant b-\gamma c_1, \quad y>0 \end{aligned}\right\} \text{ для } |x_{\max}|>b+\gamma c_1;$$

$$\left.\begin{aligned} x_{\max}-2b \leqslant x \leqslant x_{\max}, \quad y<0,\\ x_{\min} \leqslant x \leqslant x_{\min}+2b, \quad y>0 \end{aligned}\right\} \text{ для } |x_{\max}| \leqslant b+\gamma c_1.$$

Как показывает анализ, в этом случае система абсолютно устойчива, если только δ и θ не равны одновременно нулю. Данный вывод справедлив в рамках идеализации сухого трения соответственно закону Кулона. Если для сухого трения принять более сложную зависимость от скорости, то тогда оно, вызывая гистерезисные петли на нелинейной характеристике системы, само по себе может служить причиной автоколебаний [15]. Последняя ситуация может возникнуть, если коэффициент трения при страгивании поршня сервомотора с места значительно больше, нежели во время движения поршня. Заметим, что и в таком случае могут быть определенным образом (с некото-

рым приближением) использованы приведенные выше области устойчивости, следует лишь отнести к коэффициенту b некулоновскую составляющую сухого трения в сервомоторе в момент страгивания. Заметим, однако, что по данным экспериментов с гидравлическими поршневыми сервомотора сухое трение в последних можно считать кулоновским.

5. СИСТЕМА С СЕРВОМОТОРОМ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ

Непосредственно видно, что уравнения (1 б) могут быть получены из уравнений (1 а), если в последних положить $c_1 = \infty$, то есть не учитывать участков насыщения характеристики сервомотора. Характеристика (2) при этом будет иметь вид рис. 2 *а*, и остается в силе весь анализ предыдущего параграфа, произведенный для случая $b + \gamma c \leqslant |x_{max}| \leqslant b + \gamma c_1$, но здесь распространяемый уже на все значения $|x_{max}| \geqslant b + \gamma c$. Движение системы зависит от трех существенных параметров: A_1 (соответственно A), B_{max} и G (или производных от них параметров a, d, G). Сечения пространства параметров систе-

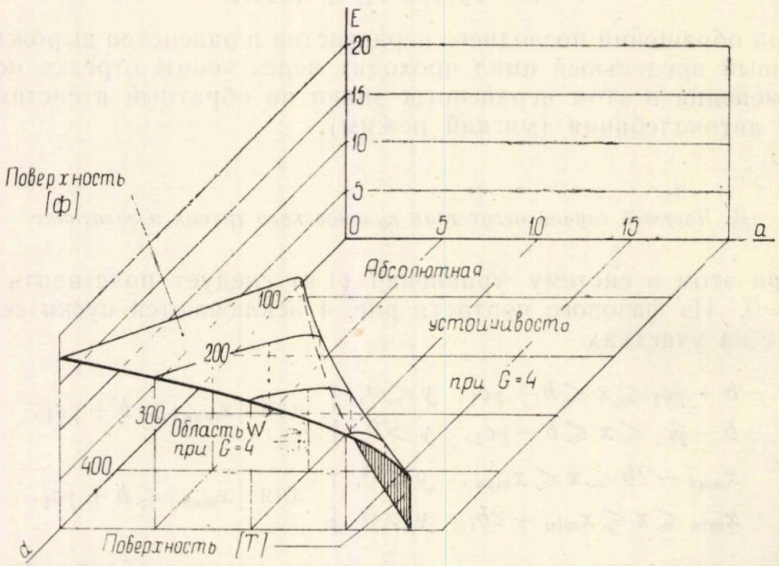


Рис. 12. — Пространство параметров системы (1 б).

мы (1 б) плоскостями $G = \text{const}$. (в том числе плоскостью $G=0$) будут целиком совпадать с таковыми, показанными на рис. 7, но теперь всегда $E < E^*$, так как $E=0$, и поэтому, если точка лежит при данном G выше кривой T на рис. 7, то всегда будут автоколебания (жесткий режим при $G > 0$). В пространстве a, d, G границей между областями устойчивости и автоколебаний служит поверхность $[G]$, ординаты которой $G = f(a, d)$ монотонно возрастают с ростом d (при

$a = \text{const.}$) и с уменьшением a (при $d = \text{const.}$). Часть пространства a, d, G (с поверхностью $[G]$) изображена на рис. 12, где она ограничена произвольными плоскостями $a=8$, $d=500$, $G=10$. Для подавления автоколебаний целесообразно увеличивать a и G и уменьшать d.

Таким образом, в системе (1 б) при $\delta > 0$ и $\theta > 0$ возможны либо абсолютная устойчивость, либо автоколебания (жесткий режим при $c \neq 0$, мягкий режим при $c=0$).

Как видим, наличие участков насыщения у характеристики сервомотора может положительно влиять на устойчивость системы, поскольку, при соответствующем увеличении параметра E, область жесткого режима автоколебаний для системы (1 б) (рис. 7) может стать областью абсолютной устойчивости для системы (1а). Использование этого обстоятельства может позволить подавить автоколебания в системе за счет такого простого средства, как рациональный выбор нелинейной характеристики сервомотора.

Физически последний вывод ясен из того, что увеличению E при $A_1 = \text{const.}$, $(A = \text{const.})$, $B_{\max} = \text{const.}$ и $G = \text{const.}$ соответствует уменьшение c_1. При этом в случае $c_1 \to c$ имеем $|\dot{\mu}_{\max}| \to 0$ (рис. 3), и в пределе остается один объект, для которого при $\theta > 0$ имеем только устойчивые переходные процессы. Фактически переход от автоколебаний к устойчивости за счет уменьшения c_1 происходит не при $c_1 = c$, а раньше, при некотором $c_1 > c$, что и отражено в выведенных условиях устойчивости.

Из рис. 7 видно также, что с увеличением G область автоколебаний сужается. При $G = \infty$ эта область исчезает совсем. Это также ясно физически, ибо $G = \infty$ может быть либо при $c = \infty$ (сервомотор неподвижен), либо при $b=0$ (трение в золотнике отсутствует, и тогда, как показано выше, система устойчива). В действительности переход от автоколебаний к устойчивости за счет увеличения c, то есть за счет торможения сервомотора, происходит не при $c = \infty$, а раньше, при некотором увеличенном значении c, которое может быть найдено из приведенных формул и таблиц.

Если же в (1 б) $\theta = 0$, то система является автоколебательной (мягкий режим); «амплитуда» автоколебаний $\varphi_{\max} = \varphi_{\text{пл}}$ определяется по формуле:

$$\varphi_{\text{пл}} = \gamma c + b + (b/E^{**})[1 - \delta^2 T_a/(2\gamma T_s)], \tag{27.б'}$$

где E^{**} см. на рис. 10.

6. СИСТЕМА С СЕРВОМОТОРОМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

Эта задача исчерпывающе рассмотрена в [4], но при $\gamma = \delta$.

Система (1 в) может быть получена из системы (1 а), если сделать в последней предельной переход $c_1 \to c$ при $(c_1 - c)/T_s = \text{const.}$

Характеристика (2) здесь будет иметь вид, показанный на рис. 2 б. При этом на фазовом портрете рис. 4 участки

$$b-\gamma c_1 < x < b-\gamma c, \quad y>0; \quad b+\gamma c < x < b+\gamma c_1, \quad y>0;$$
$$-b-\gamma c_1 < x < -b-\gamma c, \quad y<0; \quad -b+\gamma c < x < -b+\gamma c_1, \quad y<0$$

«сжимаются» в прямые, параллельные оси y.

На этих прямых фазовые траектории претерпевают разрыв (в силу разрывности характеристики рис. 2 б), причем величина скачка переменной $y \equiv \dot{\varphi} + \delta\dot{\mu}$ в точках разрыва равна $|\delta/T_s|$, а направление скачка задано согласно (1 в).

В целом анализ аналогичен проделанному выше для системы (1 а). Область устойчивости располагается в пространстве трех существенных параметров: G, $2bT_c/(\delta^2 T_a)$, $2b\theta T_c/(\delta T_a)$, где обозначено $T_c = T_s/(c_1 - c)$.

При $\delta > 0$ и $\theta > 0$ возможны либо автоколебания (жесткий режим), либо абсолютная устойчивость.

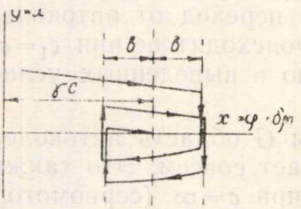


Рис. 13. — Изображение скользящего режима в системе (1 в) на фазовой поверхности.

Область устойчивости системы (1 в) представится диаграммами изображенными на рис. 10 и 11 в работе [4].

В системе (1 в) возможен так называемый скользящий режим, который изобразится на фазовом портрете так, как показано на рис. 13; отсюда могут быть определены условия его возникновения.

Если в (1 в) $\theta=0$, то система является автоколебательной (мягкий режим); «амплитуда» автоколебаний $\varphi_{max} = \varphi_{пр}$ определяется по формуле:

$$\varphi_{пр} = \gamma c + b^2 T_c/(2\delta^2 T_a). \tag{28}$$

Система (1 в) при $\theta=0$ была рассмотрена в [16], где также получена формула, совпадающая с (28).

Наконец, если в (1 в) одновременно $c = 0$ и $\theta = 0$, то система остается попрежнему автоколебательной. Эта частная задача рассматривалась в [13] и в [9].

Построенные области устойчивости и формулы для «амплитуд» автоколебаний позволяет сопоставить динамические качества трех систем и их различных частных сдучаев. Остановиться на этом вопросе в рамках данного сообщения не представляется возможным за недостатком места. Укажем лишь, что из формул (27 б) и (28) сразу видна возможность как случая $\varphi_{пл} > \varphi_{пр}$, так и случая $\varphi_{пл} < \varphi_{пр}$, при одинаковых значениях всех постоянных в обеих системах, в зависимости от их сочетания.

7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ

Все изложенные выше результаты получены точным методом и верны, если верны соответствующие исходные уравнения. Однако, поскольку при выводе последних сделаны некоторые известные допущения, возникает вопрос, насколько полученные выводы справедливы для реальных систем (точнее, для некоторых из реальных систем), отмеченных в § **1**. С этой целью были проведены испытания по специальной программе на экспериментальном стенде Балтийского завода им. Орджоникидзе, где объектом опытов служила система регулирования давления пара в судовом паровом котле. Были проверены границы устойчивости, полученные теоретически, и найдены характеристики полученных опытным путем предельных циклов.

Эти эксперименты подтвердили полученные выводы, чего и следовало ожидать, поскольку опытные характеристики и уравнения испытывавшейся системы весьма хорошо совпадают с системой (1 а).

8. ВЫВОДЫ

1. В работе предложен способ построения фазовых портретов некоторых динамических систем с неоднозначной кусочно-линейной характеристикой. Этот способ позволяет строить фазовые портреты упрощенно отбрасывая те их части, которые при исследовании системы методом точечных преобразований не оказывают влияния на разбиение пространства параметров системы на области, соответствующие качественно различным типам движения.

2. Рассмотрена система автоматического регулирования непрямого действия при одновременном учете кулоновского трения в сервомоторе и золотнике. В случае «неразделимого» движения золотника и измерителя (что характерно, например, для многих систем регулирования теплосиловых установок) эта задача охватывает одновременно сухое трение во всех регулирующих устройствах, что, как показывает сравнение с экспериментальными данными хорошо приближает количественно теоретические выводы к действительности. При этом объект регулирования предполагается как обладающим саморегулированием, так и лишенным его, а регулятор — как имеющим жесткую обратную связь (силового или рычажного типа), так и лишенным обратной связи. Рассмотрены случаи сервомоторов переменной, постоянной и переменно-постоянной скорости.

Для указанных случаев точным методом точечных преобразований определены области устойчивости и автоколебаний (рис. 7, 8 а, 8 б, 8 в, 9, 11, 12, табл. 1...4), которые позволяют с минимальными вычислениями выбирать значения конструктивных параметров исходя из условия сходимости процесса регулирования.

3. Построенные области устойчивости позволяют также определить качественное влияние различных параметров на устойчивость системы. В частности, показано, что можно подавить автоколебания за счет использования участков насыщения у характеристики сервомотора (§ **5**).

4. В ряде случаев определены «амплитуды» автоколебаний (§§ **4**...**6**) и области монотонности переходного процесса (§ **4**).

5. Рассмотрен также ряд частных случаев вышеуказанных систем, большинство из которых рассматривалось ранее другими авторами (и другими методами). В этих случаях (отмеченных в тексте) соответствующие результаты совпадают.

Поступила 8 III 1961 г.

Научно-техническое общество судостроительной промышленности, Ленинград, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Трапезников В. А. (ред.), *Автоматизация производственных процессов*, Изд. АН СССР, М., 1956.
2. Айзерман М. А., Автом. и телемех., 1941, *3*.
3. — *Теория автоматического регулирования двигателей. Уравнения движения и устойчивость*, Гостехиздат, М., 1952.
4. Андронов А. А., Баутин Н. Н., Изв. АН СССР, ОТН, 1955, *7*.
5. Андронов А. А., Баутин Н. Н., Горелик Г. С., ДАН СССР, 1945, **47**, *4*.
6 — Автом. и телемех., 1946, *1*.
7. Андронов А. А., Майер А. Г., Автом. и телемех., 1947, *5*; Ibid., 1953, *5*.
8, Birkhoff G. D., *Dynamical systems*, New-York, 1927.
9. Долголенко Ю. В., Изв. АН СССР, ОТН, 1954, *3*.
10. Казакевич В. В., ДАН СССР, 1950, **74**, *4*.
11. Кантор С. А., *Регулирование судовых теплосиловых установок*, Судпромгиз, М., 1956.
12. Кириллов И. И., *Регулирование паровых и газовых турбин*, ГЭИ, М.-Л., 1952.
13. Корнилов Ю. Г., Автом. и телемех., 1950, *1*.
14. Léauté H., J. Éc. Polyt., 1885, **LV**, *1*.
15. Солодовников В. В. (ред.), *Основы автоматического регулирования*, Машгиз, М., 1954.
16. Петров В. В., Уланов Г. М., Автом. и телемех., 1950, *5*.
17. Попов Е. П., *Динамика систем автоматического регулирования*, Гостехиздат, М., 1954.
18. Poincaré H., *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, Oeuvres, T. **1**, Paris, 1928.
19. Таль А. А., *Влияние саморегулирования и воздействия по производной на процесс прямого регулирования*, В сб. *Памяти А. А. Андронова*, Изд. АН СССР, М., 1955.

EFFECT OF DRY FRICTION ON DYNAMICS OF SOME INDIRECT CONTROL SYSTEMS

(Summary)

Indirect control systems are considered in connection with the problems of dry friction in the slide valve and the dead zone of the servomotor. In addition, nonlinear characteristic of the saturation type of servomotor is taken into consideration. Equations of motion are investigated by method of point transformation using multi-sheet phase surfaces It is shown if in some system ambiguous characteristic segments are orientated, investigation of simplified phase picture is possible.

As the result of investigation system parameter space has been divided into regions corresponding to the different types of motion. The results given in the form of diagrammes and tables permit, in the cases under consideration, to solve the problems of stability and self-oscillation in designing and adjusting systems with the minimum amount of calculation work.

Taking into account several nonlinearities together, it is possible to come to essentially new conclusions. For instance, taking into account coulomb friction in the slide valve alone we obtain a parameter space stability limit which is independent of the value of this friction, but if we take into account coulomb friction in the slide valve and the servomotor simultaneously, the above dependence becomes obvious. Furthermore, the saturation nonlinearity taken into consideration separately does not influence, in most cases, the stability limits, but it does if we take it combined with other nonlinearities. The results of the analysis done show the ways of compensating the deleterious effects of some inevitable nonlinearities by reasonable utilization of others.

Explanation of the Figures

Fig. 1.— a — feedbak level system; b — feedbak force (spring) system.

Fig. 2.— a — non linear characteristic with orientated segments; b — circuit characteristic.

Fig. 3.— Non linear characteristic of the system (1 a).

Fig. 4.— Phases's picture of the system (1 a) builded with regard of the fundamental directions of the characteristic's segments (fig. 3) exclusively.

Fig. 5.— Punctual transformation's corresponding to $|x_{max}| < b + \gamma c_1$ diagrams.

Fig. 6.— Punctual transformation's corresponding to $|x_{max}| > b + \gamma c_1$ diagrams.

Fig. 7.— Parameters' space of the system (1 a) intersections by the p'anes $G = \text{const.}$ and $E = \text{const.} < E^*$.

Fig. 8.— Parameters' space of the system (1 a) intersections by the surfaces $G = \text{const.}$ and $a = \text{const.}$

Fig. 9.— Parameters' space of the system (1 a) intersection by the plane $G = \text{const.}$

Fig. 10.— Diagram for the determination of the limit cycles' parameters corresponding to the system (1 a) and (1 b) for $\theta = 0$.

Fig. 11.— Parameters' space of the system (1 a) intersection by the place $a = \text{const.}$

Fig. 12.— Parameters' space of the system (1 a).

Fig. 13.— Representation in the phases' surface of the sliding regime in the system (1 a).

INFLUENŢA FRECĂRII USCATE ASUPRA DINAMICII UNOR SISTEME DE REGLAJ AUTOMAT CU ACŢIUNE INDIRECTĂ

(Rezumat)

Se consideră sistemele de reglaj automat indirect ţinînd seama de frecarea uscată din sertăraş şi zona moartă a servomotorului. În afară de aceasta se ţine seama de neliniaritatea de tip saturaţie a caracteristicii servomotorului. Ecuaţiile de mişcare se reprezintă pe o suprafaţă de fază cu mai multe foi şi se studiază prin metoda transformărilor punctuale. Se arată că dacă anumite segmente ale caracteristicii multiforme ale sistemului sînt orientate se poate studia o imagine de fază simplificată.

În continuarea studiului se expune problema separării spaţiului parametrilor sistemelor în domenii corespunzătoare la diferite tipuri de mişcări. Aceste rezultate se reprezintă sub formă de diagrame şi tabele, care permit ca în cazurile corespunzătoare să se rezolve cu minimum de calcul problema stabilităţii şi autooscilaţiilor, la proiectarea şi reglarea sistemelor.

Considerarea simultană a mai multor neliniarităţi permite să se obţină noi concluzii calitative. De pildă, considerînd frecarea uscată numai în sertăraş, frontiera de stabilitate în spaţiul parametrilor nu depinde de mărimea acestei frecări, dar o astfel de dependenţă se constată la considerarea simultană a frecării coulombiene în sertăraş şi servomotor. Apoi, dacă se consideră numai neliniaritatea de saturaţie, aceasta, în mod obişnuit, nu influenţează frontiera de stabilitate, dar o astfel de influenţă se observă la considerarea simultană a neliniarităţii de saturaţie şi a altor neliniarităţi. Rezultatele analizei efectuate indică modul cum poate fi compensată influenţa negativă a unor neliniarităţi inevitabile pe seama utilizării raţionale a altora.

Explicația figurilor

Fig. 1. — a — sistem cu reacție cu pîrghie; b — sistem cu reacție cu arc.

Fig. 2. — a — caracteristică neliniară cu segmente orientate; b — caracteristică de releu.

Fig. 3. — Caracteristica neliniară a sistemului (1 a).

Fig. 4. — Imaginea de fază a sistemului (1 a), construită ținînd seama numai de segmentele fundamentale orientate ale caracteristicii din fig. 3.

Fig. 5. — Diagramele transformărilor punctuale pentru $|x_{max}| < b + \gamma c_1$,

Fig. 6. — Diagramele transformărilor punctuale pentru $|x_{max}| > b + \gamma c_1$.

Fig. 7. — Secțiunea spațiului parametrilor sistemului (1 a) cu planele $G = \text{const.}$ și $E = \text{const.} < E^*$.

Fig. 8. — Secțiunea spațiului parametrilor sistemului (1 a) cu planele $G = \text{const.}$ și $a = \text{const.}$

Fig. 9. — Secțiunea spațiului parametrilor sistemului (1 a) cu planul $G = \text{const.}$

Fig. 10. — Diagrama pentru determinarea parametrilor ciclurilor limită ale sistemelor (1 a) și (1 b) în cazul $\theta = 0$.

Fig. 11. — Secțiunea spațiului parametrilor sistemului (1 a) cu planele $a = 0$.

Fig. 12. — Secțiunea parametrilor sistemului (1 b).

Fig. 13. — Reprezentarea în planul de fază a regimului de alunecare în sistemul (1 b)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2. 1962

C. Z. 621.392.5

ASUPRA TRANSMISIEI CU FACTOR DE PUTERE OPTIM A ENERGIEI ACTIVE PRIN SISTEME ELECTRICE (II)

DE

HUGO ROSMAN şi ALFRED BRAIER

1. Într-o Notă precedentă [1] am determinat condiţiile în care un sistem electric dat, de tip dipol sau cuadripol, transmite energia activă cu factor de putere optim la perechea de borne primare, studiind în mod special cazul în care este realizată rezonanţa la perechea de borne primare ale sistemului.

Scopul acestei Note este de a aduce cîteva completări şi de a face unele precizări de amănunt referitoare la problemele studiate în [1].

2. O condiţie necesară pentru realizarea rezonanţei la perechea de borne primare ale unui cuadripol reciproc, alimentat pe la această pereche de borne şi avînd o sarcină pasivă, este ca cercul de ecuaţie [2]:

$$r_1^2 + x_1^2 - [\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) + \mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})]\,r_1 - [\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})/\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})]\,x_1 + \\ + \mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{B}})/\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}}) = 0, \tag{1}$$

care delimitează domeniul în interiorul şi pe frontiera căruia poate lua valori impedanţa de intrare a cuadripolului, să intersecteze axa $x_1 = 0$. Adică:

$$-1 \leqslant \mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) \leqslant 1. \tag{2}$$

Cu alte cuvinte rezistenţa de intrare a cuadripolului are valori cuprinse în intervalul:

$$r_{1\min} \leqslant r_1 \leqslant r_{1\max}, \tag{3}$$

la perechea de borne primare fiind realizată rezonanţa, unde:

$$\begin{cases} r_{1\min} = \left\{\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) - \sqrt{1-[\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})]^2}\right\}/[2\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})], \\ r_{1\max} = \left\{\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) + \sqrt{1-[\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})]^2}\right\}/[2\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})]. \end{cases} \tag{4}$$

În cazul cînd coeficienţii cuadripolului reciproc satisfac dubla inegalitate (2) este util de determinat limitele între care pot varia: a) randamentul (η^*), b) puterea activă furnizată receptorului (P_2^*), c) puterea activă absorbită de cuadripol (P_1^*), d) puterea reactivă schimbată cu receptorul pe la perechea de borne secundare (Q_2^*), e) coeficientul de transmisie a tensiunii (k_U^*), f) coeficientul de transmisie a curentului (k_I^*), atunci cînd este realizată rezonanţa la perechea de borne primare ale cuadripolului. Convenim să notăm cu un asterisc mărimile corespunzătoare acestui regim de funcţionare.

Pentru determinarea acestor mărimi se utilizează relaţiile [1]:

$$\eta^* = \mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C}) - r_1\mathcal{R}e(\underline{C}^*\underline{D}) - \mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{B})/r_1, \tag{5}$$

$$P_2^* = U_1^2[-\mathcal{R}e(\underline{C}^*\underline{D}) - \mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{B})/r_1^2 + \mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C})/r_1], \tag{6}$$

$$Q_2^* = U_1^2[-\mathcal{I}m(\underline{C}^*\underline{D}) - \mathcal{I}m(\underline{A}^*\underline{B})/r_1^2 + \mathcal{I}m(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C})/r_1], \tag{7}$$

precum şi

$$P_1^* = U_1^2/r_1. \tag{8}$$

În [1] am arătat că randamentul η^* este delimitat de inegalitatea:

$$0 \leqslant \eta^* \leqslant \eta_{\max}^* = \mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C}) - 2\sqrt{\mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{B})\,\mathcal{R}e(\underline{C}^*\underline{D})}, \tag{9}$$

iar puterea P_2^*, de inegalitatea:

$$0 \leqslant P_2^* \leqslant P_{2\max}^* = U_1^2\{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C})]^2\}/[4\mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{B})], \tag{10}$$

limitele inferioare fiind obţinute pentru $r_1 = r_{1\min}$ sau $r_1 = r_{1\max}$, iar limitele superioare, pentru

$$r_{1\eta_{\max}^*} = \sqrt{\mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{B})/\mathcal{R}e(\underline{C}^*\underline{D})}, \tag{11}$$

respectiv

$$r_{1P_{2\max}^*} = 2\mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{B})/\mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C}). \tag{12}$$

Puterea activă P_1^* poate varia între limitele:

$$\begin{cases} P_{1\min}^* = P_1^*(r_{1\max}) = 2U_1^2\mathcal{R}e(\underline{C}^*\underline{D})/\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C}) + \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C})]^2}\right\}, \\ P_{1\max}^* = P_1^*(r_{1\min}) = 2U_1^2\mathcal{R}e(\underline{C}^*\underline{D})/\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C}) - \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}^*\underline{D} + \underline{B}^*\underline{C})]^2}\right\}. \end{cases} \tag{13}$$

Puterea reactivă Q_2^* admite un extremum care se realizează la $r_1 = r_{1Q_{2\text{extr}}^*}$, rădăcina ecuaţiei $dQ_2^*/dr_1 = 0$, anume:

$$r_{1Q^*_{2extr}} = 2\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B})/\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}}), \tag{14}$$

iar

$$(\mathrm{d}^2Q^*_2/\mathrm{d}r_1^2)_{r_1=r_{1Q^*_{2extr}}} = U_1^2[\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^4/\{8[\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B})]^3\}. \tag{15}$$

Aşadar $Q^*_2(r_1)$ admite un maxim dacă $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B}) < 0$, sau un minim în caz contrar ($\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B}) > 0$) [1]).

Se calculează expresiile:

$$Q^{*'}_2 = Q^*_2(r_{1\min}) =$$

$$= 2U_1^2 \frac{\mathcal{I}m(\underline{C}\underline{D})\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\} - 2\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\overset{*}{D}})\mathcal{R}e(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B}\underline{C}\underline{\overset{*}{D}})}{\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\}^2}, \tag{16}$$

$$Q^{*''}_2 = Q^*_2(r_{1\max}) =$$

$$= 2U_1^2 \frac{\mathcal{I}m(\underline{C}\underline{D})\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) + \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\} - 2\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\overset{*}{D}})\mathcal{R}e(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B}\underline{C}\underline{\overset{*}{D}})}{\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) + \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\}^2}$$

şi

$$Q^*_{2extr} = U_1^2\{1 - [\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} - \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2\}/[4\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B})]^2), \tag{17}$$

unde s-a ţinut seama de identitatea:

$$[\mathcal{R}e(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D} - \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2 + [\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2 - 4\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B})\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{C}}\underline{D}) = 1, \tag{18}$$

valabilă pentru orice cuadripol reciproc.

În ceea ce priveşte limitele între care poate varia puterea reactivă Q^*_2, din analiza relaţiilor (14) ... (17) rezultă că:

a) dacă $r_{1Q^*_{2extr}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ şi $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B}) < 0$, (deci $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) < 0$), atunci

$$\min\{Q^{*'}_2, Q^{*''}_2\} \leqslant Q^*_2 \leqslant Q^*_{2extr} = Q^*_{2\max}; \tag{19}$$

b) dacă $r_{1Q^*_{2extr}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ şi $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B}) > 0$, deci $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D}+\underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) > 0$, atunci

$$Q^*_{2\min} = Q^*_{2extr} \leqslant Q^*_2 \leqslant \max\{Q^{*'}_2, Q^{*''}_2\}; \tag{20}$$

c) dacă $r_{1Q^*_{2extr}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$, Q^*_2 poate varia între limitele $(Q^{*'}_2, Q^{*''}_2)$,

---

[1]) Evident, pentru ca $r_{1Q^*_{2extr}} > 0$ este necesar ca $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) > 0$ atunci cînd $Q^*_2(r_1)$ admite un minim sau $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{D} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) < 0$ în cazul cînd $Q^*_2(r_1)$ admite un maxim.

[2]) Se poate arăta că dacă $\mathcal{I}m(\underline{\overset{*}{A}}\underline{B}) \gtrless 0$, $[\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} - \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2 \lesseqgtr 1$.

unde $\min\{Q_2^{*'}, Q_2^{*''}\}$ reprezintă cea mai mică iar $\max\{Q_2^{*'}, Q_2^{*''}\}$, cea mai mare dintre valorile $Q_2^{*'}$, $Q_2^{*''}$.

Aceste rezultate rectifică o afirmaţie din [1] cu privire la inexistenţa unui extremum al funcţiei $Q_2^*(r)$ în intervalul $[r_{1\min}, r_{1\max}]$.

Pentru determinarea limitelor între care pot varia k_U^* şi k_I^* se utilizează relaţiile stabilite în [3]:

$$k_U^* = \sqrt{D^2 r_1^2 - 2\mathcal{R}e\,(\underline{B}\underline{\overset{*}{D}})\, r_1 + B^2/r_1}, \tag{21}$$

$$k_I^* = \sqrt{C^2 r_1^2 - 2\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{C}})\, r_1 + A^2}. \tag{22}$$

Coeficientul k_U^* de transmisie a tensiunii admite un extremum atunci cînd $r_1 = r_{1k_{U\text{extr}}^*}$, unde

$$r_{1k_{U\text{extr}}^*} = B^2/\mathcal{R}e\,(\underline{B}\underline{\overset{*}{D}}) = 1/g_{1\text{sc}} = r_{1\text{sc}}\ ^{3}) \tag{23}$$

reprezintă rădăcina ecuaţiei $\mathrm{d}k_U^*/\mathrm{d}r_1 = 0$. Totodată se determină:

$$(\mathrm{d}^2 k_U^*/\mathrm{d}r_1^2)_{r_1 = r_{1k_{U\text{extr}}^*}} = [\mathcal{R}e\,(\underline{B}\underline{\overset{*}{D}})]^4/[B^5\,\mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{\overset{*}{D}})]. \tag{24}$$

Pentru extremum se obţine expresia:

$$k_{U\text{extr}}^* = |\mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{\overset{*}{D}})|/B. \tag{25}$$

De asemenea:

$$k_U^{*'} = k_U(r_{1\min}) = \frac{\sqrt{2\mathcal{R}e(\underline{D}^2)\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\} - 4\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\overset{*}{D}})\mathcal{R}e(\underline{B}\underline{D})}}{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}},$$

$$k_U^{*''} = k_U(r_{1\max}) = \frac{\sqrt{2\mathcal{R}e(\underline{D}^2)\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) + \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\} - 4\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\overset{*}{D}})\mathcal{R}e(\underline{B}\underline{D})}}{\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) + \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}}. \tag{26}$$

Ţinînd seama că $k_U^* \geqslant 0$, din analiza relaţiilor (23) ... (25) rezultă că $k_U^*(r_1)$ admite un extremum, şi anume un minim, numai dacă $\mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{\overset{*}{D}}) > 0$.

Aşadar, în privinţa limitelor între care poate varia coeficientul k_U^* de transmisie a tensiunii, rezultă că:

---

[3]) deoarece $x_1 = 0$.

a) dacă $r_{1k^*_{U\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ şi $\mathcal{I}m\,(\underline{B}\overset{*}{\underline{D}}) > 0$, atunci

$$k^*_{U\min} = k^*_{U\text{extr}} \leqslant k^*_U \leqslant \max\{k^{*\prime}_U, k^{*\prime\prime}_U\}; \tag{27}$$

b) dacă $r_{1k^*_{U\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ şi $\mathcal{I}m\,(\underline{B}\overset{*}{\underline{D}}) < 0$ sau

c) dacă $r_{1k^*_{U\text{extr}}} \overline{\in} [r_{1\min}, r_{1\max}]$, k^*_U poate varia între limitele $(k^{*\prime}_U, k^{*\prime\prime}_U)$,

notaţiile fiind analoge celor utilizate în cazul precedent.

Coeficientul k^*_I de transmisie a curentului admite un extremum pentru $r_1 = r_{1k^*_{I\text{extr}}}$, unde

$$r_{1k^*_{I\text{extr}}} = \mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})/C^2 = r_{10} \tag{28}$$

reprezintă rădăcina ecuaţiei $\mathrm{d}k^*_I/\mathrm{d}r_1 = 0$. De asemenea, în acest caz:

$$(\mathrm{d}^2k^*_I/\mathrm{d}r_1^2)_{r_1 = r_{1k^*_{I\text{extr}}}} = C^3/\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) \tag{29}$$

şi

$$k^*_{I\text{extr}} = |\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})|/C. \tag{30}$$

În sfîrşit se determină:

$$k^{*\prime}_I = k_I(r_{1\min}) =$$

$$= \frac{\sqrt{-2\mathcal{R}e(\underline{C}^2)\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2}\right\} + 4\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{C})}}{2\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})},$$

$$k^{*\prime\prime}_I = k_I(r_{1\max}) = \tag{31}$$

$$= \frac{\sqrt{-2\mathcal{R}e(\underline{C}^2)\left\{\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) + \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2}\right\} + 4\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{C})}}{2\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})}.$$

Avînd în vedere că $k^*_I > 0$ din analiza relaţiilor (28) ... (30) rezultă că $k^*_I(r_1)$ admite un extremum, şi anume un minim, numai dacă $\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) > 0$. Deci, în ceea ce priveşte limitele între care poate varia coeficientul k^*_I de transmisie a curentului rezultă că:

a) dacă $r_{1k^*_{I\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ şi $\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) > 0$, atunci

$$k^*_{I\min} = k^*_{I\text{extr}} \leqslant k^*_I \leqslant \max\{k^{*\prime}_I, k^{*\prime\prime}_I\}; \tag{32}$$

b) dacă $r_{1k^*_{I\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ şi $\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) < 0$ sau

c) dacă $r_{1k^*_{I\text{extr}}} \overline{\in} [r_{1\min}, r_{1\max}]$, k^*_I poate varia între limitele $(k^{*\prime}_I, k^{*\prime\prime}_I)$,

notaţiile fiind şi de data aceasta analoge celor utilizate în cazurile precedente.

3. În acest paragraf vom determina parametrii receptorului precum şi parametrii echivalenţi la perechea de borne primare ale cuadripolului, corespunzători regimurilor limită studiate în § **2.** Se va avea în vedere, în acest scop, că în cazul cînd este realizată rezonanţa la perechea de borne primare ale cuadripolului, parametrii receptorului satisfac relaţia [1]:

$$r_2^2 + x_2^2 + [\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})/\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})]\, r_2 + [\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})/\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})]\, x_2 + \tag{33}$$
$$+ \mathcal{I}m(\underline{B}\overset{*}{\underline{D}})/\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) = 0.$$

Or, în cazul regimului $\eta^* = 0$ (echivalent cu regimul $P_2^* = 0$) este necesar ca $r_2 = 0$, reactanţa x_2 rezultînd din (33); se obţine:

$$\begin{cases} x_2' = \left\{ -\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} - \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) + \varepsilon \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2} \right\} / [2\,\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})], \\ x_2'' = \left\{ -\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} - \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - \varepsilon \sqrt{1 - [\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2} \right\} / [2\,\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}], \end{cases} \tag{34}$$

unde

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) > 0, \\ -1 \text{ dacă } \mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) < 0. \end{cases} \tag{35}$$

Pentru determinarea parametrilor receptorului în cazul regimului de randament maxim (η^*_{max}), la perechea de borne primare ale cuadripolului fiind realizată rezonanţa, se utilizează relaţiile [4]:

$$\begin{cases} r_2 = \dfrac{-(r_1^2 + x_1^2)\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}}) + r_1\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - x_1\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} - \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - \mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})}{C^2(r_1^2 + x_1^2) - 2r_1\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) - 2x_1\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) + A^2}, \\ x_2 = \dfrac{-(r_1^2 + x_1^2)\mathcal{I}m(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}}) + r_1\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) + x_1\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} - \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - \mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})}{C^2(r_1^2 + x_1^2) - 2r_1\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) - 2x_1\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}}) + A^2}, \end{cases} \tag{36}$$

în care se introduce expresia (10) a rezistenţei $r_1 = r_{1\eta^*_{max}}$ şi $x_1 = 0$. Se obţine:

$$(37)\quad \begin{cases} r_{2\eta^*_{\max}} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})\mathcal{R}e(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})-2\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})}}{C^2\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})+A^2\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})-2\sqrt{\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})\mathcal{R}e(A\overset{*}{C})}}, \\ x_{2\eta^*_{\max}} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})\mathcal{I}m(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})+\mathcal{I}m(B\overset{*}{C})}}{C^2\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})+A^2\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})-2\sqrt{\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})\mathcal{R}e(A\overset{*}{C})}}. \end{cases}$$

În cazul regimului transferului puterii active maxime ($P^*_{2\max}$) parametrii receptorului rezultă printr-un procedeu analog. Se utilizează relaţiile (34) în care $x_1 = 0$ iar $r_1 = r_{1P^*_{2\max}}$ este dat de (12), obţinînd:

$$r_{1P^*_{2\max}} =$$

$$= \frac{\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})\{1-[\mathcal{I}m(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})]^2\}}{A^2[\mathcal{R}e(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})]^2-4\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})[\mathcal{R}e(A\overset{*}{C})\mathcal{R}e(A\overset{*}{D})+\mathcal{I}m(A\overset{*}{C})\mathcal{I}m(B\overset{*}{C})]},$$

$$(38)\quad x_{2P^*_{2\max}} =$$

$$= \frac{\mathcal{R}e(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})[\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})\mathcal{I}m(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})-\mathcal{I}m(AB)]-4[\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})]^2\mathcal{I}m(C\overset{*}{D})}{A^2[\mathcal{R}e(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})]^2-4\mathcal{R}e(A\overset{*}{B})[\mathcal{R}e(A\overset{*}{C})\mathcal{R}e(A\overset{*}{D})+\mathcal{I}m(A\overset{*}{C})\mathcal{I}m(B\overset{*}{C})]}.$$

În acelaşi mod se obţin parametrii receptorului în cazul regimului $Q^*_2 = Q^*_{2\text{extr}}$, dacă $r_{1Q^*_{2\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{2\max}]$. În acest scop se introduce în relaţiile (36) expresia (14) a rezistenţei $r_1 = r_{1Q^*_{2\text{extr}}}$ şi $x_1 = 0$. Rezultă:

$$r_{2Q^*_{2\text{extr}}} =$$

$$= \frac{\mathcal{I}m(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})[\mathcal{I}m(A\overset{*}{B})\mathcal{R}e(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})+\mathcal{I}m(AB)]-4[\mathcal{I}m(A\overset{*}{B})]^2\mathcal{R}e(C\overset{*}{D})}{A^2[\mathcal{I}m(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})]^2-4\mathcal{I}m(A\overset{*}{B})[\mathcal{R}e(A\overset{*}{C})\mathcal{I}m(A\overset{*}{D})+\mathcal{I}m(A\overset{*}{C})\mathcal{R}e(B\overset{*}{C})]},$$

$$(39)\quad x_{2Q^*_{2\text{extr}}} =$$

$$= \frac{\mathcal{I}m(A\overset{*}{B})\{1-[\mathcal{R}e(A\overset{*}{D}-B\overset{*}{C})]^2\}}{A^2[\mathcal{I}m(A\overset{*}{D}+B\overset{*}{C})]^2-4\mathcal{I}m(A\overset{*}{B})[\mathcal{R}e(A\overset{*}{C})\mathcal{I}m(A\overset{*}{D})+\mathcal{I}m(A\overset{*}{C})\mathcal{R}e(B\overset{*}{C})]}.$$

În cazul regimului $k^*_U = k^*_{U\min}$, considerînd $r_{1k^*_{U\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ se pot determina parametrii receptorului întrebuinţînd un procedeu asemănător celui utilizat în cazurile precedente. Introducînd în relaţiile (36) expresia (23) a rezistenţei $r_1 = r_{1k^*_{U\text{extr}}}$ şi $x_1 = 0$, se obţine:

$$(40)\quad \begin{cases} r_{2k^*_{U\min}} = \mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{\dot{D}})\,[\mathcal{I}m\,(\underline{B}^2) + \mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{B}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{B}}\underline{D})]/\{A^2\,[\mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{D})]^2 + B^2\}, \\ r_{2k^*_{U\min}} = \mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{\dot{D}})\,[\mathcal{R}e\,(\underline{B}^2) + \mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{B}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{\dot{D}})]/\{A^2\,[\mathcal{I}m\,(\underline{B}\underline{\dot{D}})]^2 + B^2\}. \end{cases}$$

În sfîrşit, parametrii receptorului în cazul regimului $k_I^* = k^*_{I\min}$, în ipoteza $r_{1k^*_{I\min}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$, se determină introducînd în relaţiile (36) expresia (28) a rezistenţei $r_1 = r_{1k^*_{I\min}}$ şi $x_1 = 0$, obţinînd:

$$(41)\quad \begin{cases} r_{2k^*_{I\min}} = [\mathcal{I}m\,(\underline{C}^2) + \mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{C}})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})]/[C^2\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}}\underline{C})], \\ x_{2k^*_{I\min}} = [\mathcal{R}e\,(\underline{C}^2) + \mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{C}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})]/[C^2\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}}\underline{C})]. \end{cases}$$

4. Fiind realizată rezonanţa la perechea de borne primare ale unui cuadripol reciproc este util de determinat expresiile mărimilor: η^*, P_2^*, Q_2^*, k_U^*, k_I^*, cînd una din aceste mărimi are o valoare extremă. În acest scop se au în vedere pe de-o parte expresiile (5)... (7), (21), (22) ale acestor mărimi şi pe de altă parte expresiile (11), (12), (14), (23), (28) ale rezistenţei de intrare a cuadripolului corespunzătoare regimurilor în care mărimile considerate au o valoare extremă. Rezultatele obţinute sînt concentrate în tabelul 1, în ipoteza că $r_{1Q^*_{2\text{extr}}}$, $r_{1k^*_{U\min}}$, $r_{1k^*_{I\min}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$. Totodată este posibil de determinat în fiecare din aceste cazuri şi puterea activă P_1^*, expresiile $P_1^*(r_{1\eta^*_{\max}})$, $P_1^*(r_{1P^*_{2\max}})$, $P_1^*(r_{1Q^*_{2\text{extr}}})$, $P_1^*(r_{1k^*_{U\min}})$ şi $P_1^*(r_{1k^*_{I\min}})$ fiind de asemenea redate în tabelul 1.

Observaţie. Regimurile de funcţionare la $k^*_{U\min}$, $k^*_{I\min}$, atunci cînd există, pot fi predeterminate experimental. Într-adevăr, deoarece $r_{1k^*_{U\min}} = r_{1sc}$, $r_{1k^*_{I\min}} = r_{10}$, este suficient să se determine experimental punctele de pe cercul (1), corespunzătoare regimurilor de funcţionare la gol şi în scurtcircuit; în cazul cînd abscisele acestor puncte sînt cuprinse în intervalul (3), proiecţia pe axa $x_1 = 0$ a punctului de funcţionare în scurtcircuit caracterizează regimul $k^*_{U\min}$, iar proiecţia pe aceeaşi axă a punctului de funcţionare la gol caracterizează regimul $k^*_{I\min}$.

5. Pentru un cuadripol reciproc dat ai cărui coeficienţi satisfac dubla inegalitate (2), există posibilitatea de a realiza simultan rezonanţa atît la perechea de borne primare cît şi la perechea de borne secundare [1]. În acest caz coeficienţii cuadripolului trebuie să satisfacă în plus dubla inegalitate:

$$(42)\quad -1 \leqslant \mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}} - \underline{B}\underline{\dot{C}}) \leqslant 1,$$

parametrii receptorului fiind [1]:

Tabelul 1

	η^*	P_2^*	P_1^*	Q_2^*	k_U^*	k_I^*
$r_{1\eta^*_{max}}$	$\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{D}} + \underline{B\dot{C}}) - 2\sqrt{\mathcal{R}e(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}$	$U_1^2\sqrt{\dfrac{\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})}}\left[\mathcal{I}m(\underline{A\dot{D}} + \underline{B\dot{C}}) - 2\sqrt{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}\right]$	$U_1^2\sqrt{\dfrac{\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})}}$	$\dfrac{U_1^2}{4\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})}\left[\mathcal{I}m\,(\underline{BC}) + \mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D} + \underline{B\dot{C}})\sqrt{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}\right]$	$\sqrt{\dfrac{D^2\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}}) + B^2\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}}) - 2B\mathcal{R}e\,(\underline{B\dot{D}})\sqrt{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}}{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})}}$	$\sqrt{\dfrac{A^2\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}}) + C^2\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}}) - 2\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{C}})\sqrt{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}}{\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}}$
$r_{1P^*_{2max}}$	$\dfrac{1-[\mathcal{I}m\,(\underline{A\dot{D}} + \underline{B\dot{C}})]^2}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{D}} + \underline{B\dot{C}})}$	$\dfrac{U_1^2}{4\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})}\{1-[\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D} + \underline{B\dot{C}})]^2\}$	$U_1^2\dfrac{\mathcal{R}e(\underline{A\dot{D}} + \underline{B\dot{C}})}{2\mathcal{R}e(\underline{A\dot{B}})}$	$\dfrac{U_1^2}{4}\left\{\dfrac{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{D}}+\underline{B\dot{C}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D}+\underline{B\dot{C}})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})} - \dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})\,\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{D}}+\underline{B\dot{C}})}{[\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})]^2} - 4\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{C}D})\right\}$	$\sqrt{\dfrac{2\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,[\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{A\dot{D}}-\underline{B\dot{C}}) + \mathcal{R}e\,(\underline{BD})] - \mathcal{R}e\,(B^2)\mathcal{R}e(\underline{A\dot{D}}+\underline{B\dot{C}})}{2\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})}}$	$\sqrt{\dfrac{2\mathcal{R}e(\underline{A\dot{B}})[\mathcal{I}m(\underline{A\dot{C}})\mathcal{I}m(\underline{A\dot{D}}-\underline{B\dot{C}}) - \mathcal{R}e(\underline{AC})] + \mathcal{R}e(A^2)\mathcal{R}e(\underline{A\dot{D}}+\underline{B\dot{C}})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{D}} + \underline{B\dot{C}})}}$
$r_{1Q^*_{2extr}}$	$\dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{AB})}{2\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})} - \dfrac{1}{2}\mathcal{R}e\,(\underline{\dot{A}D} + \underline{B\dot{C}}) - \dfrac{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})}{\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D} + \underline{B\dot{C}})}$	$\dfrac{U_1^2}{4}\left\{\dfrac{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{D}}+\underline{B\dot{C}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D}+\underline{B\dot{C}})}{\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})} + \dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{AB})\,\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D}+\underline{B\dot{C}})}{[\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})]^2} - 4\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})\right\}$	$U_1^2\dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D} + \underline{B\dot{C}})}{2\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})}$	$\dfrac{U_1^2}{4\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})}\{1-[\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{D}} - \underline{B\dot{C}})]^2\}$	$\sqrt{\dfrac{2\mathcal{I}m(\underline{\dot{A}B})[\mathcal{I}m(\underline{B\dot{D}})\mathcal{R}e(\underline{A\dot{D}}-\underline{B\dot{C}}) + \mathcal{I}m(\underline{BD})] - \mathcal{I}m(B^2)\mathcal{I}m(\underline{\dot{A}D}+\underline{B\dot{C}})}{2\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})}}$	$\sqrt{\dfrac{2\mathcal{I}m(\underline{\dot{A}B})[\mathcal{I}m(\underline{A\dot{C}})\mathcal{R}e(\underline{A\dot{D}}-\underline{B\dot{C}}) + \mathcal{I}m(\underline{AC})] + \mathcal{I}m(A^2)\mathcal{I}m(\underline{A\dot{D}}+\underline{B\dot{C}})}{\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}D} + \underline{B\dot{C}})}}$
$r_{1k^*_{Umin}}$	$\dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})\,[\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{B}^2}) - \mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})]}{B^2\,\mathcal{R}e\,(\underline{B\dot{D}})}$	$\dfrac{U_1^2}{B^4}\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})\,[\mathcal{I}m\,(B^2) - \mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})]$	$U_1^2\dfrac{\mathcal{R}e\,(\underline{B\dot{D}})}{B^2}$	$\dfrac{U_1^2}{B^4}\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{B}D})\,[\mathcal{R}e\,(B^2) + \mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}B})\,\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})]$	$\dfrac{\lvert\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})\rvert}{B}$	$\sqrt{\dfrac{B^2 + 2\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{B}D})\,\mathcal{I}m\,(\underline{AB}) + A^2\,[\mathcal{I}m\,(\underline{B\dot{D}})]^2}{\mathcal{R}e\,(\underline{B\dot{D}})}}$
$r_{1k^*_{Imin}}$	$\dfrac{\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}C})\,[\mathcal{I}m\,(C^2) - \mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}C})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})]}{C^2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{C}})}$	$\dfrac{U_1^2}{[\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{C}})]^2}\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}C})\,[\mathcal{I}m\,(C^2) - \mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}C})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})]$	$U_1^2\dfrac{C^2}{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{C}})}$	$\dfrac{U_1^2}{[\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{C}})]^2}\mathcal{I}m\,(\underline{\dot{A}C})\,[\mathcal{R}e\,(C^2) + \mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{C}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{C\dot{D}})]$	$\dfrac{\sqrt{C^2 + 2\mathcal{I}m\,(\underline{A\dot{C}})\,\mathcal{I}m\,(\underline{CD}) + D^2\,[\mathcal{I}m\,(\underline{A\dot{C}})]^2}}{D\,\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{C}})}$	$\dfrac{\lvert\mathcal{I}m\,(\underline{A\dot{C}})\rvert}{C}$

$$(43)\quad r_2^{**}=\left\{-\mathcal{I}m\,(A\dot{D}+B\dot{C})+\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}/[2\mathcal{I}m(A\dot{C})],\quad x_2^{**}=0,$$

unde ε este dat de relaţiile (35), mărimile corespunzătoare acestui regim de funcţionare fiind notate cu un asterisc dublu.

Scopul acestui paragraf este, în primul rînd, de a caracteriza regimul energetic al unui cuadripol reciproc în cazul cînd este realizată rezonanţa simultan la ambele perechi de borne ale cuadripolului. Se folosesc expresiile randamentului transmisiei:

$$(44)\quad \eta=r_2/[(r_2^2+x_2^2)\mathcal{R}e(A\dot{C})+r_2\mathcal{R}e(A\dot{D}+B\dot{C})-x_2\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})+\mathcal{R}e(B\dot{D})]$$

şi a puterii active furnizate receptorului:

$$(45)\quad P_2=U_1^2 r_2/[A^2(r_2^2+x_2^2)+2r_2\mathcal{R}e(A\dot{B})-2x_2\mathcal{I}m(A\dot{B})+B^2],$$

stabilite în [5], în care r_2, x_2 sînt daţi de (43). Se obţine:

$$(46)\quad \eta^{**}=\frac{\mathcal{I}m(A\dot{C})\left\{-\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})+\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}}{\mathcal{I}m(A\dot{C})\left\{\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})-\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}-2\mathcal{I}m(A\dot{C})\mathcal{I}m(B\dot{C})},$$

$$(47)\quad P_2^{**}=$$

$$=U_1^2\frac{\mathcal{I}m(A\dot{C})\left\{-\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})+\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}}{\mathcal{I}m(A^2)\left\{\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})-\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}-2\mathcal{I}m(A\dot{B})\mathcal{I}m(A\dot{C})}.$$

De asemenea, din $\eta^{**}=P_2^{**}/P_1^{**}$ şi ţinînd seama de relaţiile (46) şi (47), rezultă:

$$(48)\quad P_1^{**}=$$

$$=U_1^2\frac{\mathcal{I}m(A\dot{C})\left\{\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})-\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}-2\mathcal{I}m(A\dot{C})\mathcal{I}m(B\dot{C})}{\mathcal{I}m(A^2)\left\{\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})-\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}-2\mathcal{I}m(A\dot{B})\mathcal{I}m(A\dot{C})}.$$

În sfîrşit, deoarece $P_1^{**}=U_1^2/r_1^{**}$, $(x_1^{**}=0)$, rezultă că în cazul cînd este realizată simultan rezonanţa la ambele perechi de borne ale unui cuadripol reciproc, parametrii echivalenţi la perechea de borne primare, ţinînd seama de (48), sînt daţi de relaţiile:

$$(49)\quad r_1^{**}=$$

$$=\frac{\mathcal{I}m(A^2)\left\{\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})-\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}-2\mathcal{I}m(A\dot{B})\mathcal{I}m(A\dot{C})}{\mathcal{I}m(A\dot{C})\left\{\mathcal{I}m(A\dot{D}+B\dot{C})-\varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(A\dot{D}-B\dot{C})]^2}\right\}-2\mathcal{I}m(A\dot{C})\mathcal{I}m(B\dot{C})}.$$

În al doilea rînd este posibil să se determine coeficientul de transmisie a tensiunii (k_U^{**}) şi coeficientul de transmisie a curentului (k_I^{**}), în acest regim de funcţionare. Or, în general [3]:

$$(50)\quad k_U = \sqrt{(r_2^2 + x_2^2)/[A^2(r_2^2 + x_2^2) + 2r_2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{B}}) - 2x_2\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{B}}) + B^2]},$$

$$(51)\quad k_I = 1\Big/\sqrt{C^2(r_2^2 + x_2^2) + 2r_2\,\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\overset{*}{D}}) - 2x_2\,\mathcal{I}m\,(\underline{C}\underline{\overset{*}{D}}) + D^2}.$$

Avînd în vedere expresiile (43) ale parametrilor receptorului, se obţine în acest caz:

$$(52)\quad k_U^{**} = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - \varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} - \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}}{\sqrt{2\mathcal{I}m(\underline{A}^2)\left\{\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - \varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} - \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\} - 4\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{B})\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{C}})}},$$

$$(53)\quad k_I^{**} = \frac{2\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{C}})}{\sqrt{2\mathcal{I}m(\underline{C}^2)\left\{\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - \varepsilon\sqrt{1-[\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} - \underline{B}\underline{\overset{*}{C}})]^2}\right\} - 4\mathcal{I}m\,(\underline{C}\underline{D})\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\overset{*}{C}})}}.$$

6. Din analiza rezultatelor obţinute în paragrafele precedente rezultă că randamentul (η^*), puterea activă furnizată receptorului (P_2^*), puterea activă absorbită de cuadripol (P_1^*), puterea reactivă schimbată cu receptorul pe la perechea de borne secundare (Q_2^*), coeficientul de transmisie a tensiunii (k_U^*) şi coeficientul de transmisie a curentului (k_I^*), în cazul cînd este realizată rezonanţa la perechea de borne primare ale cuadripolului, pot lua valori numai în anumite domenii, determinate.

Pentru valori ale mărimilor: η, P_2, P_1, Q_2, k_U şi k_I situate respectiv în afara acestor domenii este util de determinat factorul de putere optim (subunitar) la perechea de borne primare ale cuadripolului, atunci cînd este impusă valoarea uneia din aceste mărimi. O problemă analoagă se poate pune şi în cazul cînd coeficienţii cuadripolului reciproc nu satisfac dubla inegalitate (2), adică în cazul cînd nu este posibil de realizat rezonanţa la perechea de borne primare ale cuadripolului. Rezolvarea acestor probleme va constitui obiectul unei Note viitoare.

Primit la 22 III 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Rosman H., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 243—256.
2. — Ibid., 1957, **III (VII)**, *1 — 2*, pp. 129 — 136.
3. Braier A., Rosman H., Ibid., 1956, **II (VI)**, *3 — 4*, pp. 185 — 208.
4. Rosman H., Braier A., Ibid., 1958, **IV (VIII)**, *1 — 2*, pp. 283 — 288.
5. Braier A, Rosman H., Ibid., 1956, **II (VI)**, *1 — 2*, pp. 159 — 185.

О ПЕРЕДАЧЕ С НАИЛУЧШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МОЩНОСТИ АКТИВНОЙ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ (II)

(Резюме)

1. Определяются границы между которыми могут изменяться: а) к. п. д. (η^*), б) активная мощности передаваемая приемнику (P_2^*), в) активная мощность расходуемая четырехполюсником (P_1^*), г) реактивная мощность обменивающаяся с приемником у вторичной пары зажимов (Q_2^*), д) коэффициент передачи напряжений (k_U^*) и е) коэффициент передачи тока (k_I^*) в случае когда осуществляется резонанс у пары первичных зажимов четырехполюсника, коэффициенты которого удовлетворяют двойному неравенству (2).

К. п. д. η^* изменяется между 0 и $\eta^*_{\max}$ данным в (9), нижняя граница будучи получена для $r_1 = r_{1\min}$ или $r_1 = r_{1\max}$, где $r_{1\min}$ и $r_{1\max}$ имеют выражение (4), а верхняя граница для $r_1 = r_{1\eta^*_{\max}}$ дана выражением (11).

Активная мощность P_2^* изменяется в границах 0 и $P^*_{2\max}$ данной (10), нижняя граница будучи получена для $r_1 = r_{1\min}$ или $r_1 = r_{1\max}$, а верхняя — для $r_1 = r_{1P^*_{2\max}}$ данной в (12).

Активная мощность P_1^* изменяется между границами $P^*_{1\min}$, $P^*_{1\max}$ данные в (13).

Реактивная мощности Q_2^* разрешает максимум если $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{B}}) < 0$ и $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{\overset{*}{B}}\underline{\overset{*}{C}}) < 0$, а минимум — в противном случае. Экстремальная величина реактивной мощности Q_2^* дана в (17) и осуществляется при $r_1 = r_{1Q^*_{2\text{extr}}}$ дана в (14). Установлено, что: а) в случае если $r_{1Q^*_{2\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$, $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{B}}) < 0$ и $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{\overset{*}{B}}\underline{\overset{*}{C}}) < 0$, тогда Q_2^* изменяется между границами данными в выражением (19); б) в случае если $r_{1Q^*_{2\text{extr}}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$, $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{B}}) > 0$ и $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{\overset{*}{B}}\underline{\overset{*}{C}}) > 0$, то Q_2^* изменяется между границами данными в (20); в случае если $r_{1Q^*_{2\text{extr}}} \bar{\in} [r_{1\min}, r_{1\max}]$, то Q_2^* изменяется между границами $(Q_2^{*\prime}, Q_2^{*\prime\prime})$, где $Q_2^{*\prime}$, $Q_2^{*\prime\prime}$ даны в (16).

Коэффициент передачи напряжения k_U^* допускает минимум в случае, если $Im(\underline{\overset{*}{B}}\underline{\overset{*}{D}}) > 0$, а именно, $k^*_{U\min} = |Im(\underline{\overset{*}{B}}\underline{\overset{*}{D}})|/B$, получающееся при $r_1 = r_{1\text{sc}}$. Установлено, что: а) в случае если $r_{1k^*_{U\min}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ и $Im(\underline{\overset{*}{B}}\underline{\overset{*}{D}}) > 0$, то k_U^* изменяется в границах данных в (27); б) если $r_{1k^*_{U\min}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ и $Im(\underline{\overset{*}{B}}\underline{\overset{*}{D}}) < 0$ или в) если $r_{1k^*_{U\min}} \bar{\in} [r_{1\min}, r_{1\max}]$, $k_U^{'}$ может изменяться между границами данными в (26).

Коэффициент передачи тока k_I^* разрешает минимум если $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{C}}) > 0$, а именно $k^*_{I\min} = |Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{C}})|/C$, получаемое при $r_1 = r_{10}$. Установленно, что: а) если $r_{1k^*_{I\min}} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ и $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{C}}) > 0$, то k_I^* изменяется между границами данными в (32); б) если $r_{1k_I^*} \in [r_{1\min}, r_{1\max}]$ и $Im(\underline{\overset{*}{A}}\underline{\overset{*}{C}}) < 0$ или в) если $r_{1k^*_{I\min}} \bar{\in} [r_{1\min}, r_{1\max}]$, то k_I^* может изменаться между границами данными в (31).

2. Определяются параметры приемника, соответствующие граничным режимам рассмотренным в предыдущем параграфе. Таким образом режим $\eta^* = 0$ (эквивалентный режиму $P_2^* = 0$) получается для $r_1 = 0$, $x_2 = x_2^{'}$ или $x_2 = x_2^{''}$, данными в (34). Режим

$\eta^*_{\max}$ осуществляется при $r_2 = r_{2\eta^*_{\max}}$, $x_2 = x_{2\eta^*_{\max}}$ данным в (37); режим $P^*_{2\,\max}$ осуществляется при $r_2 = r_{2P^*_{2\,\max}}$, $x_2 = x_{2P^*_{2\,\max}}$ данными в (38), а режим $Q^*_{2\,\text{extr}}$ осуществляется, в случае если $r_{1Q^*_{2\,\text{extr}}} \in [r_{1\,\min}, r_{1\,\max}]$, при $r_2 = r_{2Q^*_{2\,\text{extr}}}$, $x_2 = x_{2Q^*_{2\,\text{extr}}}$ данные в (39). Наконец режим $k^*_{U\,\min}$ осуществляется, при условии, что $r_{1k^*_{U\,\min}} \in [r_{1\,\min}, r_{1\,\max}]$, при $r_2 = r_{2k^*_{U\,\min}}$, $x_2 = x_{2k^*_{U\,\min}}$ данными в (40), а режим $k^*_{I\,\min}$ осуществляется, при условии что $r_{1k^*_{I\,\min}} \in [r_{1\,\min}, r_{1\,\max}]$, при $r_2 = r_{2k^*_{I\,\min}}$, $x_2 = x_{2k^*_{I\,\min}}$ данными в (41).

3. Будучи осуществлен резонанс у первичной паре зажимов взаимного четырехполюсника определяются выражения величин: η^*, P^*_2, Q^*_2, k^*_U, k^*_I, когда одна из этих величин, при условии что $r_{1Q^*_{2\,\text{extr}}}$, $r_{1k^*_{U\,\min}}$, $r_{1k^*_{I\,\min}} \in [r_{1\,\min}, r_{1\,\max}]$, экстремальная.

В каждом из этих случаев определяется и активная мощность P^*_1. Полученные таким образом выражения даны в таблице 1.

4. Энергетический режим определяется при условии осуществления одновременно резонанса как у первичной пары зажимов, так и у вторичной пары зажимов взаимного четырехполюсника, а именно, к. п. д. η^{**} дан в (46), активная мощность P^{**}_2 в (47), а активная мощность P^{**}_1 в (48).

Эквивалентные параметры у первичной пары зажимов, в данном случае, даны отношениями (49). Наконец определяется выражение коэффициента передачи напряжения (k^{**}_U) (соотношение (52)), коэффициент передачи тока (k^{**}_I) будучи дан выражением (53).

SUR LA TRANSMISSION À FACTEUR DE PUISSANCE OPTIMUM DE L'ÉNERGIE ACTIVE PAR DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES (II)

(Résumé)

1. On détermine les limites entre lesquelles peuvent varier les valeurs des grandeur suivantes: a) le rendement (η^*), b) la puissance active fournie au récepteur (P^*_2), c) la puissance active fournie au récepteur (P^*_1), d) la puissance réactive échangée avec le récepteur par la paire de bornes secondaires (Q^*_2), e) le coefficient de transmission de la tension (k^*_U), f) le coefficient de transmission du courant (k^*_I), lorsqu'on réalise la résonance à la paire de bornes primaires d'un quadripôle réciproque, dont les coefficients satisfont à la double inégalité (2).

2. On détermine les paramètres du récepteur correspondants aux régimes limites étudiés dans le paragraphe précédent.

3. On détermine les expressions des grandeurs: η^*, P^*_2, Q^*_2, k^*_U, k^*_I, lorsqu'on réalise la résonance à la paire de bornes primaires d'un quadripôle réciproque, quand une de ces grandeurs est extrême, dans l'hypothèse que $r_{1Q^*_{2\,\text{extr}}}$, $r_{1k^*_{U\,\min}}$ $r_{1k^*_{I\,\min}} \in [r_{1\,\min}, r_{1\,\max}]$. Dans chacun de ces cas on détermine toutefois et la puissance active P^*_1. Les expressions obtenues sont données dans le tableau 1.

4. On détermine le régime énergétique d'un quadripôle réciproque, lorsqu'on réalise simultanément la résonance tant à la paire de bornes primaires qu'à la paire de bornes secondaires.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 1—2, 1962

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 517.934

METODĂ GRAFICĂ PENTRU STUDIEREA UNOR NOI TIPURI DE SISTEME NELINIARE NEAUTONOME CU UN GRAD DE LIBERTATE

DE

ALFRED BRAIER

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 4—6 februarie 1960

1. Pentru studierea mişcării sistemelor neliniare cu un grad de libertate se utilizează frecvent metoda planului de fază, care permite şi construcţia grafică a legii de mişcare. În acest fel se cercetează în mod curent fenomenele tranzitorii care au loc în sistemele de reglaj automat [1].

În prezent se cunosc mai multe metode pentru construcţia efectivă a traiectoriilor de fază, după cercetarea prealabilă a punctelor singulare. În cazul sistemelor neliniare neautonome de forma :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t) \tag{1}$$

se pot utiliza metodele date în [2] şi [3]. În lucrarea [4] (sau [5]), consacrată studiului grafic al mişcării unor oscilatori neliniari cu două grade de libertate, se indică şi procedeul de tratare a sistemelor cu un grad de libertate, de tipurile

$$\ddot{x} + f(x, t) = F(t),\quad \ddot{x} + \dot{x} + f(x, t) = F(t),\quad \ddot{x} + f(\dot{x}, t) = F(t) \text{ şi } \ddot{x} + x + f(\dot{x}, t) = F(t). \tag{2}$$

În lucrarea de faţă se propune un procedeu grafic care permite studierea mişcării a două clase de sisteme neliniare, mai generale decît (1), şi anume descrise de ecuaţii de forma

$$\ddot{x} + f[x, \varphi(\dot{x}, t)] = F(t) \quad \text{şi} \quad \ddot{x} + f[\dot{x}, \varphi(x, t)] = F(t), \tag{3}$$

în care f şi φ reprezintă funcţii date analitic sau grafic.

Construcţiile grafice care se propun extind unele din procedeele de construcţie a traiectoriilor de fază, valabile pentru anumite sisteme neliniare cu un grad de libertate, conţinînd un parametru [4].

2. Dacă

$$\ddot{x} + f(x, \lambda) = F(t), \tag{4}$$

în care λ este un parametru, reprezintă ecuaţia diferenţială care descrie funcţionarea unui sistem neliniar neautonom, atunci ecuaţia diferenţială a traiectoriilor corespunzătoare din planul de fază este

(4') $$d\dot{x}/dx = -[f(x,\lambda) - F(t)]/\dot{x}.$$

Considerînd mai întîi $F(t) \equiv 0$ şi utilizînd ideea metodei lui K u [2], se construieşte în planul de fază $(O_1, x, \dot{x})$ familia de curbe $\ddot{x} = f(x, \lambda)$ (a se vedea şi [4]). În fig. 1 a s-a reprezentat curba $\ddot{x} = f(x, \lambda_k)$, în care λ_k reprezintă valoarea parametrului λ la momentul $t = t_k$. În acest moment starea sistemului este reprezentată în planele din fig. 1 prin punctele $P'_k(x_k, \dot{x}_k)$ şi $P_k(x_k, \dot{x}_k)$, primul pe curba $\ddot{x} = f(x, \lambda_k)$. Purtînd pe axa Ox din fig 1 b un segment $x_k P''_k = x_k P'_k$ se obţine punctul P''_k, iar în baza lui (4') rezultă că (pentru $F(t) \equiv 0$) tangenta la traiectoria de fază din planul $(O, x, \dot{x})$ este

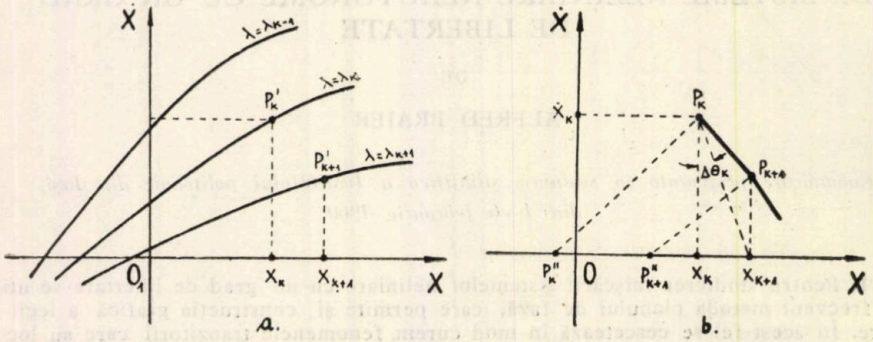


Fig. 1

perpendiculară pe dreapta $P''_k P_k$. Se poate construi atunci punctul P_{k+1} al curbei integrale, reprezentînd starea în care ajunge sistemul în intervalul de timp

(5) $$\Delta t_k = (\Delta x_k/\dot{x}_k) = \operatorname{tg} \Delta\theta_k \approx \Delta\theta_k.$$

Se repetă apoi construcţia începînd cu punctul P_{k+1} şi utilizînd în fig. 1 a curba $\ddot{x} = f(x, \lambda_{k+1})$.

Prin suprapunerea celor două plane de fază din fig. 1 rămîne de utilizat efectiv numai planul de fază uzual $(O, x, \dot{x})$ în care [4] urmează de construit curbele

(6) $$\dot{x}^* = f(x, \lambda_k),$$

unde $\dot{x}^* = \ddot{x}$ (ceea ce pentru construcţia curbelor înseamnă că $\dot{x}^*$ are dimensiunile lui $\ddot{x}$, adică folosind pentru $x, \dot{x}$ respectiv scările a şi b, scara lui $\dot{x}^*$ trebuie să fie b^2/a).

Pentru a studia ecuaţia completă (4) se înlocuieşte $F(t)$ printr-o funcţie în scară, în intervalul Δt_k perturbaţia $F(t_k)$ considerîndu-se deci constantă ; curbele (6) devin atunci

(6') $$\dot{x}^* = f(x, \lambda_k) - F(t_k).$$

Se constată că perturbaţia $F(t_k)$ produce translaţia curbei respective paralel cu $O\dot{x}$, spre $\dot{x} < 0$ cînd $F(t_k) > 0$ şi reciproc, spre $\dot{x} > 0$ cînd $F(t_k) < 0$. În construcţia grafică aceasta revine la deplasarea punctului P''_k din fig. 1 b la dreapta, pe axa Ox, cînd $F(t_k) > 0$ şi la stînga în caz contrar, obţinîndu-se P'''_k (fig. 2 a). Tangenta $P_k P_{k+1}$ la traiectoria de fază ce trece prin P_k este perpendiculară acum pe $P'''_k P_k$.

Pentru simplificarea construcţiilor grafice s-a propus în [4] reprezentarea lui $F(t)$ în coordonate polare, ceea ce, ţinînd seama de (5), permite obţinerea pe cale pur grafică a mărimilor $F(t_k)$ succesive, deoarece unghiul de mărime Δt_k apare direct pe figură, în decursul construcţiei (fig. 2 a), şi deci $F(t_k) = O'A_k = P_k'' P_k'''$.

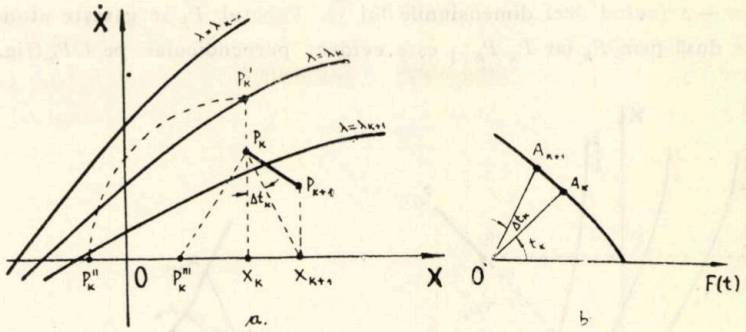


Fig. 2

3. Atunci cînd ecuaţia care descrie mişcarea sistemului are forma:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, \mu) = F(t), \tag{7}$$

în care μ este un parametru, trebuie utilizată metoda din [3]. Considerînd deocamdată $F(t) \equiv 0$ se reprezintă starea sistemului la momentul t_k prin punctele figurative $P_k'(\dot{x}_k, \ddot{x}_k)$ şi $P_k(x_k, \dot{x}_k)$ din fig. 3. Deoarece

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \ddot{x}_k / \dot{x}_k = (\mathrm{d}\dot{x}/\mathrm{d}x)_k, \tag{8}$$

panta dreptei $O_2 P_k'$ este egală cu cea a tangentei la traiectoria de fază ce trece prin punctul P_k al planului de fază $(O, x, \dot{x})$. Construind [4] curba $\ddot{x} + f(\dot{x}, \mu_k) = 0$, punctul

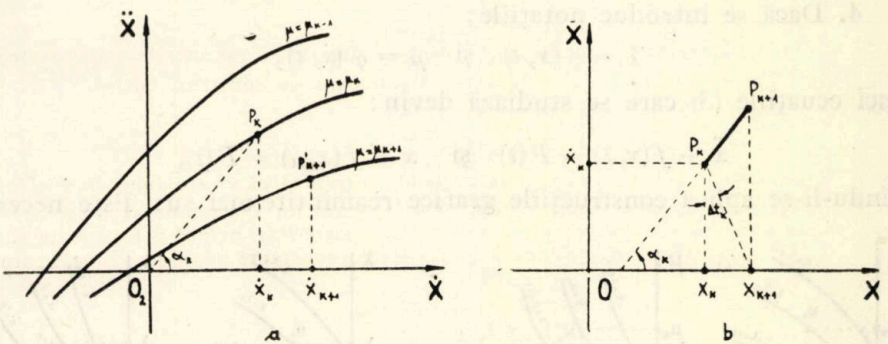


Fig. 3

P_k' se determină la intersecţia curbei cu paralela la $O_{\dot{x}}$ dusă prin punctul de abscisă $\dot{x}_k$ (fig. 3 a); segmentul $P_k P_{k+1}$ dus paralel cu $O_2 P_k'$ permite determinarea punctului P_{k+1} Se repetă apoi construcţia, utilizînd de data aceasta curba $\ddot{x} + f(\dot{x}, \mu_{k+1}) = 0$.

Dacă se suprapune planul $(O_2, \dot{x}, \ddot{x})$ peste $(O, x, \dot{x})$, după o rotaţie prealabilă cu $\pi/2$, în sens pozitiv, se poate utiliza numai planul de fază uzual, în care urmează de construit curbele

$$x^* = f(\dot{x}, \mu_k), \tag{9}$$

în care $x^* = -\ddot{x}$ (avînd deci dimensiunile lui $\ddot{x}$). Punctul P'_k se găseşte atunci pe paralela la Ox dusă prin P_k iar $P_k P_{k+1}$ este evident perpendicular pe OP'_k (fig. 4 a).

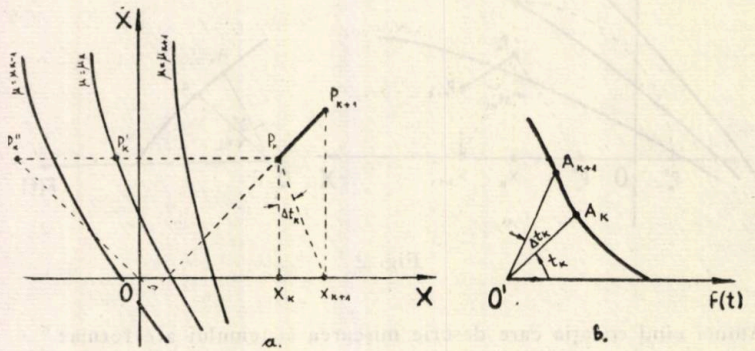


Fig. 4

Revenind la (7) se înlocuieşte $F(t)$ printr-o funcţie în scară şi curbele (9) devin:

$$x^* = f(\dot{x}, \mu_k) - F(t_k)\,. \tag{9'}$$

Are deci loc o translaţie paralelă cu Ox, spre $x < 0$ cînd $F(t_k) > 0$ şi reciproc. În construcţia grafică aceasta revine la deplasarea punctului P'_k în P''_k, la stînga dacă $F(t_k) > 0$, sau la dreapta dacă $F(t_k) < 0$. De data aceasta $P_k P_{k+1} \perp OP''_k$. Este util de reprezentat şi aici perturbaţia în coordonate polare (fig. 4 b).

4. Dacă se introduc notaţiile:

$$\lambda = \varphi(\dot{x}, t) \quad \text{şi} \quad \mu = \varphi(x, t), \tag{10}$$

atunci ecuaţiile (3) care se studiază devin:

$$\ddot{x} + f(x, \lambda) = F(t) \quad \text{şi} \quad \ddot{x} + f(\dot{x}, \mu) = F(t),$$

putîndu-li-se aplica construcţiile grafice reamintite mai sus. Este necesar

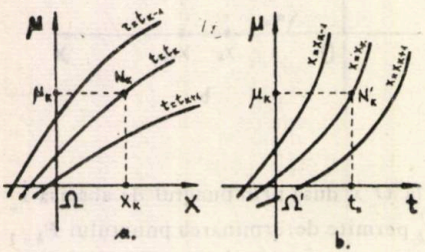


Fig. 5

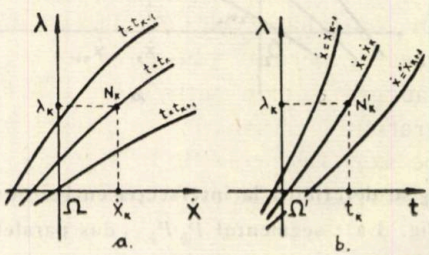


Fig. 6

de reprezentat în plus dependenţele (10), considerînd fie $\dot{x}$ (respectiv x) fie t drept parametru. În coordonate carteziene se ajunge la situaţia din fig. 5 şi fig. 6.

Alegerea unei din cele două posibilităţi de reprezentare grafică este legată numai de uşurinţa construcţiei familiilor respective de curbe, condiţionată de structura dependenţelor funcţionale corespunzătoare. Atunci cînd se alege $\dot{x}$ drept parametru, pentru curbele λ, sau x drept

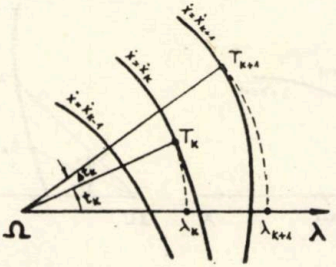


Fig. 7

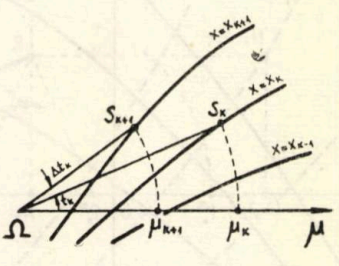


Fig. 8

parametru, pentru curbele μ, este preferabil, după cum se va sublinia în cele ce urmează, să se recurgă la reprezentarea în coordonate polare (fig. 7 şi fig. 8).

5. Fie acum prima ecuaţie (3):

$$\ddot{x} + f[x, \varphi(\dot{x}, t)] = F(t). \tag{3'}$$

Pentru construcţia grafică care se propune trebuie construite două familii de curbe şi anume, într-un plan auxiliar, familia $\lambda = \varphi(\dot{x}, t)$ şi în planul de fază uzual familia (6), la care se alătură graficul lui $F(t)$.

Fie aleasă reprezentarea din fig. 5 a. În scopul simplificării construcţiei se propune suprapunerea axelor x ale planelor din fig. 2 a şi fig. 5 a, ceea ce revine efectiv la utilizarea numai a planului de fază uzual, în care se construiesc ambele familii de curbe, cu etalonare dublă a axei Ox, în x şi în valori ale lui λ (fig. 9 a).

Starea sistemului la momentul t_k, caracterizată prin mărimile $x_k, \dot{x}_k$, se reprezintă prin punctul P_k. Paralela prin P_k la Ox intersectează curba $t = t_k$ în N_k, putîndu-se citi valoarea λ_k pe axa Ox etalonată şi în λ. În continuare, paralela la Ox prin P_k intersectează curba $\lambda = \lambda_k$ în P'_k, ceea ce permite obţinerea lui P''_k pe axa Ox (prin condiţia $x_k P''_k = x_k P'_k$, sau grafic prin rotirea lui $x_k P'_k$ în sens trigonometric pozitiv). Folosind graficul perturbaţiei se citeşte $F(t_k) = OA_k$ ce permite obţinerea lui P'''_k pe axa Ox (prin condiţia $P''_k P'''_k = OA_k$). Tangenta în punctul P_k la traiectoria de fază este perpendiculară pe $P'''_k P_k$. În acest mod se determină un alt punct P_{k+1} al traiectoriei de fază şi totodată intervalul de timp Δt_k necesar sistemului pentru a trece în starea caracterizată prin $x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}$.

Se repetă construcţia, utilizînd de data aceasta mai întîi curba caracterizată prin $t = t_{k+1} (= t_k + \Delta t_k)$, apoi cea caracterizată prin $\lambda = \lambda_{k+1}$ ş.a.m.d. Construcţia soluţiei $x = x(t)$ a ecuaţiei (3') nu prezintă acum nici o dificultate.

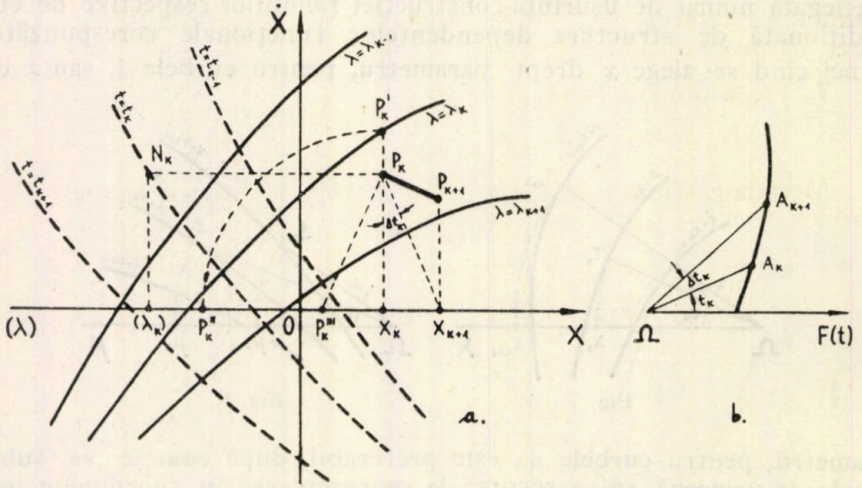


Fig. 9

6. Dacă pentru construcţia familiei $\lambda = \varphi(\dot{x}, t)$ se alege $\dot{x}$ drept parametru este preferabil de folosit reprezentarea în coordonate polare. În scopul simplificării construcţiilor grafice este util de suprapus axele

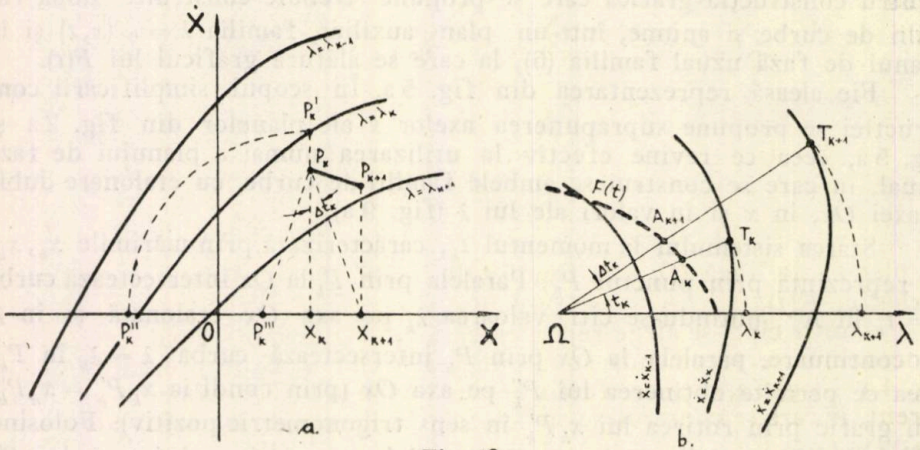


Fig. 10

polare ale reprezentărilor lui λ şi ale forţei perturbatoare. Efectiv rămîn de construit curbele (6) în planul de fază $(O, x, \dot{x})$ şi într-o reprezentare polară suplimentară, cu dublă etalonare a axei polare, curbele $\lambda = \varphi(\dot{x}, t)$ precum şi forţa perturbatoare (fig. 10).

Procedeul este acum următorul : paralela prin P_k la Ox permite citirea lui $\dot{x}_k$ corespunzător, cu care se obţine punctul T_k pe curba $\dot{x} = \dot{x}_k$ din fig. 2 b, adică valoarea λ_k respectivă. Paralela la $O\dot{x}$ prin P_k determină punctul P'_k pe curba $\lambda = \lambda_k$ din planul de fază ş. a. m. d. Trebuie subliniat că intervalele Δt determinate pe cale grafică se folosesc acum ca atare, în decursul construcţiei.

7. Fie a doua ecuaţie (3) :

$$\ddot{x} + f[\dot{x}, \varphi(x, t)] = F(t). \tag{3''}$$

Metoda grafică de studiere ce se propune necesită construcţia a două familii de curbe şi anume, într-un plan auxiliar, familia $\mu = \varphi(x, t)$ şi

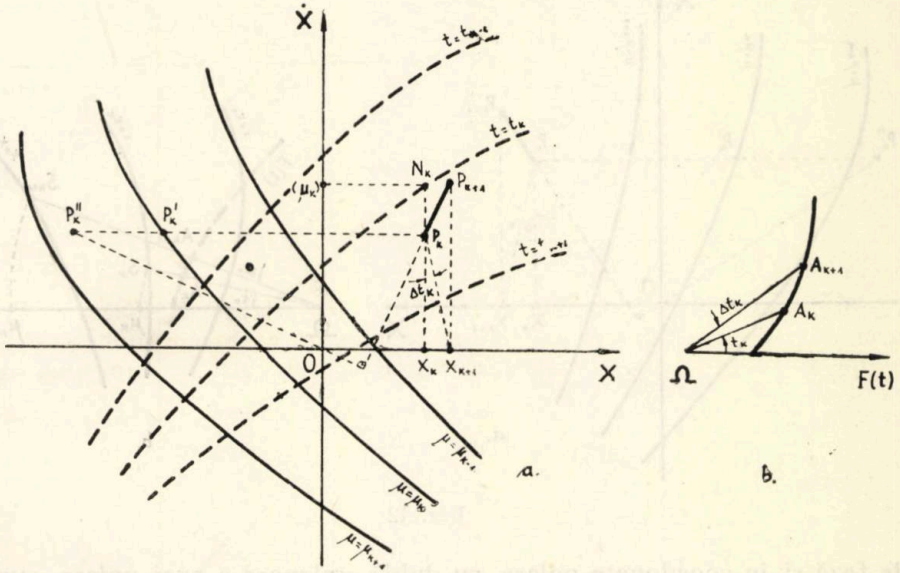


Fig. 11

în planul de fază $(O, x, \dot{x})$ familia (9), cărora li se alătură graficul perturbaţiei $F(t)$.

Atunci cînd se alege reprezentarea din fig. 6 a, în scopul simplificării procedeului se recomandă suprapunerea axelor x ale reprezentărilor din fig. 4 a şi fig. 6 a, ceea ce efectiv revine numai la utilizarea planului de fază curent, în care se construiesc ambele familii de curbe, cu dublă etalonare a axei $O\dot{x}$, atît în $\dot{x}$ cît şi în valori ale lui μ (fig. 11 a).

Cunoscînd starea sistemului la momentul t_k, se fixează punctul reprezentativ corespunzător P_k; paralela la $O\dot{x}$ prin P_k determină punctul N_k pe curba $t = t_k$, permiţînd citirea valorii μ_k respective pe axa $O\dot{x}$, etalonată şi în μ. În continuare se determină punctul P'_k la intersecţia

curbei $\mu = \mu_k$ cu paralela la Ox dusă prin P_k. Graficul perturbaţiei dă pe $F(t_k)$ şi deci, prin condiţia $P'_k P''_k = OA_k$, rezultă P''_k. Tangenta în P_k la traiectoria de fază este perpendiculară pe OP''_k. Se determină astfel alt punct P_{k+1} al traiectoriei de fază şi totodată intervalul de timp Δt_k, după care se reia construcţia indicată, utilizînd de data aceasta mai întîi curba $t = t_{k+1} (= t_k + \Delta t_k)$ ş. a. m. d.

8. Cînd se alege x drept parametru în construcţia familiei $\mu = \varphi(x, t)$ este de asemenea preferabil de folosit reprezentarea în coordonate polare, cu suprapunerea axelor polare ale reprezentărilor lui μ şi ale forţei perturbatoare. Urmează atunci de construit (fig. 12) curbele (9) în planul

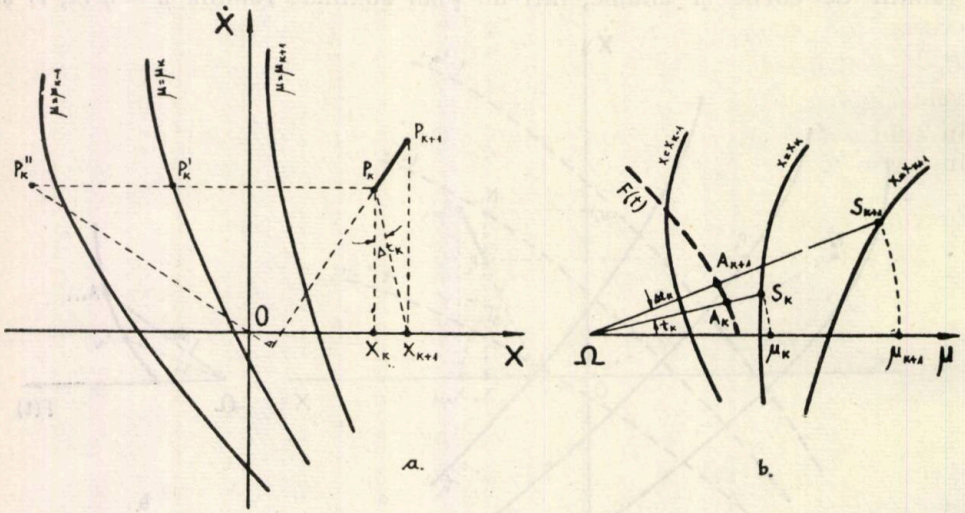


Fig. 12

de fază şi în coordonate polare, cu dublă etalonare a axei polare, curbele $\mu = \varphi(x, t)$, precum şi forţa perturbatoare. Atunci paralela la Ox prin P_k permite citirea lui x_k corespunzător, cu ajutorul căruia se obţine pe curba $x = x_k$ punctul S_k, citindu-se μ_k respectiv; apoi paralela la Ox prin P_k intersectează curba $\mu = \mu_k$ în P'_k şi luînd $P'_k P''_k = OA_k = F(t_k)$ se obţine P''_k. Tangenta la traiectoria de fază prin P_k este perpendiculară pe OP''_k ş. a. m. d.

9. Trebuie observat că în decursul construcţiilor care se propun este foarte posibil ca pentru unele valori ce intervin pe parcurs să nu fie construite curbele respective (ce apar în fig. 9...12); se fixează atunci punctele corespunzătoare prin interpolare, între cele două curbe caracterizate, prin valori ce încadrează pe cea necesară.

De asemenea trebuie subliniat că pentru un sistem neliniar de tipul (3), dat în mod concret, este util de construit familiile de curbe pe care

le necesită procedeul grafic, o dată pentru totdeauna, în timp ce pentru construcţia traiectoriilor de fază, corespunzînd la diverse condiţii iniţiale, este preferabil de utilizat hîrtie de calc.

10. Metoda grafică expusă permite şi determinarea perturbaţiilor $F(t)$ ce trebuie aplicate sistemelor (3) pentru a le sili să execute o mişcare impusă, efect care a fost denumit în [4] ([5]) *stabilizare forţată*. Pentru a urmări aceasta fie ecuaţia (3′) şi fig. 9. Sistemul neliniar fiind dat, curbele din fig. 9 a sînt deci construite. Impunerea mişcării revine la impunerea traiectoriei din planul de fază. Fie $P_k P_{k+1}$ primul element al liniei poligonale în care se descompune traiectoria respectivă; el trebuie să fie perpendicular pe dreapta $P_k P_k'''$ şi astfel se determină pe Ox punctul P_k''' necesar. Pe de altă parte, în lipsa perturbaţiei, procedînd aşa cum s-a indicat la pct. **5**, se capătă punctul P_k''. Astfel $P_k'' P_k''' = F(t_k)$ dă mărimea perturbaţiei ce trebuie să acţioneze în intervalul Δt_k pentru a produce efectul de mişcare cerut. Procedînd la fel, în continuare, se obţine reprezentarea lui $F(t)$ necesar, printr-o funcţie în scară.

Analog se rezolvă aceeaşi problemă în cazul reprezentării din fig. 10, precum şi pentru sistemele neliniare (3″).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanică teoretică

BIBLIOGRAFIE

1. Цыпкин Я. З. (ред.), *Проблемы теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления*, Изд. АН СССР, М., 1957, гл. **III**.
2. Ku Y. H., J. Franklin Inst., 1953, **255**, *1*, pp. 9 — 31.
3. Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV** (**VIII**), *3 — 4*, pp. 107 — 112.
4. — St. şi cerc. Mec. Apl., 1961, **VII**, *4*, pp. 883 — 897.
5. — Rev. de Méc. Appl., 1962, **VI**, *1*, pp. 83 — 98.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ТИПОВ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

(Резюме)

Предлагается графический метод позволяющий изучение движения двух классов нелинейных неавтономных систем описанных уравнениям формы (3). С этой целию автор расширяет некоторые способы построения фазовых траекторий, действительные для некоторых нелинейных систем с одним параметром, рассмотренных в [4] (или в [5]).

Предлагаемый графический метод позволяет также определение возмощений $F(t)$ которые следует применять к системам (3) с целью заставить их выполнять вменяемое им движение.

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR L'ÉTUDE DE CERTAINS SYSTÈMES NOUVEAUX NON-LINÉAIRES, NON-AUTONOMES, À UN SEUL DEGRÉ DE LIBERTÉ

(Résumé)

On propose une méthode graphique qui permet l'étude du mouvement de deux classes de systèmes non-linéaires, non-autonomes, décrites par des équations du type (3). En ce but on élargit quelques-uns des procédés de construction des trajectoires du plan des phases, valables pour certains systèmes non-linéaires à un paramètre, étudiés dans [4] (ou [5]).

La méthode qu'on propose permet aussi à déterminer les perturbations $F(t)$ qu'on doit appliquer aux systèmes (3) pour les contraindre à décrire un mouvement qu'on s'impose.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 621-231

К ПРИМЕНЕНИЮ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ К ИССЛЕДОВАНИЮ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Д. МАНЖЕРОН и Д. КАТАМАДЗЕ

1. Вслед за недавним появлением в свет монументальных трудов принадлежащих акад. И. И. Артоболевскому [1] или же ему и его сотрудникам Н. И. Левитскому и С. А. Черкудинову [2] и посвященных одной специальной и затем и общей задаче синтеза плоских механизмов, вышла в печати новая серия работ акад. И. И. Артоболевского [3], [4], продолжающая в некотором смысле теорию разработанных им раннее коникографов как механизмов для огибания конических сечений [1, стр. 87—101], [2, стр. 277—300] и теорию механизмов для огибания кривых высших порядков [2, стр. 300—318]. В [3] излагается теория и некоторые практические применения, подчеркнутые в особенности в [5], нового класса шатунных кривых, названных *линейно огибающими шатунными кривыми*, являющимися огибающими прямых принадлежащих шатунной плоскости.

В сборнике резюме докладов представленных на седьмом индийском конгрессе по теоретической и прикладной механике один из авторов [6], сам, а затем и в сотрудничестве [7], изложил вехи установления тангенциальных функциональных зависимостей в теории машин и механизмов.

Ниже приводятся начала систематического исследования функциональных зависимостей, порождаемых плоскими и пространственными механизмами с точки зрения тангенциальной кинематической геометрии.

2. Пусть u_1, u_2 — тангенциальные (линейные) координаты некоторой прямой [1])

$$(D) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + 1 = 0,$$

неразрывно связанной с рассматриваемой как неподвижной плоскостью, отнесенной к системе декартовых прямугольных координат $Ox_1 x_2$, а u_1', u_2' — тангенциальные координаты соответствующей (D) прямой

$$(D') \qquad u_1' x_1' + u_2' x_2' + 1 = 0,$$

связанной с жестким звеном I некоторого механизма несущим декартовы оси $O' x_1' x_2'$ и находящимся в плоско-параллельном движении.

Тангенциальное уравнение в неподвижной плоскости, (u_1 и u_2 —

[1]) В настоящей заметке не рассматривается несколько более общий вопрос тангенциальных гомогенных координат или же координаты определяющие более сложные чем прямые или же плоскости геометрические образы.

переменные), кривой огибаемой некоторой данной прямой $(D')\in O'x_1'x_2'$, ($u_1'=\text{const.}$, $u_2'=\text{const.}$), или же тангенциальное уравнение в плоскости рассматриваемого движущегося звена (обратное движение: u_1' и u_2' — переменные), кривой огибаемой некоторой данной прямой $(D)\in Ox_1x_2$, ($u_1=\text{const.}$, $u_2=\text{const.}$), выражается, в соответственно рассматриваемых как переменные тангенциальных координатах u_1, u_2, или же u_1', u_2', кроме совокупности уравнений связи механизма, соотношением

$$(1)\qquad (u_1'^2+u_2'^2)(u_1x_{10}+u_2x_{20}+1)^2=u_1^2+u_2^2,$$

причем x_{10}, x_{20} — декартовы координаты подвижного начала $O'\in Ox_1x_2$ и изменяющийся при движении звена I угол $\theta=\sphericalangle(Ox_1, O'x_1')$ дан зависимостью

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\theta=(u_1'u_2-u_2'u_1)/(u_1u_1'+u_1u_2').$$

Так, например, в случае четырехзвенного механизма эллипсографа, представляющего собою кривошипно-шатунный механизм, с кривошипом длина которого равна длине шатуна и основанного на известном свойстве отрезка, длины l, скользящего своими концами по двум взаимноперпендикулярным прямым Ox_1 и Ox_2, тангенциальное уравнение огибаемых кривых в случае прямого или же обратного движения (т.е. соответственно в неподвижной и подвижной плоскостях) дано соотношением

$$(3)\qquad [u_1^2+u_2^2-lu_1(u_1'u_2-u_2'u_1)]^2=(u_1^2+u_2^2)(u_1'^2+u_2'^2),$$

причем при $u_1'=\text{const.}$, $u_2'=\text{const.}$ — огибающая кривая 4-го класса, гипоциклоида с 4-мя точками возврата, а при $u_1=\text{const.}$, $u_2=\text{const.}$ — огибающая кривая 2-го класса, эллипс.

3. Пусть u_1, u_2, u_3 — тангенциальные координаты некоторой плоскости

$$(P)\qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+1=0,$$

неразрывно связанной с рассматриваемым как неподвижное трехмерным эвклидовым пространством, отмеченным трехгранником $Ox_1x_2x_3$, а u_1', u_2', u_3' — тангенциальные координаты соответствующей (P) плоскости

$$(P')\qquad u_1'x_1'+u_2'x_2'+u_3'x_3'+1=0,$$

связанной с жестким звеном I^* некоторого механизма, несущим декартовы оси $O'x_1'x_2'x_3'$ — и находящимся в сложном пространственном движении.

Тангенциальное уравнение в неподвижном пространстве (u_1, u_2, u_3 — переменные) линейчатой поверхности [2] огибаемой некоторой данной плоскостью $(P')\in O'x_1'x_2'x_3'$, ($u_1'=\text{const.}$, $u_2'=\text{const.}$, $u_3'=\text{const.}$), или же тангенциальное уравнение в пространстве рассматриваемого движущегося звена (u_1', u_2', u_3' — перемнные) поверхности огибаемой некоторой данной плоскостью $(P)\in Ox_1x_2x_3$, ($u_1=\text{const.}$, $u_2=\text{const.}$, $u_3=\text{const.}$), выражается, в соответственно рассматриваемых как переменные тан-

[2] В случае развертывающихся огибаемых поверхностей таких уравнений два.

генциальных координатах u_1, u_2, u_3 или же u_1', u_2', u_3', кроме совокупности уравнений связи, соотношением:

$$(4) \qquad (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2)(u_1 x_{10} + u_2 x_{20} + u_3 x_{30})^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

где x_{10}, x_{20}, x_{30} — декартовы координаты подвижного начала $O' \in Ox_1 x_2 x_3$, причем значения соответствующих эйлеровых углов φ, ψ, θ получаются непосредственным вычислением из известных соотношений [8]:

$$(5) \qquad \begin{cases} u_1'/(u_1 a_{11} + u_2 a_{21} + u_3 a_{31}) = u_2'/(u_1 a_{12} + u_2 a_{22} + u_3 a_{32}) = \\ \quad = u_3'/(u_1 a_{13} + u_2 a_{23} + u_3 a_{33}) = 1/(u_1 x_{10} + u_2 x_{20} + u_3 x_{30} + 1), \\ a_{11} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1' = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta, \text{ и т. д.} \end{cases}$$

Рассмотрим, например, случай механизма служащего в частности в коллекции музея макет по механике Ясского политехнического института, для иллюстрации установившегося движения исскуственного спутника или же планеты в упрощенной задаче двух тел и состоящего из неподвижного и подвижного винтовых аксоидов в виде однополых гиперболоидов вращения. В предположении, что полюс O' тела описывает в плоскости $Ox_1 x_2$ окружность радиуса R с центром в начале координат O; само тело вращается около этого полюса, совершая регулярное прецессионное движение, причем угловая скорость обращения полюса O' вокруг точки O равна угловой скорости прецессионного движения, а угловая скорость чистого вращения около собственной оси $O'x_3'$ пропорциональна этой скорости и при обозначениях

$$(6) \qquad \begin{cases} x_{10} = R\cos\omega_1 t, \quad x_{20} = R\sin\omega_1 t, \quad x_{30} = 0, \\ \psi = \omega_1 t, \quad \varphi = c\omega_1 t, \quad \theta = \theta_0, \quad c = \cos\theta_0, \quad c^* = \sin\theta_0, \end{cases}$$

тангенциальные уравнения огибаемых линейчатых поверхностей в прямом, (u_1'=const., u_2' = const., u_3' =const.), или же обратном движении, (u_1=const., u_2=const., u_3=const.), даны, соответственно, в общем случае, соотношением класса 12-го или же 10-го:

$$(7) \qquad (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2)(D + A^2)^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) A^4,$$

где

$$(8) \qquad \begin{cases} D = R(u_1^2 + u_2^2)(-Ru_3' B \pm c^* \sqrt{A^2 - B^2}), \\ A^2 = (Ru_3' u_2 - c^* u_1)^2 + (Ru_3' u_1 + c^* u_2)^2, \quad B = u_3' - cu_3, \end{cases}$$

причем

$$(9) \qquad \begin{cases} \sin\omega_1 t = [-(Ru_3' u_2 - c^* u_1) B \pm (Ru_3' u_1 + c^* u_2)\sqrt{A^2 - B^2}]/A^2, \\ \cos\omega_1 t = [-(Ru_3' u_1 + c^* u_2) B \mp (Ru_3' u_2 - c^* u_1)\sqrt{A^2 - B^2}]/A^2 \end{cases}$$

и т. д.

При $R = 0$, рассмотренный механизм превращается в обычное коническое зацепление и (7) переходит в классическое тангенциальное уравнение огибаемых плоскостями (P) или же (P') сферических поверхностей с центром в общем начале $O \equiv O'$.

4. Переходя к более общим исследованиям входящим в рамки общей теории приведенных ускорений различных порядков и классов [9], [10], имеем, например:

Теорема 1. *Пары плоскостей* (P) *и* (P_{1m}) *или же* (P) *и* (P_{2m}), *определяемых тангенциальными координатами:*

$$(P): u_1, u_2, u_3 \tag{10}$$

и

$$(P_{im}): \begin{Bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} g_{i1} \\ g_{i2} \\ g_{i3} \end{Bmatrix} F_{im}, \quad i = 1, 2), \tag{11}$$

где

$$\mathbf{g}_i \equiv (g_{i1}, g_{i2}, g_{i3}), \quad F_{im} = ((\mathbf{r}_{M_0} - \lambda_{im} \mathbf{r}^{(m)}_{M_0}) \cdot \mathbf{g}_i), \tag{12}$$

$$g_{i1} = \begin{vmatrix} v_{i12} & v_{i22} \\ v_{i13} & v_{i23} \end{vmatrix}, \quad g_{i2} = \begin{vmatrix} v_{i13} & v_{i23} \\ v_{i11} & v_{i21} \end{vmatrix}, \quad g_{i3} = \begin{vmatrix} v_{i11} & v_{i21} \\ v_{i12} & v_{i22} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$v_{ilk} = (\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{i}_k) (1 - \lambda_{im} A_m) + \lambda_{im} (\mathbf{B}_m \mathbf{u}_l \mathbf{i}_k) + \sum_{j=0}^{m-1} (\vec{\omega}^{(j)} \cdot \mathbf{i}_k) (\mathbf{C}_{mj} \cdot \mathbf{u}_l), \tag{14}$$

$$\mathbf{C}_{mj} = \mathbf{C}_{m-1,j-1} + D\mathbf{C}_{m-1,j}, \quad D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t - \vec{\omega} \times, \quad \mathbf{C}_{10} \equiv \vec{\omega}, \quad \mathbf{C}_{m-1,-1} \equiv \mathbf{B}_{m-1}, \tag{15}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, m-1; \; m = 1, 2 \ldots; \; l = 1, 2; \; k = 1, 2, 3),$$

а λ_{im} *и* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *удовлетворяют соотношениям*

$$1 - \lambda_{im} [A_m + A_m(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)] + \lambda^2_{im} [A_m \cdot A_m(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) + B^2_m(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)] = 0, \tag{16}$$

$$\mathbf{u}_1, \; \mathbf{u}_2 \xi (P); \quad B_m(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = [\mathbf{B}_m \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2] = (\mathbf{B}_m \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2),$$

причем $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$—*верзоры координатных осей некоторого неподвижного трехгранника и* A_m, $A_m(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$, $\mathbf{B}_m$, *определяются установленными в некоторых предыдущих исследованиях формулами* [11], [12], *представляют собою основания обобщенных крестов Котельникова* [13], [14], *в то время как приведенные ускорения любого порядка* m *оказываются второго рода* [15], [16].

4. Ряд соотношений связывающих различные элементы получаемых огибаемых с кинематическими образами рассматриваемых движений звеньев механизмов и машин, например, в смысле установленных в [3] соотношений между точками касания линейно огибающих шатунных кривых и мгновенными центрами вращения, или же в смысле разработанной дуальной проблемы совершенно недавно доложенной С. Миллером [17] задачи о геометрических местах особых точек шатунных кривых, а также и соответствующей задачи для многозвенных, в частности пятизвенных плоских механизмов, кристаллизованной в диссертации Э. Г. Гудушаури [18], служат темой одной из последующих представленных к печати статей [19], [20].

Поступила 19 XII 1961 г.

Ясский политехнический институт,
Кафедра механики
и
Грузинский политехнический институт,
им „В. И. Ленина", Тбилиси, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И., *Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых*, Изд. АН СССР, М., 1959 г.
2. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А., *Синтез плоских механизмов*, Физматгиз, М., 1959 г.
3. Артоболевский И. И., ДАН СССР, 1960, **132**, *1*, стр. 82—84.
4. — *Од одном классе шатунных кривых*. В сб. *III общепольское совещание по теории машин и механизмов*, Рогув у Варшавы, 8—10 июня 1961 г., стр. 5.
5. — ДАН СССР, 1961, **139**, *5*, стр. 1077—1080.
6. Mangeron D., *Tangential functional relations in the theory of mechanisms and machines*. В сб. *Papers presented on the Seventh Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Indian Institute of Technology, Bombay, 23rd Dec. to 26th Dec. 1961, p. 6.
7. Mangeron D., Croitoru E., *Variations of accelerations of any order from the standpoint of dual geometry and their applications to the theory of mechanisms and machines*. В сб. *Abstracts of papers presented on the Eighth Indian Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, M. B. M. Engineering College, Jodhpur, (в печати).
8. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., *Курс теоретической механики*, т. **I**, 5-е изд., Гостехиздат, М., 1954 г.
9. Манжерон Д., ДАН СССР, 1955, **102**, *5*, стр. 897—898.
10. Mangeron D., Drăgan C., Rev. Méc. appl., 1962, **VII**, *1*, pp. 41—62.
11. Манжерон Д., ДАН СССР, 1957, **112**, *1*, стр. 27—28.
12. Манжерон Д., Зильберман Я. С., Труды Ростовского н/Д ИИЖДТ, 1961, *29*, стр. 5—10.
13. Манжерон Д., ИАН ОТН, Мех. и Машиностр., 1960, *1*, стр. 168—169.
14. — An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. n., secţ. I, 1960, **6**, *3*, pp. 739—745.
15. Тавхелидзе Д., Манжерон Д., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, **5 (9)**, *1—2*, стр. 303—306.
16. Mangeron D., Croitoru E., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend. cl. sci. fis., mat. e nat., s. VIII, 1962, **32**, *4*, 505—508.
17. Miller S., *Koppelkurven mit Doppelpunkten*. В. сб. *III Gesamtpolnische Konferenz über Theorie von Maschinen und Getrieben*, Rogów bei Warschau, 8—10 VI 1961, S. 12—13.
18. Гудушаури Э. Г., *Некоторые вопросы исследования механизмов для образования плоских кривых*. Диссертация, Груз. политехн. ин-т им. „В. И. Ленина", Тбилиси, 1962 г.
19. Mangeron D., Tavkhelidzé D., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. e nat., s. VIII, 1962, **33**, *4*, (в печати).
20. Манжерон Д., Белецкий В. Я., Труды Одесского техн. ин-та, 1962, (в печати)

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE TANGENTIELLE À L'ÉTUDE DES MÉCANISMES ET DES MACHINES

(Résumé)

Dans quelques travaux antérieurs [6], [7] l'un des Auteurs, seul ou bien en collaboration, a jalonné l'étude des mécanismes plans et de l'espace par l'application de la géométrie cinématique tangentielle.

M. I. I. Artobolevski [3]...[5] a étudié dans ces dernières années des courbes linéairement enveloppées par les droites invariablement liées à différents organes des mécanismes plans en y appliquant la géométrie cinématique ponctuelle.

On étudie dans ce travail, grâce à l'établissement du théorème I, diverses dépendances fonctionnelles tangentielles relatives à la distribution des accélérations d'ordre quelconque et de deuxième espèce [11], [15] qui se rencontrent dans quelques mécanismes de l'espace.

L'article se conclut par nombre d'indications concernant toute une série de problèmes dans le même ordre d'idées, de prochaine publication [19], [20].

APLICAREA GEOMETRIEI CINEMATICE TANGENȚIALE LA STUDIUL MECANISMELOR ȘI MAȘINILOR

(Rezumat)

În lucrările anterioare [6], [7] unul dintre autori, singur sau în colaborare, a pus bazele studiului mecanismelor și mașinilor folosind coordonate duale sau tangențiale.

În ultimii doi ani acad. I. I. Artobolevski [3]...[5] a consacrat o serie de lucrări teoriei curbelor înfășurate liniar, folosind în acest scop aparatul geometriei cinematice punctuale.

În această lucrare se face, pe baza teoremei I, studiul dependențelor funcționale tangențiale relativ la distribuții de accelerații de ordin oarecare și de a doua specie [11], [15] în mecanisme speciale spațiale.

Articolul se încheie cu indicația problematicii unor lucrări în aceeași ordine de idei, în curs de apariție [19], [20].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. K. 621 - 231

KOPPELKURVEN MIT DOPPELPUNKTEN

VON
STEFAN MILLER

1. Einleitung

Es ist bekannt, dass man zwischen Koppelkurven desselben Getriebes, z. B. eines Gelenkvierecks, Koppelkurven mit Doppelpunkten namentlich mit Schnittpunkten, Selbstberührungspunkten oder Spitze begegnet bzw. Koppelkurven, in welchen erwähnte Punkte paarweise gleichzeitig auftreten.

Hier besteht die Frage: wieviel Arten solcher Koppelkurven mit Doppelpunkten mit Hilfe des gegebenen Getriebes aufgezeichnet werden können und welche Koppelpunkte diese Koppelkurve beschreiben?

In der vorliegenden Arbeit bemuhte sich der Verfasser, die Antwort auf diese Frage am Beispiel eines Gelenkvierecks zu geben.

2. Koppelkurven mit Doppelpunkten für Kurbelschwinge

2. 1. Sammlung der Doppelpunkte auf unbewegter Ebene

Es sei eine Kurbelschwinge $ABCD$ gegeben (Abb. 1) deren Koppelpunkt M eine Koppelkurve m mit Schnittpunkt $K_{\varphi_1}^{\beta_1}$ bezeichnet. Der bewegliche Punkt M passiert zweimal den Punkt $K_{\varphi_1}^{\beta_1}$ und deswegen bezeichnen wir diesen Punkt als *Doppelpunkt*. In der Abb. 1 sind zwei solche Lagen AB_1C_1D und AB_2C_2D des Gelenkvierecks aufgetragen, in welchen die Punkte M_1 und M_2 aufeinander liegen und sich mit $K_{\varphi_1}^{\beta_1}$ decken.

Aus den Gleichungen $\Delta B_1C_1M_1 = \Delta B_2C_2M_2$ und $AB_1 = AB_2$ sowie $DC_1 = DC_2$ schliesst man, dass der Punkt $K_{\varphi_1}^{\beta_1}$ auf dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden h_{β_1} und h_{γ_1} der Winkel β_1 und γ_1 welche die Kurbel in ihren zwei Lagen AB_1 und AB_2 sowie die Schwinge in DC_1 und DC_2 einschliessen. Das bedeutet dass man den Doppelpunkt, ohne die Koppelkurve zu zeichnen, leicht finden kann, indem man die zwei Winkelhalbierenden der Winkel β_1 und γ_1 führt. Diese Winkel sind im Gelenkviereck durch die Funktion $\gamma = f(\varphi, \beta)$ verbunden (wo φ — der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden h_{β_1} und einer Ge-

raden die durch A und D geführt wurde) und es ist demzufolge zweckmässig zur eindeutigen Bezeichnung des Doppelpunktes die Grössen der Winkel β_1 und γ_1 anzunehmen. Da aber der Winkel β wie auch γ in gewissen Bereichen stetig variabel sind darf man den Rückschluss ziehen, dass es beliebig viele Doppelpunkte K_φ^β für das in Frage kommende Gelenkviereck gibt; sie werden in einem gewissen Bereich s liegen.

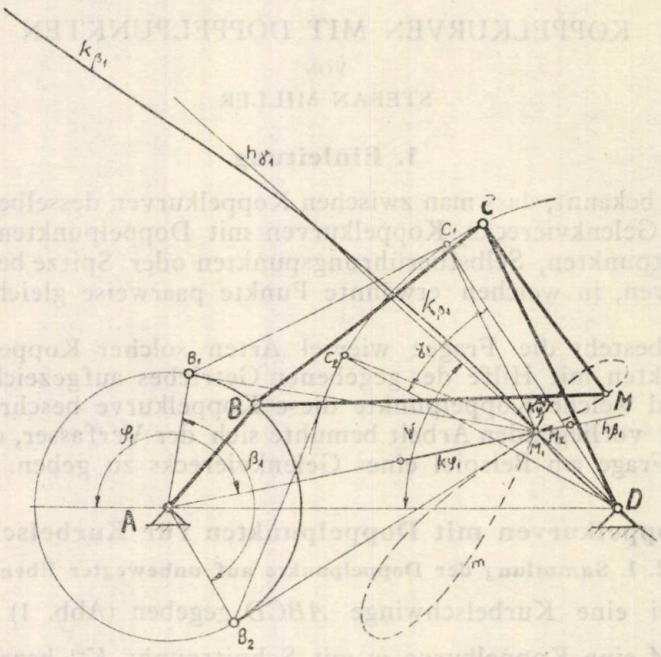


Abb. 1

Diesen Bereich kann man auf der mit Standglied verbundenen Ebene auf folgende Weise bezeichnen:

Einem beliebigen Paar von Winkeln β und φ, zum Beispiel den Winkeln β_1 und φ_1, entspricht ein genau bezeichneter Doppelpunkt $K_{\varphi_1}^{\beta_1}$, welcher mühelos zu finden ist. Wenn wir nun den Winkel φ_1 konstant halten, und den Winkel β in dem Bereich $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ varieren, dann finden wir den geometrischen Ort der Punkte $K_{\varphi_1}^{\beta_1}$ als ein Abschnitt k_{φ_1}. Durch Annahme verschiedener Werte für φ im Bereich $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ erhalten wir eine Familie k_φ der genannten Abschnitte.

Diese in Abb. 2 gezeigte Familie bezeichnet eben den gesuchten Bereich s und die Endpunkte der Abschnitte k_{φ_1} bilden seine Umgrenzung.

Natürlich wird der Bereich s ebenso durch die Familie der Kurven k_β gegeben, wobei jede dieser Kurven den geometrischen Ort der Doppelpunkte K_φ^β bei konstantem Wert von β darstellt (Abb. 3).

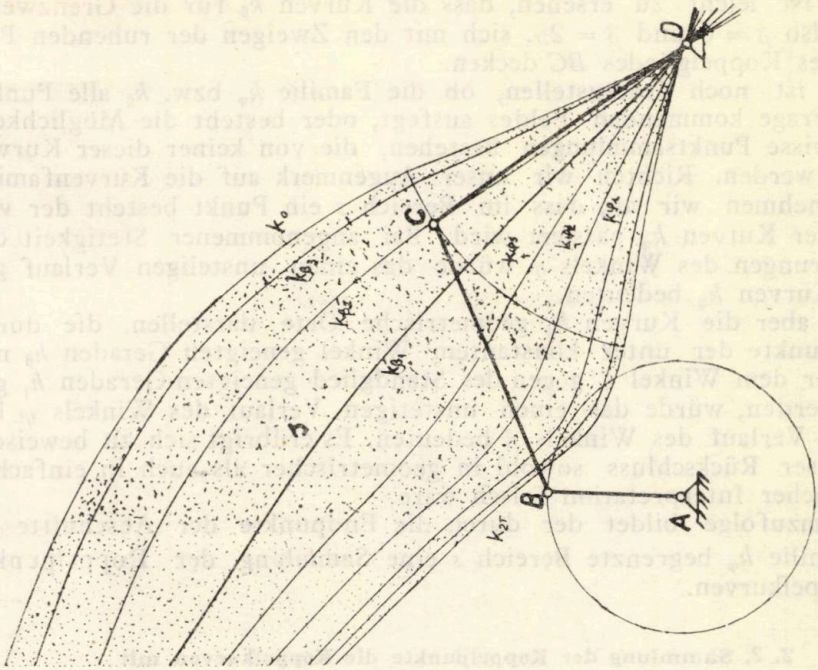


Abb. 3

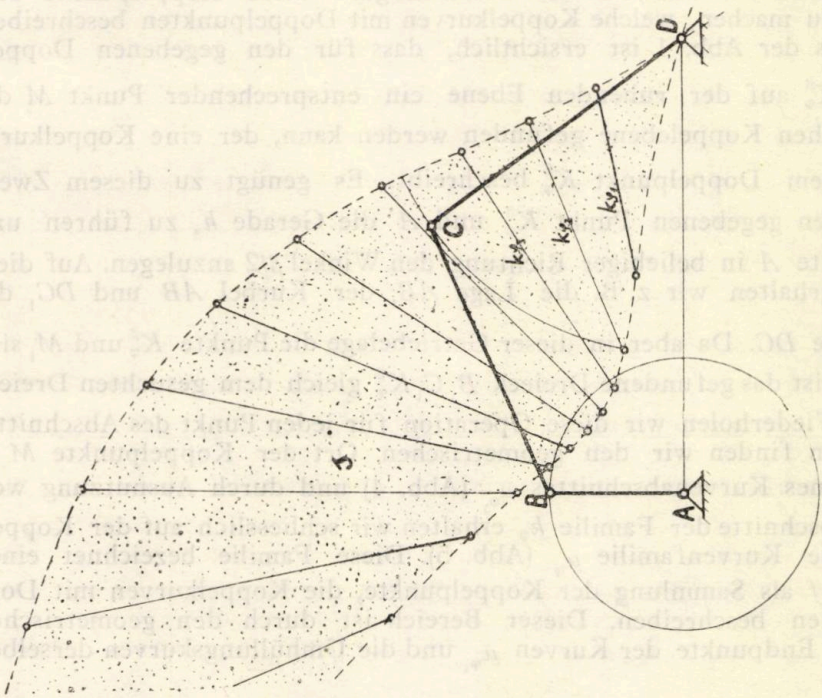


Abb. 2

Es ist leicht zu ersehen, dass die Kurven k_β für die Grenzwerte von β, also $\beta = 0$ und $\beta = 2\pi$, sich mit den Zweigen der ruhenden Polkurve des Koppelgliedes BC decken.

Es ist noch festzustellen, ob die Familie k_φ bzw. k_β alle Punkte des in Frage kommenden Feldes ausfegt, oder besteht die Möglichkeit, dass gewisse Punktsammlungen bestehen, die von keiner dieser Kurven passiert werden. Richten wir unser Augenmerk auf die Kurvenfamilie k_φ und nehmen wir an, dass im Bereich s ein Punkt besteht der von keiner der Kurven k_φ passiert wird. Bei angenommener Stetigkeit der Veränderungen des Winkels φ würde das einen unsteligen Verlauf gewisser Kurven k_φ bedeuten.

Da aber die Kurven k_φ geometrische Orte darstellen, die durch Schnittpunkte der unter konstantem Winkel geneigten Geraden h_β mit der unter dem Winkel ψ gegen des Standglied geneigten Geraden h_γ gebildet werden, würde das einen unstetigen Verlauf des Winkels ψ bei stetigem Verlauf des Winkels β bedeuten. Es erübrigt sich zu beweisen, dass dieser Rückschluss sowohl in geometrischer als auch in einfacher mechanischer Interpretation falsch wäre.

Demzufolge bildet der durch die Endpunkte der Abschnitte k_φ der Familie k_φ begrenzte Bereich s eine Sammlung der Doppelpunkte der Koppelkurven.

2. 2. Sammlung der Koppelpunkte die Koppelkurven mit Doppelpunkten beschreiben

Stellen wir uns jetzt als Grundaufgabe diese Koppelpunkte ausfindig zu machen, welche Koppelkurven mit Doppelpunkten beschreiben.

Aus der Abb. 1 ist ersichtlich, dass für den gegebenen Doppelpunkt K_φ^β auf der ruhenden Ebene ein entsprechender Punkt M der beweglichen Koppelebene gefunden werden kann, der eine Koppelkurve mit diesem Doppelpunkt K_φ^β beschreibt. Es genügt zu diesem Zweck durch den gegebenen Punkt K_φ^β und A die Gerade h_β zu führen und im Punkte A in beliebiger Richtung den Winkel $\beta/2$ anzulegen. Auf diese Weise erhalten wir z. B. die Lage AB_1 der Kurbel AB und DC_1 der Schwinge DC. Da aber in dieser Getriebelage die Punkte K_φ^β und M_1 sich decken, ist das gefundene Dreieck $B_1C_1K_\varphi^\beta$ gleich dem gesuchten Dreieck BCM. Wiederholen wir diese Operation für jeden Punkt des Abschnittes k_{φ_1}, dann finden wir den geometrischen Ort der Koppelpunkte M in Form eines Kurvenabschnittes μ_{φ_1} (Abb. 4) und durch Ausnutzung weiterer Abschnitte der Familie k_φ erhalten wir schliesslich auf der Koppelebene die Kurvenfamilie μ_φ (Abb. 5). Diese Familie bezeichnet einen Bereich f als Sammlung der Koppelpunkte, die Koppelkurven mit Doppelpunkten beschreiben. Dieser Bereich ist durch den geometrischen Ort der Endpunkte der Kurven μ_{φ_i} und die Umhüllungskurven derselben

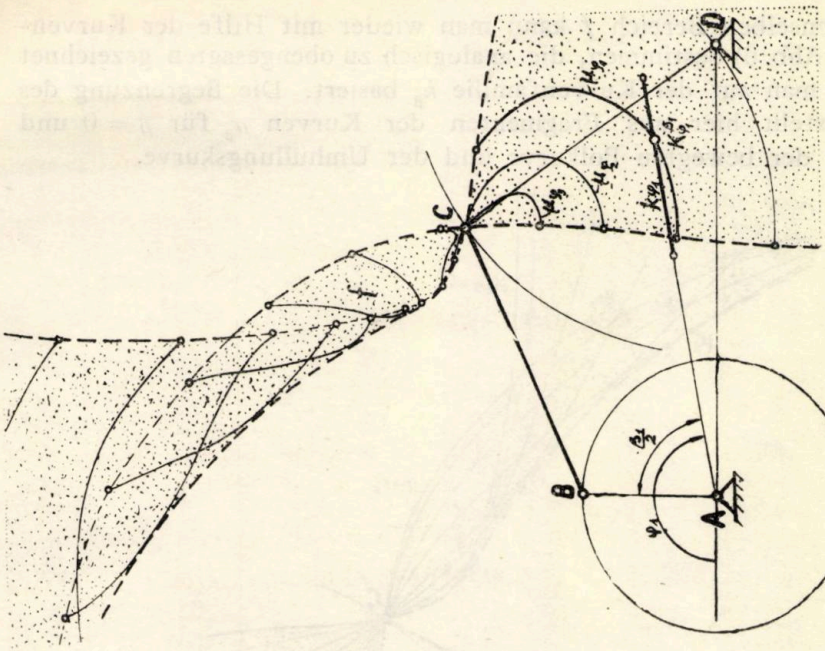


Abb. 5

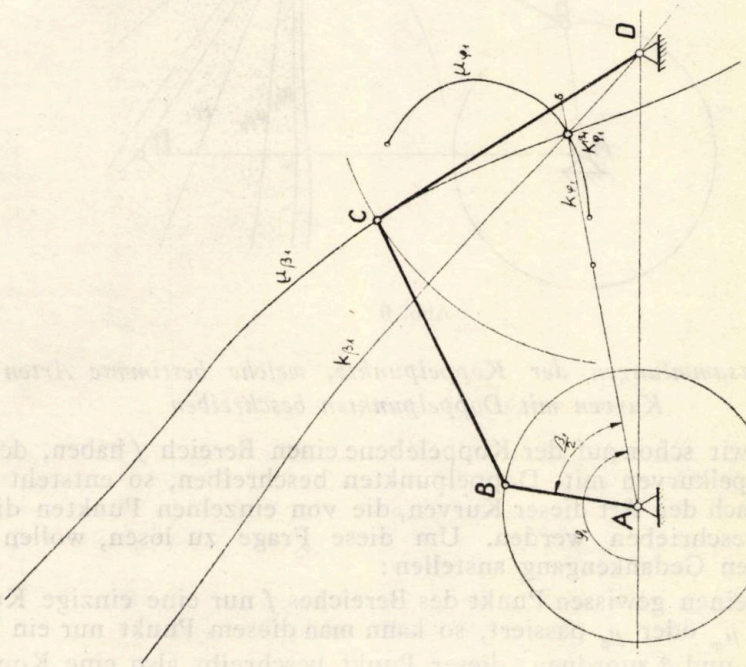


Abb. 4

begrenzt. Denselben Bereich f kann man wieder mit Hilfe der Kurvenfamilie μ_β (Abb. 6) bestimmen, die analogisch zu obengesagten gezeichnet wird, wenn man auf der Kurvenfamilie k_β basiert. Die Begrenzung des Feldes f besteht hier aus Fragmenten der Kurven μ_β für $\beta = 0$ und $\beta = 2\pi$, also der bewegten Polkurve und der Umhüllungskurve.

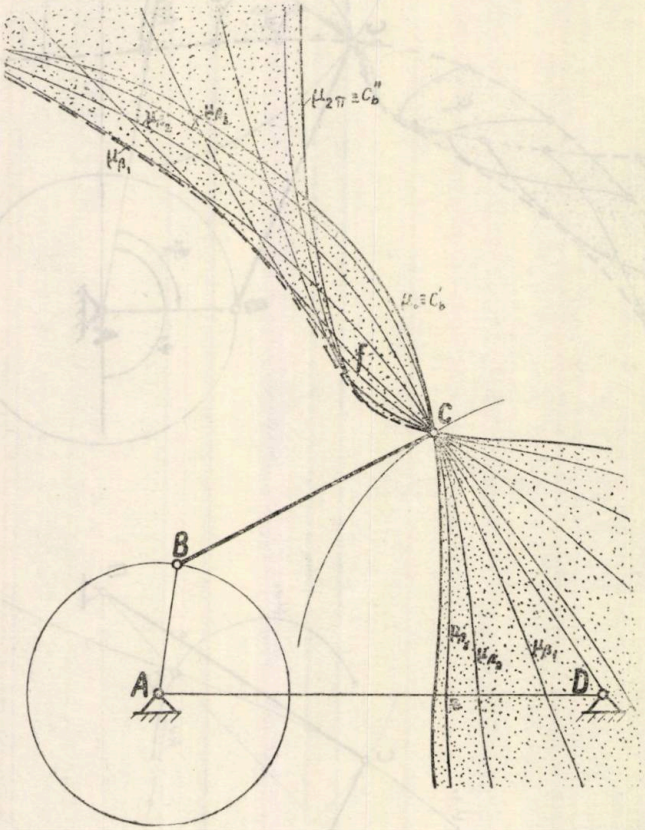


Abb. 6

2.2.1. *Punktsammlungen der Koppelpunkte, welche bestimmte Arten von Kurven mit Doppelpunkten beschreiben*

Wenn wir schon auf der Koppelebene einen Bereich f haben, dessen Punkte Koppelkurven mit Doppelpunkten beschreiben, so entsteht nun die Frage nach der Art dieser Kurven, die von einzelnen Punkten dieses Bereiches beschrieben werden. Um diese Frage zu lösen, wollen wir nachstehenden Gedankengang anstellen:

Wenn einen gewissen Punkt des Bereiches f nur eine einzige Kurve der Familie μ_φ oder μ_β passiert, so kann man diesem Punkt nur ein Paar der Winkel φ und β zuordnen, dieser Punkt beschreibt also eine Koppelkurve mit nur einem Doppelpunkt. Wenn sich aber die Kurven der Fa-

milie μ_φ oder μ_β durchschneiden, so kann man einem solchen Schnittpunkt soviel Winkelpaare der Winkel φ und β zuordnen, wieviel Kurven μ_φ oder μ_β sich in diesem Punkte schneiden.

Ein solcher Punkt beschreibt eine Koppelkurve mit entsprechender Zahl der Doppelpunkte.

In unserem Falle ist es nicht schwer in dem Bereich f (Abb. 7) ein Feld f_1 zu bestimmen, in welchem sich die Kurven μ_φ oder μ_β nicht schneiden (es ist das Feld zwischen den Zweigen der bewegten Polkurve),

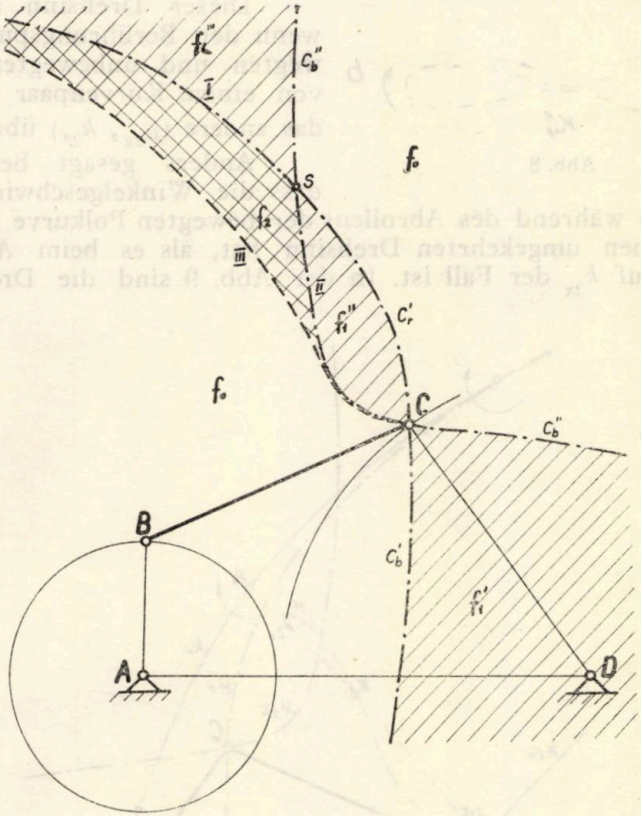


Abb. 7

sowie das Feld f_2 in welchem sich überall je zwei Kurven der genannten Familien durchschneiden.

Wollen wir nun diese Felder und ihre Begrenzungslinien nacheinander untersuchen.

Das Feld f_1, wie man aus obengenanntem schliesst, ist eine Sammlung von Koppelpunkten, welche Kurven mit einem Doppelpunkt beschreiben. Im Allgemeinen kann aber eine geschlossene Kurve (wir denken an die Koppelkurve) mit einem einzigen Doppelpunkt in zweifacher Form erscheinen: als eine Kurve mit einem Schnittpunkt (Abb. 8 a), oder mit einem Berührungspunkt, den wir im weiteren als Selbstberührungspunkt

bezeichnen (Abb. 8 b). Um nun zu entscheiden, welche Kurve den Punkten des Feldes f_1 zuzuordnen ist, wollen wir nachstehenden Gedankengang anstellen:

Es ist bekannt, dass bei einer Umdrehung der Kurbel AB einer Kurbelschwinge um 2π sich der Drehsinn der Winkelgeschwindigkeit, der Koppelebene in Bezug auf das Standglied ändert.

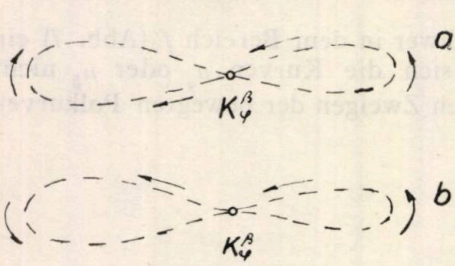


Abb. 8

Dieser Drehsinn ändert sich, wenn der Berührungspunkt der bewegten und unbewegten Polkurve von einem Kurvenpaar (μ_0, k_0) auf das andere $(\mu_{2\pi}, k_{2\pi})$ übergeht.

Anders gesagt bedeutet das, dass die Winkelgeschwindigkeit der Koppelebene während des Abrollens der bewegten Polkurve auf der unbewegten einen umgekehrten Drehsinn hat, als es beim Abrollen der Kurve $\mu_{2\pi}$ auf $k_{2\pi}$ der Fall ist. In der Abb. 9 sind die Drehsinne der

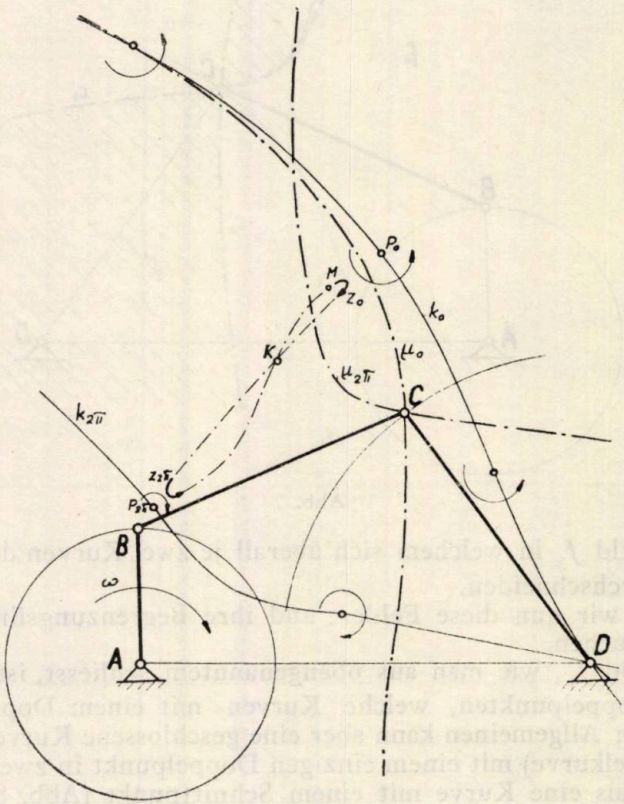


Abb. 9

Winkelgeschwindigkeit der Koppelebene um die Drehpunkte P_0 und $P_{2\pi}$ bei einem angenommenen Drehsinn der Kurbel AB aufgetragen. Es sei ein beliebiger, zwischen den Zweigen der bewegten Polkurve μ_0 und $\mu_{2\pi}$ liegender Punkt M gegeben. Er beschreibt die Koppelkurve m auf solche Weise, dass, wie aus der Abb. 9 ersichtlich, auf den Bogen z_0 und $z_{2\pi}$ dieser Kurve (diese Bogen verlaufen nächst den Kurven k_0 und $k_{2\pi}$) die Bewegung in gegenseitigen Richtungen abläuft. Eine solche Bewegung dieses Punktes auf einer geschlossenen Kurve ist nur dann möglich, wenn 1 (oder 3) Schnittpunkte vorhanden sind.

Man kann also feststellen:

Das Feld f_1 *ist eine Sammlung der Koppelpunkte, die Koppelkurven mit einem einzigen Schnittpunkt beschreiben.*

Befassen wir uns nun mit den Begrenzungslinien des Feldes f_1, das heisst den Zweigen der bewegten Polkurve C_b' und C_b''. Vor allem betrachten wir diese Fragmente der bewegten Polkurve, welche das Feld f_1 vom Feld f_0 abtrennen. Diese Fragmente stellen eine Sammlung von Punkten dar, welchen in Folge ihrer Zugehörigkeit zum Felde f_1, je ein Paar Winkel φ und β zuzuordnen ist, wobei β die Grenzwerte $\beta = 0$ und $\beta = 2\pi$ annimmt. Um sich die solchen Winkelpaaren zugeordneten Doppelpunkte vorzustellen, wollen wir eine von einem beliebigen Punkt des Feldes f_1 in Form einer geschlossenen, aus zwei Schleifen bestehenden Kurve, beschriebene Koppelkurve in Betracht nehmen (Abb. 10). Wie bekannt beschreibt eine dieser Schleifen der Koppelpunkt in dessen die Kurbel um den Winkel β gedreht wird, der anderen entspricht der ergänzende Winkel $2\pi - \beta$. Wenn sich nun der Winkel β dem Nullwert nähert, verkleinert sich die entsprechende Schleife bis zum Verschwinden beim $\beta = 0$. Die Kurve übergeht in eine in Abb. 10 b gezeigte Gestalt. Sie ist als eine Koppelkurve mit einem Doppelpunkt anzusehen und diesen Doppelpunkt bezeichnen wir als *Spitzpunkt.* Wenn wir nun umgekehrt den Winkel β bis auf 2π vergrössern, also uns mit dem Punkte M der Begrenzungslinie $\mu_{2\pi} \equiv C_b''$ des Feldes f_1 nähern, dann verschwindet die zweite Schleife und die Koppelkurve nimmt die in Abb. 10 c gezeigte Gestalt an.

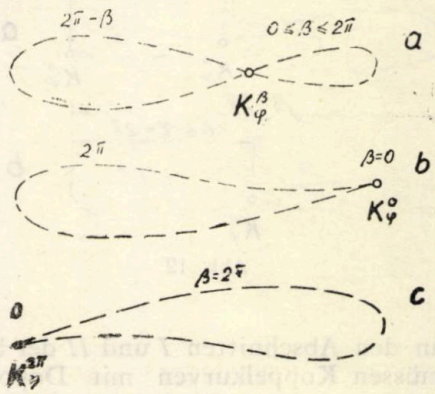


Abb. 10

Demzufolge stellen wir fest:

Die Fragmente der bewegten Polkurve C_b' *und* C_b'' *als Trennlinien zwischen dem Feld* f_1 *und* f_0 *sind als geometrischer Ort der Koppelpunkte anzusehen, die Koppelkurven mit einem Spitzpunkt beschreiben.*

Denselben Rückschluss kann man auch aus einfacher geometrischer Interpretation der bewegten und unbewegten Polkurven, als schlupflos aufeinander abrollender Kurven, ziehen. Diese Eigenschaft der Polkurve ist übrigens schon bekannt; die eigene Interpretation wurde nur zur Vollkommenheit des weiteren Gedankenganges angeführt.

Es bedarf natürlich keiner näheren Begründung, dass:

Der Schnittpunkt S *beider Zweige der bewegten Polkurve* ($\mu_0 \equiv C_b'$ *und* $\mu_{2\pi} \equiv C_b''$) *beschreibt eine Kurve mit zwei Spitzpunkten.*

Untersuchen wir nun die übrigen Fragmente der bewegten Polkurve, die das Feld f_1 gegen f_2 abgrezen. Im Gegenteil zu den bereits besprochenen Abschnitten der bewegten Polkurve ist in diesen Fragmenten eine Punktsammlung dargestellt, in welcher jedem Punkt je zwei Winkelpaare φ und β zuzuordnen sind und nämlich, φ, β, wo $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ und φ, $\beta = 0$ für den Abschnitt $I\,(\frown S - \infty)$, sowie φ, β, wo $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ und φ, $\beta = 2\pi$ für den Abschnitt $II\,(\smile S - C)$. Demzufolge Punkte, die

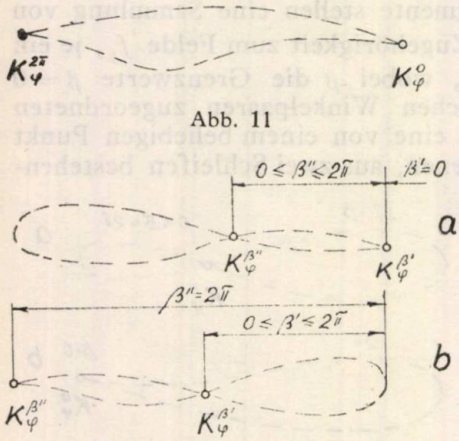


Abb. 11

Abb. 12

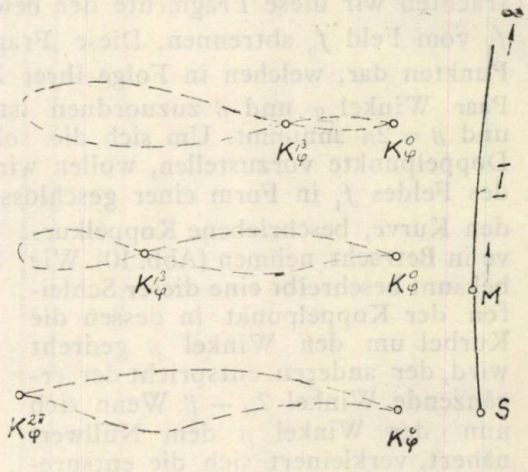


Abb. 13

an den Abschnitten *I* und *II* der bewegten Polkurve angenommen werden, müssen Koppelkurven mit Doppelpunkten beschreiben. Diese Koppelkurven sind anschaulich in Abb. 12a und 12b dargestellt.

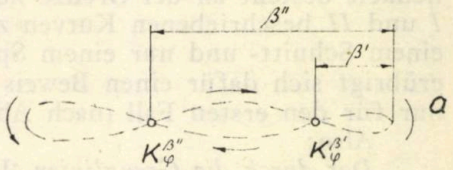
In der Koppelkurve nach Abb. 12a ist $K_\varphi^\beta = K_\varphi^0$ ein Spitzpunkt, und K_φ^β bei $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ — ein Schnittpunkt. Dies ist u. a. auch daraus ersichtlich, dass die Punkte des Abschnittes *I* das Feld f_1 berühren. Es muss also die Möglichkeit bestehen von der Kurve nach Abb. 12a zur Kurve nach Abb. 8a überzugehen.

Auf Grund einer Untersuchung der Kurvenfamilie μ_β nach Abb. 6 kann man die Weiterentwicklung der Koppelkurven voraussehen, die durch die auf dem Abschnitt *I* liegenden Punkte beim Übergang des

Punktes M von S zu ∞ beschrieben werden. Diese Entwicklung ist anschaulich in Abb. 13 gezeigt.

Ganz ähnlich kann man die Koppelkurven der auf dem Abschnitt *II* liegenden Punkte untersuchen und ihre Entwicklung beim Übergang des Punktes M vom S zu C voraussehen. Dies ist in Abb. 14 veranschaulicht.

Es kann also im Allgemeinen festgestellt werden:



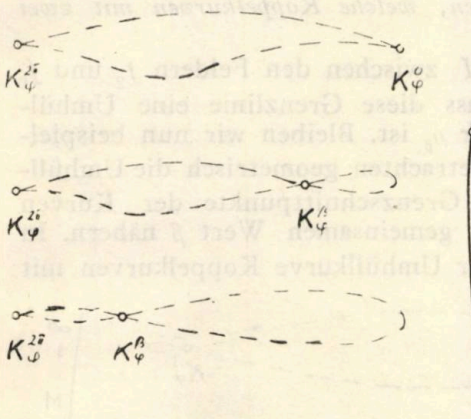


Abb. 14

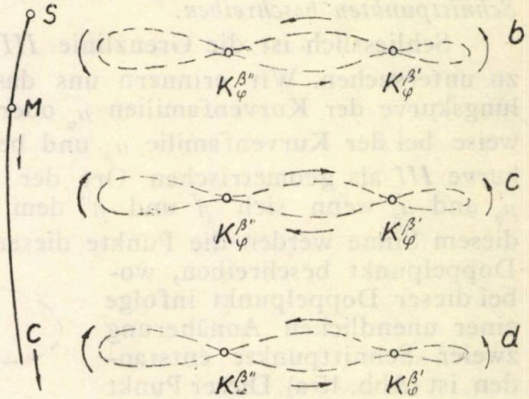


Abb. 15

Die Fragmente I *und* II *der bewegten Polkurve, als Grenzlinien zwischen den Feldern* f_1 *und* f_2 *sind als geometrischer Ort der Punkte anzusehen, welche Koppelkurven mit einem Schnittpunkt und einem Spitzpunkt beschreiben.*

Nunmehr wollen wir uns mit dem Feld f_2 befassen. Wie es sich aus einer Voranalyse ergibt ist es ein geometrischer Ort der Punkte, welche Koppelkurven mit zwei Doppelpunkten $K_\varphi^{\beta'}$ und $K_\varphi^{\beta'}{}'$ in Gestalt einer Doppelacht beschreiben (Abb. 15 a). Theoretisch bestehen aber vier Möglichkeiten: a) beide Doppelpunkte $K_\varphi^{\beta'}$ und $K_\varphi^{\beta''}$ sind Schnittpunkte (Abb. 15 a); b) beide Doppelpunkte $K_\varphi^{\beta'}$ und $K_\varphi^{\beta''}$ sind Selbstberührungspunkte (Abb. 15 b); c) Punkt $K_\varphi^{\beta'}$ ist ein Schnittpunkt und $K_\varphi^{\beta''}$ — Selbstberührungspunkt (Abb. 15 c); d) Punkt $K_\varphi^{\beta'}$ ist ein Selbstberührungspunkt und $K_\varphi^{\beta''}$ — Schnittpunkt (Abb. 15 d).

Durch Anstellen eines Gedankenganges analogisch zu vorher durchgeführten Untersuchungen für Koppelkurven mit einem Doppelpunkt wird sich herausstellen, dass der Punkt M beim Beschreiben der äusslichen Schleifen, dem gleichnamigen Richtungssinn der Bewegung

zufolge, geometrisch betrachtet nur die zwei ersten Möglichkeiten verwirklichen kann (Abb. 15 a und Abb. 15 b).

Andererseits ist nur diese Kurve anzunehmen, für welche die Möglichkeit besteht an der Grenze zu den durch die Punkte des Abschnittes *I* und *II* beschriebenen Kurven zu übergehen, d. h. zu Kurven mit nur einem Schnitt- und nur einem Spitzpunkt (Abb. 12 a und Abb. 12 b). Es erübrigt sich dafür einen Beweis zu erstatten, dass diese Möglichkeit nur für den ersten Fall (nach Abb. 15 a) besteht.

Also:

Das durch die Grenzlinien I, II *und* III *begrenzte Feld* f_2 *ist als geometrischer Ort der Punkte anzusehen, welche Koppelkurven mit zwei Schnittpunkten beschreiben.*

Schliesslich ist die Grenzlinie *III* zwischen den Feldern f_2 und f_0 zu untersuchen. Wir erinnern uns dass diese Grenzlinie eine Umhüllungskurve der Kurvenfamilien μ_φ oder μ_β ist. Bleiben wir nun beispielweise bei der Kurvenfamilie μ_β und betrachten geometrisch die Umhüllkurve *III* als geometrischen Ort der Grenzschnittpunkte der Kurven μ'_β und μ''_β wenn sich β' und β'' dem gemeinsamen Wert β nähern. In diesem Sinne werden die Punkte dieser Umhüllkurve Koppelkurven mit Doppelpunkt beschreiben, wobei dieser Doppelpunkt infolge einer unendlichen Annäherung zweier Schnittpunkte entstanden ist (Abb. 15 a). Dieser Punkt ist selbstverständlich ein Selbstberührungspunkt (Abb. 16).

Analogische Rückschlüsse kann man aus einer Untersuchung der durch die Punkte der Grenzlinie *III* beschriebenen Koppelkurven ziehen. Diese Koppelkurven können als Übergangskurven (zwischen den Kurven, die die Punkte des Feldes f_2 (mit zwei Schnittpunkten) und f_0 (ohne Doppelpunkte) beschreiben) angesehen werden.

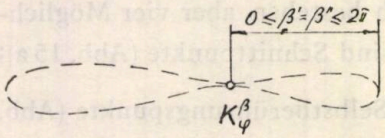


Abb. 16

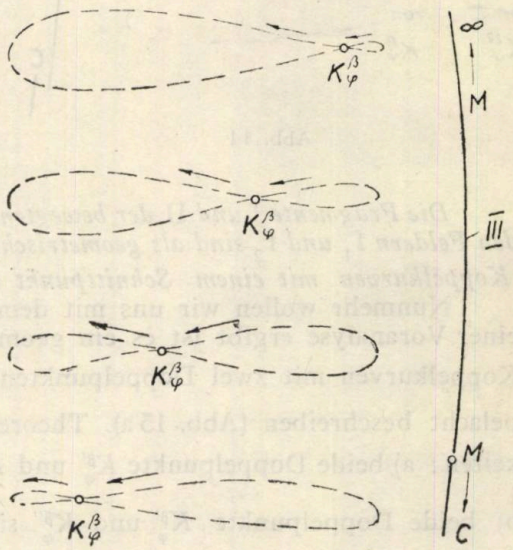


Abb. 17

Es wird also festgestellt:

Die Umhüllkurve III *als Grenzlinie zwischen den Feldern* f_2 *und* f *ist als geometrischer Ort der Punkte anzusehen, die Koppelkurven mit n einem Selbstberührungspunkt beschreiben.*

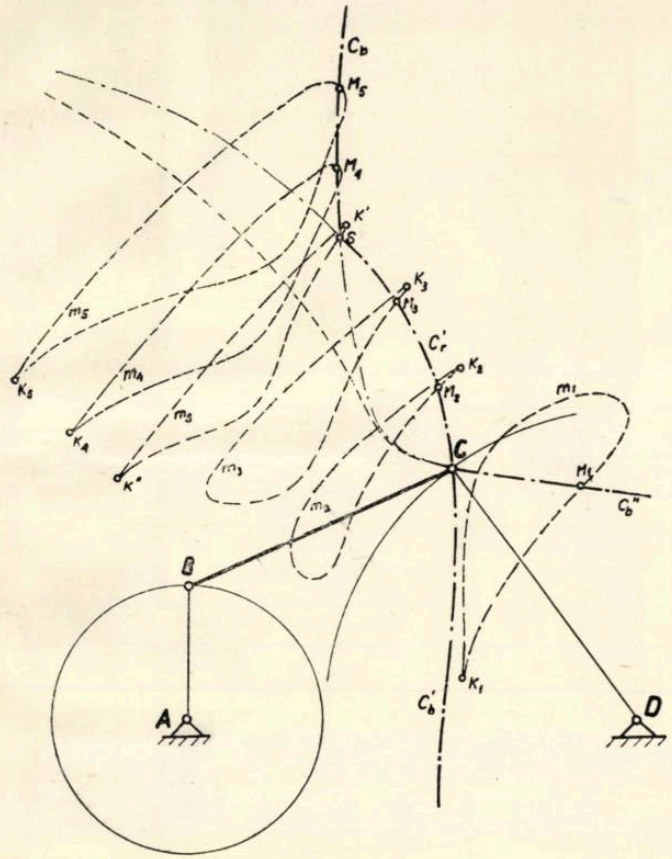


Fig. 18

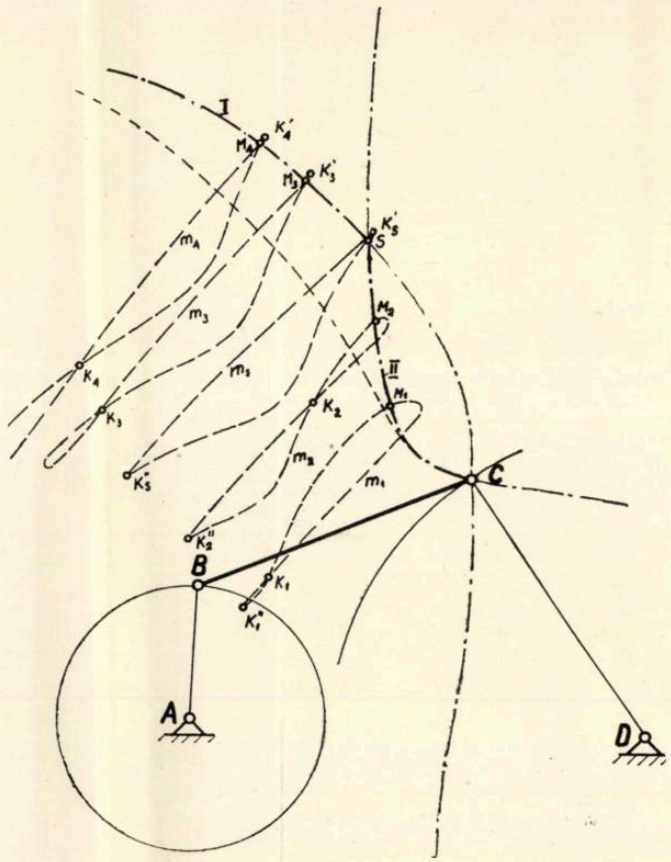


Fig. 19

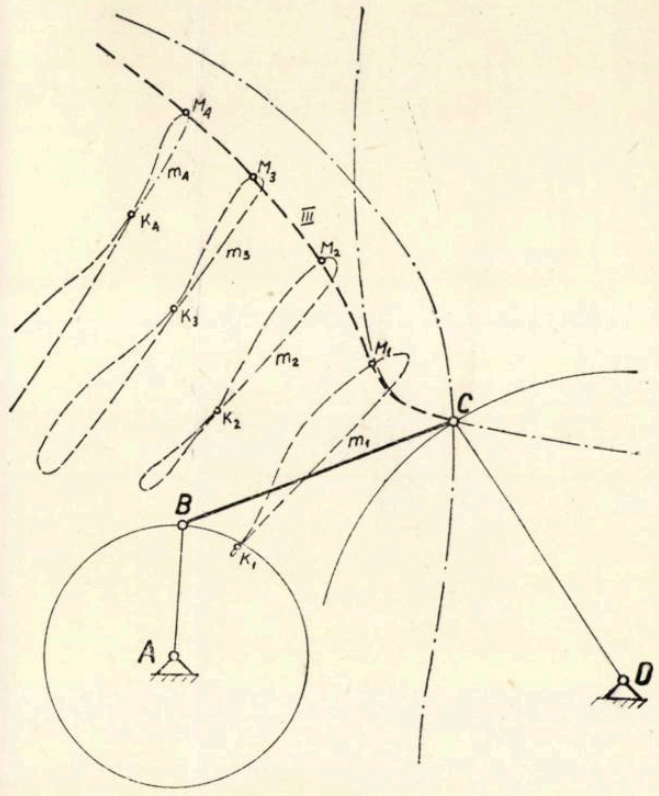


Fig. 20

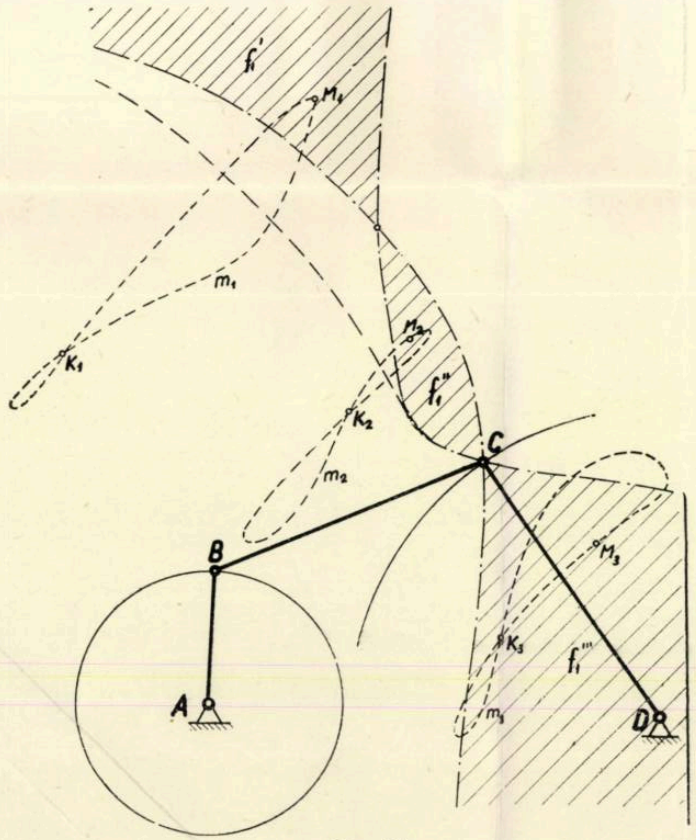


Fig. 21

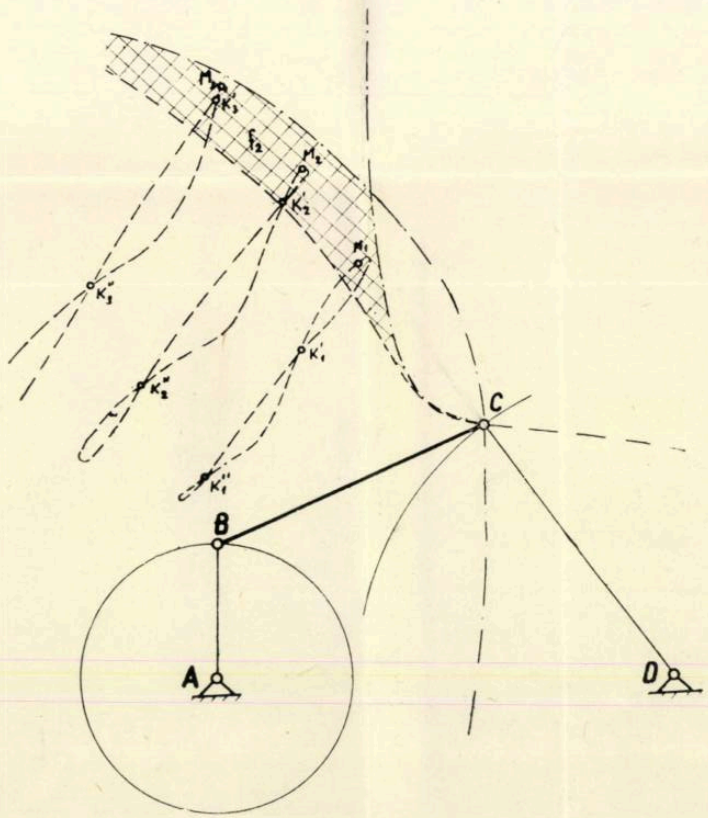
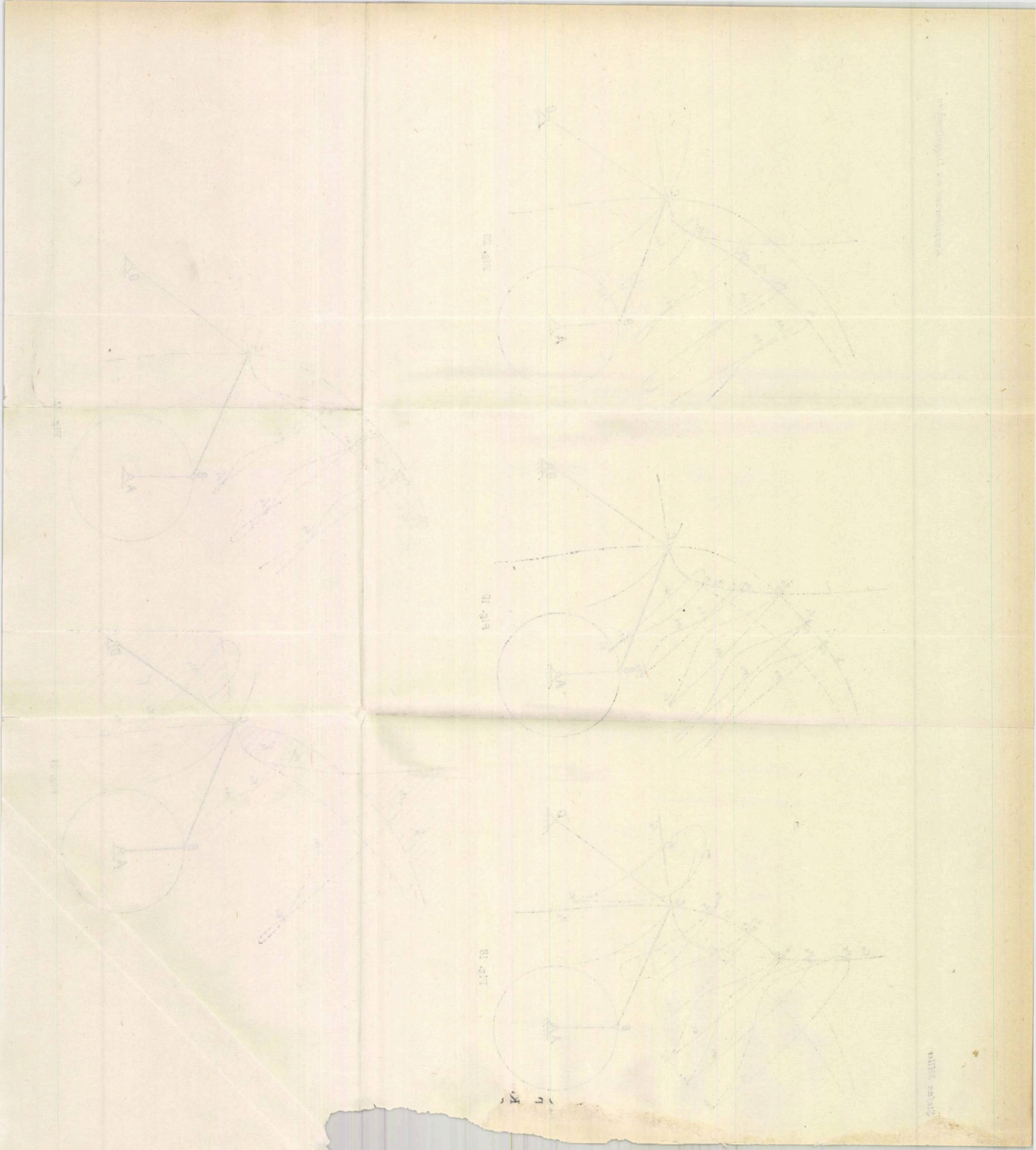


Fig. 22



In Abb. 17 wurde die Entwicklung der Kurve (Abb. 16) beim Übergang des Punktes M vom C zu anschaulich dargestellt.

Selbstverständlich:

Alle im Feld f_0, *d. h. ausserhalb der obengenannten Feldern und geometrischen Orten, angenommenen Koppelpunkte beschreiben Koppelkurven ohne Doppelpunkte.*

2. 3. Rückschlüsse

Nach einer derartigen Untersuchung der Koppelkurven mit Doppelpunkten können nachstehende allgemeine Rückschlüsse aufgestellt werden.

a) Die in der Kurbelschwinge an der bewegten Polkurve angenommenen Koppelpunkte beschreiben Koppelkurven mit an den entsprechenden Zweigen der ruhenden Polkurve liegenden Spitzen.

Dabei beschreiben die an bestimmten Abschnitten (*I* und *II*) der bewegten Polkurve angenommenen Koppelpunkte Koppelkurven mit einer Spitze und einem Schnittpunkt.

b) Der am Schnittpunkt — beider Zweige der bewegten Polkurve liegende Punkt S beschreibt eine Koppelkurve mit zwei Spitzen.

c) Im Feld f_1 zwischen den Zweigen der bewegten Polkurve angenommene Koppelpunkte beschreiben Koppelkurven mit einem Schnittpunkt.

d) Wenn Abschnitte der Kurvenfamilie μ_β bzw. μ_β einer Kurbelschwinge über das Feld f_1 hinausragen, dann ist die Umhüllende (*III*) dieser äusserlichen Abschnitte der Kurven μ_β bzw. μ_β als geometrischer Ort aller Koppelpunkte die Koppelkurven mit einem Selbstberührungspunkt beschreiben, anzusehen.

e) Das zwischen den Linien *I*, *II* und *III* liegende Feld f_2 umfasst alle Koppelpunkte, die Koppelkurven mit zwei Schnittpunkten beschreiben.

f) Koppelpunkte, die ausser den obenangeführten geometrischen Orten angenommen werden, beschreiben Koppelkurven, die keine Doppelpunkte besitzen.

Schliesslich ist nochmals in den Abb. 18...22 die Aufteilung der Koppelebene eines gegebenen Kurbelschwingenvierecks *ABCD* in obengenannter Felder und geometrischer Orte der Punkte gezeigt, wobei eine Übersicht der Kurvenfamilien der einzelnen Abarten von Koppelkurven mit Doppelpunkten gegeben ist.

Abb. 18 stellt ein Beispiel einer Kurvenfamilie mit einem Spitzpunkt dar. Diese Kurvenfamilie beschreiben Koppelpunkte der Kurbelschwinge *ABCD*, welche auf gewissen Abschnitten der bewegten Polbahn liegen. Abb. 19 stellt ein Beispiel einer Kurvenfamilie mit einem Schnittpunkt und einem Spitzpunkt dar. Diese Kurvenfamilie beschreiben Koppelpunkte der Kurbelschwinge *ABCD*, welche auf den Abschnitten *I* und *II* der bewegten Polbahn liegen. Abb. 20 stellt ein Beispiel einer Kurvenfamilie mit einem Selbstberührungspunkt dar. Diese Kurvenfamilie beschreiben Koppelpunkte der Kurbelschwinge *ABCD*, welche auf der Umhüllende *III* liegen. Abb. 21 stellt ein Beispiel einer Kurvenfa-

milie mit einem Selbstberührungspunkt dar. Diese Kurvenfamilie beschreiben Koppelpunkte der Kurbelschwinge *ABCD*, welche im Felde f_1 liegen. Abb. 22 stellt ein Beispiel einer Kurvenfamilie mit zwei Schnittpunkten dar. Diese Kurvenfamilie beschreiben Koppelpunkte der Kurbelschwinge *ABCD*, welche im Felde f_2 liegen.

3. Koppelkurven mit Doppelpunkten für Doppelschwinge

Nach dem bekannten Satz von Roberts kann jede Koppelkurve einer Doppelschwinge mit Hilfe einer Kurbelschwinge realisiert werden und umgekehrt jede Koppelkurve einer Kurbelschwinge kann durch einen Koppelpunkt der Doppelschwinge beschrieben werden. Das berechtigt zur Annahme, dass in der Koppelebene der befragten Doppelschwinge Sammlungen und geometrische Orte der Punkte zu erwarten sind, welche genau dieselben Arten von Koppelkurven beschreiben, deren wir bereits bei dem Kurbelschwinge begegnet haben.

Zu einer Bestimmung der gesuchten Felder und Linien kann man ähnlich wie bei der Kurbelschwinge kommen. Man muss vorerst in der unbewegten Ebene den geometrischen Ort der Doppelpunkte finden z.B. durch auftragen der Kurvenfamilie k_β in welcher jede Kurve als geometrischer Ort der Doppelpunkte K_φ^β von konstanten Wert φ auszusehen ist. Der Winkel β ändert sich hier in den Grenzen $0 < \beta < \beta_{max}$. Es sind (wie aus Abb. 23 ersichtlich) geschlossene Doppelschleifenkurven. Für den Wert $\beta = 0$ erhalten wir ein Oval der unbewegten Polkurve k_0 und für $\beta = \beta_{max}$ übergeht die Kurve k_β in einen einzigen Punkt $K_{\beta_{max}}$.

Nun zeichnen wir, die Kurvenfamilie k_β ausnutzend, in der Koppelebene die entsprechende Kurvenfamilie μ_β (Abb. 24). Hier übergeht wieder die Kurve μ_β für $\beta = 0$ in die bekannte bewegte Polkurve und für $\beta = \beta_{max}$ in einen einzigen Punkt $M_{\beta_{max}}$. Diese Familie bestimmt einen Bereich, der eine Sammlung der Koppelpunkte darstellt, welche Koppelkurven mit Doppelpunkten beschreiben.

Eine Untersuchung dieses Bereiches lässt wieder bestimmte Felder und Linien aussondern, deren Punkte die einzelnen Arten von Koppelkurven beschreiben. Von einer Wiederholung analogischer Betrachtungen Abstand nehmend wollen wir nur die Rückschlüsse anführen.

a) Die in der Doppelschwinge an der bewegten Polkurve angenommenen Koppelpunkte beschreiben Koppelkurven mit an den ruhenden Polkurve liegenden Spitzen.

Dabei beschreiben die an bestimmten Abschnitten (*I* und *II*) der bewegten Polkurve angenommenen Koppelpunkte Koppelkurven mit einer Spitze und einen Schnittpunkt.

b) Der am Schnittpunkt der bewegten Polkurve liegende Koppelpunkt *S* beschreibt eine Koppelkurve mit zwei Spitzen.

c) Im Felde f_1 zwischen den Schleifen der bewegten Polkurve angenommenen Koppelpunkte beschreiben Koppelkurven mit einem Schnittpunkt.

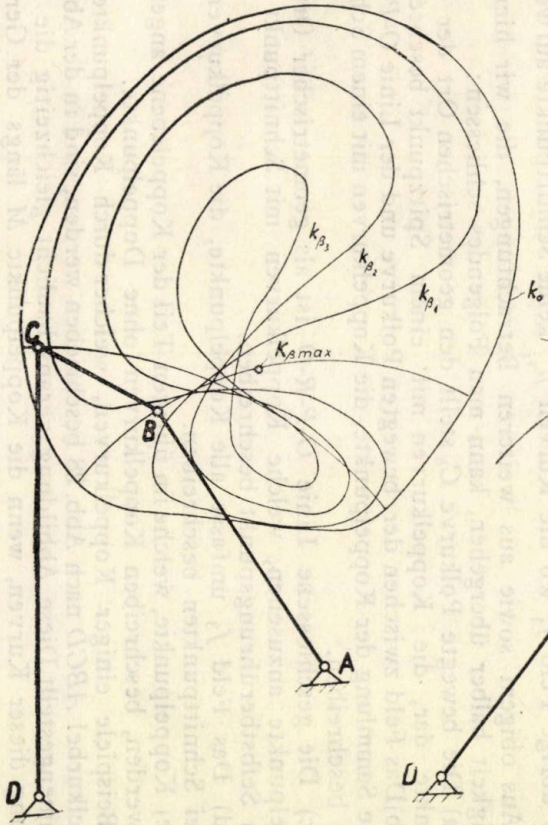


Abb. 23

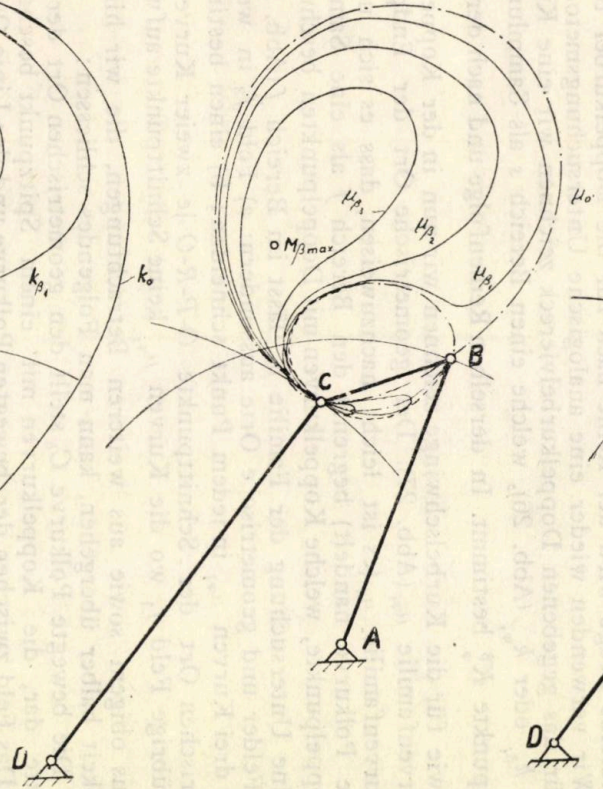


Abb. 24

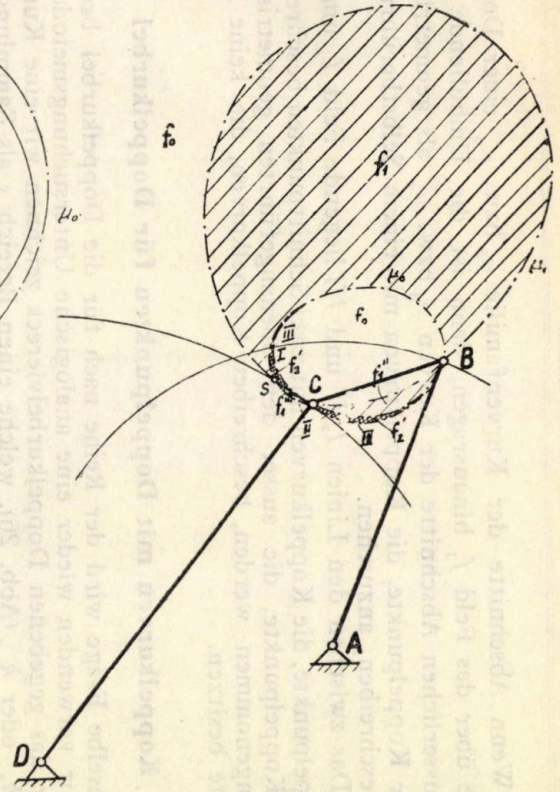


Abb. 25

d) Wenn Abschnitte der Kurvenfamilie μ_β bzw. μ_φ einer Doppelschwinge über das Feld f_1 hinausragen, dann ist die Umhüllende (*III*) dieser äusserlichen Abschnitte der Kurven μ_β bzw. μ_φ als geometrischer Ort aller Koppelpunkte, die Koppelkurven mit einem Selbstberührungspunkt beschreiben, anzusehen.

e) Das zwischen den Linien *I*, *II* und *III* liegende Feld f_2 umfasst alle Koppelpunkte, die Koppelkurven mit zwei Schnittpunkten beschreiben.

f) Koppelpunkte, die ausser den obenangeführten geometrischen Orten angenommen werden, beschreiben Koppelkurven, die keine Doppelpunkte besitzen.

4. Koppelkurven mit Doppelpunkten für Doppelkurbel

Dieselbe Frage wird der Reihe nach für die Doppelkurbel besprochen. Wir verwenden wieder eine analogische Untersuchungsmetode.

Für das gegebenen Doppelkurbelviereck zeichnen wir eine Kurvenfamilie k_{β_i} oder k_{φ_i} (Abb. 26), welche einen Bereich s als Sammlung der Doppelpunkte K_φ^β bestimmt. In derselben Reihenfolge und nach derselben Weise wie für die Kurbelschwinge zeichnen wir nun in der Koppelebene die Kurvenfamilie μ_{φ_i} (Abb. 27). Der geometrische Ort der Endpunkte der Kurvenfamilie μ_φ (es ist leicht nachzuweisen, dass es sich um die bewegte Polkurve handelt) begrenzt den Bereich f als eine Sammlung der Koppelpunkte, welche Koppelkurven mit Doppelpunkten beschreiben.

Eine Untersuchung der Familie μ_φ lässt im Bereich f (Abb. 3) folgende Felder und geometrische Orte aussondern: a) Feld f_3 in welchem sich je drei Kurven μ_{φ_i} in jedem Punkt schneiden; b) einen bestimmten geometrischen Ort der Schnittpunkte *O-P-R-O* je zweier Kurven und c) das übrige Feld f_1 wo die Kurven μ_{φ_i} keine Schnittpunkte aufweisen.

Aus obigem sowie aus weiteren Betrachtungen, die wir hier der Bündigkeit halber übergehen, kann man Folgendes schliessen:

a) Die bewegte Polkurve C_b stellt den geometrischen Ort der Koppelpunkte dar, die Koppelkurven mit einem Spitzpunkt beschreiben.

b) Das Feld zwischen der bewegten Polkurve und der Linie *O-P-R-O* ist eine Sammlung der Koppelpunkte, die Koppelkurven mit einem Schnittpunkt beschreiben.

c) Die geschlossene Linie *O-P-R-O* ist als geometrischer Ort der Koppelpunkte anzusehen, welche Koppelkurven mit Schnittpunkt und einem Selbstberührungspunkt beschreiben.

d) Das Feld f_3 umfasst alle Koppelpunkte, die Koppelkurven mit je drei Schnittpunkten beschreiben.

e) Koppelpunkte, welche im übrigen Teil der Koppelebene angenommen werden, beschreiben Koppelkurven ohne Doppelpunkte.

Beispiele einiger Koppelkurven, welcher durch Koppelpunkte der Doppelkurbel *ABCD* nach Abb. 28 beschrieben werden, sind in der Abb. 29 zusammengestellt. Diese Abbildung veranschaulicht gleichzeitig die Entwicklung dieser Kurven, wenn die Koppelpunkte *M* längs der Geraden

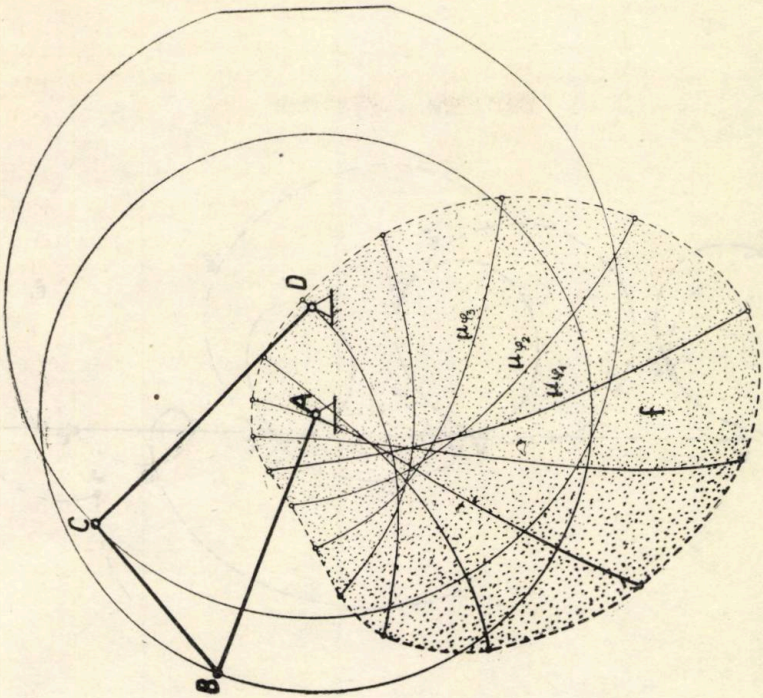


Abb. 27

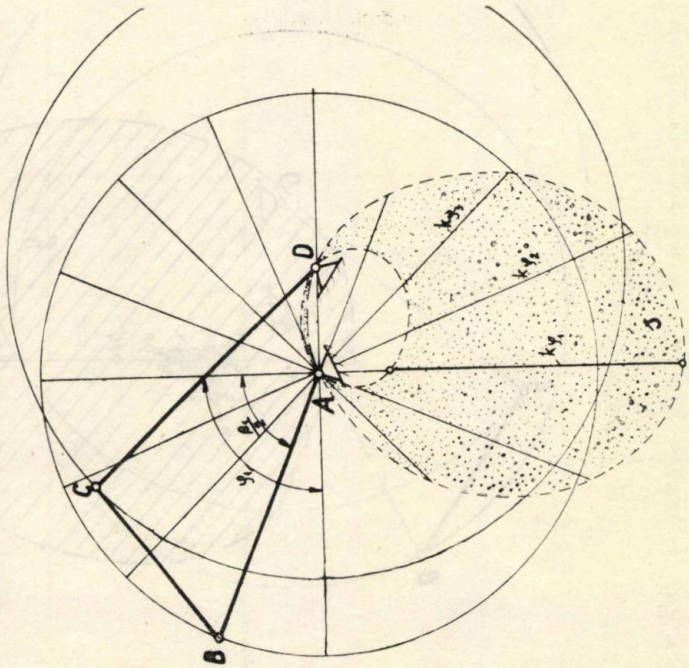


Abb. 26

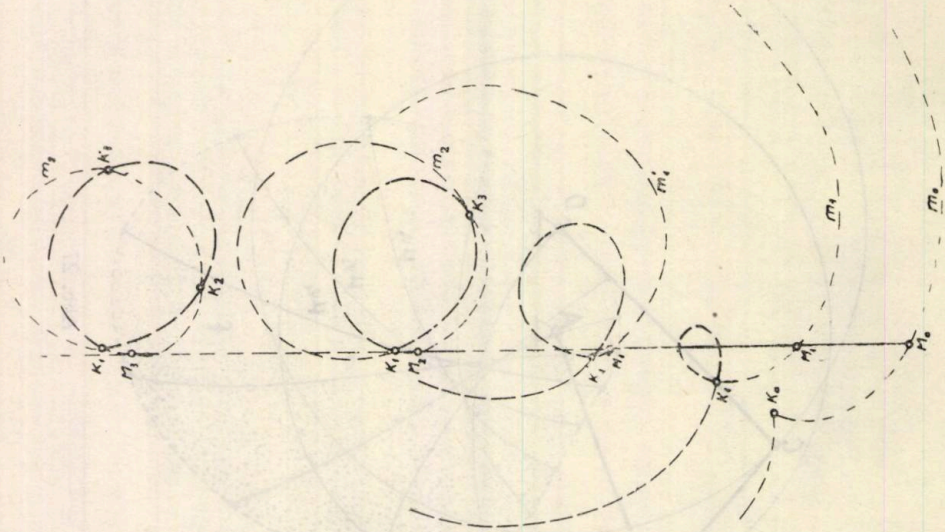


Abb. 29

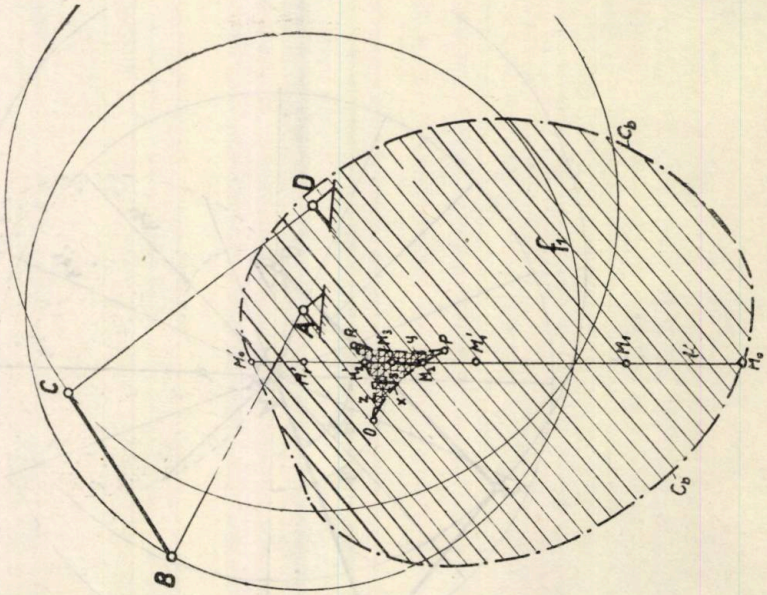


Abb. 28

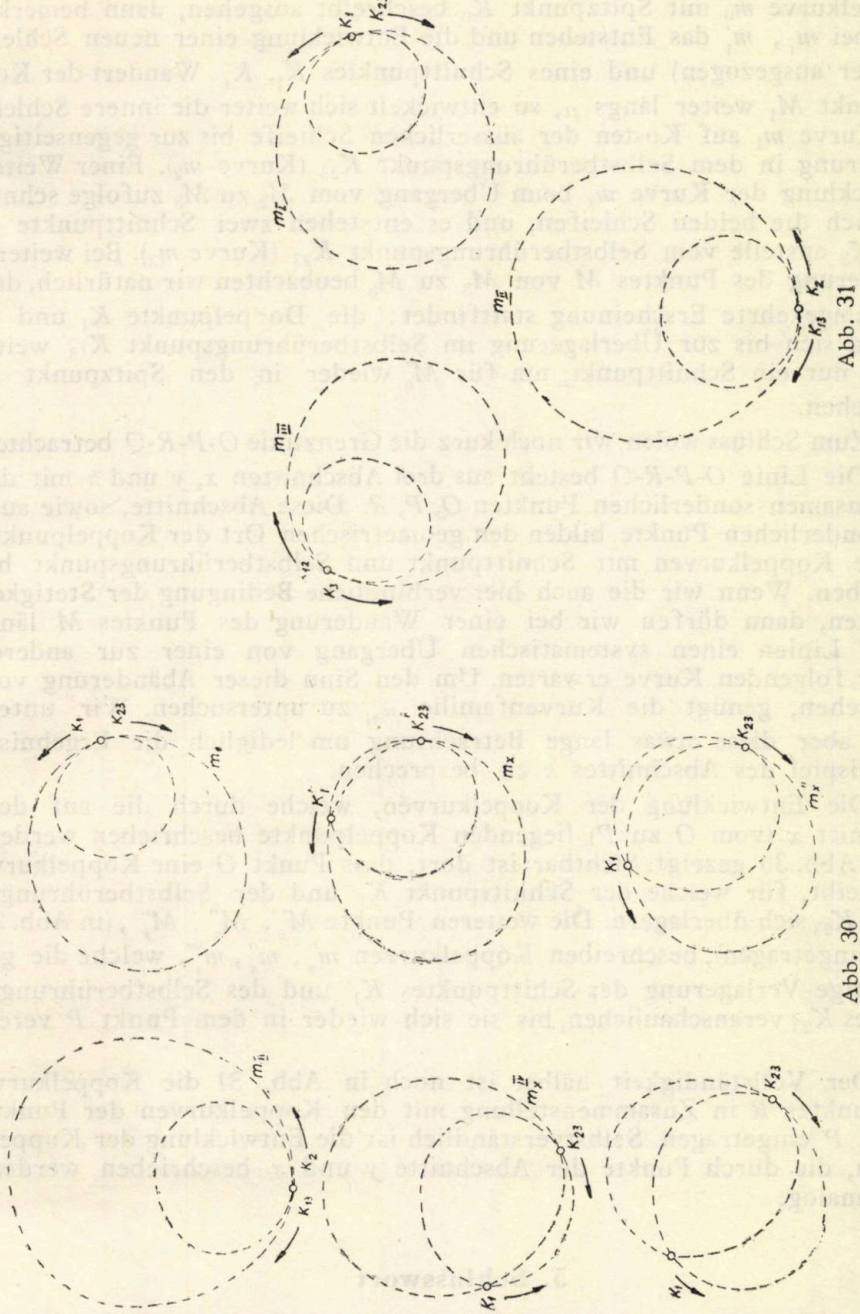

K_1
K_{23}
m_I
m_{II}
K_{13}
K_2
m_{III}
K_3
K_{12}
K_1
K_{23}
m_x
K_1'
K_{23}'
m_x'
K_1
K_{23}
m_x
m_{II}
K_{13}
K_2
m_{III}
m_x
K_{23}
K_1
K_{23}
K_1

Abb. 31

Abb. 30

μ angenommen werden. Und so, wenn wir vom Punkte M_0, welcher die Koppelkurve m_0 mit Spitzpunkt K_0 beschreibt ausgehen, dann bemerken wir bei m_1, m_1' das Entstehen und die Entwicklung einer neuen Schleife (stärker ausgezogen) und eines Schnittpunktes K_1, K_1'. Wandert der Koppelpunkt M_1 weiter längs μ, so entwickelt sich weiter die innere Schleife der Kurve m_1 auf Kosten der äusserlichen Schleife bis zur gegenseitigen Berührung in dem Selbstberührungspunkt K_{23} (Kurve m_2). Einer Weiterentwicklung der Kurve m_2 beim Übergang vom M_2 zu M_3 zufolge schneiden sich die beiden Schleifen, und es entstehen zwei Schnittpunkte K_2 und K_3 anstelle vom Selbstberührungspunkt K_{23} (Kurve m_3). Bei weiterer Wanderung des Punktes M von M_3 zu M_0' beobachten wir natürlich, dass eine umgekehrte Erscheinung stattfindet: die Doppelpunkte K_1 und K_2 nähern sich bis zur Überlagerung im Selbstberührungspunkt K_{13} weiter bleibt nur ein Schnittpunkt, um für M_0' wieder in den Spitzpunkt zu übergehen.

Zum Schluss wolen wir noch kurz die Grenzlinie *O-P-R-O* betrachten.

Die Linie *O-P-R-O* besteht aus drei Abschnitten x, y und z mit den gemeinsamen sonderlichen Punkten *O*, *P*, *R*. Diese Abschnitte, sowie auch die sonderlichen Punkte bilden den geometrischen Ort der Koppelpunkte, welche Koppelkurven mit Schnittpunkt und Selbstberührungspunkt beschreiben. Wenn wir die auch hier verbindliche Bedingung der Stetigkeit beachten, dann dürfen wir bei einer Wanderung des Punktes M längs dieser Linien einen systematischen Übergang von einer zur anderen nächst folgenden Kurve erwarten. Um den Sinn dieser Abänderung vorauszusehen, genügt die Kurvenfamilie μ_{φ_i} zu untersuchen. Wir unterlassen aber diese etwas lange Betrachtung um lediglich die Ergebnisse am Beispiel des Abschnittes x zu besprechen.

Die Entwicklung der Koppelkurven, welche durch die auf dem Abschnitt x (vom *O* zu *P*) liegenden Koppelpunkte beschrieben werden, ist in Abb. 30 gezeigt. Sichtbar ist dort, dass Punkt *O* eine Koppelkurve beschreibt, für welche der Schnittpunkt K_1 und der Selbstberührungspunkt K_{23} sich überlagern. Die weiteren Punkte M_x', M_x'', M_x''', (in Abb. 28 nicht eingetragen), beschreiben Koppelkurven m_x', m_x'', m_x''', welche die gegenseitige Verlagerung des Schittpunktes K_1 und des Selbstberührungspunktes K_{23} veranschaulichen, bis sie sich wieder in dem Punkt *P* vereinigen.

Der Vollständigkeit halber ist noch in Abb. 31 die Koppelkurve des Punktes *R* in Zusammenstellung mit den Koppelkurven der Punkte *O* und *P* eingetragen. Selbstverständlich ist die Entwicklung der Koppelkurven, die durch Punkte der Abschnitte y und z beschrieben werden, ganz analog.

5. Schlusswort

Auf diese Weise ist eine Analyse der Koppelkurven mit Doppelpunkten für die drei Abarten des Gelenkvierecks durchgeführt. Es ist

möglich auf dieselbe Weise durch Ausnutzung der Kurvenfamilien μ_φ oder μ_β die Koppelebene anderer Getriebe wie z. B. Schubkurbel, Kurbelschwinge u. s. w. in einzelne Punktsammlungen und geometrische Orte zu unterteilen. Eine derartige Analyse kann beim Entwurf von Getrieben für gegebene Koppelkurven behilflich sein.

Eingegangen am 1 VIII 1961

Technische Hochschule, Wroclaw,
Polnische Volksrepublik

LITERATURVERZEICHNIS

1. *** *Научное наследие П. Л. Чебышева*, Изд. АН СССР, М.-Л., 1945.
2. Beyer R., *Kinematische Getriebesynthese*, Springer Verlag, Berlin, 1953.
3. Hrones I. A., Nelson G. L., *Analysis of the Four-bar linkage.* The Technology Press of the Massachusetts Inst. of Techn., J. Wiley, N. Y., London, 1951.
4. Кореняко А. С., Кременштейн Л. И., *Теория механизмов и машин*, Гостехиздат, УССР, Киев, 1955.
5. Meyer zur Capellen W., Konstruktion, 1956, *7*, S. 258—270.
6. Volmer J., Wiss. Ztschr. Techn. Hochsch. Dresden, 1956/57, **6**, *3*.

ШАТУННЫЕ КРИВЫЕ С ДВОЙНЫМИ ТОЧКАМИ

(Резюме)

Шатунные кривые более ста лет являются предметом многочисленных исследований, имеющих своей целью описание их свойств, либо указание возможности использования их для проектирования различных устройств и механизмов.

Настоящая работа является очередной попыткой продолжения этих исследований и ставит своей целью, в первую очередь, проведение анализа шатунных кривых четырехзвенных плоских механизмов с точки зрения „особенных точек".

Общеизвестно, что среди различных шатунных кривых, полученных одним и тем же механизмом — например — шарнирным четырехзвенником — встречаются кривые с точками пересечения, заострения, касания, а также кривые, в которых точки заострения и пересечения выступают одновременно и др.

Возникает вопрос сколько видов таких шатунных кривых, с особенными точками, может создать данный механизм, а также и которые точки, принадлежащие к шатуну данного механизма, эти кривые вычеркивают?

Для решения этой задачи в настоящей работе рассматривается, как например, шарнирный четырехзвенник, выделяя в плоскости его шатуна совокупности и геометрические места точек, которые вычерчивают кривые с общими свойствами. Это достигнуто графическим методом, использованием, введенным автором, семейства „кривых двойных точек" (k_φ и μ_φ, или k_β и μ_β).

CURBE DE BIELĂ CU PUNCTE DUBLE

(Rezumat)

De peste o sută de ani mecanicienii şi matematicienii se ocupă de studiul curbelor de bielă în vederea utilizării lor în diverse probleme de proiectare şi de rezolvare a problemei — astăzi fundamentale — de automatizare a proceselor de producţie.

Această lucrare este consacrată adîncirii studiilor, deja întreprinse, avînd ca scop analizarea curbelor de bielă a mecanismelor patrulatere plane din punct de vedere al punctelor singulare.

Ţinînd seama de faptul că în mulţimea de curbe de bielă se găsesc curbe dotate cu puncte nodale, cuspidale, de inflexiune etc., se pune întrebarea cîte specii de curbe de bielă cu anumite puncte singulare poate avea un mecanism dat şi care sînt punctele de pe bielă care descriu curbe cu caracteristici singulare date.

În această lucrare, folosindu-se metoda grafică legată de utilizarea familiilor de curbe, introduse de autor, numite „curbe de puncte duble" (k_φ şi μ_φ sau k_β şi μ_β), se rezolvă unele din probleme indicate mai sus pentru ansamblul de curbe de bielă, pentru mecanisme patrulatere articulate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 621-231

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНО ОГИБАЮЩИХ ШАТУННЫХ КРИВЫХ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Д. И. МАНЖЕРОН и П. А. ЛЕБЕДЕВ

1. Академик И. И. Артоболевский ввел в рассмотрение [1] класс шатунных кривых, которые были названы линейно огибающими шатунными кривыми. Метод, изложенный в опубликованной ранее статье [2], дает возможность получить параметрические уравнения таких шатунных кривых другим способом и в иной форме. При изложении решения этой задачи сохраним обозначения параметров, принятые в статье [2].

Пусть какая-либо прямая u-u рис. 1 выбрана в плоскости шатуна AB (см. схемы механизмов, представленные в таблице 1). Уравнение этой прямой в системе координат $\xi\eta$ приобретает вид:

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \gamma + e, \tag{1}$$

где: γ — угол, составленный направлением прямой u-u с положительным направлением оси ξ; e — отрезок, отсекаемый на оси η прямой u-u.

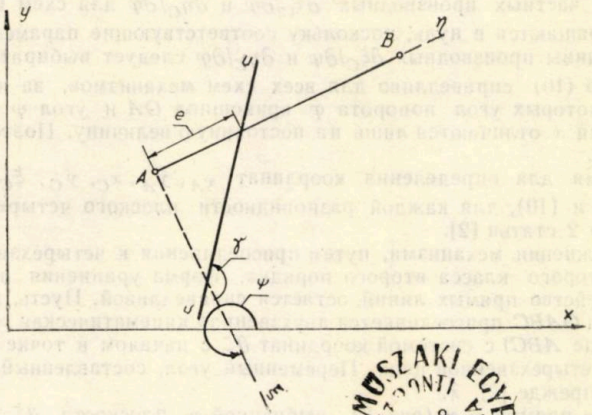


Рис. 1

MŰSZAKI EGYETEM

Из уравнений преобразования координат:

$$x = x_A + \xi \cos\psi - \eta \sin\psi, \qquad y = y_A + \xi \sin\psi + \eta \cos\psi, \tag{2}$$

найдем

$$\xi = (x - x_A)\cos\psi + (y - y_A)\sin\psi, \qquad \eta = (y - y_A)\cos\psi - (x - x_A)\sin\psi. \tag{3}$$

Подставляя значения (3) в равенство (1), преобразуем уравнение прямой u–u к системе неподвижных координат xy:

$$Q(x - x_A) - S(y - y_A) + e = 0, \tag{4}$$

где: $Q = \sin\psi + \cos\psi \operatorname{tg}\gamma$, $S = \cos\psi - \sin\psi \operatorname{tg}\gamma$.

Найдем частную производную равенства (4) по параметру φ:

$$S[(x - x_A)(\partial\psi/\partial\varphi) + \partial y_A/\partial\varphi] + Q[(y - y_A)(\partial\psi/\partial\varphi) - \partial x_A/\partial\varphi] = 0. \tag{5}$$

Решая совместно систему уравнений (4) и (5), получим, как известно, уравнение в параметрической форме кривой, огибающей семейство прямых, отображаемых уравнением (4):

$$\begin{cases} x = x_A + \{S[Q(\partial x_A/\partial\varphi) - S(\partial y_A/\partial\varphi)](\partial\varphi/\partial\psi) - Qe\}/(sc^2\gamma), \\ y = y_A + \{Q[Q(\partial x_A/\partial\varphi) - S(\partial y_A/\partial\varphi)](\partial\varphi/\partial\psi) + Se\}/(sc^2\gamma), \end{cases} \tag{6}$$

где:

$$x_A = x_0 + a\cos\varphi, \qquad y_A = y_0 + a\sin\varphi, \tag{7}$$

$$\partial x_A/\partial\varphi = -a\sin\varphi, \qquad \partial y_A/\partial\varphi = a\cos\varphi, \tag{8}$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\{[(y_C - y_A)\xi_C - (x_C - x_A)\eta_C]/[(x_C - x_A)\xi_C + (y_C - y_A)\eta_C]\}, \tag{9}$$

$$\partial\psi/\partial\varphi = [(x_C - x_A)(\partial y_C/\partial\varphi - \partial y_A/\partial\varphi) - (y_C - y_A)(\partial x_C/\partial\varphi - \partial x_A/\partial\varphi) + \eta(\partial\xi_C/\partial\varphi) - \xi_C(\partial\eta_C/\partial\varphi)]/U^2. \tag{10}$$

Необходимо иметь ввиду, что равенства (7) и (8) справедливы для механизмов, выполненных по схемам 1, 2 а, 3 а, 3 б и 5 а. Значения частных производных $\partial x_A/\partial\varphi$ и $\partial y_A/\partial\varphi$ для механизмов, изготовленных по схемам 2 б, 4 и 5 б, представлены в соответствующих графах таблицы 1.

Значения частных производных $\partial x_C/\partial\varphi$ и $\partial\eta_C/\partial\varphi$ для схем механизмов 1, 2 б, 3 а, 3 б и 5 б обращаются в нуль, поскольку соответствующие параметры постоянны по величине. Величины производных $\partial\xi_C/\partial\varphi$ и $\partial\eta_C/\partial\varphi$ следует выбирать по таблице 1.

Равенство (10) справедливо для всех схем механизмов, за исключением схем 2 б, 4 и 5 б, в которых угол поворота φ кривошипа OA и угол ψ поворота шатуна относительно оси x отличаются лишь на постоянную величину. Поэтому для этих трех схем $\partial\psi/\partial\varphi = 1$.

Выражения для определения координат x_A, y_A, x_C, y_C, ξ_C и η_C, входящих в равенства (9) и (10), для каждой разновидности плоского четырехзвенника, приведены в таблице 2 статьи [2].

При усложнении механизма, путем присоединения к четырехзвеннику кинематических групп второго класса второго порядка, форма уравнения шатунных кривых, огибающих семейство прямых линий, остается справедливой. Пусть, например, к четырехзвенной цепи $OABC$ присоединяется двухзвенная кинематическая группа MKN (эквивалентная группе ABC) с системой координат $\vartheta\zeta$ с началом в точке M присоединения этой группы к четырехзвенной цепи. Переменный угол, составленный осью ϑ с осью x, назовем, как и прежде [2], λ.

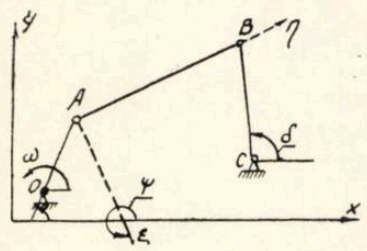
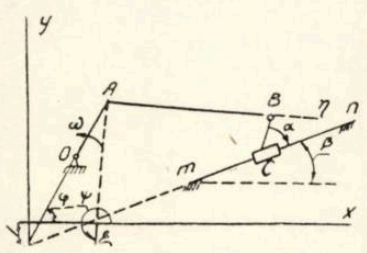
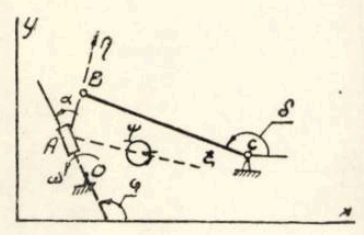
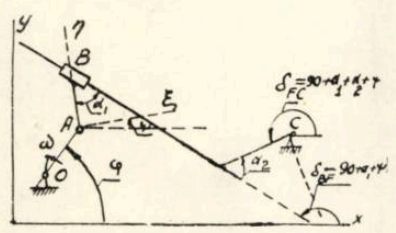
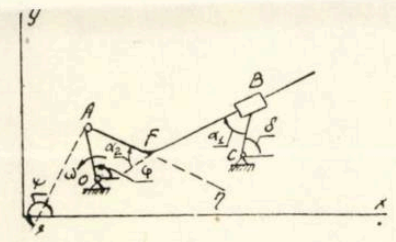
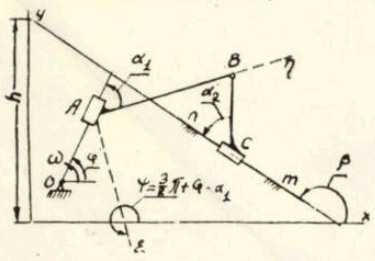
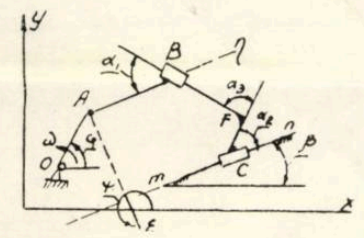
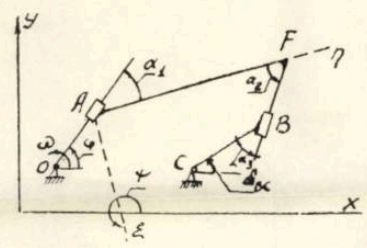
Уравнение прямой v–v (рис. 2), выбранной в плоскости $\vartheta\zeta$, преобразуется к уравнению (11), отображающему семейство прямых линий, зависящих от параметра φ в плоскости xy:

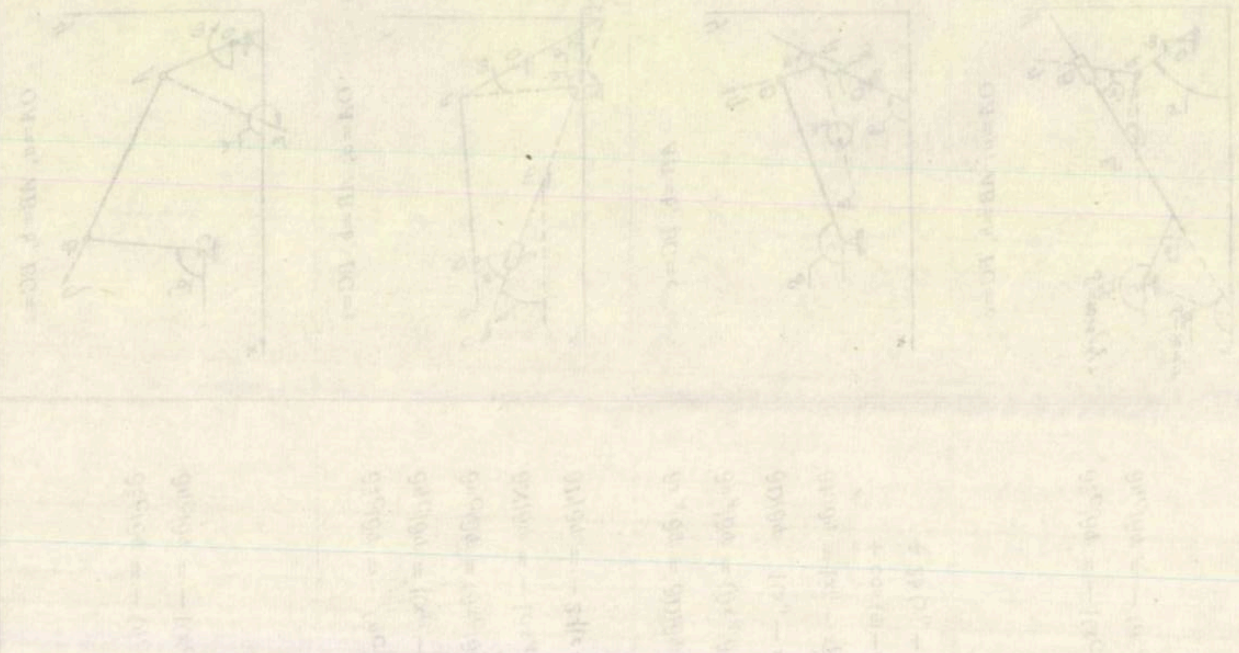
$$P(x - x_M) - R(y - y_M) - f = 0, \tag{11}$$

где: $P = \sin\lambda + \cos\lambda \operatorname{tg}\varepsilon$, $R = \cos\lambda - \sin\lambda \operatorname{tg}\varepsilon$, ε — угол, составленный прямой v–v с осью ϑ, f — отрезок, отсекаемый прямой v–v на оси ζ.

Уравнение шатунной кривой, огибающей семейство прямых линий, отображаемых уравнением (11), получает вид:

Таблица 1

Вид группы	Схемы механизмов	Значения частных производных
1	$OA=a,\ AB=b,\ BC=c$ 	$\partial\xi_C/\partial\varphi = -(\eta_C - b)(\partial\eta_C/\partial\varphi)/\xi_C,$ $\partial\eta_C/\partial\varphi = -[(x_C - x_A)(\partial x_A/\partial\varphi) + (y_C - y_A)(\partial y_A/\partial\varphi)]/b.$
2	а) $OA=a,\ AB=b,\ BC=c$ 	$\partial\xi_C/\partial\varphi = -(\eta_C - b)(\partial\eta_C/\partial\varphi)/\xi_C,$ $\partial\eta_C/\partial\varphi = \{(x_C - x_A)(\partial x_C/\partial\varphi - \partial x_A/\partial\varphi) + (x_C \operatorname{tg}\beta + h - y_A)[(\partial x_C/\partial\varphi)\operatorname{tg}\beta - \partial y_A/\partial\varphi]\}/b,$ $\partial y_C/\partial\varphi = (\partial x_C/\partial\varphi)\operatorname{tg}\beta,\quad \partial x_C/\partial\varphi = -\partial N/\partial\varphi \pm [2N(\partial N/\partial\varphi) - \partial P/\partial\varphi]/(2\sqrt{N^2 - P}),$ $\partial N/\partial\varphi = -[\partial x_A/\partial\varphi + (\partial y_A/\partial\varphi)\operatorname{tg}\beta]\cos^2\beta,$ $\partial P/\partial\varphi = -2\{[c\cos(\beta - \alpha) - x_A](\partial x_A/\partial\varphi) + [h + c\sin(\beta - \alpha) - y_A](\partial y_A/\partial\varphi)\}\cos^2\beta.$
	б) $AB=b,\ BC=c$ 	$\partial x_A/\partial\varphi = \partial D/\partial\varphi \pm [2D(\partial D/\partial\varphi) - \partial E/\partial\varphi]/(2\sqrt{D^2 - E}),$ $\partial y_A/\partial\varphi = (\partial x_A/\partial\varphi)\operatorname{tg}\varphi + (x_A - x_0)/\cos^2\varphi,$ $\partial D/\partial\varphi \quad [(x_0 - x_C)\sin 2\varphi + 2(y_0 - y_C)\sin^2\varphi + b\sin\varphi\cos\alpha],$ $\partial E/\partial\varphi = [x_0^2 - x_C^2 + c^2 - (y_0 - y_C)^2 - b^2]\sin 2\varphi + 2bx_C[\sin(\varphi - \alpha)\cos^2\varphi + \cos(\varphi - \alpha)\sin 2\varphi] - 2x_0(y_0 - y_C)\cos 2\varphi - bx_0[\sin(3\varphi - \alpha) + \sin(\varphi - \alpha)\cos 2\varphi] + 2b(y_0 - y_C)[\cos(2\varphi - \alpha) - \sin(\varphi - \alpha)\sin\varphi]\cos\varphi,\quad \partial\psi/\partial\varphi = 1.$
3	а) $OA=a,\ AB=b,\ FC=c$ 	$\partial\xi_C/\partial\varphi = -[(x_C - x_A)\dot{x}_A + (y_C - y_A)\dot{y}_A]\sin^2\alpha_1/(\xi_C - D_1),$ $\partial\eta_C/\partial\varphi = -(\partial\xi_C/\partial\varphi)\operatorname{ctg}\alpha_1.$
	б) $OA=a,\ BC=b,\ AF=c$ 	$\partial\xi_C/\partial\varphi = -[(x_C - x_A)(\partial x_A/\partial\varphi) + (y_C - y_A)(\partial y_A/\partial\varphi]\sin^2\alpha_2/(\xi_C - D_2),$ $\partial\eta_C/\partial\varphi = -(\partial\xi_C/\partial\varphi)\operatorname{ctg}\alpha_2.$
4	$AB=b\ BC=c,$ 	$\partial x_A/\partial\varphi = [x_0\cos\beta - b\cos(\beta - \varphi + \alpha_1)\cos^2\varphi]/[\sin(\varphi - \beta)\cos\varphi] - -[(x_0\operatorname{tg}\varphi - y_0 + h)\cos\beta + b\sin(\beta - \varphi + \alpha_1) - c\sin\alpha_1]\cos\beta/\sin^2(\varphi - \beta),$ $\partial y_A/\partial\varphi = (x_A - x_0)/\cos^2\varphi + (\partial x_A/\partial\varphi)\operatorname{tg}\varphi,\quad \partial\psi/\partial\varphi = 1,$ $\partial x_C/\partial\varphi = \partial x_A/\partial\varphi - b\sin(\varphi - \alpha_1),\quad \partial y_C/\partial\varphi = (\partial x_C/\partial\varphi)\operatorname{tg}\beta.$
5	а) $OA=a,\ AB=b,\ FC=f$ 	$\partial\xi_C/\partial\varphi = [(\partial x_A/\partial\varphi)\operatorname{tg}\beta - \partial y_A/\partial\varphi]/[\sin\psi - \cos\varphi\operatorname{tg}\beta + (\cos\psi + \sin\psi\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\alpha_1],$ $\partial\eta_C/\partial\varphi = (\partial\xi_C/\partial\varphi)\operatorname{tg}\alpha_1,\quad \partial x_C/\partial\varphi = \partial x_A/\partial\varphi + (\partial\xi_C/\partial\varphi)\cos\psi - (\partial\eta_C/\partial\varphi)\sin\psi,$ $\partial y_C/\partial\varphi = \partial y_A/\partial\varphi + (\partial\xi_C/\partial\varphi)\sin\psi + (\partial\eta_C/\partial\varphi)\cos\psi.$
	б) $AF=b,\ BC=c$ 	$\partial x_A/\partial\varphi = (b - c\sin\alpha_3/\sin\alpha_2)\cos\psi - [(\partial\xi_C/\partial\varphi)\sin(\psi + \alpha_2) + \xi_C\cos(\psi + \alpha_2)]/\sin\alpha_2,$ $\partial y_A/\partial\varphi = (x_A - x_0)/\cos^2\varphi + (\partial x_A/\partial\varphi)\operatorname{tg}\varphi,$ $\partial\xi_C/\partial\varphi = \{[(x_C - x_0)\cos\varphi + (y_C - y_0)\sin\varphi]\sin\alpha_2 - 2\xi_C\operatorname{tg}(2\varphi - \alpha_1 - \alpha_2)\}/\sin(2\varphi - \alpha_1 - \alpha_2),$ $\partial\eta_C/\partial\varphi = -(\partial\xi_C/\partial\varphi)\operatorname{ctg}\alpha_2,\quad \partial\psi/\partial\varphi = 1,\quad \partial\delta_{BC}/\partial\varphi = 1.$



$$(12)\qquad \begin{cases} x = x_M + \{R[P\,(\partial x_M/\partial\varphi) - R\,(\partial y_M/\partial\varphi)]\,(\partial\varphi/\partial\lambda) - Pf\}/(sc^2\,\varepsilon), \\ y = y_M + \{P[P\,(\partial x_M/\partial\varphi) - R\,(\partial y_M/\partial\varphi)]\,(\partial\varphi/\partial\lambda) + Rf\}/(sc^2\,\varepsilon). \end{cases}$$

Аналогичная форма может быть придана соответствующему уравнению линейно огибающих шатунных кривых звена KN в случае, если присоединение элемента его кинематической пары N осуществлено к подвижному звену (например BC, как показано на рис. 2). Для получения такого уравнения необходимо выбрать дополнительную систему координат $\mu\sigma$, связав ее со звеном KN, определить угол ν, составленный осями абсцисс μ и x и т. д., как изложено выше.

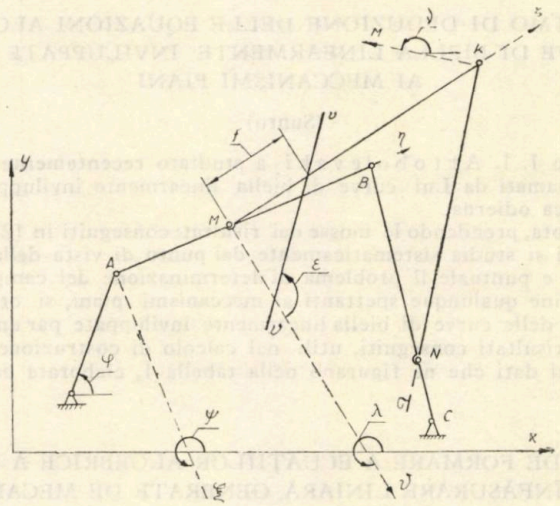


Рис. 2

2. В [3] один из авторов настоящей заметки указал на преимущества систематического использования методов тангенциальной кинематической геометрии в исследованиях касающихся: а) огибающих некоторых прямых жестко связанных с звеньями механизмов в плоско-параллельном движении; б) огибающих некоторых плоскостей жестко связанных с звеньями механизмов в сложном пространственном движении; в) дуальных п. б) задач, т. е. линейчатых поверхностей образующихся некоторыми прямыми связанными со звеньями механизмов в сложном пространственном движении. В работе [4] авторы изложили, на основании ряда теорем касающихся теории приведенных ускорений различных порядков и родов [5]...[7], на языках точечной кинематической геометрии и дуальной к ней линейной кинематической геометрии, ряд задач касающихся определения скоростей и ускорений движения звеньев плоских механизмов.

Поступила 1 III 1962 г.

Ясский политехнический институт,
Кафедра механики
и
Ленинградский текстильный институт,
СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И., ДАН СССР, 1960, **132**, *1*, стр. 82—84.
2. Лебедев П. А., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **6 (10)**, *1—2*, стр. 299—302.
3. Mangeron D., *Tangential functional relations in the theory of mechanisms and machines.* В сб. *Papers presented to the Seventh Congress on Theoretical and Applied Mechanics,* Indian Institute of Technology, Bombay, 23 rd Dec. to 26 th Dec. 1961.

34. Лебедев П. А., Манжерон Д., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **8 (12)**, *3—4*, (в печати).
5. Манжерон Д., ДАН СССР, 1955, **102**, *5*, стр. 897—898.
6. Манжерон Д., Дрэган К., *Исследование механизмов методом приведенных ускорений*. В сб. *Труды второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и синтез механизмов*, Машгиз, М., 1960, стр. 111 122 и 209—210.
7. Mangeron D., Croitoru E., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. sci. fis., mat. e nat., s. VIII, 1962, **32**, *4*, pp. 505—508.

L'ALGORITMO DI DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DELLE CURVE DI BIELLA LINEARMENTE INVILUPPATE SPETTANTI AI MECCANISMI PIANI

(Sunto)

L'accademico I. I. Artobolevski a studiato recentemente [1] una classe di curve di biella, chiamati da Lui curve di biella linearmente inviluppate, d'importanza notoria nella tecnica odierna.

In questa Nota, prendendo le mosse dai risultati conseguiti in [2] e tenendo conto delle [3], [4], in cui si studia sistematicamente dal punto di vista della geometria cinematica tangenziale e puntuale il problema di determinazione dei campi di velocità e di accelerazioni d'ordine qualunque spettanti ai meccanismi piani, si ottengono le equazioni parametriche delle curve di biella linearmente inviluppate par un'altra via e sotto un'altra forma. I risultati conseguiti, utili nel calcolo di costruzione dei meccanismi, sono completati dai dati che ne figurano nella tabella 1, elaborata dagli autori.

ALGORITM DE FORMARE A ECUAŢIILOR ALGEBRICE A CURBELOR DE BIELĂ, DE ÎNFĂŞURARE LINIARĂ, GENERATE DE MECANISME PLANE

(Rezumat)

Acad. I. I. Artobolevski a studiat în [1] o clasă de curbe de bielă, numite curbe de bielă de înfăşurare liniară, de importanţă vădită în unele aplicaţii tehnice.

În această Notă, conservînd notaţiile din [2] şi ţinînd seama de [3], [4], în care se studiază sistematic din punctul de vedere al geometriei cinematice tangenţiale şi punctuale problema determinării cîmpurilor de viteze şi de acceleraţii de diferite ordine relative la mecanisme plane, se obţin ecuaţiile parametrice ale curbelor de bielă de înfăşurare liniară, pe altă cale şi sub altă formă. Rezultatele obţinute, utile în proiectarea mecanismelor, sînt întregite prin datele din tabelul 1, elaborat de autori.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 536.714

SEMNIFICAŢIA ŞI PROPRIETĂŢILE CENTRULUI TERMODINAMIC AL CICLULUI IZOCOR

DE

EMIL GAIGINSCHI, MIRCEA ZUGRĂVEL, MARCEL GUTMAN şi AL. BÎRJOIANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 4—6 februarie 1960

1. Introducere

Pentru fiecare ciclu teoretic fundamental al motoarelor cu ardere internă există un punct de stare, în interiorul ciclului, care posedă proprietăţi deosebite. Convenţional, denumim un astfel punct de stare *centrul termodinamic al ciclului respectiv.*

În cele ce urmează se determină, într-o primă etapă, parametrii de stare şi energia internă în centrul termodinamic al ciclului izocor, precum şi proprietăţile acestui punct de stare, în cazul căldurilor specifice invariabile cu temperatura. Prin noţiunea de *centru termodinamic a ciclului izocor,* definim punctul de stare care se găseşte la intersecţia adiabaticii şi izocorei care împart, fiecare, aria ciclului în două părţi egale; în diagrama *p-v*, el este reprezentat de punctul *g* (fig. 1).

După cum se vede din fig. 1, centrul termodinamic este un punct de stare în raport cu care se asociază cîte două perechi de arii egale şi simetrice ca aşezare.

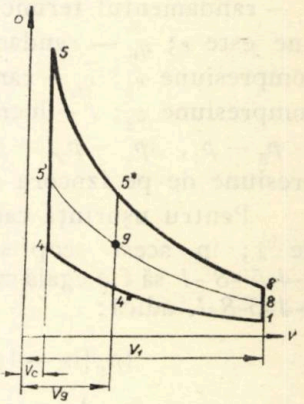


Fig. 1

2. Determinarea parametrilor de stare şi a energiei interne în centrul termodinamic al ciclului izocor reprezentat în diagrama *p-v* (fig. 1).

Să presupunem că în cilindrul motorului evoluează 1 kg aer, considerat gaz perfect, iar cantitatea de căldură care se introduce în ciclul principal *1-4-5-8-1* este q_1 kcal.

Pentru ca adiabata $5'$-$8'$ să împartă aria ciclului principal în două părţi egale, este absolut necesar ca aportul de căldură de la 4 la $5'$ să fie egal cu $q_1/2$.

Să denumim ciclurile a căror arie este egală cu jumătate din aria ciclului principal, „cicluri izomecanice de ordinul I", iar pe acelea a căror arie este egală cu a patra parte din aria ciclului principal, „cicluri izomecanice de ordinul II". Utilizînd această terminologie, din fig. 1 se observă uşor că ciclul principal este alcătuit din patru cicluri izomecanice de ordinul I (adică din patru cicluri distincte de acelaşi lucru mecanic), precum şi din patru cicluri izomecanice de ordinul II. În total, utilizînd fig. 1, se pot studia nouă cicluri, în care g este un punct comun. În fiecare din ele punctul g are o semnificaţie distinctă.

Să notăm cu: p, v, T — presiunea, (kgf/m^2), volumul specific, (m^3/kg) şi temperatura, ($^\circ K$), (indicii respectivi vor marca valoarea acestor parametri în diverse puncte considerate pe figură); u — energia internă, (kgm), (indicii respectivi vor marca valoarea ei în diverse puncte considerate pe figură); $v_c = v_4 = v_5$ — volumul camerei de combustie; $v_h = v_1 - v_c$ — — cilindreea unitară; $\varepsilon_1 = v_1/v_g$, $\varepsilon_2 = v_g/v_c$ — gradele de compresiune a ciclurilor determinate de poziţia izocorei $4''$-$5''$; $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = v_1/v_c$ — gradul de compresiune a ciclului principal 1-4-5-8-1; $\lambda_1 = p_{5'}/p_4$, $\lambda_2 = p_5/p_{5'}$, $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 = p_5/p_4$ — respectiv gradul de creştere a presiunii pentru ciclul 1-4-$5'$-$8'$-1, pentru ciclul $8'$-$5'$-5-8-$8'$ şi pentru ciclul principal 1-4-5-8-1; η_t — randamentul termic al ciclului principal al cărui grad de compresiune este ε; η_{t_1} — randamentul termic al ciclurilor care au gradul de compresiune ε_1; η_{t_2} — randamentul termic al ciclurilor care au gradul de compresiune ε_2; l — lucrul mecanic al ciclului principal, (kgm); $\Delta p_{max} = p_5 - p_4$, $\Delta p_g = p_{5''} - p_{4''}$, $\Delta p_{min} = p_8 - p_1$ — respectiv diferenţele de presiune de pe izocora $v_c = \text{const.}$, $v_g = \text{const.}$ şi $v_1 = \text{const.}$ (fig. 1).

Pentru uşurinţa calculelor să exprimăm întîi pe λ_1 şi λ_2 în funcţie de λ; în acest scop scriind condiţia ca presiunea medie a ciclului 1-4-$5'$-$8'$-1 să fie egală cu jumătate din presiunea medie a ciclului principal 1-4-5-8-1, adică:

$$\{p_4/[(\varepsilon - 1)(K - 1)]\}(\lambda_1 - 1)(1 - 1/\varepsilon^{K-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\{p_4/[(\varepsilon - 1)(K - 1)]\}(\lambda - 1)(1 - 1/\varepsilon^{K-1}),$$

se obţine:

$$\lambda_1 = (\lambda + 1)/2$$

şi întrucît $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda$, rezultă:

$$\lambda_2 = 2\lambda/(\lambda + 1).$$

Parametrii de stare ai centrului termodinamic, exprimaţi în funcţie de elementele uzuale de calcul ale ciclului izocor, se obţin după cum urmează.

Conform definiției de mai sus, izocora care trece prin centrul termodinamic g trebuie să împartă aria ciclului principal în două părți egale; scriind deci condiția de egalitate între lucrul mecanic al ciclului *1-4″-5″-8-1* și lucrul mecanic al ciclului *4″-4-5-5″-4″*, se obține în final:

$$v_g = 2^{1/(K-1)}\, v_1/(\varepsilon^{K-1}+1)^{1/(K-1)}. \tag{1}$$

Scriind că punctul g se găsește și pe adiabata *5′-8′*, se obține în final:

$$p_g = [(\lambda+1)/2]\,[(\varepsilon^{K-1}+1)/2]^{K/(K-1)}\, p_1. \tag{2}$$

De asemenea, scriind ecuația caracteristică a gazelor perfecte în punctul g, se obține:

$$T_g = [(\lambda+1)/4]\,(\varepsilon^{K-1}+1)\,T_1. \tag{3}$$

Energia internă în punctul g, exprimată în kgm, este dată de relația:

$$u_g = [(\lambda+1)/4]\,[p_1 v_1/(K-1)]\,(\varepsilon^{K-1}+1). \tag{4}$$

3. Proprietățile centrului termodinamic al ciclului principal în raport cu parametrii de stare și cu energiile interne din vîrfurile acestui ciclu, precum și cu alți parametri de calcul

1. Energia internă u_g din centrul termodinamic al ciclului principal (scrisă sub formă mecanică) este egală cu media aritmetică a energiilor interne din vîrfurile acestui ciclu.

Într-adevăr, scriind expresiile energiilor interne din vîrfurile ciclului și efectuînd media lor aritmetică, se obține:

$$(u_1+u_4+u_5+u_8)/4 = [(\lambda+1)/4]\,[p_1 v_1/(K-1)]\,(\varepsilon^{K-1}+1).$$

Ținînd seama de expresia (4) a energiei interne în punctul g, rezultă:

$$(u_1+u_4+u_5+u_8)/4 = u_g. \tag{5}$$

De asemenea, produsul $p_g v_g$, dintre coordonatele centrului termodinamic al ciclului principal, este egal cu media aritmetică a produselor dintre presiunile și volumele din vîrfurile acestui ciclu.

Efectuînd media aritmetică a produselor pv din vîrfurile ciclului principal, se obține:

$$(p_1 v_1 + p_4 v_4 + p_5 v_5 + p_8 v_8)/4 = [(\lambda+1)/4]\,p_1 v_1\,(\varepsilon^{K-1}+1).$$

Întrucît

$$p_g v_g = [(\lambda+1)/4]\,(\varepsilon^{K-1}+1)\,p_1 v_1,$$

rezultă deci:

(6) $$\sum_{i=1,4,5,8.} p_i v_i = 4 p_g v_g,$$

în care indicele i se referă la cele patru vîrfuri ale ciclului principal.

2. Temperatura absolută T_g din centrul termodinamic al ciclului principal este egală cu media aritmetică a temperaturilor absolute din vîrfurile acestui ciclu.

Scriind expresiile temperaturilor absolute din vîrfurile ciclului principal şi efectuînd media lor aritmetică, se obţine:

(7) $$(T_1 + T_4 + T_5 + T_8)/4 = [(\lambda + 1)/4]\,(\varepsilon^{K-1} + 1)\; T_1 = T_g.$$

3. Produsul $v_g \Delta p_g$ este egal cu media aritmetică a produselor $v_c \Delta p_{\max}$ şi $v_1 \Delta p_{\min}$.

Scriind condiţia de egalitate între lucrurile mecanice ale ciclurilor *4"-4-5-5"-4"* şi *1-4"-5"-8-1*, determinate de poziţia izocorei *4"-5"*, se obţine, după simplificări, relaţia:

$$v_c (p_5 - p_4) + v_1 (p_8 - p_1) = 2 v_g (p_{5''} - p_{4''}),$$

de unde rezultă:

(8) $$v_c \Delta p_{\max} + v_1 \Delta p_{\min} = 2 v_g \Delta p_g.$$

4. Adiabata *5'-8'*, care trece prin centrul termodinamic al ciclului principal, determină următoarele proprietăţi:

a) Întrucît λ, λ_1 şi λ_2 au aceleaşi valori pe izocorele cuprinse între $v_c = \text{const.}$ şi $v_1 = \text{const.}$, rezultă că în cazul cînd se cunosc presiunile p_i de pe adiabata de simetrie *5'-8'*, atunci presiunile de detentă (p_{di}) sau presiunile de compresie (p_{ci}) sînt determinate de relaţii simple, de forma:

(9) $$p_{di} = p_i \lambda_2 = p_i [2\lambda/(\lambda + 1)] = a p_i,$$

în care $a = 2\lambda/(\lambda + 1)$ este o constantă în calculul presiunilor de detentă a ciclului considerat,

(10) $$p_{ci} = p_i/\lambda_1 = p_i [2/(\lambda + 1)] = b p_i,$$

în care $b = 2/(\lambda + 1)$ este o constantă în calculul presiunilor de compresiune a ciclului considerat.

De pildă: $p_5 = p_{5'} a$, $p_{5''} = p_g a$, $p_8 = p_{8'} a$, $p_4 = p_{5'} b$, $p_{4''} = p_g b$.

De asemenea diferenţele dintre presiunile de detentă şi de compresie de pe izocore, sînt date de relaţia:

(11) $$p_{di} - p_{ci} = \Delta p_i = p_i [2(\lambda - 1)/(\lambda + 1)].$$

De pildă:

$$p_5 - p_4 = \Delta p_{\max} = p_{5'} [2(\lambda - 1)/(\lambda + 1)], \quad p_{5''} - p_{4''} = \Delta p_g = p_g [2(\lambda - 1)/(\lambda + 1)],$$
$$p_8 - p_1 = \Delta p_{\min} = p_{8'} [2(\lambda - 1)/(\lambda + 1)].$$

Dacă în relaţia (8) se substituie mărimile Δp_{max}, Δp_{min} şi Δp_g prin expresiile lor, se obţine:

$$p_{5'} v_c + p_{8'} v_1 = 2 p_g v_g$$

şi deoarece $p_{8'} = p_1 (\lambda + 1)/2$, rezultă:

$$p_{5'} v_c + p_1 v_1 (\lambda + 1)/2 = 2 p_g v_g . \tag{12}$$

Relaţia (12) permite determinarea presiunii $p_{5'}$ cînd se cunosc p_g, v_g, ceea ce presupune, conform relaţiilor (1) şi (2), cunoaşterea lui $\varepsilon = v_1/v_c$, λ şi $p_1 v_1$, adică a elementelor de bază necesare pentru calculul ciclului izocor.

Aşadar, dacă se cunoaşte starea iniţială a fluidului (p_1, v_1) şi poziţia centrului termodinamic (p_g, v_g), şi dacă se trasează grafic adiabata care trece prin punctul g, atunci presiunile din vîrfurile ciclului cît şi presiunile de detentă şi compresie se pot determina rapid cu ajutorul relaţiilor (9) şi (10).

b) Pe izocore variaţiile de energie internă între punctele care se găsesc pe linia detentei sau compresiei şi punctele care se găsesc pe adiabata care trece prin centrul termodinamic al ciclului principal, sînt egale. De pildă:

$$u_5 - u_{5'} = [(\lambda - 1)/2] [p_1 v_1/(K - 1)] \varepsilon^{K-1} = u_{5'} - u_4 ,$$

$$u_{5''} - u_g = [(\lambda - 1)/4] [p_1 v_1/(K - 1)] (\varepsilon^{K-1} + 1) = u_g - u_{4''} ,$$

$$u_8 - u_{8'} = [(\lambda - 1)/2] [p_1 v_1/(K - 1)] = u_{8'} - u_1 .$$

Aceeaşi proprietate se păstrează pe izocore, atît pentru diferenţele de temperaturi cît şi pentru diferenţele de presiuni. De pildă:

$$T_5 - T_{5'} = [(\lambda - 1)/2] T_1 \varepsilon^{K-1} = T_{5'} - T_4 ,$$

$$T_{5''} - T_g = [(\lambda - 1)/4] T_1 (\varepsilon^{K-1} + 1) = T_g - T_{4''} ,$$

$$T_8 - T_{8'} = [(\lambda - 1)/2] T_1 = T_{8'} - T_1 ,$$

$$p_5 - p_{5'} = [(\lambda - 1)/2] p_1 \varepsilon^K = p_{5'} - p_4 ,$$

$$p_{5''} - p_g = [(\lambda - 1)/2] p_1 [(\varepsilon^{K-1} + 1)/2]^{K/(K-1)} = p_g - p_{4''} ,$$

$$p_8 - p_{8'} = [(\lambda - 1)/2] p_1 = p_{8'} - p_1 .$$

Aşadar, adiabata care trece prin centrul termodinamic al ciclului principal este o linie de simetrie pentru diferenţele de presiuni, diferenţele de temperaturi şi pentru variaţiile de energie internă dintre punctele menţionate mai sus.

5. Izocora $4''$-$5''$, care trece prin centrul termodinamic g, împarte aria ciclului principal în două cicluri izomecanice de ordinul I, care au grade de compresiune diferite şi deci randamente termice diferite.

Între gradele de compresiune ale ciclurilor izomecanice de ordinul I şi gradul de compresiune al ciclului principal, există următoarele relaţii:

$$\varepsilon_1 = v_1/v_g = [(\varepsilon^{K-1} + 1)/2]^{1/(K-1)}, \quad \varepsilon_2 = v_g/v_c = [2/(\varepsilon^{K-1} + 1)]^{1/(K-1)}\varepsilon.$$

Considerînd că întreaga cantitate de căldură cedată din ciclul *4''-4-5-5''-4''* (al cărui grad de compresiune este ε_2) se introduce fără pierderi în ciclul *1-4''-5''-8-1* (al cărui grad de compresiune este ε_1), atunci, între randamentele termice ale ciclurilor menţionate şi randamentul termic al ciclului principal există relaţiile:

$$(13) \qquad \eta_{t_1} = 1 - 1/\varepsilon_1^{K-1} = (\varepsilon^{K-1} - 1)/(\varepsilon^{K-1} + 1) = \eta_t \varepsilon^{K-1}/(\varepsilon^{K-1} + 1),$$

$$(14) \qquad \eta_{t_2} = 1 - 1/\varepsilon_2^{K-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{K-1} - 1)/\varepsilon^{K-1} = \eta_t/2.$$

De asemenea:

$$(15) \qquad \eta_{t_1}\eta_{t_2} = (\eta_t^2/2)[\varepsilon^{K-1}/(\varepsilon^{K-1} + 1)] = \frac{1}{2}(\varepsilon^{K-1} - 1)^2/[(\varepsilon^{K-1} + 1)\varepsilon^{K-1}].$$

Relaţia (14) arată că randamentul termic al ciclurilor izomecanice de ordinul I, cu gradul de compresiune ε_2, este întotdeauna egal cu jumătate din randamentul termic al ciclului principal.

4. Proprietăţile centrului termodinamic al ciclului principal, în raport cu parametrii de stare şi cu energiile interne din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul întîi şi doi formate prin trasarea adiabatei *5'-8'* şi a izocorei *4''-5''*. Relaţiile dintre parametrii de stare şi energiile interne ale centrelor termodinamice

Pentru scoaterea în evidenţă a acestor proprietăţi este necesar să se determine în prealabil expresiile parametrilor de stare şi ale energiilor interne din aceste centre termodinamice.

În acest scop notăm cu: g — centrul termodinamic al ciclului principal; a, b, e, d — centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I (fig. 2); a', b', e', d', — centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul II; $\lambda_1' = p_{z_1}/p_4$, $\lambda_1'' = p_{5'}/p_{z_1}$, $\lambda_2' = p_{z_2}/p_{5'}$, $\lambda_2'' = p_5/p_{z_2}$ — respectiv gradul de creştere a presiunii pentru ciclul *1-4-z_1-r_1-1*, pentru ciclul *r_1-z_1-5'-8'-r_1*, pentru ciclul *8'-5'-z_2-r_2-8'* şi pentru ciclul *r_2-z_2-5-8-r_2*.

Să exprimăm pe λ_1' şi λ_1'' în funcţie de λ.

Aplicînd aceeaşi metodă ca şi mai sus se obţine:

$$\lambda_1' = (\lambda_1 + 1)/2, \quad \lambda_1' = (\lambda + 3)/4.$$

Ţinînd seama că $\lambda_1'\lambda_1'' = \lambda_1 = (\lambda + 1)/2$, se obţine:

$$\lambda_1'' = \lambda_1/\lambda_1', \quad \lambda_1'' = 2(\lambda + 1)/(\lambda + 3).$$

De asemenea să exprimăm pe λ_2' şi λ_2'' în funcţie de λ.

Tabelul 1

Expresiile parametrilor de stare şi a energiilor interne din centrele termodinamice ale ciclului principal şi ale ciclurilor izomecanice de ordinul I şi II, determinate de adiabata 5'–8' şi de izocora 4"–5".

		Presiunile	Volumele	Temperaturile	Energiile interne
Centrul termodinamic al ciclului principal	g	$p_g=[(\lambda+1)/2][(\varepsilon^{K-1}+1)/2]^{K/(K-1)}p_1$	$v_g=[2/(\varepsilon^{K-1}+1)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_g=[(\lambda+1)/4](\varepsilon^{K-1}+1)\,T_1$	$u_a=[(\lambda+1)/4][p_1v_1/(K-1)](\varepsilon^{K-1}+1)$
Centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I	a	$p_a=[(\lambda+3)/4][(\varepsilon^{K-1}+1)/2]^{K/(K-1)}p_1$	$v_a=v_g=[2/(\varepsilon^{K-1}+1)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_a=[(\lambda+3)/8](\varepsilon^{K-1}+1)\,T_1$	$u_a=[(\lambda+3)/8][p_1v_1/(K-1)](\varepsilon^{K-1}+1)$
	b	$p_b=[(3\lambda+1)/4][(\varepsilon^{K-1}+1)/2]^{K/(K-1)}p_1$	$v_b=v_g=[2/(\varepsilon^{K-1}+1)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_b=[(3\lambda+1)/8](\varepsilon^{K-1}+1)\,T_1$	$u_b=[(3\lambda+1)/8][p_1v_1/(K-1)](\varepsilon^{K-1}+1)$
	e	$p_e=[(\lambda+1)/2][(3\varepsilon^{K-1}+1)/4]^{K/(K-1)}p_1$	$v_e=[4/(3\varepsilon^{K-1}+1)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_e=[(\lambda+1)/8](3\varepsilon^{K-1}+1)\,T_1$	$u_e=[(\lambda+1)/8][p_1v_1/(K-1)](3\varepsilon^{K-1}+1)$
	d	$p_d=[(\lambda+1)/2][(\varepsilon^{K-1}+3)/4]^{K/(K-1)}p_1$	$v_d=[4/(\varepsilon^{K-1}+3)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_d=[(\lambda+1)/8](\varepsilon^{K-1}+3)\,T_1$	$u_d=[(\lambda+1)/8][p_1v_1/(K-1)](\varepsilon^{K-1}+3)$
Centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul II	a'	$p_{a'}=[(\lambda+3)/4][(3\varepsilon^{K-1}+1)/4]^{K/(K-1)}p_1$	$v_{a'}=v_e=[4/(3\varepsilon^{K-1}+1)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_{a'}=[(\lambda+3)/16](3\varepsilon^{K-1}+1)\,T_1$	$u_{a'}\quad[(\lambda+3)/16][p_1v_1/(K-1)](3\varepsilon^{K-1}+1)$
	b'	$p_{b'}=[(\lambda+3)/4][(\varepsilon^{K-1}+3)/4]^{K/(K-1)}p_1$	$v_{b'}=v_d=[4/(\varepsilon^{K-1}+3)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_{b'}=[(\lambda+3)/16](\varepsilon^{K-1}+3)\,T_1$	$u_{b'}=[(\lambda+3)/16][p_1v_1/(K-1)](3\varepsilon^{K-1}+1)$
	e'	$p_{e'}=[(3\lambda+1)/4][(\varepsilon^{K-1}+3)/4]^{K/(K-1)}p_1$	$v_{e'}=v_d=[4/(\varepsilon^{K-1}+3)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_{e'}=[(3\lambda+1)/16](3\varepsilon^{K-1}+3)\,T_1$	$u_{e'}=[(3\lambda+1)/16][p_1v_1/(K-1)](\varepsilon^{K-1}+3)$
	d'	$p_{d'}=[(3\lambda+1)/4][(3\varepsilon^{K-1}+1)/4]^{K/(K-1)}p_1$	$v_{d'}=v_e=[4/(3\varepsilon^{K-1}+1)]^{1/(K-1)}v_1$	$T_{d'}=[(3\lambda+1)/16](3\varepsilon^{K-1}+1)\,T_1$	$u_{d'}=[(3\lambda+1)/16][p_1v_1/(K-1)](3\varepsilon^{K-1}+1)$

Tabelul 1

Expresiile parametrilor de stare și a energiilor interne din ciclurile termodinamice ale ciclului Ericsson și ale ciclurilor izomocore de ordinul I și II, determinate de adiabatele δ–δ' și de izocora $4'$–$1'$.

	Presiunile	Volumele	Temperaturile	Energiile interne
a	$P_1^a = [(2k+1)/2]R_{(K-1)}T_1^a$	$v_1^a = [(2k_{K-1}+1)/2]v_{4'}$	$T_1^a = [(2k_{K-1}+1)/2]T_1^a$	$u_1^a = [(2k_{K-1}+1)/2]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
b	$P_2^b = [(2k_{K-1}+1)/2]R_{(K-1)}T_2^b$	$v_2^b = v_{4'} = [(2k_{K-1}+1)/2]v_{4'}$	$T_2^b = [(2k_{K-1}+1)/2]T_1^a$	$u_2^b = [(2k_{K-1}+1)/2]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
c	$P_3^c = [(2k_{K-1}+1)/2]R_{(K-1)}T_3^c$	$v_3^c = [(2k_{K-1}+1)/2]v_{4'}$	$T_3^c = [(2k_{K-1}+1)/2]T_1^a$	$u_3^c = [(2k_{K-1}+1)/2]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
d	$P_4^d = [(2k_{K-1}+1)/2]R_{(K-1)}T_4^d$	$v_4^d = [(2k_{K-1}+1)/2]v_{4'}$	$T_4^d = [(2k_{K-1}+1)/2]T_1^a$	$u_4^d = [(2k_{K-1}+1)/2]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
a	$P_1^a = [(2k_{K-1}+3)/8]R_{(K-1)}T_1^a$	$v_1^a = v_{4'} = [(2k_{K-1}+1)/8]v_{4'}$	$T_1^a = [(2k_{K-1}+3)/8]T_1^a$	$u_1^a = [(2k_{K-1}+3)/8]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
b	$P_2^b = [(2k_{K-1}+3)/8]R_{(K-1)}T_2^b$	$v_2^b = [(2k_{K-1}+3)/8]v_{4'}$	$T_2^b = [(2k_{K-1}+3)/8]T_1^a$	$u_2^b = [(2k_{K-1}+3)/8]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
c	$P_3^c = [(2k_{K-1}+3)/8]R_{(K-1)}T_3^c$	$v_3^c = [(2k_{K-1}+3)/8]v_{4'}$	$T_3^c = [(2k_{K-1}+3)/8]T_1^a$	$u_3^c = [(2k_{K-1}+3)/8]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
d	$P_4^d = [(2k_{K-1}+3)/8]R_{(K-1)}T_4^d$	$v_4^d = [(2k_{K-1}+3)/8]v_{4'}$	$T_4^d = [(2k_{K-1}+3)/8]T_1^a$	$u_4^d = [(2k_{K-1}+3)/8]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
a	$P_1^a = [(2k_{K-1}+3)/16]R_{(K-1)}T_1^a$	$v_1^a = v_{4'} = [(2k_{K-1}+3)/16]v_{4'}$	$T_1^a = [(2k_{K-1}+3)/16]T_1^a$	$u_1^a = [(2k_{K-1}+3)/16]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
b	$P_2^b = [(2k_{K-1}+3)/16]R_{(K-1)}T_2^b$	$v_2^b = [(2k_{K-1}+3)/16]v_{4'}$	$T_2^b = [(2k_{K-1}+3)/16]T_1^a$	$u_2^b = [(2k_{K-1}+3)/16]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
c	$P_3^c = [(2k_{K-1}+3)/16]R_{(K-1)}T_3^c$	$v_3^c = [(2k_{K-1}+3)/16]v_{4'}$	$T_3^c = [(2k_{K-1}+3)/16]T_1^a$	$u_3^c = [(2k_{K-1}+3)/16]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$
d	$P_4^d = [(2k_{K-1}+3)/16]R_{(K-1)}T_4^d$	$v_4^d = [(2k_{K-1}+3)/16]v_{4'}$	$T_4^d = [(2k_{K-1}+3)/16]T_1^a$	$u_4^d = [(2k_{K-1}+3)/16]c_v(K-1)](2k_{K-1}+1)$

Procedînd în acelaşi mod se obţine:

$$\lambda_2' = (\lambda_2 + 1)/2, \quad \lambda_2' = (3\lambda + 1)/[2(\lambda + 1)].$$

Ţinînd seama că $\lambda_2' \lambda_2'' = \lambda_2 = 2\lambda/(\lambda + 1)$, se obţine în cele din urmă:

$$\lambda_2'' = \lambda_2/\lambda_2', \quad \lambda_2'' = 4\lambda/(3\lambda + 1).$$

Cu ajutorul acestor coeficienţi, exprimaţi în funcţie de λ, se pot determina expresiile energiilor interne şi ale parametrilor din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I şi II. În acest scop aplicînd aceeaşi metodă ca cea menţionată în § 3 se obţin expresiile căutate. Expresiile energiilor interne şi ale parametrilor de stare din centrele termodinamice sînt grupate în tabelul 1.

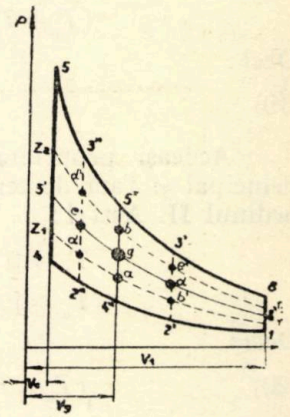


Fig. 2

Ţinînd seama de expresiile din tabelul 1 rezultă următoarele proprietăţi:

1. Energia internă din centrul termodinamic al ciclului principal este egală cu media aritmetică a energiilor interne din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I.

Într-adevăr:

$$(u_a + u_b)/2 = [(\lambda + 1)/4]\,[p_1 v_1/(K-1)]\,(\varepsilon^{K-1} + 1) = u_g,$$

$$(u_d + u_e)/2 = [(\lambda + 1)/4]\,[p_1 v_1/(K-1)]\,(\varepsilon^{K-1} + 1) = u_g.$$

Deci

$$(u_a + u_b + u_d + u_e)/4 = u_g. \tag{16}$$

Aceeaşi proprietate o păstrează centrul termodinamic al ciclului principal şi faţă de centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul II. Astfel:

$$u_b = [(3\lambda + 1)/8]\,[p_1 v_1/(K-1)]\,(\varepsilon^{K-1} + 1) = (u_{d'} + u_{e'})/2,$$

$$u_a = [(\lambda + 3)/8]\,[p_1 v_1/(K-1)]\,(\varepsilon^{K-1} + 1) = (u_{a'} + u_{b'})/2.$$

Deci:

$$(u_a + u_b)/2 = u_g = (u_{a'} + u_{b'} + u_{d'} + u_{e'})/4. \tag{17}$$

Din compararea relaţiilor (16), (17) şi (5) mai rezultă următoarele:

Media aritmetică a energiilor interne din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I este egală cu media aritmetică a energiilor interne din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul II; de asemenea ele sînt egale şi cu media aritmetică a energiilor interne din vîrfurile ciclului principal, adică

$$(u_a + u_b + u_d + u_e)/4 = (u_{a'} + u_{b'} + u_{d'} + u_{e'})/4 = (u_1 + u_4 + u_5 + u_8)/4. \tag{18}$$

2. Temperatura absolută din centrul termodinamic al ciclului principal este egală cu media aritmetică a temperaturilor absolute din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I.

Astfel:

$$(T_a + T_b)/2 = [(\lambda+1)/4](\varepsilon^{K-1}+1)\, T_1 = T_g,$$
$$(T_d + T_e)/2 = [(\lambda+1)/4](\varepsilon^{K-1}+1)\, T_1 = T_g.$$

Deci:

$$(T_a + T_b + T_d + T_e)/4 = T_g. \tag{19}$$

Aceeaşi proprietate o păstrează centrul termodinamic al ciclului principal şi faţă de centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul II. Astfel:

$$T_b = [(3\lambda+1)/8](\varepsilon^{K-1}+1)\, T_1 = (T_{d'} + T_{e'})/2,$$
$$T_a = [(\lambda+3)/8](\varepsilon^{K-1}+1)\, T_1 = (T_{a'} + T_{b'})/2.$$

Deci:

$$(T_a + T_b)/2 = T_g = (T_{a'} + T_{b'} + T_{d'} + T_{e'})/4. \tag{20}$$

Din comparaţia relaţiilor (19), (20) şi (7) rezultă:

$$(T_a + T_b + T_d + T_e)/4 = (T_{a'} + T_{b'} + T_{d'} + T_{e'})/4 = (T_1 + T_4 + T_5 + T_8)/4. \tag{21}$$

3. Presiunea absolută din centrul termodinamic al ciclului principal este egală cu media aritmetică a presiunilor absolute din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I, dacă aceste centre se găsesc pe aceeaşi izocoră.

Într-adevăr:

$$p_g = [(\lambda+1)/2]\,[(\varepsilon^{K-1}+1)/2]^{K/(K-1)}\, p_1 = (p_a + p_b)/2.$$

Aceeaşi proprietate o păstrează şi centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I, faţă de centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul II, dacă aceste centre se găsesc pe aceleaşi izocore. Astfel:

$$p_e = [(\lambda+1)/2]\,[(3\varepsilon^{K-1}+1)/4]^{K/(K-1)}\, p_1 = (p_{a'} + p_{d'})/2, \tag{22}$$

$$p_d = [(\lambda+1)/2]\,[(\varepsilon^{K-1}+3)/4]^{K/(K-1)}\, p_1 = (p_{b'} + p_{e'})/2. \tag{23}$$

Ţinînd seama de relaţiile (22) şi (23), rezultă încă:

$$(p_d + p_e)/2 = (p_{a'} + p_{b'} + p_{d'} + p_{e'})/4 =$$
$$= [(\lambda+1)/4]\, p_1 \{[(\varepsilon^{K-1}+3)/4]^{K/(K-1)} + [(3\varepsilon^{K-1}+1)/4]^{K/(K-1)}\}, \tag{24}$$

adică:

Media aritmetică a presiunilor absolute din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul I, situate pe adiabata $5'$-$8'$, este egală cu media aritmetică a presiunilor absolute din centrele termodinamice ale ciclurilor izomecanice de ordinul II. Media aritmetică a acestor

presiuni nu este egală însă cu presiunea absolută din centrul termodinamic al ciclului principal.

Relaţiile dintre parametrii centrelor termodinamice

Utilizînd expresiile din tabelul 1, se obţin uşor următoarele relaţii:

$$p_a = p_g\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad T_a = T_g\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$p_b = p_g\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad T_b = T_g\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$p_{a'} = p_e\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad T_{a'} = T_e\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$p_{b'} = p_d\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad T_{b'} = T_d\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$p_{d'} = p_e\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad T_{d'} = T_e\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$p_{e'} = p_d\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad T_{e'} = T_d\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$u_a = u_g\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad u_{b'} = u_d\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$u_b = u_g\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad u_{d'} = u_e\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\},$$

$$u_{a'} = u_e\{(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]\}, \qquad u_{e'} = u_d\{(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]\}.$$

Din aceste relaţii rezultă că dacă se cunosc parametrii de stare şi energiile interne din centrele termodinamice aşezate pe adiabata care trece prin centrul termodinamic g, atunci calculul elementelor menţionate din celelalte centre termodinamice se face cu uşurinţă, deoarece rapoartele $(\lambda+3)/[2(\lambda+1)]$ şi $(3\lambda+1)/[2(\lambda+1)]$ sînt aceleaşi pentru o serie de determinări.

Observaţie. Proprietăţile menţionate în §§ **3** şi **4** al. 1, în legătură cu energiile interne, se păstrează şi pentru entalpii.

5. Aplicarea noţiunii „centrul termodinamic al ciclului izocor" la calculul termic al acestui ciclu

Pentru aplicarea acestei noţiuni la calculul termic al unui ciclu izocor pot fi elaborate metode grafice, analitice sau grafo-analitice; aplicarea acestor metode, în cazul tipurilor existente ale motoarelor cu electroaprindere, va constitui obiectul unui alt articol. În cele ce urmează ne referim, de pildă, la o metodă grafo-analitică, aplicată unui motor cu electroaprindere cu carburator.

De exemplu, ne propunem să calculăm şi să construim ciclul teoretic al unui motor cu electroaprindere cu carburator, nesupraalimentat, cu grad de compresiune $\varepsilon = 6$; motorul funcţionează cu benzină, cu un coeficient de exces al aerului $\alpha = 1$.

Pentru calculul termic al unui ciclu teoretic izocor în diagrama p–v, cu ajutorul centrului termodinamic, trebuie cunoscuţi parametrii stării iniţiale a fluidului ce evoluează în cilindrul motorului (p_1, v_1, T_1) şi parametrii centrului termodinamic (p_g, v_g).

Pentru parametrii stării iniţiale a aerului, alegem:

$$p_1 = 1\ \text{kgf/cm}^2; \quad T_1 = 273 + 15 \quad 288°\text{K}; \quad v_1 = 0{,}843\ \text{m}^3/\text{kg}.$$

Conform relaţiilor (1) şi (2), calculul parametrilor centrului termodinamic necesită cunoaşterea lui ε şi λ, adică a elementelor caracteristice ale ciclului izocor.

În ceea ce priveşte λ, el este dat de relaţia cunoscută :

$$\lambda = 1 + q_1/(C_v T_1 \varepsilon^{K-1}). \tag{25}$$

Ţinînd seama de expresia lui q_1, adică :

$$q_1 = h_u/(1 + \alpha L_0),$$

relaţia (25) devine :

$$\lambda = 1 + h_u/[(1 + \alpha L_0) C_v T_1 \varepsilon^{K-1}], \tag{26}$$

în care : h_u — puterea calorică inferioară a benzinelor, (kcal/kg), L_0 — cantitatea teore-

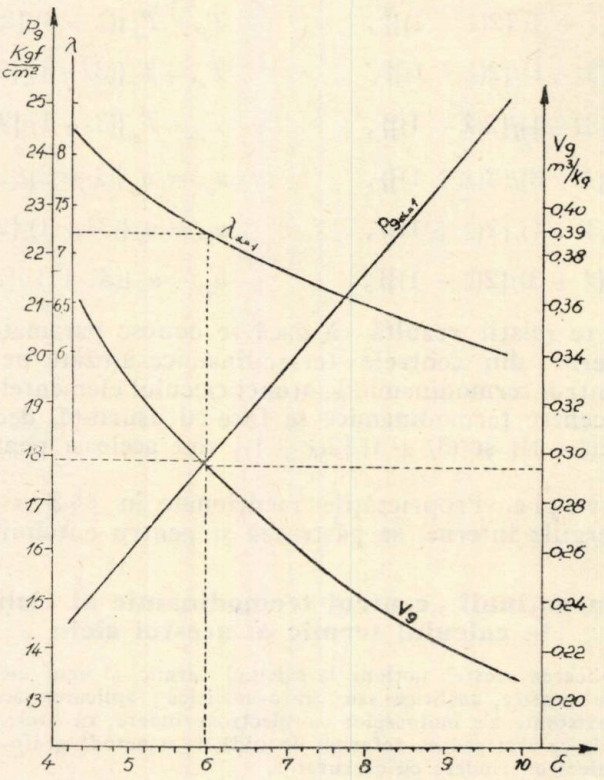


Fig. 3

tică de aer necesară pentru a arde complet 1 kg de benzină de compoziţie chimică mijlocie, (kg), α — coeficientul de exces al aerului.

Luînd : $C_v = 0{,}171$ kcal/kg grad, $T_1 = 288°$K, $h_u = 10\,000$ kcal/kg, $\alpha = 1$ şi $L_0 = 15$ kg aer/kg benzină, relaţia de calcul a lui λ pentru $\alpha = 1$ devine :

$$\lambda_{\alpha=1} = 1 + 12{,}70/\varepsilon^{K-1}.$$

Pentru calculul rapid al ciclurilor cu grade de compresiune cuprinse între $\varepsilon = 4$ şi $\varepsilon = 10$, în cazul $\alpha = 1$, construim curbele $\lambda_{\alpha=1} = f_1(\varepsilon)$, $p_g = f_2(\varepsilon)$ şi $v_g = f_3(\varepsilon)$, reprezentate în fig. 3.

Cu ajutorul acestor curbe determinarea parametrilor din vîrfurile ciclului se face după cum urmează.

Starea inițială *1* fiind cunoscută și dacă se cunoaște poziția centrului termodinamic *g*, adică dacă se cunosc parametrii p_g și v_g, atunci se poate trasa grafic, prin metodele cunoscute, adiabata care trece prin centrul termodinamic *g* și prin punctul *8'* (fig. 1); se prelungește această adiabată pînă la intersecția sa cu izocora $v_c = \text{const.}$ în punctul *5'*. O dată trasată adiabata *5'-8'*, atît parametrii din vîrfurile ciclului cît și liniile de compresie și detentă se determină analitic cu ajutorul relațiilor simple (9) și (10); de asemenea, concomitent cu ciclul principal sînt determinate și ciclurile izomecanice de ordinul I și II.

De pildă, din fig. 3, pentru $\varepsilon = 6$ rezultă: $\lambda_{\alpha=1} = 7{,}2$, $p_g = 17{,}9$ kgf/cm^2, $v_g = 0{,}294$ m^3/kg.

Presiunea în punctul *8'* este $p_{8'} = p_1 (\lambda + 1)/2 = 4{,}1$ kgf/cm^2.

Trasînd adiabata care trece prin punctele *8'* și *g* și prelungind-o pînă la intersecția ei cu izocora $v_c = v_1/\varepsilon = 0{,}140$ m^3, se obține grafic $p_{5'} = 50{,}4$ kgf/cm^2.

Presiunile din vîrfurile ciclului au deci următoarele valori:

$$p_1 = 1 \text{ kgf/cm}^2; \quad p_4 = p_{5'} [2/(\lambda + 1)] = 50.4.0{,}243 = 12{,}24 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$p_5 = p_{5'} [2\lambda/(\lambda + 1)] = 50{,}4 \,.\, 1{,}756 = 88{,}5 \text{ kgf/cm}^2, \; p_8 = \lambda p_1 = 7{,}2 \text{ kgf/cm}^2.$$

Presiunile din oricare punct de pe linia detentei sau compresiei se determină cu ajutorul relațiilor (9) și (10), adică:

$$p_{di} = p_i [2\lambda/(\lambda + 1)] = 1{,}756 \, p_{di}; \quad p_{ci} = p_i [2/(\lambda + 1)] = 0{,}243 \, p_i.$$

5. Concluzii

a) Centrul termodinamic al ciclului izocor se bucură de proprietăți deosebite, care conduc la relații noi în termodinamica ciclurilor.

b) Cunoașterea, în diagrama *p-v*, a parametrilor de stare a acestui punct din interiorul unui ciclu cît și a stării inițiale a fluidului, permite determinarea cu ușurință a parametrilor din vîrfurile ciclului.

c) Aplicarea acestei noțiuni în termodinamica ciclului izocor permite scurtarea timpului de lucru necesar pentru calculul termic al ciclurilor.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mașini termice

ЗНАЧЕНИЕ И СВОЙСТВА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИЗОХОРИЧЕСКОГО ЦИКЛА

(Резюме)

Указываются свойства, которыми обладает так называемая точка состояния находящаяся внутри теоретического цикла, соответствующие приводу тепла при постоянном объеме; эта точка условно названа *термодинамическим центром изохорического цикла.*

Как следствие, доказывается, что, зная диаграмму *p–v* параметров состояния этой точки, расчет параметров соответствующих вершинам центра и его графическое построение производятся быстро и легко пользуя, предлагаемый в статье, графо-аналитический метод.

SIGNIFICATION ET PROPRIÉTÉS DU CENTRE THERMODYNAMIQUE DU CYCLE ISOCHORE

(Résumé)

On expose les propriétés d'un certain point d'état situé à l'intérieur d'un cycle théorique avec apport de chaleur à volume constant; ce point a été nommé conventionnellement *centre thermodynamique du cycle isochore.*

On montre que, en connaissant dans le diagramme p–v les paramètres d'état de ce point, le calcul des paramètres aux sommets du cycle et la construction graphique de ce dernier peut se faire rapidement et avec facilité en utilisant la méthode grapho-analytique proposée.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. D. 669.14.018.8

ÉTUDE DE QUELQUES CAS DE SÉGRÉGATION INTERGRANULAIRE DANS LES MÉTAUX

PAR
C. CRUSSARD, J. PLATEAU, G.HENRY et J. VOELTZEL

1. Introduction

Les propriétés des joints de grains peuvent être considérablement modifiées si la composition d'une petite zone entourant les joints n'est pas identique à celle de l'intérieur des grains. De telles hétérogénéités peuvent prendre naissance en l'absence de toute précipitation, par *ségrégation d'équilibre* dans les joints d'atomes qui se trouvaient en solution dans la matrice. Elles peuvent également être la conséquence de la formation (ou de la dissolution) de précipités aux joints des grains. La croissance (ou la décroissance) de ces précipités se fait en effet par diffusion d'éléments en solution solide dans la matrice, diffusion liée à un gradient de concentration: il apparaît donc, *de façon transitoire*, une hétérogénéité dans la matrice au voisinage de précipités en cours d'évolution.

Les conséquences de ces phénomènes de ségrégation aux joints des grains, sur les propriétés du métal, sont quelquefois très importantes: les hypothèses les plus généralement admises pour rendre compte de la fragilité de revenu des aciers de construction et de la sensibilité à la corrosion intergranulaire des aciers inoxydables font appel à des hétérogénéités aux joints de chacun des types qui viennent d'être mentionnés: ségrégation d'équilibre aux joints pour le cas de la fragilité de revenu; présence d'une zone déchromée au voisinage de ceux-ci, liée à la précipitation de carbure de chrome dans le cas de la corrosion intergranulaire.

Nous nous proposons de montrer ici comment ces zones déchromées ont pu être mises en evidence directement, en dissolvant progressivement le métal à partir d'une surface de rupture intergranulaire et en analysant les liqueurs ainsi obtenues.

D'autre part nous indiquerons les résultats obtenus dans le cas de la fragilité intergranulaire d'un nickel technique particulier: cette fragilité semble en effet pouvoir être attribuée à une ségrégation d'équilibre aux joints et fait appel à un mécanisme que l'on retrouverait dans divers cas de fragilité intergranulaire, y compris, peut être, certaines formes de la fragilité de revenu.

2. Mise en évidence de zones déchromées au voisinage des joints d'un acier inoxydable du type 18-8

La sensibilité à la corrosion intergranulaire des aciers inoxydables à 18 % de chrome et 8 % de nickel, qui apparaît par revenu entre 600 et 900°C, est souvent attribuée à l'existence, au voisinage des joints, d'une zone appauvrie en chrome, qui serait la conséquence de la précipitation intergranulaire de carbure de chrome. Cet appauvrissement n'a pas pu être mis en évidence au moyen de la microsonde, ni par Philibert [1] ni par Hopkinson et Carroll [2]. Cet échec n'est pas surprenant, car les précipités ne sont pas localisés exactement dans la surface du joint, et certains d'entre eux interviennent dans la teneur en chrome mesurée à la microsonde et compensent le déficit en chrome des zones qui les avoisinent.

Par contre la composition des zones voisines des joints, dans un acier du type 18-8 sensibilisé à la corrosion intergranulaire, a pu être déterminée par dissolution progressive à partir d'une surface de rupture intergranulaire, comme l'ont fait Inman et Tipler [3] dans le cas d'alliages Fe-P. Du chrome 51 a été introduit dans l'alliage au moment de l'élaboration, ce qui a permis de doser cet élément dans les solutions, tandis que les teneurs en fer ont été déterminées par colorimétrie. Nous avons vérifié que les erreurs relatives sur les concentrations en chrome et en fer étaient inférieurs à 2 %.

Nous avons dû, avant de parvenir à un résultat positif, essayer de nombreuses méthodes pour retenir seulement celles qui conduisent à une dissolution régulière du métal, sans piqûres ni attaques excessives des joints, et qui permettent d'éliminer les carbures intergranulaires : a) attaque dans une solution de brome dans l'alcool, les carbures étant conservés à la surface de l'échantillon par un film de carbone déposé sur la surface de rupture par évaporation sous vide ; b) attaque électrolytique dans une solution aqueuse d'acide oxalique, les carbures étant séparés par ultrafiltration ; c) attaque électrolytique dans un bain de polissage acide acétique — acide perchlorique, sous tension élevée (50 V). Dans ces conditions, les carbures sont déchaussés et éliminés dès la première attaque, pour une épaisseur moyenne dissoute de 0,1 μ. Il suffit donc d'éliminer la première liqueur.

Les fig. 1 à 3 montrent les résultats obtenus pour un revenu de 6 h et de 8 h à 750°C. La teneur en chrome relativement élevée fournie pour la première mesure, dans deux des trois exemples donnés, peut correspondre à la présence de quelques carbures de chrome dans la solution à doser.

Les fig. 4 et 5 correspondent à des revenus de 3 h à 750°C et de 6 h à 850°C : on n'observe pas alors de zone déchromée.

La fig. 6 a été obtenue pour comparaison à partir de la surface polie électrolytiquement d'un échantillon hypertrempé. Il est à noter que, lorsque cet essai a été effectué, l'activité du chrome était très faible, si bien que les erreurs de mesure sont plus élevées que dans les cas précédents.

Ainsi une zone appauvrie en chrome a pu être mise en évidence, mais seulement dans le cas du revenu de 6 h et de 8 h à 750°C. Ces durées de traitement correspondent précisément, dans le cas du métal étudié,

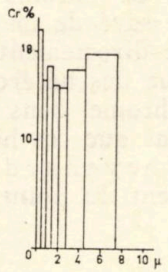


Fig. 1. — Variation de la teneur en chrome en fonction de la distance au joint, dans un acier inoxydable du type 18-8, après revenu de 6 h à 750°C. Dissolution à partir de la surface de rupture intergranulaire, par polissage électrolytique.

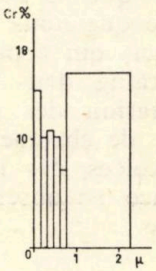


Fig. 2. — Variation de la teneur en chrome en fonction de la distance au joint, dans un acier inoxydable du type 18-8, après revenu de 8 h à 750°C. Dissolution à partir de la surface de rupture intergranulaire, dans le brome en solution alcoolique.

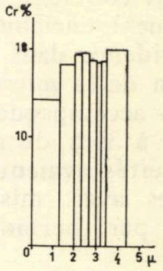


Fig. 3. — Variation de la teneur en chrome en fonction de la distance au joint, dans un acier inoxydable du type 18-8, après revenu de 8 h à 750°C. Dissolution à partir de la surface de rupture intergranulaire, par polissage électrolytique.

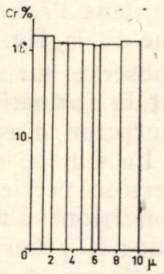


Fig. 4. — Variation de la teneur en chrome en fonction de la distance au joint, dans un acier inoxydable du type 18-8, après revenu de 3 h à 750°C. Dissolution à partir de la surface de rupture intergranulaire, par polissage électrolytique.

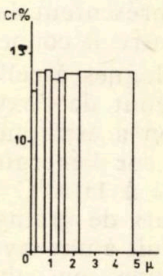


Fig. 5. — Variation de la teneur en chrome en fonction de la distance au joint, dans un acier inoxydable du type 18-8, après revenu de 6 h à 850°C. Dissolution à partir de la surface de rupture intergranulaire, par polissage électrolytique.

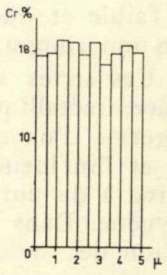


Fig. 6. — Variation de la teneur en chrome en fonction de l'épaisseur dissoute à partir de la surface polie d'un échantillon d'acier inoxydable 18-8, hypertrempé. Dissolution par pollissage électrolytique.

au maximum de sensibilité à la corrosion intergranulaire à cette température. Au contraire, pour un temps de revenu de 3 h à 750°C, et de 6 h à 850°C la sensibilité à la corrosion intergranulaire est peu marquée.

Dans ce dernier cas, la valeur relativement faible de la teneur en chrome est la conséquence d'une précipitation généralisée de carbure de chrome.

Il convient de remarquer que la zone appauvrie en chrome est également enrichie en nickel, ce que nous n'avons pas essayé de mettre en évidence dans nos essais, mais qui a pu être montré directement au moyen de la microsonde de Castaing, dans le cas analogue des hétérogénéités accompagnant la précipitation des carbures de chrome, dans des aciers à 35% de nickel et 10% de chrome [4]. Rappelons que ces hétérogénéités avaient pu être décelées dès 1934 par P. Chevenard [5] qui les avait mises en évidence en observant l'étalement du point de Curie par thermomagnétométrie.

3. Adsorption aux joints et fragilité intergranulaire à froid. Cas d'un nickel technique

Dans divers cas de fragilité intergranulaire qui ne peuvent pas être attribués à la présence de précipités aux joints des grains, nous avons observé que ceux-ci, au lieu d'être lisses, sont couverts de stries régulières dont certaines faces au moins ont des directions cristallographiques [6]...[8]. Les microfractographies des fig. 7 et 8 en montrent un exemple typique dans le cas d'un nickel industriel particulier. Il est important de remarquer que la déformation précédant la rupture est très faible et que les stries représentent la forme du joint dans l'échantillon non rompu, comme le montre la coupe micrographique de la fig. 9.

Ces stries sont très analogues à celles que l'on observe sur les surfaces métalliques, au tout début de l'oxydation — avant la formation des germe d'oxyde — et que l'on a expliquées par une adsorption d'oxygène et l'influence de celle-ci sur l'énergie superficielle. La fig. 10 est relative à du cuivre pur, traité à 1030°C sous faible pression partielle d'oxygène. Dans le cas des joints de grains, l'étude des conditions d'apparition des stries nous a conduit à une hypothèse analogue ; il y aurait adsorption integranulaire d'atomes en solution dans la matrice, ce qui abaisserait l'énergie interfaciale pour certaines directions du joint, et permettrait le réarrangement donnant naissance aux stries.

L'analogie entre les stries superficielles et les stries intergranulaires ne se borne pas à une similitude d'aspect, comme le montrent les résultats des essais exposés ci-dessous. Le nickel étudié contenait : 0,02% C, 0,01% Mn, 0,002% Cr, 0,005% S, 0,002% P, 0,08% Fe, 0,005% O.

Les travaux de J. Benard et J. Moreau ont montré ([9], [10], voir aussi [8]) — en particulier dans le cas des alliages Fe-Cr — que les stries superficielles correspondent à un état d'équilibre, et que, pour une pression partielle d'oxygène fixée, on peut observer les phénomènes suivants :

a) À basse température des germes d'oxydes se forment à la surface du métal, qui, entre ceux-ci, est striée ; les germes finissent par recouvrir complètement la surface.

Fig. 7. — Nickel refroidi lentement après traitement à 1 050°C. Microfractographie de la rupture intergranulaire. × 4 000.

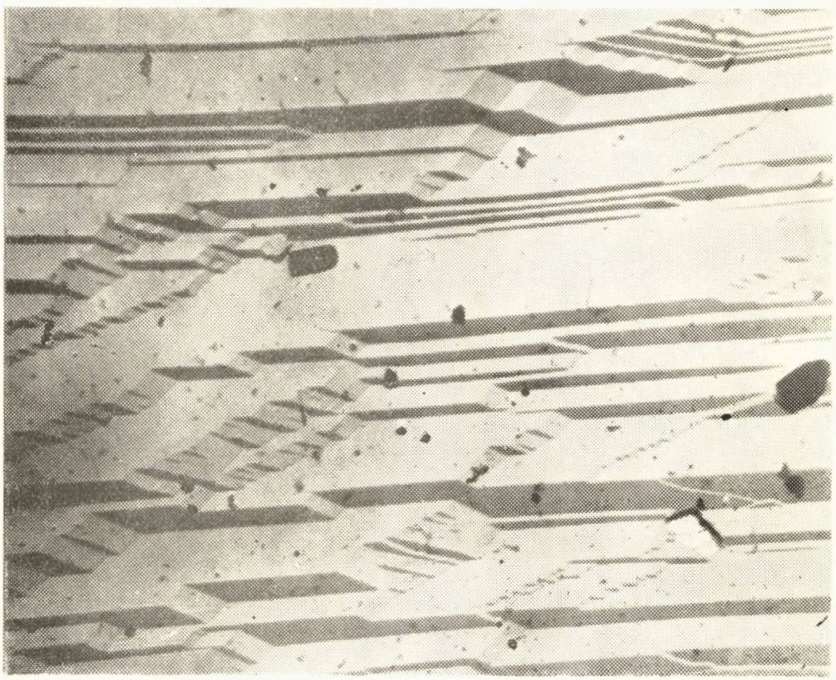


Fig. 8. — Nickel après 20 min à 900°C, refroidissement à l'eau, puis 312 h à 650°C. Microfractographie. × 16 000.

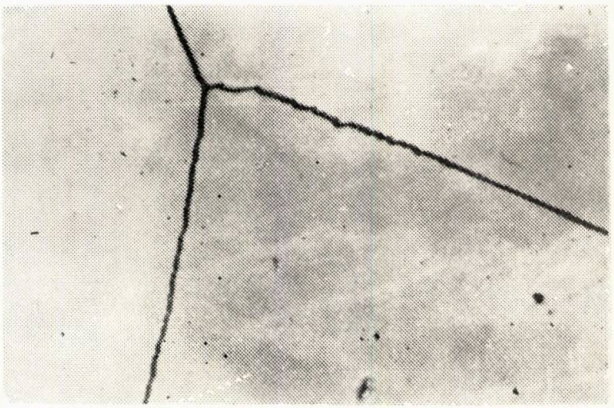


Fig. 9. — Nickel refroidi lentement après traitement à 1 050°C. Micrographie optique. × 900.

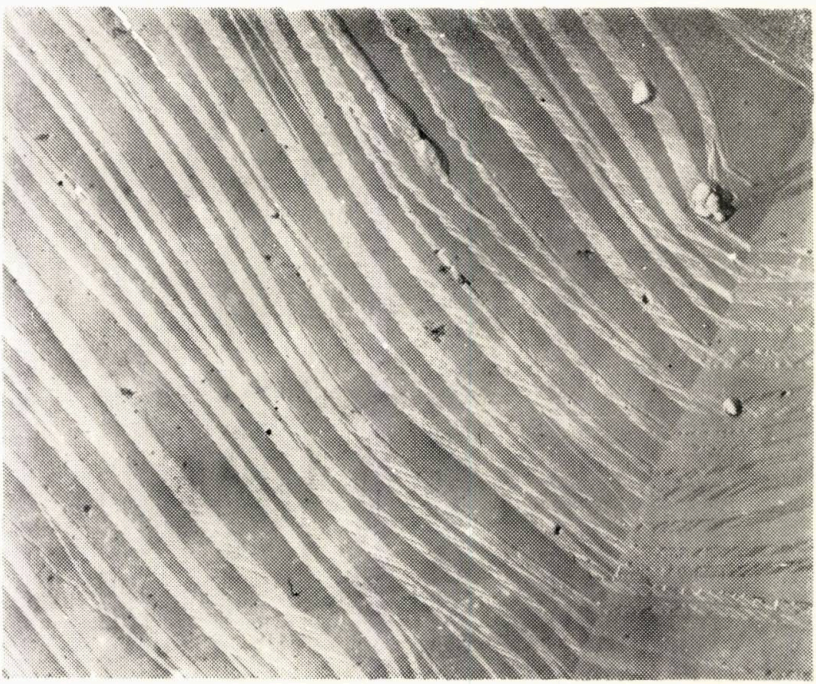


Fig. 10. — Micrographie électronique de la surface d'un cuivre pur traité à 1 030°C dans une atmosphère légèrement oxydante. × 400.

Fig. 11. — Nickel traité 20 min à 900°C, refroidissement à l'eau, puis 400 h à 650°C. Microfractographie de la rupture intergranulaire. × 4 000.

Fig. 12. — Nickel traité 20 min à 900°C, refroidissement à l'eau, puis 312 h à 650°C, refroidissement à l'eau. Microfractographie de la rupture intergranulaire à — 195°C. × 16 000.

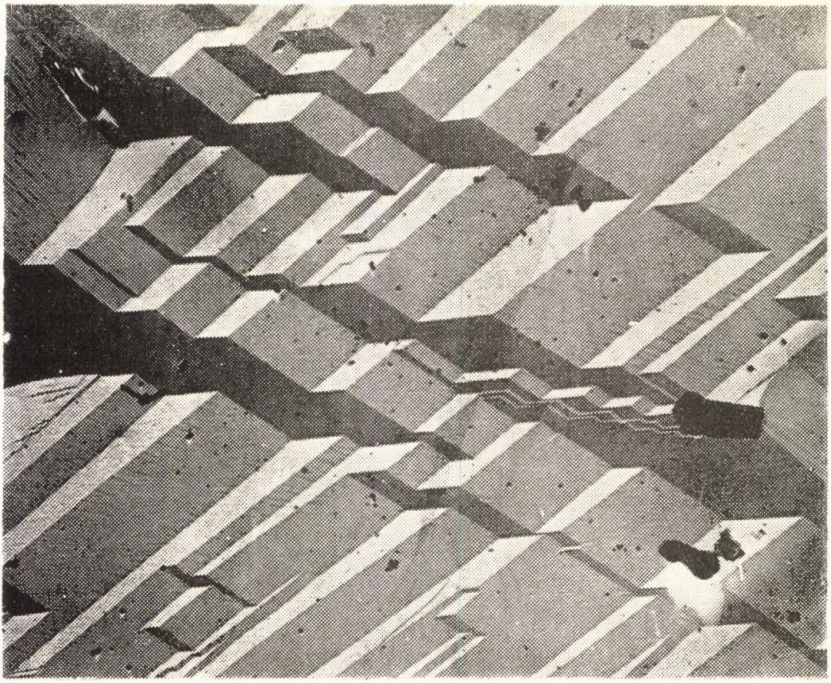


Fig. 13. — Nickel après 20 min à 900°C, refroidissement à l'eau puis 1200 h à 650°C, refroidissement à l'eau . Microfractographie de la rupture intergranulaire à —196°C ×16 000.

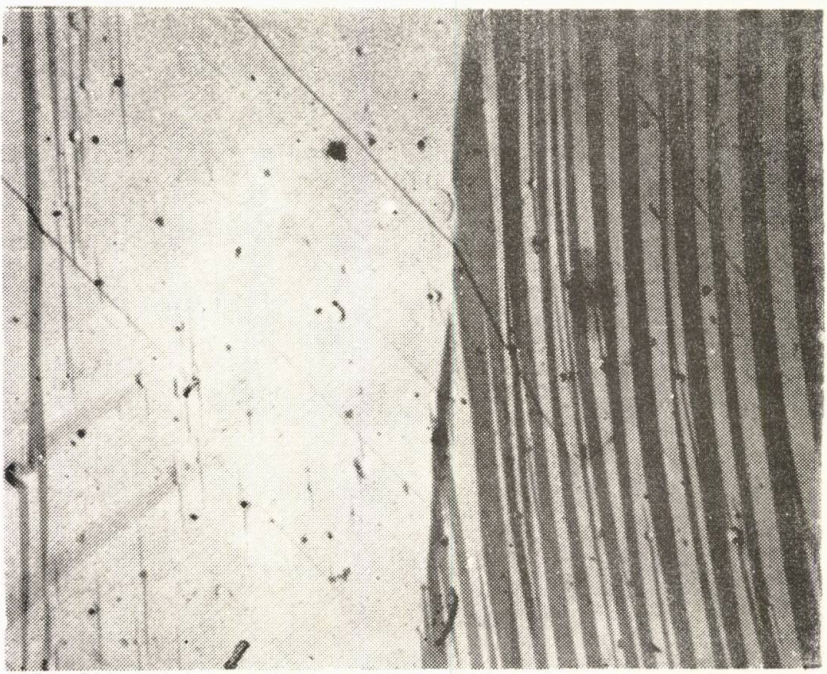


Fig. 14. — Alliage fer-oxygène (0,013%). Microfractographie de la rupture intergranulaire à —196°C. ×16 000.

Fig. 15. — Alliage fer-oxygène (0,013%), traité 1 h à 600°C, refroidissement à l'eau. Microfractographie de la rupture intergranulaire à —196°C. ×4 000.

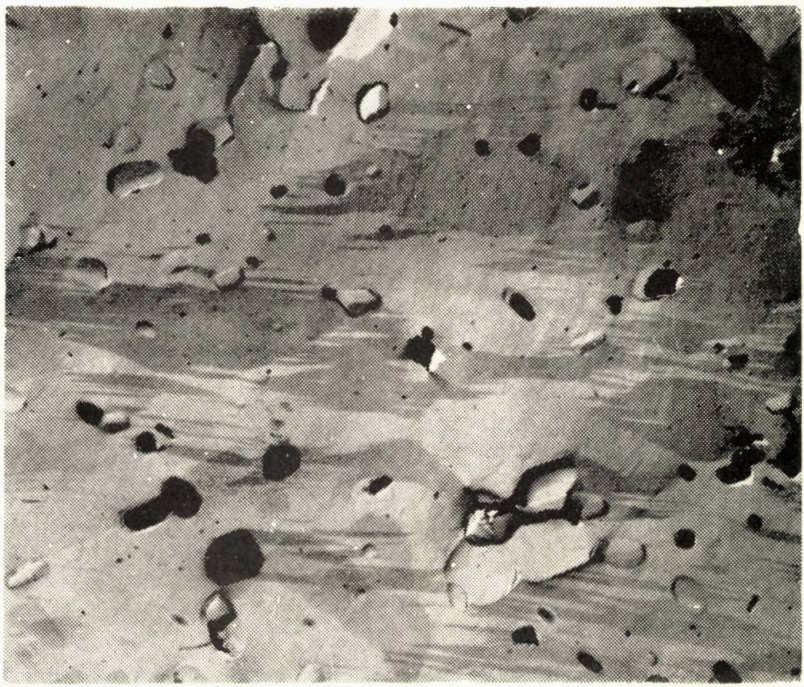


Fig. 16. — Acier à 0,33% C, 1,12% Mn, 0,24% Ni et 0,11% Cr. Trempé huile à 850°C (30 min) ; revenu 1 h à 650°C et 96 h à 500 C. Microfractographie de la rupture intergranulaire à —196°C. × 16000.

b) Au-dessus d'une température bien définie, les germes d'oxyde n'apparaissent pas, mais toute la surface du métal se couvre de stries, sans qu'il y ait formation d'une couche d'oxyde.

c) Au-dessus d'une autre température également bien définie, la surface métallique, préalablement polie, garde un aspect spéculaire.

Dans le cas du nickel, un traitement isotherme conduit à des joints striés si la température du traitement est comprise entre 550 et 750°C. Pour les températures les plus basses de ce domaine, si le temps de traitement est assez long, il apparaît de plus des précipités intergranulaires (fig. 11) que nous n'avons jusqu'ici pas pu identifier. Pour les températures supérieurs ou égales à 800°C, les joints restent lisses.

L'évolution de la forme des stries en fonction du temps du maintien isotherme est la même pour les surfaces libres et pour les joints: il apparaît d'abord une orientation cristallographique bien définie (analogue à la fig. 7), puis deux autres (fig. 8, 12 et 13). Dans les deux cas, ces plans ont des indices faibles.

Remarquons que dans le cas du nickel, la fragilité intergranulaire et la présence de joints striés vont toujours de pair: la fragilité intergranulaire peut être due à l'influence sur l'énergie interfaciale de la couche adsorbée, mais il se peut aussi que la cohésion du joint soit modifiée par la présence d'atomes étrangers et par la géométrie particulière des joints striés.

Nous avons également observé des joints striés dans un alliage FeO (0,013% O) (fig. 14) présentant après refroidissement lent une fragilité intergranulaire marquée. Les observations sont dans l'ensemble très analogues aux celles faites sur le nickel, mais moins nettes, la proportion de joints striés étant ici plus faible. Il apparaît également, aux basses températures de revenu, un précipité intergranulaire (fig. 15) non identifié. De même les surfaces de rupture fragile des aciers doux, qui se font le plus souvent en majeure partie par clivage, présentent généralement quelques zones de décohésion intergranulaire, qui sont parfois striées. Enfin, dans le cas de la fragilité de revenu, les surfaces de rupture intergranulaire présentent quelques zones striées (fig. 16), du moins si la durée du revenu de fragilisation est importante. Nous poursuivons des essais pour préciser dans quelle mesure des phénomènes d'adsorption aux joints sont susceptibles de rendre compte de ces diverses cas de fragilité intergranulaire.

4. Conclusions

1. Les zones déchromées qui accompagnent la précipitation de carbure de chrome dans les aciers inoxydables du type 18-8 ont pu être analysées par dissolution progressive du métal à partir d'une surface de rupture intergranulaire.

Dans la limite des essais effectués, les cas où la zone déchromée a pu être mise en évidence sont ceux pour lesquels la sensibilité à la corrosion intergranulaire est importante.

2. La présence de joints de grains striés, dans un nickel industriel, les conditions de formation des stries et leur géométrie peuvent s'inter-

préter en admettant que des phénomènes d'adsorption intergranulaire abaissent l'énergie interfaciale. Ces phénomènes sont analogues à ceux qui se produisent sur les surfaces métalliques au début de l'oxydation, à haute température et sous pression réduite d'oxygène.

La présence de joints de grains striés et la fragilité intergranulaire vont toujours de pair, dans la limite des essais effectués. Cependant la présence d'une couche adsorbée ne semble pas être le seul facteur qui intervienne dans cette fragilisation : la géométrie du joint semble également jouer un rôle important.

Dans différents autres cas de décohésion intergranulaire, la présence de joints striés conduit à une interprétation analogue.

Reçu le 17 VIII 1961

Institut de Recherches de la Sidérurgie, Saint Germain-en-Laye, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Philibert J., Communication privée, 1957.
2. Hopkinson B. E., Carroll K. G., Nature, 1959, p. 1979.
3. Inman M. C., Tipler H. R., Acta Metal., 1958, **6**, *2*, p. 73 ; Ibid., 1959, **7**, *3*, p. 221.
4. Philibert J., Crussard, C., Wache X., Gerber M., C.R.A.S., 1960, *251*, p. 1289.
5. Chevenard P., *14-ème Congrès de Chimie Industrielle*, Paris, 1934.
6. Plateau J., Henry G., Crussard C., Iron and Steel Special Report, *64*, Londres, 1959, p. 157.
7. Henry G., Plateau J., Wache X., Gerber M., Béhar I., Crussard C., C. R. A. S., 1959, *248*, p. 1510; Mém. Scient. Rev. Mét., 1959, **56**, *4*, p. 417.
8. Moreau J., Henry G., Plateau J., Bull. Micros. Appl., 1958, **8**, p. 109.
9. Moreau J., Benard J., J. Inst. Met., 1954, **83**, p. 87.
10. Moreau J., Benard J., Plateau J., Ztschr. Elektr., 1957, **61**, S. 59.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЕВ ИНТЕРГРАНУЛЯЦИОННОЙ СЕГРЕГАЦИИ В МЕТАЛЛАХ

(Резюме)

Границы зерна представляют собой ослабленные зоны металла и могут служить местами распространения коррозии или интергрануляционного разрыва. Эта хрупкость или чувствительность к коррозии появляется в металлах только в случае когда границы зерна подвержены сегрегации с осаждением, или без него.

Были рассмотрены различные случаи сегрегации. Таким образом установлено снижение хрома вызываемое осаждением карбида хрома в аустените с Ni-Cr что вызывает интергрануляционную коррозию.

Ограничено-местное обогащение границы зерна в олигоэлементах определенных более, илн менее точно, вызывает интергрануляционную хрупкость.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Изменение содержания хрома в зависимости от расстояния до границы зерна в нержавеющей стали типа 18-8 после отпуска в 6 ч при 750° С. Растворение начинается от интергранулярной поверхности разрыва электролитической полировкой.

Рис. 2. — Изменение содержания хрома в зависимости от расстояния до границы зерна в нержавеющей стали типа 18-8 после отпуска в 8 ч при 750° С. Растворение начинается от интергранулярной поверхности разрыва в броме, в спиртовом растворе.

Рис. 3. — Изменение содержания хрома в зависимости от расстояния до границы зерна в нержавеющей стали типа 18-8 после отпуска в 8 ч при 750° С. Растворение начинается от интергранулярной поверхности разрыва электролитической полировкой.

Рис. 4. — Изменение содержания хрома в зависимости от расстояния до границы зерна в нержавеющей стали типа 18-8 после отпуска в 3 ч при 750° С. Растворение начинается от интергранулярной поверхности разрыва электролитнческой полировкой.

Рис. 5. — Изменение содержания хрома в зависимости от расстояния до границы зерна в нержавеющей стали типа 18-8 после отпуска в 6 ч при 850° С. Растворение начинается от интергранулярной поверхности разрыва электролитической полировкой.

Рис. 6. — Изменение содержания хрома в зависимости от толщины растворенного слоя начиная от полированной поверхности пробы из нержавеющей стали типа 18-8 высшей закалки. Растворение производится электролитической полировкой.

Рис. 7. — Никель медленно остуженый, после обработки пря 1 050° С. Микрофрактография интергранулярного разрыва. ×4 000.

Рис. 8. — Никель после 20 мин при 900° С, охлаждение водой, затем 312 ч при 650° С. Микрофрактография. ×16 000.

Рис. 9. — Никель медленно охлажденный после обработки в 1 050° С. Оптическая микрография. ×900.

Рис. 10. — Электронная микрография поверхности пробы чистой меди обработанной при 1 030° С в слабо окисленной атмосфере. ×4 000.

Рис. 11. — Никель обработанный 20 мин при 900° С, охлаждение водой, затем 400 ч при 650°С. Микрофрактография интергранулярного разрыва. ×4 000.

Рис. 12. — Никель обработанный 20 мин при 900° С, охлаждение водой, затем 312 ч при 650° С, охлаждение водой. Микрофрактография интергранулярного раврыва при —196° С. ×16 000.

Рис. 13. — Никель после 20 мин при 900° С, охлаждение водой, затем 1 200 ч при 650° С, охлаждение водой. Микрофрактография интергранулярного разрыва при —196° С. ×16 000.

Рис. 14. — Сплав Fe—O (0,013%). Микрофрактография интергранулярного разрыва при —196°С. ×16 000.

Рис. 15. — Сплав Fe—O (0,13%), обработан 1 ч при 600°С, охлаждение водой. Микрофрактография интергранулярного разрыва при —196°С. ×4 000.

Рис. 16. — Сталь содержащая 0,33% С, 1,12% Mn, 0,24% Ni и 0,11% Cr, закалка в масле при 850°С (30 мин), отпуск 1 ч при 650°С и 96 ч при 500°С. Микрофрактография интергранулярного разрыва при —196°С. ×16 000.

STUDIUL UNOR CAZURI DE SEGREGAŢIE INTERGRANULARĂ ÎN METALE

(Rezumat)

Graniţele grăunţilor constituie zonele slabe ale metalului şi pot fi sediul coroziunii deosebit de intense sau a rupturilor intergranulare. Această fragilitate sau această susceptibilitate la coroziune nu apare decît atunci cînd graniţele grăunţilor sînt sediul segregărilor cu sau fără precipitare veritabilă.

Au fost studiate diferite cazuri de segregaţie. Astfel, s-a constatat o sărăcire de crom datorită precipitării carburii de crom în austenite cu Ni-Cr ce produce coroziunea intergranulară. O îmbogăţire foarte locală a graniţelor grăunţilor în oligoelemente mai mult sau mai puţin bine determinate provocă o fragilitate intergranulară.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Variaţia conţinutului în crom în funcţie de distanţa pînă la graniţa grăuntelui, într-un oţel inoxidabil de tip 18-8, după o revenire de 6 h la 750° C. Dizolvare începînd de la suprafaţa de ruptură intergranulară, prin şlefuire electrolitică.

Fig. 2. — Variaţia conţinutului în crom în funcţie de distanţa pînă la graniţa grăuntelui, într-un oţel inoxidabil de tip 18-8, după o revenire de 8 h la 750° C. Dizolvare începînd de la suprafaţa de ruptură intergranulară, în brom în soluţie alcoolică.

Fig. 3. — Variaţia conţinutului în crom în funcţie de distanţa pînă la graniţa grăuntelui, într-un oţel inoxidabil de tip 18-8, după o revenire de 8 h la 750° C. Dizolvare începînd de la suprafaţa de ruptură intergranulară, prin şlefuire electrolitică.

Fig. 4. — Variaţia conţinutului în crom în funcţie de distanţa pînă la graniţa grăuntelui, într-un oţel inoxidabil de tip 18-8, după o revenire de 3 h la 750° C. Dizolvare începînd de la suprafaţa de ruptură intergranulară, prin şlefuire electrolitică.

Fig. 5. — Variaţia conţinutului în crom în funcţie de distanţa pînă la graniţa grăuntelui, într-un oţel inoxidabil de tip 18-8, după o revenire de 6 h la 850° C. Dizolvare începînd de la suprafaţa de ruptură intergranulară, prin şlefuire electrolitică.

Fig. 6. — Variaţia conţinutului în crom în funcţie de grosimea stratului dizolvat, începînd de la suprafaţa şlefuită a unui eşantion de oţel inoxidabil de tip 18-8, supercălit. Dizolvare prin şlefuire electrolitică.

Fig. 7. — Nichel răcit lent, după tratament la 1 050° C. Microfractografie a rupturii intergranulare. × 4 000.

Fig. 8. — Nichel după 20 min la 900° C, răcire cu apă, apoi 312 h la 650° C. Microfractografie. × 900.

Fig. 9. — Nichel răcit lent, după tratament la 1 050° C. Micrografie optică. × 900.

Fig. 10. — Micrografie electronică a suprafeţei unui eşantion de cupru pur tratat la 1 030° C într-o atmosferă slab oxidantă. × 4 000.

Fig. 11. — Nichel tratat 20 min la 900° C, răcire cu apă, apoi 400 h la 650° C. Microfractografie a rupturii intergranulare. × 4 000.

Fig. 12. — Nichel tratat 20 min la 900° C, răcire cu apă, apoi 312 h la 650° C, răcire cu apă. Microfractografie a rupturii intergranulare la — 196° C. × 16 000.

Fig. 13 — Nichel după 20 min la 900° C, răcire cu apă, apoi 1 200 h la 650° C, răcire cu apă. Microfractografie a rupturii intergranulare la — 196° C. × 16 000.

Fig. 14. — Aliaj Fe — O (0,013%). Microfractografie a rupturii intergranulare la — 196° C. × 16 000.

Fig. 15. — Aliaj Fe — O (0,013%), tratat 1 h la 600° C, răcire cu apă. Microfractografie a rupturii intergranulare la — 196° C. × 4 000.

Fig. 16. — Oţel cu 0,33% C, 1,12 % Mn, 0,24% Ni şi 0,11% Cr, călit în ulei la 850° C (30 min), revenit 1 h la 650° C şi 96 h la 500° C. Microfractografie a rupturii intergranulare la — 196° C. × 16 000.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. C. 669..61

HIGH ENERGY RATE IN THE FORMING OF METALS

BY

A. FARLÍK and VL. OSINA

Applying high energy rate to the forming of metals of different kinds and in various forms of parts, it is a new metal working process and a big step in new trends in the technology of metal working. It impressively shows many yield improvements over conventional methods, from which it is important to point out: a) shortening of the manufacturing cycles (rapid parts production); b) very small waste of material; c) improved surface finish; d) grain refinement; e) precision tolerances; f) sharper radii when required; g) thinner forged or extruded section and for this reason a big reduction of weight of parts.

There are different methods through which the forming of metals could be realized. For instance in Applied Manufacturing Research and Process Developement, Convair Fort Worth, Texas, USA, was developed a pneumatic-mechanical machine which emplois the high energy rate through the sudden release of compressed nitrogen, which acts at the ram bearing a punch, forming the metal in a device with a speed in the order of 2 000 inches per second.

This device is manufactured and marketed in the United States under the trade name of Dynapak.

American industry was becoming interested in developing explosives for the purpose of low-cost forming of metals, in particular by the forming of parts from the sheets.

This paper illustrates in a particular instance the distribution of stresses at the contact surface of a cylindrical part, thrown against a rigid wall with impact velocities overpassing the critical velocity of the used material. This decision to throw the material against a rigid wall (instead of throwing a punch against the metal in the die) comes from experience, that a punch of no metal with best thermical treatment, is not capable to bear such an impact pressure without its own distortion.

For the comparison of this fenomenon with the static one there are here first introduced the results from the forming with very small impact velocities, which are in practice at the normal pressing machines.

Distribution of the stresses in the pressed surface with small forming velocities was very carefully studied by many authors (E. P. Unksov, A. D. Tomlenov, V. V. Sokolovskij a. o.), especially in the classical form of cylinder. A flow of normal and shearing stresses in the pressed surface is a function of ratio from the smallest dimension of the pressed surface and instantaneous height of the pressed part, as well as of the friction at the contact plane. If the ratio is very great according to one condition:

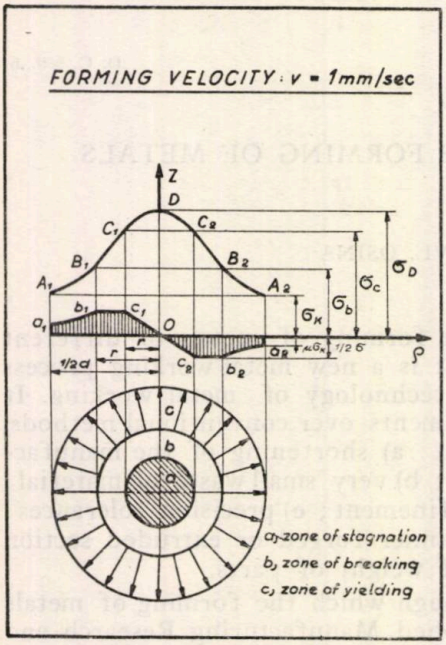


Fig. 1

$$(1) \qquad d/h \geqslant 2\,[1 + \psi(\mu)],$$

then the flows of normal and shearing stresses correspond to following concentric zones (Fig. 1):

1. Zone of stagnation, located in the center of the pressed surface, where the material remains undeformed, so that the macrostructure of material in this zone is the same as it is in natural state. This signifies that there are no strengthenings. The course of normal shearing stresses is following:

$$(2) \quad \begin{cases} 0 \leqslant \varrho \leqslant h, \\ \sigma_y = \sigma_c + [\sigma_k/(2h^2)]\,(h^2 - \varrho^2), \\ \tau = \sigma_k(\varrho/h), \\ \sigma_c = [\sigma_k/(2\mu)]\,[1 + 2(\mu/h)\,(r_b - h)]. \end{cases}$$

2. Zone of braking, concentricaly located to the zone of stagnation. The course of normal and shearing stresses is given by:

$$(3) \quad \begin{cases} r_c \leqslant \varrho \leqslant r_b, \\ \sigma_y = [\sigma_k/(2\mu)][1 + 2(\mu/h)(r_b - \varrho)], \quad \tau = \sigma_k/2. \end{cases}$$

3. Zone of yielding on the circumference of the pressed surface. The course of normal and shearing stresses is following:

$$(4) \quad \begin{cases} r_b \leqslant \varrho \leqslant d/2, \\ \sigma_y = \sigma_k \exp\,[2(\mu/h)\,(d/2 - \varrho)], \quad \tau = \mu\sigma_y. \end{cases}$$

The radius r_c of the zone of stagnation corresponds to the instantaneous height of the pressed material. Equations (2)...(4) express the flow and values of stresses, which are in good accordance with results, obtained by mechanic and piezoelectric methods. The above men-

tioned equations express also the state of stresses in the points of the plane pressed by small forming velocities.

As it was pointed out at the beginning of this article the aim of this paper is to study the distribution of the stresses it the deformation velocity exceeds the so called critical velocity. According to Mr. v. Kármán the critical velocity is defined as such velocity, which deforms a specimen, thrown against a rigid wall, in such a degree, that great plastic deformation appears, or the specimen is splitted. Its value is given by:

$$v_{kr} = \int_0^{\varepsilon_n} \sqrt{\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}\, d\varepsilon, \tag{5}$$

where ϱ is the specific mass of used material, ratio of $d\sigma/d\varepsilon$ is taken from the static tension test diagram and ε_n permanent set corresponding to the ultimate statical stress in tension. It seems that this definition is not able to express sufficiently the relation between the mentioned velocity and the degree of the plastic set. It is now a question if this definition should not be completed with any specific structural condition because the differences between the calculated and measured values are in many cases intolerably great.

The experimental test for discovery of the flow of stresses in the contact plane by great deformation velocities was made with copper cylinders $\varnothing$ 15/25 mm, which are thrown against a rigid wall provided with a rectangular small outlet (orifice) 3×15 mm, at overcritical velocities of 175 m/s and 275 m/s. Through this outlet the accelerated material passed and created a tipical shape of a ridge, which is represented in the Fig 2. The zone of vertical flow has a mirror glance, but the zone of horizontal flow is dull and, in the case of 275 m/s, disturbed, on the border.

In the Fig. 3 there is a comparison of ridges in statical and dynamical states. It was found that the shapes of the ridges at high forming velocities are similar to the statical ones. They are composed of three branches, analytically expressed by similar equations as in the statical cases 2, 3 and 4. This signifies that in the dynamically pressed surface there arise presumably the same zones as in the case of statical loading. The flows of stresses are demonstrated in the Fig. 4.

Further it was found that the ratio of the ordinates of the ridges, corresponding to different deformation velocities, is equivalent to the ratio of the squares of velocities, and consequently to the ratio of kinetic energies. This is demonstrated in the Table 1.

There is also a striking resemblance between the curves of stresses and the wellknown curve of Gauss. It seems that an equation similar to that of Gauss will more simply express the flow of stresses as the equations (2)...(4). According to the curves of ridges the adopted equation of Gauss will receive the following form:

$$\sigma = K_1 \exp(-K_2 \varrho^2), \tag{6}$$

where the constants K_1 and K_2 have the values:

$$K_1 = \sigma_1 \exp[\varrho_1^2/(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)] \ln(\sigma_1/\sigma_2), \quad K_2 = [1/(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)] \ln(\sigma_1/\sigma_2). \tag{7}$$

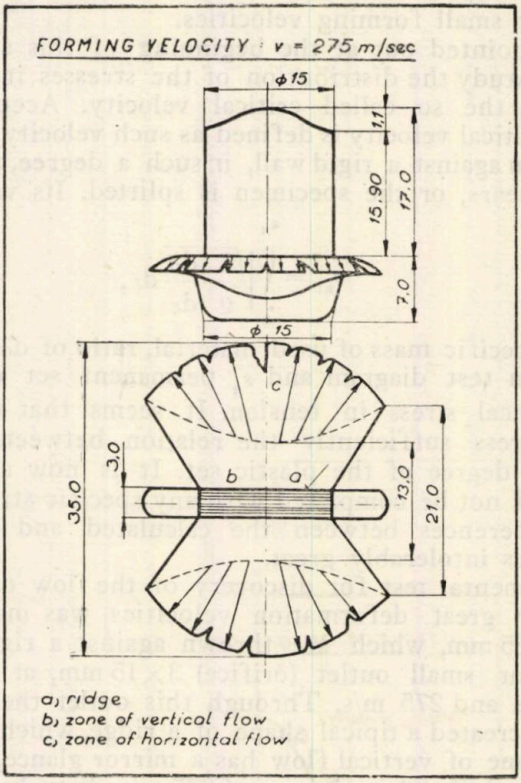


Fig. 2

Table 1

Ordinats relations of ridge and forming velocities $(z_k''/z_k')_{\text{mid}} = (v_k''/v_k')^2$

Place of measurement / $v_{m/s}$		0	1	2	3	4	5	6	7
		Ordinate of the ridge + tongue							
175	Z_k''	5.413	5.390	5.350	5.280	5.180	5.105	5.03	5.00 tongue
275	Z_k'	14.088	14.06	13.93	13.72	13.45	13.27	13.07	13.00 tongue
(Z_k''/Z_k')		2.65	2.72	2.66	2.57	2.50	2.60	2.50	2.60

$(Z_k''/Z_k')_{\text{mid}} = 2.6\,, \qquad (v_k''/v_k')^2 = 2.5$

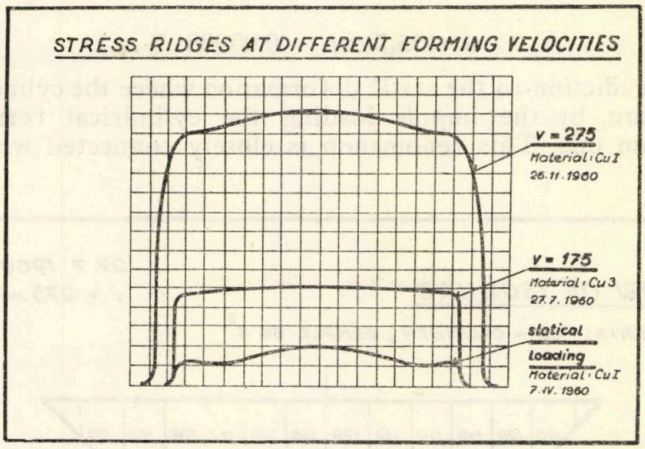

STRESS RIDGES AT DIFFERENT FORMING VELOCITIES
v = 275
Material: Cu I
26.11.1960
v = 175
Material: Cu 3
27.7.1960
statical
loading
Material: Cu I
7.IV.1960

Fig. 3

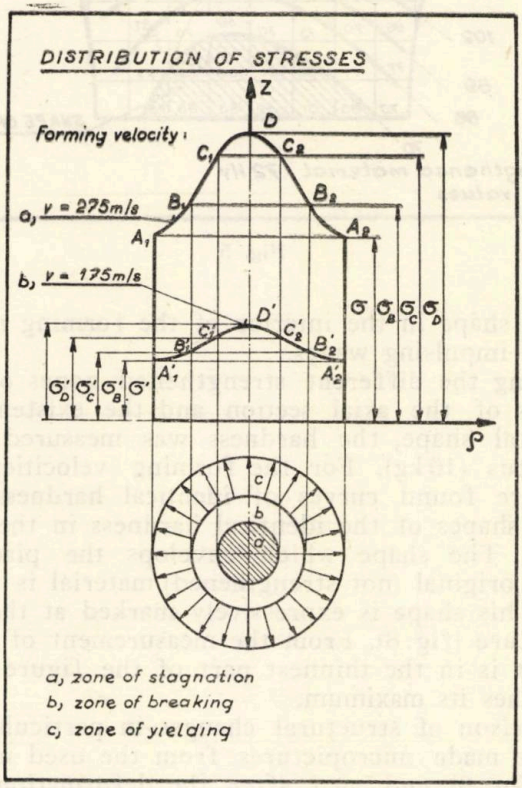

DISTRIBUTION OF STRESSES
Z
Forming velocity:
a) v = 275m/s
b) v = 175m/s
D
C1
C2
B1
B2
A1
A2
D'
C'1
C'2
B'1
B'2
A'1
A'2
σ
σB
σC
σD
σ'D
σ'C
σ'B
σ'
ρ
c
b
a
a) zone of stagnation
b) zone of breaking
c) zone of yielding

Fig. 4

Applied to the deformation velocities of 275 m/s it gives following expression:

$$\sigma = 55{,}5 \exp(-0.00208\,\varrho^2). \tag{8}$$

In contradiction to the static deformation where the cylinder acquires a barrel figure, by the impuls loading the cylindrical form passes in the mushroom one. This fenomenon is closely connected with the exis-

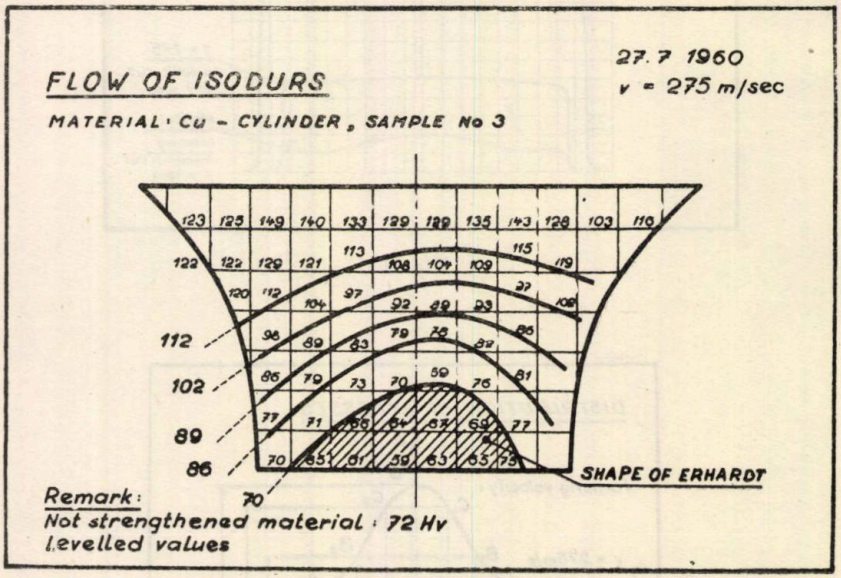


Fig. 5

tence of conical shape in the interior of the forming material, with the plastic flow and impulsing waves.

For studying the different strengthened zones of material in the particular points of the axial section and the existence of the above mentioned conical shape, the hardness was measured with an Poldi-Wickers apparatus (10 kg). For the forming velocities of 175 m/s and 275 m/s there are found curves of identical hardness (isodurs) as the outlines of the shapes of the identical hardness in the interior of the cylindrical part. The shape which envelops the places of the same hardness of the original (not strengthened) material is the so called Erhardt shape. This shape is expressively marked at the Fig. 5...7 and at the micropicture (fig. 8). From the measurement of hardness follows that the greatest is in the thinnest part of the figure where the flow of material reaches its maximum.

For comparison of structural changes in particular points of hardening there are made micropictures from the used material, first the natural state (Fig. 9) and also after the deformation (Fig. 10). From the micropictures it is to be seen the presence of twins (Fig. 11) and

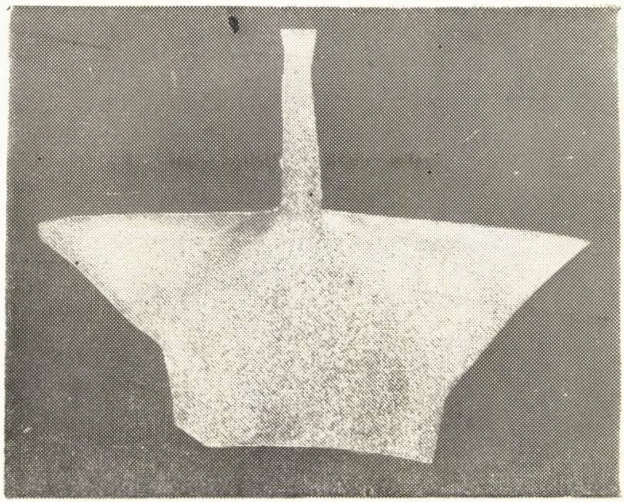


Fig. 8

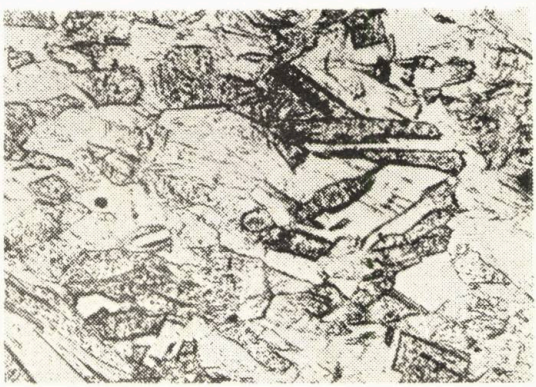


Fig. 9

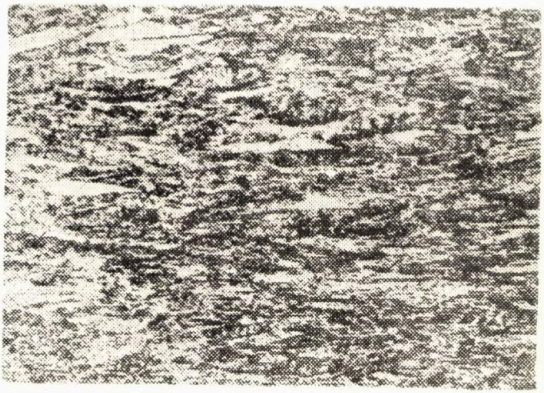


Fig. 10

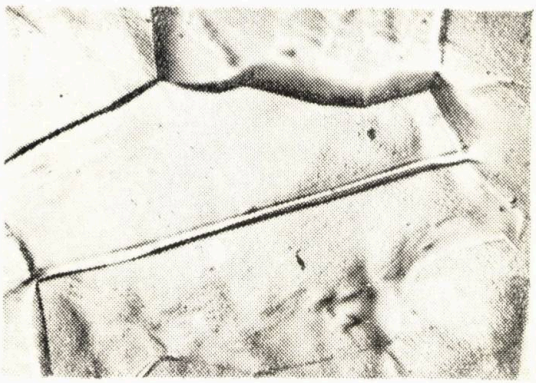


Fig. 11

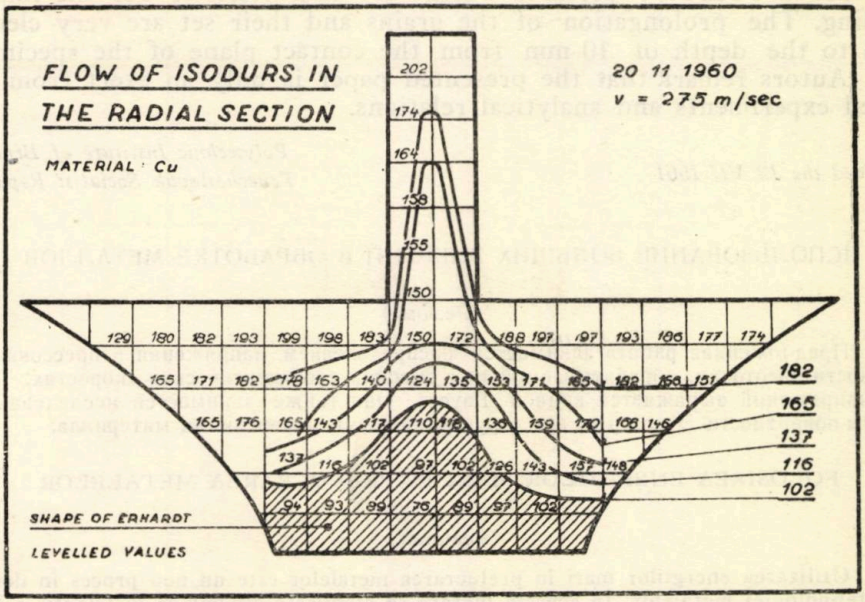

FLOW OF ISODURS IN
THE RADIAL SECTION
MATERIAL : Cu
20 11 1960
v = 275 m/sec
202
174
164
138
155
150
182
165
137
116
102
SHAPE OF ERHARDT
LEVELLED VALUES

Fig. 6

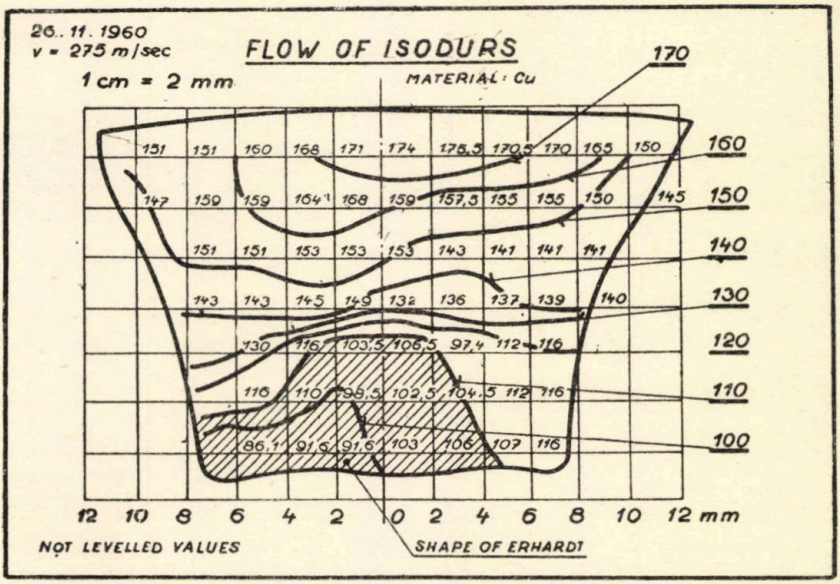

26. 11. 1960
v = 275 m/sec
1 cm = 2 mm
FLOW OF ISODURS
MATERIAL : Cu
170
160
150
140
130
120
110
100
12 10 8 6 4 2 0 2 4 6 8 10 12 mm
NOT LEVELLED VALUES
SHAPE OF ERHARDT

Fig. 7

also the Neuman's pictures whiche are characteristic for the impuls loading. The prolongation of the grains and their set are very clearly seen to the depth of 10 mm from the contact plane of the specimen.

Autors remark that the presented paper is only an exert from realized experiments and analytical relations.

Received the 12 VII 1961

Polytechnic Institute of Brno,
Tchechoslovak Socialist Republic

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЙ В ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ

(Резюме)

Предложенная работа занимается распределением напряжений в прессованной плоскости заготовки, обрабатываемой при высоких сверхкритических скоростях. Течение напряжений выражается кривой Гаусса. Она также занимается исследованием формы поверхности Эргардта и структуральными изменениями материала.

FOLOSIREA ENERGIILOR MARI ÎN PRELUCRAREA METALELOR

(Rezumat)

Utilizarea energiilor mari în prelucrarea metalelor este un nou proces în domeniul tehnologiei metalelor. În această lucrare se stabileşte cîmpul de distribuţie a tensiunilor în planul presat al prefabricatului supus la prelucrare în prezenţa vitezelor mari supercritice. Se studiază şi forma suprafeţei lui Erhardt precum şi modificările structurale ale materialului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 621.824

ÎNCERCĂRI PE UN DISPOZITIV DE TURAŢIE ÎNALTĂ

DE

N. G. POPINCEANU, M. D. GAFIŢEANU şi M. D. PĂUN

1. Scurtă descriere

Obţinerea turaţiilor înalte necesare proceselor de rectificare interioară a găurilor mici este deosebit de dificilă datorită construcţiei complicate şi a costului foarte ridicat al lagărelor.

Originalitatea dispozitivului bazat pe principiul roţilor de fricţiune [1] constă în aceea că utilizează lagăre de construcţie simplă, fie cu rulmenţi, fie cu cuzineţi.

Din fig. 1 reiese principiul de funcţionare al dispozitivului amintit. Rolele $2'$, $2''$ şi $2'''$ sînt rotite de arbori rezemaţi pe lagăre cu rulmenţi de construcţie obişnuită. Aceste role antrenează, pe principiul roţilor de

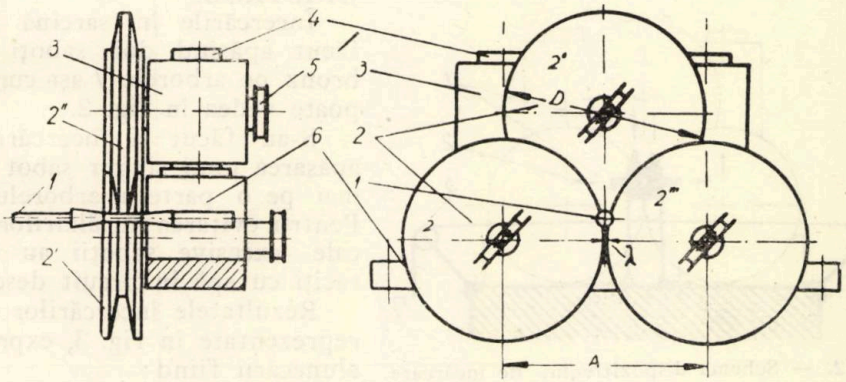


Fig. 1.— Schema dispozitivului. *1* — Arbore de turaţie înaltă ; $2'$, $2''$, $2'''$ — role de antrenare ; *3* — corp mobil ; *4* — coloane de ghidare ; *5* — roţi de curea *6* — corp de bază.

fricţiune, arborele de turaţie înaltă *1* ; rolele $2'$ şi $2'''$ sînt prevăzute cu un şanţ în care pătrunde pe o anumită adîncime rola $2''$.

Turaţia n_1 a arborelui *1* depinde de turaţia n_2 a rolelor $2'$, $2''$ şi $2'''$ şi de raportul dintre diametrele rolelor $D' = D'' = D''' = D$ şi diametrul D_1 al arborelui *1*. Dacă se neglijează alunecarea se poate scrie :

$$n_1/n_2 = D/D_1 \text{ sau } n_1 = n_2 D/D_1 = n_2 K.$$

Turaţia n_2 se alege în aşa fel încît să nu depăşească turaţia limită a rulmenţilor pentru arborii *2'*, *2''*, *2'''*.

Varianta dispozitivului în construcţia proiectată de autori are următoarele caracteristici: a) rolele *2'*, *2''*, *2'''* sînt confecţionate din oţel de rulmenţi, RUL 3, duritate 62 HRC şi cu diametrul exterior $D' = D'' = D''' = D = 200$ mm; b) arborele *1* este realizat tot din oţel de rulmenţi RUL 3, duritatea 62 HRC. S-au făcut încercări pe cinci arbori (trei cu diametrul de 10 mm şi doi cu diametrul de 15 mm); c) distanţa dintre axele rolelor *2'* şi *2''* s-a fixat la 200,5 mm; d) arborii rolelor au fost separat antrenaţi, la aceeaşi turaţie, prin curele, de un motor de curent continuu de 110 V a cărui turaţie se putea regla în limite largi (pînă la aproximativ 1600 rot/min).

Printr-un raport de transmisie de la arborele motor la arborii rolelor *2'*, *2''*, *2'''* egal cu 2 s-au putut antrena rolele la turaţii de ordinul 3200 rot/min, turaţia arborelui *1* atingînd: a) $n_1 = n_2 D/D_1 = 3200.200/10 = 64000$ rot/min, pentru arborele cu diametrul de 10 mm; b) $n_1 = n_2 D/D_1 = 3200.200/15 = 42500$ rot/min, pentru arborele cu diametrul de 15 mm.

2. Rezultatele încercărilor

S-au făcut încercări pentru determinarea alunecărilor în sarcină şi la gol, turaţiile măsurîndu-se cu ajutorul unui stroboscop de tip ORISTROB.

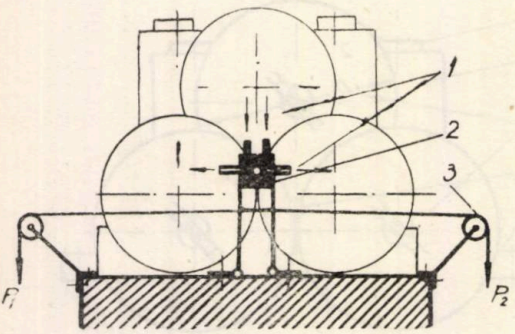


Fig. 2. — Schema dispozitivului de încărcare. *1* — role de antrenare; *2* — saboţi; *3* — role de ghidare; → circuit cu apă de răcire.

Încercările în sarcină s-au făcut apăsînd doi saboţi din bronz pe arborele *1* aşa cum se poate vedea în fig. 2.

S-au făcut şi încercări cu apăsarea unui singur sabot numai pe o parte a arborelui *1*. Pentru evitarea încălzirilor locale excesive saboţii au fost răciţi cu apă în circuit deschis.

Rezultatele încercărilor sînt reprezentate în fig. 3, expresia alunecării fiind:

$$\varepsilon = n_1 D_1/(n_2 D).$$

Încercări fără a se trasa curbe de alunecare, cu un arbore de 10 mm, s-au întreprins în sarcină, pînă la turaţia de 120000 rot/min şi la gol, pînă la turaţia de 180000 rot/min.

S-a constatat că alunecarea se menţine între limitele uzuale pentru transmisii cu roţi de fricţiune.

Prin antrenarea celor trei role cu o singură curea se obţin rezultate asemănătoare.

De asemenea s-au efectuat măsurători referitoare la bătaia radială a arborelui *1* pe capul căruia se fixează piatra de rectificat.

Se poate observa (fig. 4) că bătaia radială a arborelui *1* depinde de

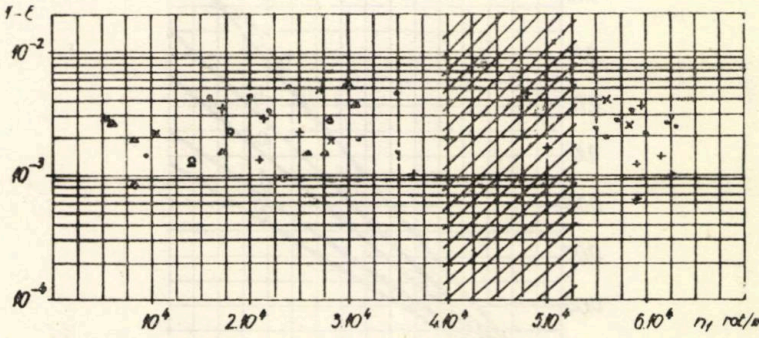


Fig. 3.—Dependența dintre mărimea 1—ε și turația arborelui *1*. • — ∅ 10 mm, la gol; + — ∅ 10 mm, sarcină 200 g; × — ∅ 10 mm, sarcină 700 g; o — ∅ 15 mm, la gol; Δ — ∅ 15 mm, sarcină 200 g; ▲ — ∅ 15 mm, sarcină 500 g; ■ — ∅ 15 mm, sarcină 700 g. Zona haşurată reprezintă zona de rezonanță pentru arborele *1* cu diametrul de 10 mm.

precizia de execuție și în special de bătaia radială a rolelor de antrenare *2'* și *2'''*, cu diametrele $D' = D''' = D$.

Dacă: a) se neglijează bătaia radială proprie a arborelui *1*; b) rolele de antrenare au diametre egale; c) se admite că bătaia radială E este aceeași pentru rolele de antrenare *2'* și *2'''* și că poziția rolei *2'''* este totdeauna simetrică în rotația ei în raport cu poziția rolei *2'* față de axa *xx*, fapt care atrage deplasări maxime ale arborelui *1* pe direcția *xx*, se poate scrie

$$\Delta = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OB}^2} - \sqrt{\overline{OC'}^2 - \overline{OB}^2}\,.$$

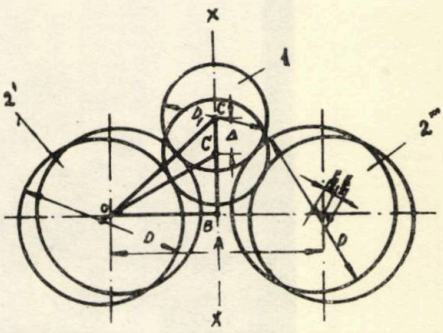


Fig. 4. — Determinarea deplasării arborelui *1* în funcție de bătaia radială a rolelor de antrenare *2'* și *2'''*.

Însă:

$$\overline{OC} = (D + D_1 + E)/2\,,$$
$$\overline{OC'} = (D + D_1 - E)/2\,,$$
$$A = D + \lambda,\ \overline{OB} = A/2.$$

După unele transformări se obține în cele din urmă:

$$\Delta \simeq E(D + D_1)/\sqrt{(2D + D_1 + \lambda)(D_1 - \lambda)},$$

unde λ reprezintă distanța indicată pe fig. 2.

Reprezentarea grafică a acestei funcții, neglijînd pe λ, pentru $D = 200$ mm, este redată în fig. 5.

De asemenea s-au observat vibraţii la arborele *1*, atingînd o valoare maximă la turaţiile critice, care în general au corespuns cu cele calculate în faza de proiect (pentru ∅ 10 mm, 35 000...50 000 rot/min).

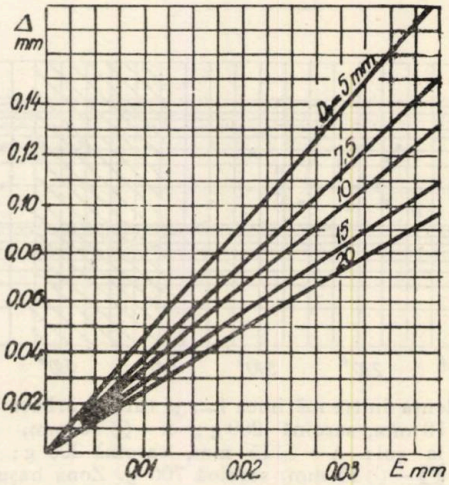


Fig. 5. — Dependenţa dintre deplasarea arborelui *1* în lungul axei *xx* în funcţie de bătaia radială a rolelor de antrenare *2'* şi *2'''*, pentru $D=200$ mm.

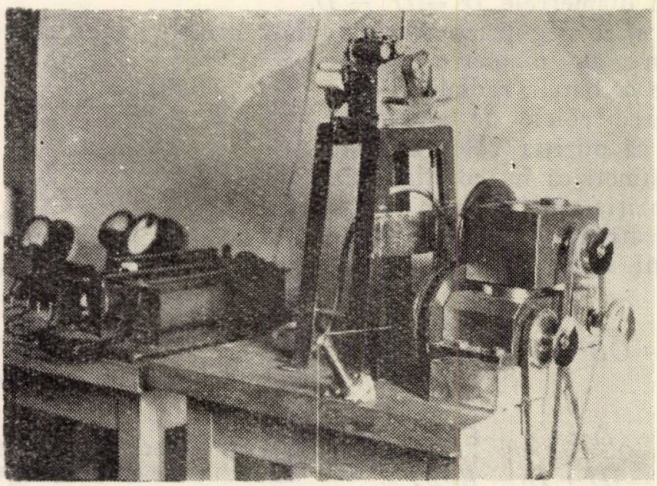


Fig. 6. — Ansamblul instalaţiei de încercare.

Încercările au fost întreprinse un timp îndelungat fără să se observe fenomene de uzură la suprafeţele de rostogolire ale rolelor *2'*, *2''*, *2'''* sau a arborelui *1* (presiunea de contact ~ 8 000 kgf/cm^2).

Calitatea suprafeţei, în urma funcţionării, s-a îmbunătăţit în mică măsură, prin turtirea asperităţilor, trecînd de la $R_z = 0{,}8\,\mu$ la $R_z = 0{,}4\,\mu$. Ansamblul instalaţiei de încercare este reprezentat în fig. 6.

În prezent se fac încercări şi măsurători pe un asemenea dispozitiv montat în producţie pentru executarea rectificării interioare a găurilor mici.

3. Concluzii

Din cele relatate mai sus şi pe baza încercărilor întreprinse rezultă că asemenea dispozitive prezintă mari avantaje atît în privinţa costului execuţiei cît şi a durabilităţii.

Cu materiale existente în ţară, fără piese de import, se pot obţine astfel turaţii chiar pînă la 500 000 rot/min. Dispozitivul funcţionează cu zgomot redus.

Precizia de rotaţie a arborelui *1* depinde în cea mai mare măsură de precizia de rotaţie a rolelor de antrenare *2'* şi *2'''*.

Dispozitivul, în varianta proiectată de autori, se poate adapta cu uşurinţă pe diverse tipuri de maşini unelte.

Primit la 10 IV 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanisme şi organe de maşini

BIBLIOGRAFIE

1. Kopczynski J. F., Iron Age, 1956, *19*, p. 197.

ИСПЫТАНИЯ НА ПРИСПОСОБЛЕНИИ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ОБОРОТОВ

(Резюме)

Даются результаты испытаний что касается скольжения и точного вращения произведенных на приспособлении для максимального числа оборотов типа Копчинский подверженном конструктивным изменениям спроектированными авторами.

Указывается, что подобное приспособление значительно выгоднее существующих до сих пор, построение его не требует частей заграничного производства. Это приспособление легко монтируется на различные станкис целью введеннния внутрених поправок.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Схема приспособления. *1* — вал максимального числа оборотов. *2'*, *2''*, *2'''* — ролики привода; *3* — подвижной корпус; *4* — направляющий вал; *5* — колеса приводного ремня; *6* — основной корпус.

Рис. 2. — Схема нагрузочного приспособления. *1* — ролики привода; *2* — колодки; *3* — направляющие ролики; → цикл водяного охлаждения.

Рис. 3. — Зависимость между величиной $1 - \varepsilon$ и числом оборотов вала *1* при нагрузке и при холостом ходе. • — ∅ 10 мм прихо лостом ходе. + — ∅ 10 мм при нагрузке в 200 гр; × — ∅ 10 мм при нагрузке в 700 гр; o — ∅ *15* мм при холостом ходе; Δ — ∅ 15 мм при нагрузке в 200 гр; ▲ — ∅ 15 мм при нагрузке в 500 гр; ■ — ∅ 15 мм при нагрузке в 700 гр.

Рис 4. — Определение перемещения вала *1* в зависимости от радиального перебоя роликов привода *2'* и *2'''*.

Рис. 5 — Зависимость между перемещением вала *1* по длине оси *xx* в зависимости от радиального перебоя роликов привода *2'* и *2'''* для $D = 200$ мм.

Рис. 6 — Общий вид испытываемого приспособления.

VERSUCHE AUF EINER VORRICHTUNG MIT HOHER DREHZAHL

(Zusammenfassung)

Die Arbeit enthält die Ergebnisse der Versuche betreffs Gleitschlupf und Laufgenauigkeit auf einer Vorrichtung mit hoher Drehzahl, Typ Kopczynski, in der von den Verfasser entworfenen Variante.

Erklärung der Abbildungen

Abb 1. — Schema der Vorrichtung. *1* — Hochdrehzahlwelle ; *2'*, *2''*, *2'''* — Antriebsrollen ; *3* — Beweglicher Körper ; *4* — Lenkbaren ; *5* — Riemenscheiben ; *6* — Grundkörper.

Abb. 2. — Schema der Belastungsweise. *1* — Antriebsrollen ; *2* — Bremsbacken ; *3* — Rollen ; → Stromwasser.

Abb. 3. — Abhängigkeit der Grosse $1 - \varepsilon$ von der Drehzahl der Welle *1*, mit und ohne Belastung. • — ∅ 10 mm, Leerlauf ; + — ∅ 10 mm, unter Belastung 200 g ; × — ∅ 10 mm, unter Belastung 700 g ; o — ∅ 15 mm, Leerlauf ; Δ — ∅ 45 mm, unter Belastung 100 g ; ▲ — ∅ 15 mm, unter Belastung 500 g ; ■ — ∅ 15 mm, unter Belastung 700 g ; dass Schraffierte Gebiet stellt die Resonanzzone der Welle *1* dar.

Abb. 4. — Abweichung der Welle *1* abhängig von dem Radialschlag der Antriebsrollen *2'* und *2''*.

Abb. 5. — Abhängigkeit zwischen Abweichung der Welle *1* längs der Achse *xx* von dem Radialschlag der Antriebsrollen *2''* und *2'''* für $D = 200$ mm.

Abb. 6. — Gesamtbild der Versuchsinstallation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 621.7.01

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORŢEI PRINCIPALE DE AŞCHIERE ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE LONGITUDINALĂ LA OŢELURILE ROMÎNEŞTI

Nota VIII

GRUPA OŢEL CARBON PENTRU SCULE, STAS 1700-50

DE

AUREL RĂILEANU şi DAN NICOLESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 4—6 februarie 1960

În această Notă Autorii dau rezultatele experienţelor întreprinse cu scopul de a determina exponenţii x_p, y_p şi constanta C_p la strunjirea longitudinală a oţelurilor OSC 7, OSC 8, OSC 8 M, OSC 9, OSC 10, OSC 10 M, OSC 12 şi OSC 13, furnizate în anul 1959 de întreprinderea „Industria Sîrmei", Cîmpia Turzii.

Experienţele s-au executat pe un strung romînesc Iosif Rangheţ, folosindu-se cuţite din oţel rapid R 18 cu următoarea geometrie;

$$\alpha = 10°, \quad \gamma = 25°, \quad \lambda = 0°, \quad K = 45°, \quad K' = 15°,$$

fără lichide de răcire şi ungere.

În procesul de aşchiere cuţitul s-a montat pe un dinamometru tip G. A. L e v i t, prevăzut cu amortizor hidraulic şi cu pîrghia de transmitere legată rigid de amortizor [1], [2].

Pentru stabilirea valorilor numerice ale exponenţilor x_p, y_p şi a constantei C_p din relaţia:

$$P_z = C_p t^{x_p} s^{y_p} \tag{1}$$

s-au efectuat experienţe la diferite valori pentru t şi s, cu trei viteze de tăiere v menţinute aproximativ constante. Pentru aceleaşi valori ale variabilelor t şi s, la cele trei viteze de tăiere, s-au calculat valorile medii şi apoi forţele P_z, după care s-au trasat, prin puncte, în diagrame dublu logaritmice, grupele de curbe aproximate cu drepte pentru $t = \text{const}$ (fig. 1...8).

În continuare, luînd pe fiecare dreaptă cîte două puncte, s-au calculat valorile exponenţilor x_p şi y_p cu ajutorul relaţiilor:

$$x_p = \frac{\log (P_{z_2}/P_{z_1})}{\log (t_2/t_1)}, \tag{2}$$

$$y_p = \frac{\log (P'_{z_2}/P'_{z_1})}{\log (s_2/s_1)}, \tag{3}$$

obţinute prin scădere, după logaritmarea expresiei (1), în care s-au introdus valorile corespunzătoare pentru forţa principală de tăiere P_z.

Pe baza valorilor x_p şi y_p, corespunzătoare numărului de drepte din fiecare diagramă, se determină valorile medii x_{pm} şi y_{pm} ale exponenţilor, valori date în tabelul 1.

Tabelul 1

Oţel STAS 1700-50	H_B kgf/mm²	x_{pm}	y_{pm}	C_{pm}
OSC 7	191	0,94	0,71	177
OSC 8	189	1,09	0,74	176
OSC 8M	232	1,02	0,82	229
OSC 9	184	1,02	0,76	188
OSC 10	202	1,06	0,74	173
OSC 10M	198	0,99	0,78	229
OSC 12	210	0,87	0,72	209
OSC 13	212	0,91	0,69	222

Constanta C_p se calculează cu relaţia:

$$C_p = \frac{P_z}{(t^{x_{pm}} s^{y_{pm}})}, \tag{4}$$

în care se introduc succesiv valorile forţei principale de tăiere pentru $s=1$ şi apoi pentru $t=1$. Făcînd media acestor valori se obţine pentru fiecare material o valoare medie C_{pm}, redată de asemenea în tabelul 1.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte, scule şi utilaj

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh. şi colab., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3-4*, p. 313.
2. Caşler Gh. şi colab., Ibid., 1958, **IV (VIII)**, *1-2*, p. 377.
3. Bauşic V. şi colab., Ibid., 1958, **IV (VIII)**, *1-2*, p. 379.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГЛАВНОЙ РЕЖУЩЕЙ СИЛЫ РУМЫНСКОЙ СТАЛИ В ПРОЦЕССЕ ПРОДОЛЬНОЙ РЕЗКИ

Сообщение VIII

Группа инструментальная углеродистая сталь STAS 1700-50

(Резюме)

Пользуя динамометр типа Г. А. Левита для определения параметров C_p, x_p, y_p необходимых для расчета главной режущей силы данной выражением (1), авторы устанавливают величину параметров для следующих сортов стали: OSC 7, OSC 8, OSC 8M, OSC 9, OSC 10, OSC 10 M, OSC 12 и OSC 13, STAS 1700-50. В данной заметке результаты, полученные экспериментальным путем, даны на диаграмме с дважды логарифмической шкалой при помощи функций $P_z = F_1(s)$ и $P_z = F_2(t)$. По этой диаграмме легко определяются как величина параметров, так и их влияние на процесс резания.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS SOUMIS AU TOURNAGE LONGITUDINAL

Note VIII

Les aciers standardisés 1700-50

(Résumé)

En utilisant le dynamomètre type G. A. Levit pour la détermination des paramètres C_p, x_p et y_p nécessaires au calcul de la force principale du coupe, donnée par l'éxpression (1), les Auteurs établissent les valeurs de ces paramètres pour les suivantes sortes d'acier: OSC 7, OSC 8, OSC 8 M, OSC 9, OSC 10, OSC 10 M, OSC 12 et OSC 13, STAS 1700-50. Dans cette Note les résultats obtenus par voie expérimentale sont représentés sur un diagramme à échelle doublement logarithmique, par les fonctions $P_z = F_1(s)$ et $P_z = F_2(t)$. À l'aide d'un tel diagramme on peut facilement déterminer, d'une part, les valeurs des paramètres, et d'autre part, leur influence sur les processus de coupe.

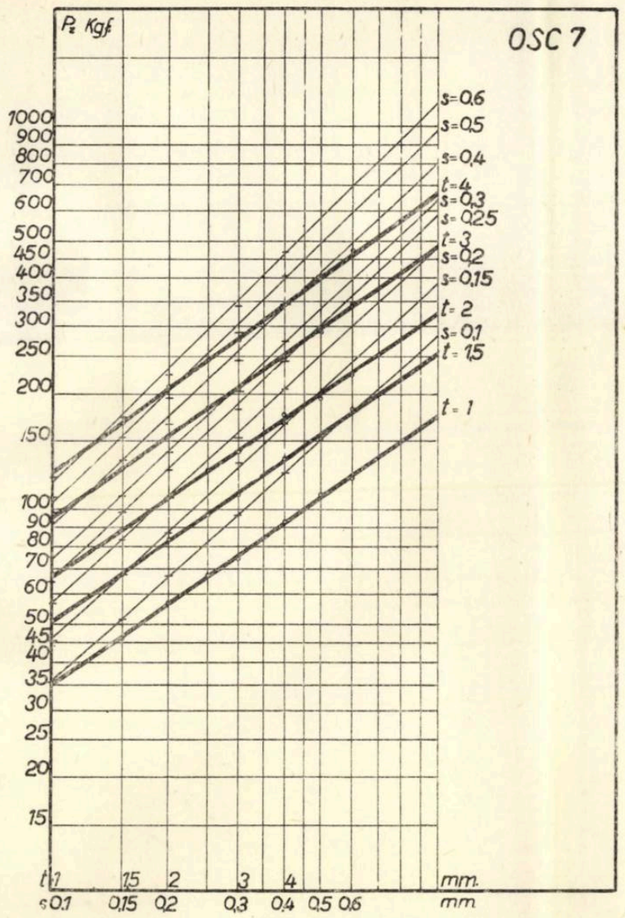


Fig. 1

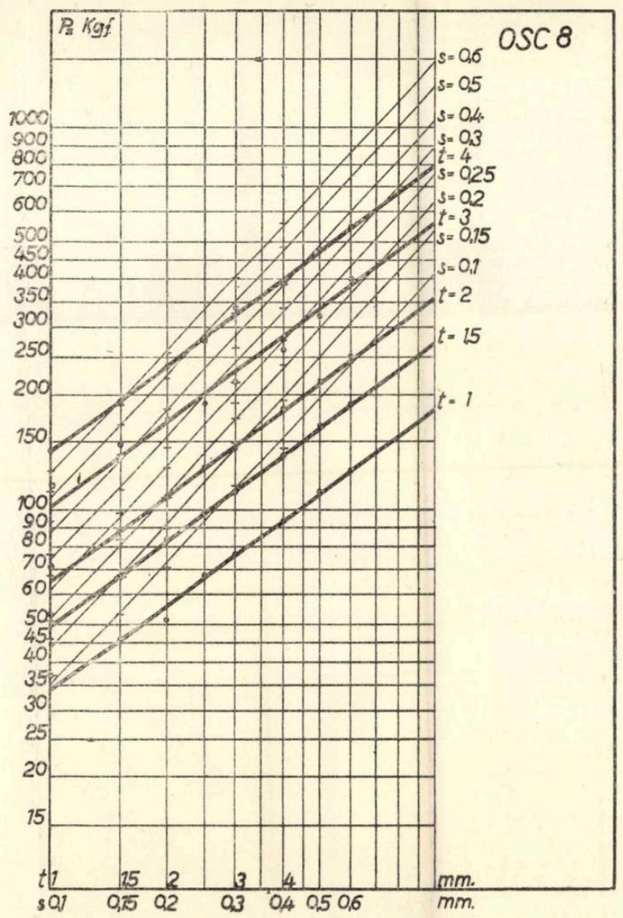


Fig. 2

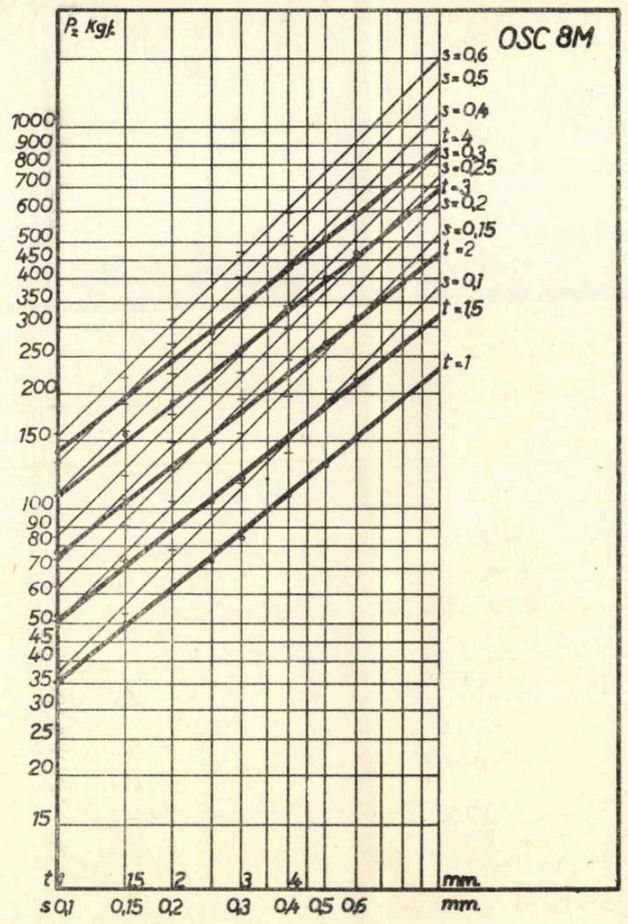


Fig. 3

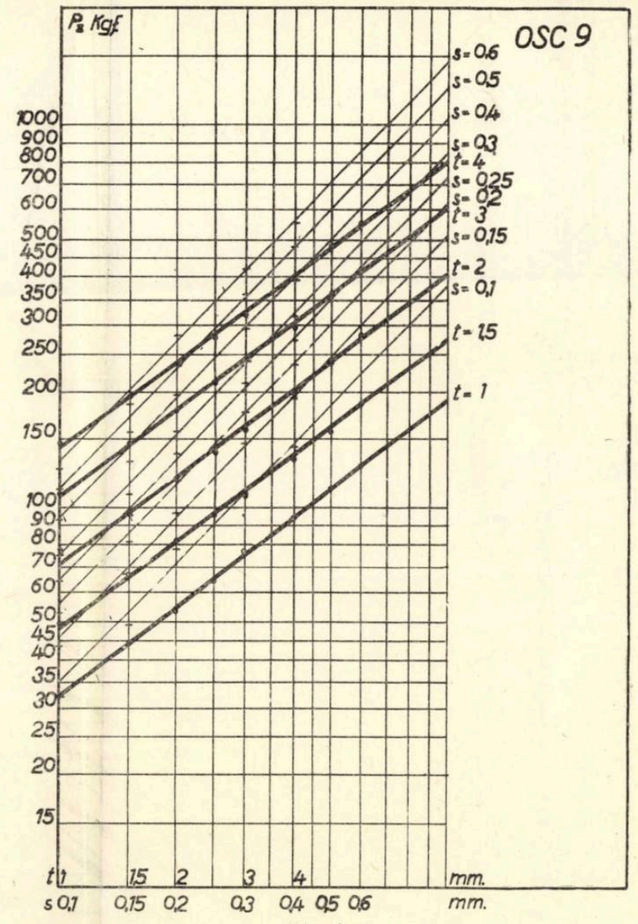


Fig. 4

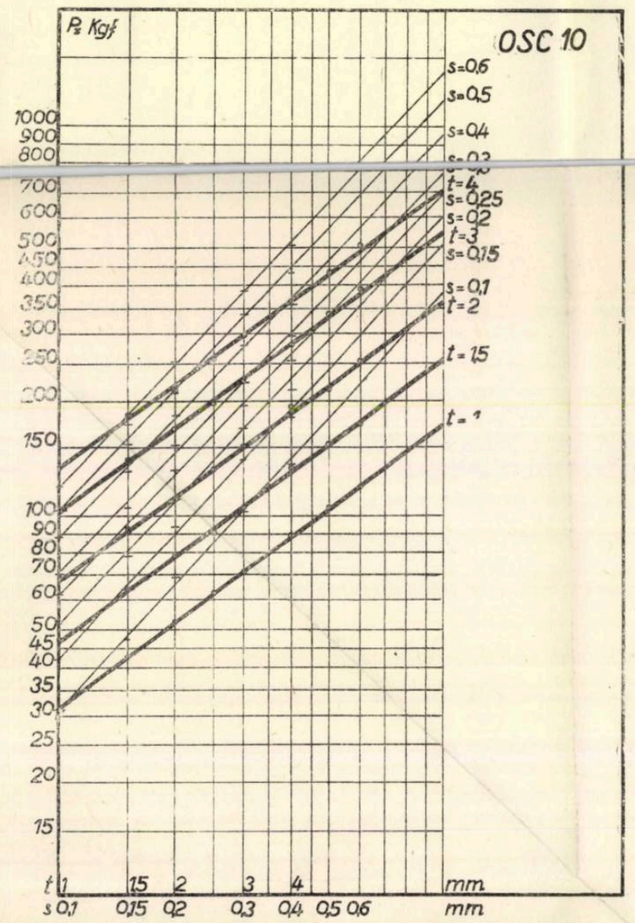


Fig. 5

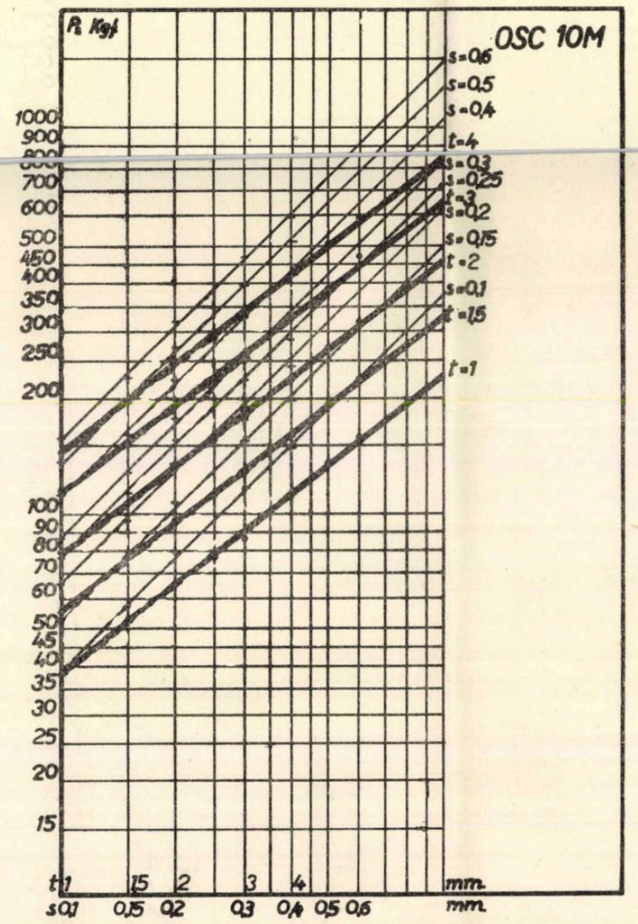


Fig. 6

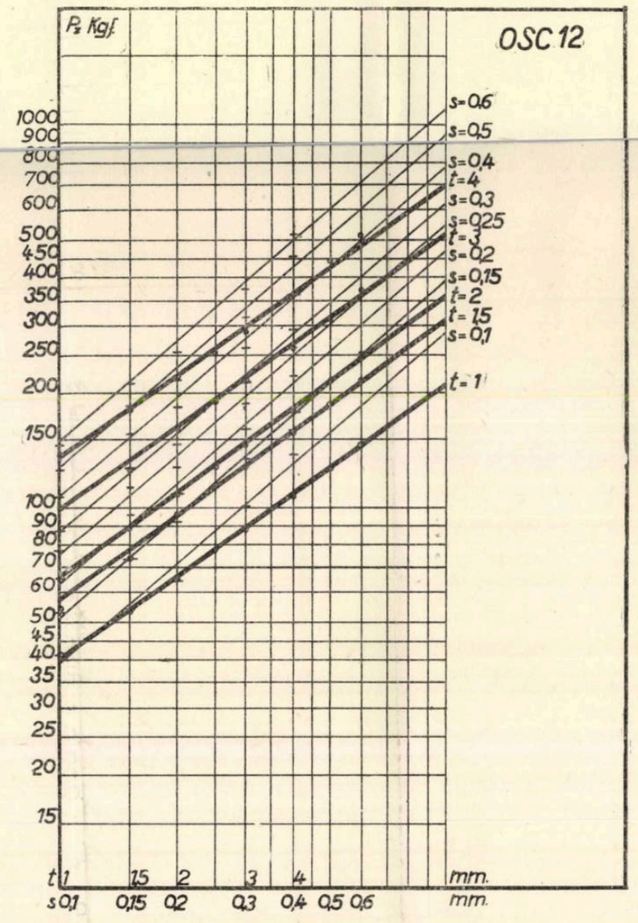


Fig. 7

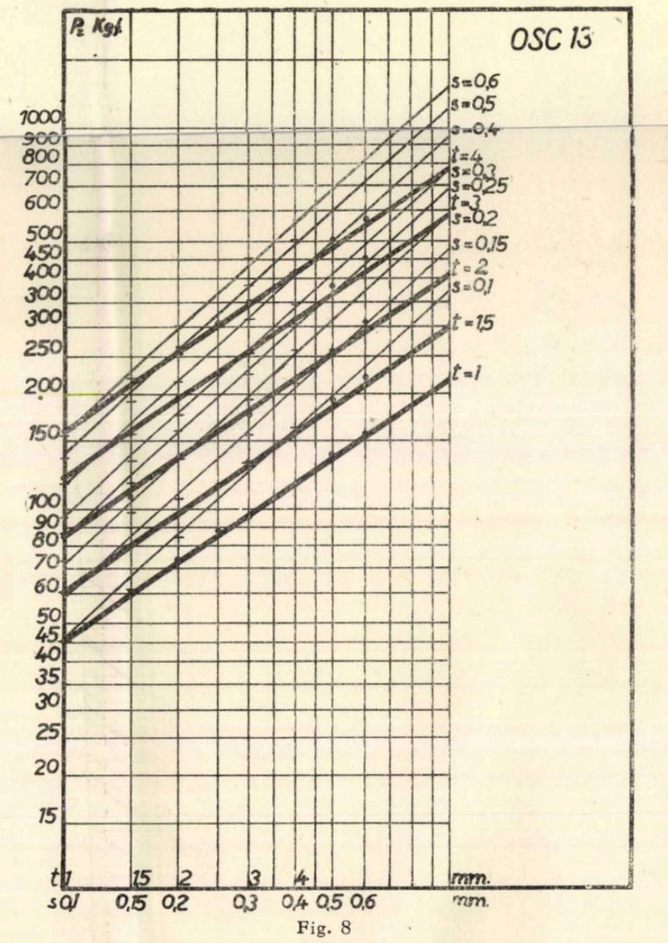


Fig. 8

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Construcții. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 1—2, 1962

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VII (XI), Fasc. 3–4, 1961

Д. К. 539.4 ; 624.04

РАСЧЕТ РАМ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

К. К. ПОНОМАРЕВ

1. *Введение*

В статье излагается матричный прием статического и динамического расчета сложных рам открытого и замкнутого контуров.

Применение матриц приводит к разработке алгорифма значительно упрощающего решение рамных систем с высокой степенью статической неопределимости. Метод особенно удобный для программирования на электронных вычислительных машинах.

2. *Статический расчет*

Рассмотрим пространственную работу рамы. Плоская рама является тогда более частным случае.

Как известно, в пространственной задаче усилия и деформации элемента рамы (рис. 1) связаны 12 линейными дифференциальными уравнениями первого порядка, эквивалентными системе :

$$(1)\quad \begin{cases} -EF\,(\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}X^2) = p\,(X), \\ EI_y\,(\mathrm{d}^4z/\mathrm{d}X^4) = q_z\,(X), \\ -GI_p\,(\mathrm{d}^2\vartheta/\mathrm{d}x^2) = t\,(X), \\ EI_z\,(\mathrm{d}^4y/\mathrm{d}X^4) = q_y\,(X). \end{cases}$$

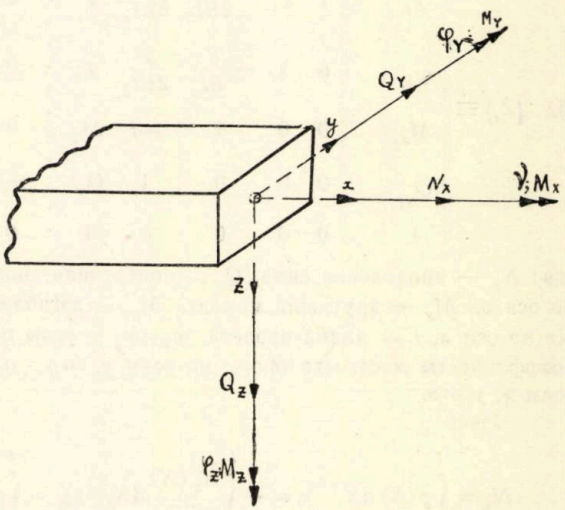


Рис. 1

Здесь : x — продольное смещение, y и z — прогибы по осям y и z, X, Y, Z — текущие координаты соответствующих осей, ϑ — угол закручивания, E — модуль упругости, G — то же при сдвиге, F — площадь поперечного сечения, I — момент инерции сечения, p, q_y, q_z, t — заданные функции нагрузки по координатным осям и при кручении, I_p — полярный момент инерции.

Непосредственное интегрирование уравнений (1) с включением тривиальной единицы приводит к следующим матричным зависимостям :

$$(2)\qquad \{X_i\} \equiv \begin{Vmatrix} x_i \\ N_{x_i} \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -l/(EF) & \bar{x} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \bar{N}_x & \vdots & -\varkappa_x \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{i-1} \\ N_{x_{i-1}} \\ 1 \end{Vmatrix} = \| L_{x_i} \| \cdot \{X_{i-1}\},$$

$$(3)\qquad \{Y_i\} \equiv \begin{Vmatrix} z_i \\ \varphi_{y_i} \\ M_{y_i} \\ Q_{z_i} \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -l & \frac{l^2}{2EI_y} & \frac{l^3}{GEI_y} & \bar{z} & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI_y} & -\frac{l^2}{2EI_y} & \bar{\varphi}_y & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & \bar{M}_y & \vdots & 0 & -\mu_{\varphi_y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{Q}_z & \vdots & -\varkappa_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} z_{i-1} \\ \varphi_{y_{i-1}} \\ M_{y_{i-1}} \\ Q_{z_{i-1}} \\ 1 \end{Vmatrix} = \| L_{y_i} \| \cdot \{Y_{i-1}\},$$

$$(4)\qquad \{M_{x_i}\} \equiv \begin{Vmatrix} \vartheta_i \\ M_{x_i} \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -l/(GI_p) & \bar{\vartheta} & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \bar{M}_x & \vdots & -\mu_\vartheta \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \vartheta_{i-1} \\ M_{x_{i-1}} \\ 1 \end{Vmatrix} = \| L_{M_{x_i}} \| \cdot \{M_{x_{i-1}}\},$$

$$(5)\qquad \{Z_i\} \equiv \begin{Vmatrix} y_i \\ \varphi_{z_i} \\ M_{z_i} \\ Q_{y_i} \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EI_z} & \frac{l^3}{6EI_z} & \bar{y} & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI_z} & \frac{l^2}{2EI_z} & \bar{\varphi}_z & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l & M_z & \vdots & 0 & -\mu_{\varphi_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q_y & \vdots & \varkappa_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_{i-1} \\ \varphi_{z_{i-1}} \\ M_{z_{i-1}} \\ Q_{y_{i-1}} \\ 1 \end{Vmatrix} = \| L_{z_i} \| \cdot \{Z_{i-1}\},$$

где: N_x — продольная сила, Q_y — поперечная сила по оси y, Q_z — поперечная сила по оси z, M_x — крутящий момент, M_y — изгибающий момент по оси y, M_z — то же по оси z, l — длина пролета, φ_y, φ_z — углы поворотов по осям y и z, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$ — коэффициенты жесткости опоры по осям y, μ_ϑ, μ_{φ_y}, μ_{φ_z} — то же при повороте по осям x, y и z.

Здесь

$$\bar{N}_x = \int_0^l p(X)\,dX, \quad \bar{x} = -\int_0^l \frac{\bar{N}_x(X)}{EF}\,dX, \quad \bar{Q}_z = \int_0^l q_z(X)\,dX, \quad \bar{M}_y = \int_0^l \bar{Q}_z(X)\,dX,$$

$$\bar{\varphi}_y = -\int_0^l \frac{\bar{M}_y(X)}{EI_y}\,dX, \quad \bar{z} = -\int_0^l \frac{\bar{\varphi}_y(X)}{EI_y}\,dX, \quad \bar{M}_x = \int_0^l t(X)\,dX, \quad \vartheta = -\int_0^l \frac{\bar{M}_x(X)}{GI_p}\,dX,$$

$$\bar{Q}_y = \int_0^l q_y(X)\,dX, \quad \bar{M}_z = -\int_0^l \bar{Q}_y(X)\,dX, \quad \bar{\varphi}_z = \int_0^l \frac{-M_z(X)}{EI_z}\,dX, \quad \bar{y} = \int_0^l \frac{\bar{\varphi}_z(X)}{EI_z}\,dX.$$

Понижение порядка матриц (3) и (5) на две единицы достигается заменой соответствующих величин при помощи им сопряженных.

В деформации системы участвуют k из шести пар $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ взаимосопряженных величин: x, N_x; y, Q_y; z, Q_z; ϑ, M_x; φ_y, M_y; φ_z, M_z.

Из матриц (2)...(5) составляем основную матрицу порядка (α, β) — $\|L_i\|$, охватывающую все $2k$ усилий и деформаций, которые вместе с тривиальным числом 1 заключаем в матрицу-столбец пространственного напряженного и деформированного состояния.

Тогда зависимость усилий и деформаций на краях одного пролета рамы в матричной форме:

$$\{R_i\} = \|L_i\| \cdot \{R_{i-1}\}, \tag{6}$$

где $\{R_i\}$ и $\{R_{i-1}\}$ — матрицы-столбцы пространственного напряженного и деформированного состояния в сечениях i и $i-1$.

Умножение матрицы $\|L_i\|$ с β столбцами на матрицу-столбец $\{R_{i-1}\}$ с α элементами возможно, если первые k элементов $\{R_i\}$ дописать в качестве последних недостающих k элементов $\{R_{i-1}\}$. Последнее выполнимо ввиду наличия матриц $\|L_i\|$ нулевого блока порядка k.

Так, например, для практического важного случая плоской рамы ($Y=0$), имеем ($\alpha = 2k + 1$, $\beta = 3k + 1$):

$$\begin{array}{r} k=3\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ k=3\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ \end{array} \left\|\begin{matrix} x_i \\ z_i \\ \varphi_{y_i} \\ M_{y_i} \\ Q_{z_i} \\ N_{x_i} \\ 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc:ccc:c:ccc} \text{I}\ 1 & 0 & 0 & \text{II}\ 0 & 0 & -\frac{l}{EF} & \bar{x} & \text{III}\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l & \frac{l^2}{2EI_y} & \frac{l^3}{6EI_y} & 0 & \bar{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{l^2}{EI_y} & -\frac{l^2}{2EI_y} & 0 & \bar{\varphi}_y & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \text{IV}\ 1 & l & 0 & \bar{M}_y & \text{V}\ 0 & 0 & -\mu_{\varphi_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{Q}_z & 0 & -\varkappa_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{N}_x & -\varkappa_x & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x_{i-1} \\ z_{i-1} \\ \varphi_{y_{i-1}} \\ M_{y_{i-1}} \\ Q_{z_{i-1}} \\ N_{x_{i-1}} \\ 1 \end{matrix}\right\|. \tag{7}$$

(над столбцами блоков: $k=3$, $k=3$, $k=3$)

Блок матрица I характеризует геометрические параметры деформаций, II — жесткость балки, IV — геометрические параметры усилий, а V — упругие связи.

Матрица-столбец III содержит грузовые члены усилей и деформаций.

Равенство (6) дает для n друг за другом следующих пролетов неразрезной рамы (рис. 2) зависимость усилий и деформаций начального сечения и любого другого сечения неразрезной рамы:

$$\{R_n\} = \|L_n\| \cdot \|L_{n-1}\| \dots \|L_2\| \times \times \|L_1\| \cdot \{R_0\} = \|P_n\| \cdot \{R_0\}. \tag{8}$$

В концевых опорах 0 и 6 удовлетворяются k граничных ус-

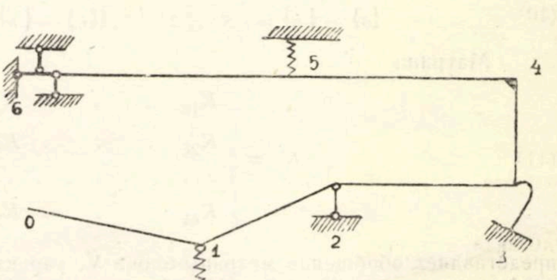


Рис. 2

ловий, т. е. из $2k$ величин усилий и деформаций k равны нулю. Оставшиеся значимые величины в точке 0 образуют матрицу неизвестных начальных параметров $\{A_1, A_2, ..., A_k\} = \{a\}$ подлежащих определению.

Для любого сечения M, на основании (7) имеем:

$$\{R_M\} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_k \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_k \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & . & . & . & A_k \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & & T & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & & S & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1/\eta_1 \\ \overline{\eta}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{\eta}_k \\ \overline{\sigma}_1 \\ \overline{\sigma}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{\sigma}_k \\ 1 \end{Vmatrix} \equiv \| P_n \| \cdot \{R_0\},$$

или

$$\| T \| . \{a\} = \{\eta\} - \{\overline{\eta}\}, \quad \| S \| . \{a\} = \{\sigma\} - \{\overline{\sigma}\}, \tag{9}$$

где: $\| T \|$ — блок-матрица, связывающая деформации крайних сечений, $\| S \|$ — то же для усилий, $\{\eta\} = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k\}$ — матрица-столбец деформаций рассматриваемого сечения, $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k\}$ — то же для усилий, $\{\overline{\eta}\}$ и $\{\overline{\sigma}\}$ — соответствующие грузовые члены.

Так как

$$\{a\} = \| T^{-1} \| . (\{\eta\} - \{\overline{\eta}\}),$$

то зависимость между усилиями и деформациями в сечении устанавливается зависимостью

$$\{\sigma\} - \{\overline{\sigma}\} = \| S \| . \| T^{-1} \| . (\{\eta\} - \{\overline{\eta}\}) = \| K \| . (\{\eta\} - \{\overline{\eta}\}). \tag{10}$$

Матрица

$$\| K \| = \begin{Vmatrix} K_{1k} & . & . & . & K_{12} & K_{11} \\ K_{2k} & . & . & . & K_{22} & K_{12} \\ . & . & . & . & . & . \\ K_{kk} & . & . & . & K_{2k} & K_{1k} \end{Vmatrix} \tag{11}$$

представляет обобщение матрицы-блока V, характеризующей в зависимости (7) упругие связи системы. Матрица (11) образует матрицу приведенной упругости для любой точки рамы, заменяя действие предшествующей рассматриваемому сечению части системы.

В случае плоской рамы (7) все k уравнений подчиняются закону Гука $\sigma_i = -K_i \eta_i$, причем влияние упругости K учитывается известными упругими характеристиками $\varkappa_i$ и μ_i.

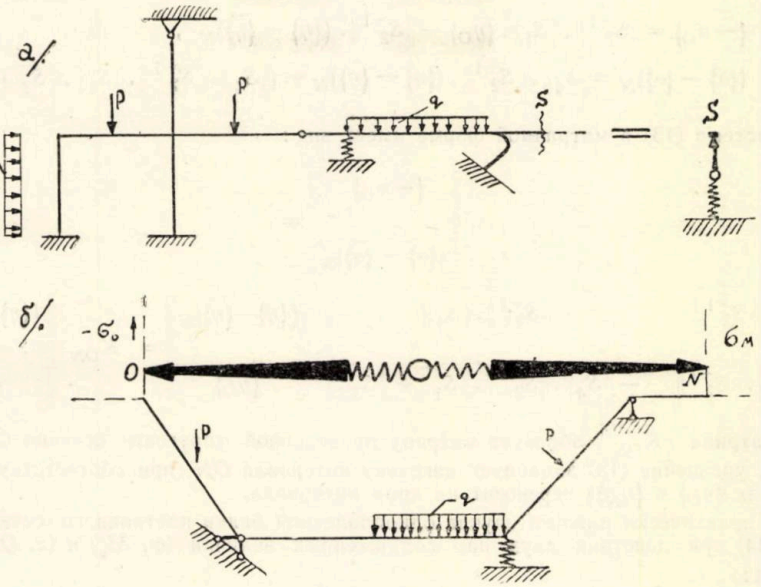


Рис. 3

В более общем пространственном случае для выражения влияния упругости предшествующей сечению части рамы вводится уже приведенная упругая опора (рис. 3 а), характеризуется более сложными характеристиками K_M.

Таким образом, сложная рамная система может рассматриваться как состоящая из отдельных условных неразрезных балок и остается лишь установить характер изменения связывающих свойств этой системы. Пример приведения рамы к неразрезной балке с приведенными упругими опорами показан на рис. 4.

Для расчета рам замкнутых контуров удобно ввести дальнейшее обобщение — двукратную приведенную опору (рис. 3 б), выражающую связь усилий и деформаций между двумя сечениями замкнутой рамы.

Аналогично (9), (10), разбивая матрицу $\|T\|$ ввиду увеличения числа неизвестных параметров вдвое на две матрицы $\|S_1\|$ и $\|S_2\|$, а матрицу $\|S\|$ на матрицы $\|S_3\|$ и $\|S_4\|$, имеем:

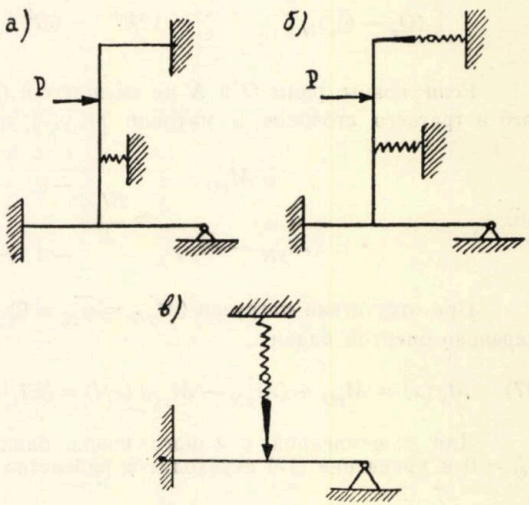


Рис. 4

$$(12)\quad \|S_1\|\cdot\{\eta_O\}+\|S_2\|\cdot\{\sigma_O\}=(\{\eta\}-\{\bar{\eta}\})_N,\quad \|S_3\|\cdot\{\eta_O\}+\|S_4\|\cdot\{\sigma_O\}=(\{\sigma\}-\{\bar{\sigma}\})_N,$$

откуда после преобразований устанавливается зависимость усилий и деформаций двух сечений:

$$(13)\quad \begin{cases} \{-\sigma_O\}=\|S_2^{-1}\|\cdot\|S_1\|\cdot\{\eta_O\}-\|S_2^{-1}\|\cdot(\{\eta\}-\{\bar{\eta}\})_N, \\ (\{\sigma\}-\{\bar{\sigma}\})_N=\|S_4\|\cdot\|S_2^{-1}\|\cdot(\{\eta\}-\{\bar{\eta}\})_N-(\|S_4\|\cdot\|S_2^{-1}\|\cdot\|S_1\|\cdot\|S_3\|)\cdot\{\eta_O\}. \end{cases}$$

Система (13) в матричной форме имеет вид:

$$(14)\quad \left\|\begin{matrix} \{-\sigma_O\} \\ (\{\sigma\}-\{\bar{\sigma}\})_N \end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix} -\|S_2^{-1}\| & \|S_2^{-1}\|\cdot\|S_1\| \\ \|S_4\|\cdot\|S_2^{-1}\| & -\|S_4\|\cdot\|S_2^{-1}\|\cdot\|S_1\|+\|S_3\| \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} (\{\eta\}-\{\bar{\eta}\})_N \\ \{\eta_O\} \end{matrix}\right\|=\|K_{ON}\|\left\|\begin{matrix} (\{\eta\}-\{\bar{\eta}\})_N \\ \{\eta_O\} \end{matrix}\right\|.$$

Матрица $\|K_{ON}\|$ образует матрицу приведенной упругости сечения ON. Таким образом, уравнение (13) заданную нагрузку интервала ON (при соответствующих деформациях $\{\eta_O\}$ и $\{\eta_N\}$) переносит на края интервала.

В практически важном случае однопролетной балки постоянного сечения уравнение (14) при действии двух пар сопряженных величин (φ, M_y) и (z, Q_z) принимает вид:

$$(15)\quad \left\|\begin{matrix} -M_{yO} \\ -Q_{zO} \\ (M_y-\bar{M}_y)_N \\ (Q_z-\bar{Q}_z)_N \end{matrix}\right\|=EI_y\left\|\begin{matrix} -6/l^2 & -2/l & 6/l^2 & -4/l \\ 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ -6/l^2 & -4/l & 6/l^2 & -2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} (z-\bar{z})_N \\ (\varphi-\bar{\varphi})_N \\ z_O \\ \varphi_O \end{matrix}\right\|.$$

Если концы рамы O и N не смещаются ($z_O=z_N=0$), то вычеркивание первого и третьего столбцов в матрице $\|K_{ON}\|$ уравнения (15) приводит к равенству:

$$(16)\quad \left\|\begin{matrix} -M_{yO} \\ M_{yN}-\bar{M}_{yN} \end{matrix}\right\|=\frac{EI_y}{l}\left\|\begin{matrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} \varphi_N-\bar{\varphi}_N \\ \varphi_O \end{matrix}\right\|.$$

При отсутствии нагрузки ($\bar{M}_{yN}=\bar{\varphi}_N=0$) получаем уравнение эпюры моментов шарнирно опертой балки:

$$(17)\quad M_y(x)=M_{yO}+(M_{yN}-M_{yO})(x/l)=(EI_y/l)[4\varphi_O+2\varphi_N-(6\varphi_O+6\varphi_N)(x/l)].$$

Для защемленной с одного конца балки (другой шарнирно неподвижный) $\varphi_O=0$ и уравнение (17) переходит в равенство

$$(18)\quad M_y(x)+(2EI/l)[(1-3(x/l)]\varphi_N.$$

Применяемый метод можно распространить на пространственные системы изображая их для общности рассуждений в виде правильной призмы с прямыми параллельными ребрами-стержнями (рис. 5).

Секущая поверхность S_i, разделяя такую систему на две части, пересекает ее в m (по количеству стержней) точках. Аналогично изложенному ранее удвоенную совокупность $\sum_{1}^{m} vk_{\nu}$, $(1 \leqslant k \leqslant 6)$, усилий и деформаций, действующих в плоскости сечения можно сократить наполовину применяя способ начальных параметров.

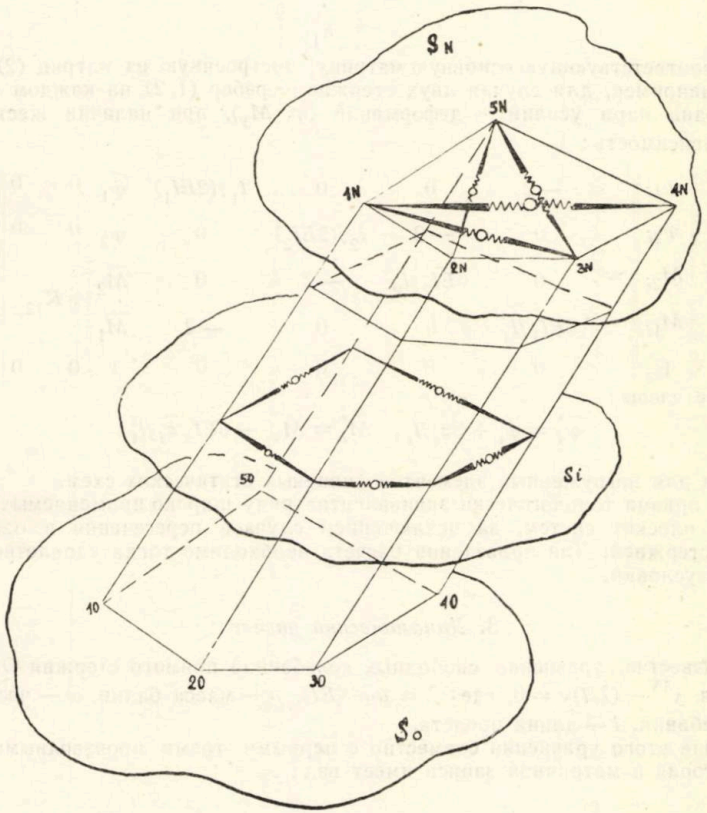


Рис. 5

После определения неизвестных усилий и деформаций в начальной плоскости S_O, необходимо провести перерасчет систем вплоть до концевой поверхности S_N, подставляя найденные числовые значения параметров начальной плоскости призмы.

Действие перпендикулярных связей на систему можно заменить приведенными упругими опорами: 1-го рода — связывающими соседние стержни (как, например, в плоскости S_i) и 2-го рода — связывающими более двух соседних узлов (например, в плоскости S_N).

Заключая усилия и деформации всех m стержней — ребер в матрицу — столбец

$$\{R\} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_m \\ \sigma_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_1 \end{Vmatrix},$$

составляем соответствующую основную матрицу, построенную из матриц (2)...(5).

Так, например, для случая двух стержне — ребер (1, 2), на каждом из которых действует одна пара усилий — деформаций (φ, M_y), при наличии жестких узлов, получаем зависимость:

$$(19)\quad \{R_i\} \equiv \begin{Vmatrix} \varphi_{1i} \\ \varphi_{2i} \\ M_{2i} \\ M_{1i} \\ 1 \end{Vmatrix} = \left\| \begin{array}{ccccc|cc} -2 & 0 & 0 & l_1/(2EI_1) & \overline{\varphi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & l_2/(2EI_2) & 0 & \overline{\varphi}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 6EI_2/l_2 & -2 & 0 & \overline{M}_2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\|K_{12}\|$}} \\ 6EI_1/l_1 & 0 & 0 & -2 & \overline{M}_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \cdot \begin{Vmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \\ M_{20} \\ M_{10} \\ 1 \end{Vmatrix}_0,$$

где грузовые члены:

$$(19\,а)\qquad \overline{\varphi}_i^* = \overline{\varphi}_i + 3\overline{z}_i/l_i, \quad \overline{M}_i^* = \overline{M}_{y_i} - 6EI_y\,\overline{z}_i/l_i^2$$

вычисляются для нагруженных элементов типичных статических схем.

Такая призма топологически эквивалентна ряду широко применяемых пространственных и плоских систем, за исключением случаев пересечения в одной точке нескольких стержней. Для проведения расчета необходимо тогда удовлетворение промежуточных условий.

3. *Динамический расчет*

Как известно, уравнение свободных колебаний прямого стержня OK постоянного сечения $y^{IV} - (\lambda/l)y = 0$, где: $\lambda = \mu\omega^2/(EI)$, μ — масса балки, ω — частота собственных колебаний, l — длина пролета.

Решение этого уравнения совместно с первыми тремя производными образует систему, которая в матричной записи имеет вид:

$$(20)\quad \begin{Vmatrix} y_K \\ \varphi_K \\ M_K \\ Q_K \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \psi_1 & l\psi_2 & \frac{l^2}{EI}\psi_3 & \frac{l^3}{EI}\psi_4 \\ \frac{\lambda^4}{l}\psi_4 & \psi_1 & \frac{l}{EI}\psi_2 & \frac{l^2}{EI}\psi_3 \\ \frac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \frac{\lambda^4 EI}{l}\psi_4 & \psi_1 & l\psi_2 \\ \frac{\lambda^4 EI}{l^3}\psi_2 & \frac{\lambda^4 EI}{l^2}\psi_3 & \frac{\lambda^4}{l}\psi_4 & \psi_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_O \\ \varphi_O \\ M_O \\ Q_O \end{Vmatrix};$$

здесь:

$$\psi_1 = (\operatorname{ch}\lambda + \cos\lambda)/2, \quad \psi_2 = (\operatorname{sh}\lambda + \sin\lambda)/(2\lambda),$$

$$\psi_3 = (\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda)/(2\lambda^2), \quad \psi_4 = (\operatorname{ch}\lambda - \sin\lambda)/(2\lambda^3)$$ — функции Крылова.

При наличии жестких опор O и K (однопролетная защемленная, шарнирно опертая или с одного конца защемленная, а с другого шарнирно опертая балка) $y_O = y_K = 0$. Подставляя эти значения в первое уравнение системы (20), получаем выражение:

$$Q_O = (-EI\psi_2\varphi_O - l\psi_3 M_O)/(l^2\psi_4),$$

исключая которое из второго и третьего уравнений системы, имеем:

$$(21)\quad \{Y_K\} \equiv \begin{Vmatrix} \varphi_K \\ M_K \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \psi_1 - \psi_2\psi_3/\psi_4 & -[l/(EI)](\psi_2 - \psi_3^2/\psi_4) \\ (EI/l)(\lambda^4\psi_4 - \psi_2^2/\psi_4) & \psi_1 - \psi_2\psi_3/\psi_4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \varphi_O \\ M_O \end{Vmatrix} \equiv \|L\| \cdot \{Y_O\}.$$

Основная матрица $\|L\|$ упрощается введением следующих функций:

$$(22)\quad \begin{cases} A(\lambda) = \operatorname{ch}\lambda\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda\cos\lambda = 2^2\lambda^3/3! - 2^4\lambda^7/7! + 2^6\lambda^{11}/11 - \ldots, \\ B(\lambda) = 2\operatorname{sh}\lambda\sin\lambda \quad 2^2\lambda^2/2! - 2^4\lambda^6/6! + 2^6\lambda^{10}/11! - \ldots, \\ C(\lambda) = \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda - 1 = -2^2\lambda^4/4! + 2^4\lambda^8/8! - 2^6\lambda^{12}/12! + \ldots \end{cases}$$

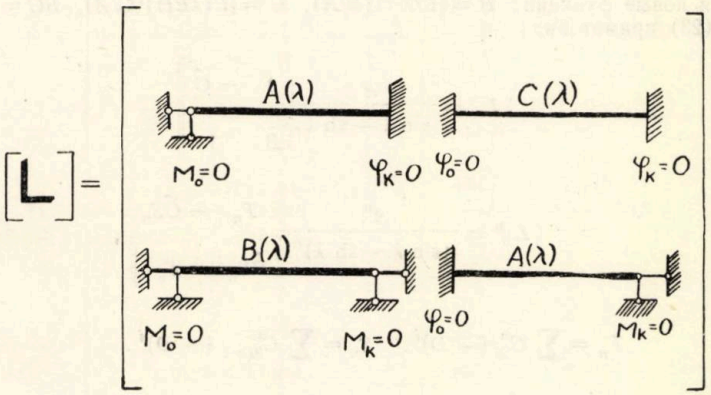


Рис. 6

После элементарных алгебраических преобразований уравнений (21) основная матрица принимает вид:

$$(23)\quad \|L\| = \frac{1}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda} \begin{Vmatrix} A(\lambda) & -[l/(\lambda EI)]C(\lambda) \\ B(\lambda)EI\lambda/l & A(\lambda) \end{Vmatrix},$$

причем функция

$$\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda = -2(\lambda^3/3! + \lambda^7/7! + \lambda^1/11! + \ldots).$$

Уравнение (21) записывается тогда в нижеследующем виде:

$$(24)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \{A(\lambda)\varphi_O - [l/(\lambda EI)]C(\lambda)M_O\}/(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda), \\ M_1 = [(EI\lambda/l)B(\lambda)\varphi_O + A(\lambda)M_O]/(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda). \end{cases}$$

Основная матрица (23) содержит уравнения колебаний для четырех возможных комбинаций опирания (рис. 6). Необходимо только согласно данным граничным усло-

виям вычеркнуть одну строку и один столбец, а оставшийся элемент приравнять нулю. Правильную величину $\lambda = 0$, как не имеющую практического значения, исключаем из рассмотрения, и таким образом, знаменатель $\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda$ никогда не равен нулю.

Корни функций A, B, C находятся по формулам данным в таблице 1.

Таблица 1

Функция / Корни	$A(\lambda) = 0$	$B(\lambda) = 0$	$C(\lambda) = 0$
λ_n, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\approx \pi/4 + n\pi$	$\approx n\pi$	$\approx \pi/2 + n\pi$

Напряженное и деформированное состояние в любом n-том сечении колеблющейся балки выражается соотношением:

$$\{Y_n\} = \|L_n\| \cdot \|L_{n-1}\| \cdots \|L_2\| \cdot \|L_1\| \cdot \{Y_0\},$$

где $\|L_i\|$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — матрицы колебаний отдельных пролетов, или для случая равнопролетной балочной системы:

$$\{Y_n\} = \|L\|^n \cdot \{Y_0\}. \tag{25}$$

Вводя новые функции: $\hat{B} = (EI\lambda/l)(B/A)$, $\hat{C} = [l/(\lambda EI)](C/A)$, $\hat{B}\hat{C} = BC/A^2$ D, равенство (23) примет вид:

$$\|L\| = \frac{A}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda} \begin{Vmatrix} 1 & -\hat{C} \\ \hat{B} & 1 \end{Vmatrix} \tag{26}$$

или

$$\|L\|^n = \frac{A^n}{(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^n} \begin{Vmatrix} T_n & -\hat{C}S_n \\ \hat{B}S_n & T_n \end{Vmatrix}, \tag{27}$$

где:

$$T_n = \sum_i C_{2i}^n (-D)^i, \quad S_n = \sum_i C_{2i+1}^n (-D)^i. \tag{27 а}$$

Условия колебаний для различных граничных условий согласно (27) будут

$$\begin{cases} 1)\ \varphi_O = 0, & M_n = 0, & A^n T_n/(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^n = 0, \\ 2)\ \varphi_O = 0, & \varphi_n = 0, & -\hat{C}A^n S_n/(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^n = 0, \\ 3)\ M_O = 0, & M_n = 0, & \hat{B}A^n S_n/(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^n = 0, \\ 4)\ M_O = 0, & \varphi_n = 0, & A^n T_n/(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^n = 0. \end{cases} \tag{27 б}$$

Как известно, $M_n = -\mu\varphi_n$. Используя (27) образуем выражение:

$$-M_n/\varphi_n = \bar{K}_n, \quad (\varphi_n \neq 0), \tag{28}$$

представляющее в простейшем случае характеристику приведенной упруго вращающейся опоры в точке n.

Для защемленной опоры $-\bar{K}_a^{(n)} = -T_n/(\hat{C}S_n)$, а для шарнирной — $\bar{K}_B^{(n)} = \hat{B}S_n/T_n$.

В частном случае однопролетной балки при $T_1 = S_1 = 1$: $-\overline{K}_a^{(1)} = -1/\hat{C}$, $-\overline{K}_B^{(1)} = \hat{B}$. Раскрывая эти неопределенные выражения (при $\lambda = 0$) с помощью правила Лопиталя, получаем $\overline{K}_a^{(1)} = -4(EI/l)$, $\overline{K}_B^{(1)} = 3(EI/l)$.

Рассмотрим колебания любой рамы *открытого контура* (рис. 7 а).

Неразрезной стержень рамы принимается в качестве основного. Отсекаем все ответвления и заменяем их действие приведенными упругими опорами, сводя, таким образом, задачу к расчету колебаний неразрезной балки.

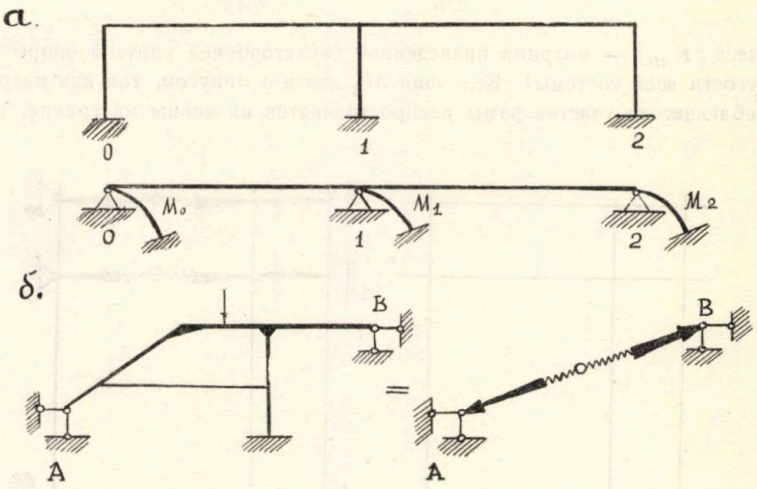


Рис. 7

Так как между изгибающими моментами непосредственно левее и правее опоры условие сопряжения $M_i^{\text{пр}} = M_i^{\text{лев}} - \mu_i \varphi_i$, то основную матрицу необходимо слева умножить на матрицу перехода

$$\|F_i\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -\mu_i & 1 \end{Vmatrix}, \tag{29}$$

что дает:

$$\{Y^*_{i-1}\} \equiv \begin{Vmatrix} \varphi_{i-1} \\ M_{i-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_i \end{Vmatrix} = \{Y_{i-1}\},$$

$$\|L_i\| = \frac{A_i}{\sin\lambda_i - \operatorname{sh}\lambda_i} \left\| \begin{matrix} 1 & -\hat{C}_i \\ \hat{B}_i & 1 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} 0 \\ -\mu_i \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \varphi_{i-1} - C_i M_i = \varphi_i \\ \hat{B}\varphi_{i-1} + M_{i-1} - \mu_i \varphi_i \end{matrix} \Bigg\| = \frac{A_i}{\sin\lambda_i - \operatorname{sh}\lambda_i} \cdot \{Y_i\}.$$

Такое перемножение возможно, в виду того, что третий элемент первой строки основной матрицы нуль и в первой строке произведения получается всегда линейная зависимость, представляющая первый элемент последующей матрицы-столбца $\{Y_i\}$ (или третий элемент дополненной матрицы-столбца).

Дальнейший расчет ни чем уже не отличается от расчета колебаний неразрезной балки. Расчет колебаний рам *замкнутого контура* сводится к следующему. Перерезаем раму в двух сечениях (опорах) A, B (рис. 7 б) и определяем линейную зависимость моментов M_A и M_B, а также углов поворота φ_A и φ_B в матричной форме:

$$\left\| \begin{matrix} -M_A \\ M_B \end{matrix} \right\| = \| K_{AB} \| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi_B \\ \varphi_A \end{matrix} \right\|. \tag{30}$$

Здесь $\| K_{AB} \|$ — матрица приведенной двухсторонней упругой опоры (приведенной упругости всей системы). Величина M_A взята с минусом, так как нагрузка инерции колеблющегося участка рамы распространяется на концы интервала.

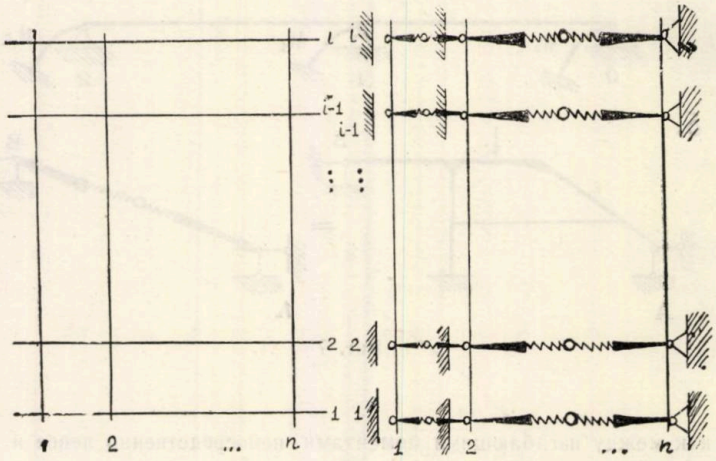


Рис. 8

Для однопролетной балки, используя для этой цели равенство (26), матрица приведенной упругой опоры

$$\left\| \begin{matrix} -M_O \\ M_K \end{matrix} \right\| = \| K_{OK} \| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi_K \\ \varphi_O \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\hat{C}} \left\| \begin{matrix} -(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)/A & 1 \\ 1 & -(\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)/A \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi_K \\ \varphi_O \end{matrix} \right\|. \tag{31}$$

Таким образом, раму замкнутого контура разбиваем на некоторое число n неразрезных стержней. Прямолинейные связи, соединяющие эти стержни должны быть балками, двухсторонние упругие приведенные опоры которых заданы уравнением (31). Каждый из n стержней расчитывается обычным путем, как балка со свободными неизвестными параметрами усилий и деформаций, связанных друг с другом зависимостью (31). Следовательно, ввиду наличия n граничных условий на „правом" конце стержня следует приравнять нулю определитель n-го порядка, что дает искомое уравнение колебаний. Особенно четкий расчет получается при прямоугольной схеме рамы и топологически ей эквивалентной заменяющей системе (рис. 8).

В этом случае расширенная матрица (26) представляет матрицу приведенной упругости n-го порядка.

$$\|L_i\| = \tag{32}$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc:cccc:c}
\frac{A_1}{\sin\lambda_1 - \operatorname{sh}\lambda_1} & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \frac{A_1\hat{C}_1}{\sin\lambda_1 - \operatorname{sh}\lambda_1} & & 0\ldots0 \\
0 & \frac{A_2}{\sin\lambda_2 - \operatorname{sh}\lambda_2} & \cdots & & \cdots & \frac{A_2\hat{C}_2}{\sin\lambda_2 - \operatorname{sh}\lambda_2} & 0 & & 0\ldots0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \frac{A_n}{\sin\lambda_n - \operatorname{sh}\lambda_n} & & \frac{A_n\hat{C}_n}{\sin\lambda_n - \operatorname{sh}\lambda_n} & 0 & 0 & & 0\ldots0 \\
\hdashline
0 & 0 & \frac{A_n\hat{B}_n}{\sin\lambda_n - \operatorname{sh}\lambda_n} & & \frac{A_n}{\sin\lambda_n - \operatorname{sh}\lambda_n} & 0 & 0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & \frac{-A_2\hat{B}_2}{\sin\lambda_2 - \operatorname{sh}\lambda_2} & \cdots & & \cdots & \frac{A_2}{\sin\lambda_2 - \operatorname{sh}\lambda_2} & 0 & & \|K\| \\
\frac{-A_1\hat{B}_1}{\sin\lambda_1 - \operatorname{sh}\lambda_1} & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \frac{A_1}{\sin\lambda_1 - \operatorname{sh}\lambda_1} & &
\end{array} \right\|,$$

в которой матрица-блок $\|K\|$ содержит все одно — и двухсторонние приведенные упругие опоры.

В случае однородной системы матрица (32) вырождается в

$$\|L_i\| = \frac{A}{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda} \left\| \begin{array}{cc:c} \|E\| & \hat{C}\|U\| & 0 \\ -\hat{B} & \|E\| & \|K_i\| \end{array} \right\|, \tag{33}$$

где:

$$\|E\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\|, \quad \|U\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

4. *Примеры*

1°. Определить изгибающие моменты в основных сечениях жесткой рамы (рис. 9 а).

Рассматриваемая система эквивалентна двум неразрывным балкам с приведенными упругими опорами 1-го рода (рис. 9 б). На каждый стержень действует пара φ, M.

Для достижения безразмерности элементов принимаем в качестве модулей $P^* = 2EI/l^2$, $l^* = l$, $q = 24P^*/l^*$. Тогда $EI = 1/2$, $l = 1$, $q = 24$.

Таблица 2

Основные матрицы $\|L_i\|$							Матрицы переходов			Матрицы напряженного и деформированного состояния	
							M_{OA}	M_{OB}	I		
							0	0	0	0	φ_A
							0	0	0	0	φ_B
							0	1	0	−0,0668	$M_B = \{Y_0\}$
							1	0	0	0,0156	M_A
							0	0	1	1	1
−2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0,0156	
0	−2	1	0	0	0	0	0	1	0	−0,0668	
0	3	−2	0	0	−1	−2	−1	−4	0	0,2516	$\{Y_1\}$
3	0	0	−2	0	−4	−1	−6	−1	0	−0,0268	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	
−2	0	0	1	0	0	0	−8	−1	0	−0,0580	
0	−2	1	0	0	0	0	−1	−6	0	0,3852	
0	3	−2	0	0	−1	−2	18	24	0	−1,3224	$\{Y_2\}$
3	0	0	−2	0	−4	−1	48	12	0	−0,0528	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	
−2	0	0	1	0	0	0	64	14	0	0,0632	
0	−2	1	0	2	0	0	20	36	2	−0,0928	
0	3	−2	0	−6	−1	−2	−143	−152	−10	−2,0772	$\{Y_3\}$
3	0	0	−2	0	−4	−1	−376	−119	− 2	0,0836	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	
−2	0	0	1	0	0	0	−504	−147	− 2	−0,0428	
0	−2	1	0	2	0	0	−183	−224	−12	0,1084	
0	3	−2	0	−6	−1	−2	1 216	1 007	46	−2,2980	$\{Y_4\}$
3	0	0	−2	0	−4	−1	3 143	1 092	26	0,0852	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	
−2	0	0	1	0	0	0	4 151	1 386	28	0,1708	
0	−2	1	0	2	0	0	1 582	1 455	72	−0,2148	
0	3	−2	0	−6	−1	−2	−10 296	6 982	−306	0	$\{Y_5\}$
3	0	0	−2	0	−4	−2	−25 984	−9 624	−238	0	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	

Матрица приведенной упругой опоры согласно (16) приводит к равенству:

$$\begin{Vmatrix} -M_A \\ M_B - 0 \end{Vmatrix} = \frac{2EI}{2l} \begin{Vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \varphi_B - 0 \\ \varphi_A \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \varphi_B \\ \varphi_A \end{Vmatrix}.$$

Так как элемент $-K_{11} = -4EI/l = -2$, то матрица приведенной упругой опоры K_{12} в формуле (19) с учетом влияния жесткости вращения, равна:

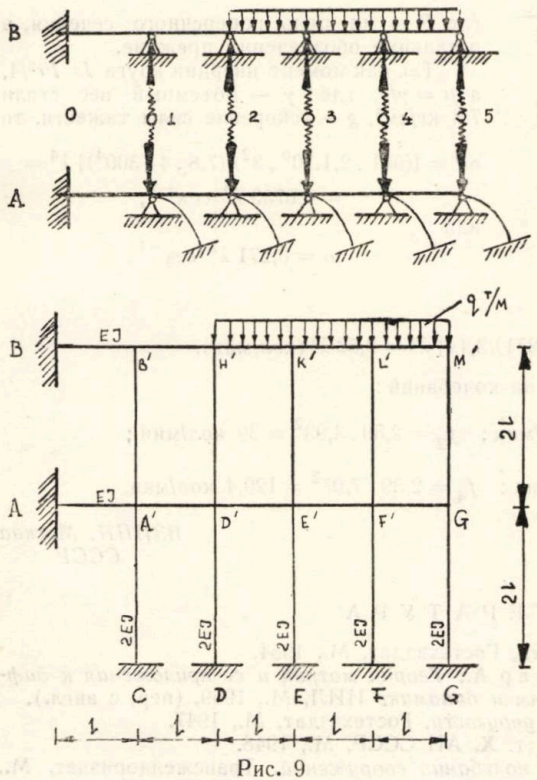


Рис. 9

$$\|K_{12}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Вычисляя грузовые члены для нагруженных элементов элементарным путем по формулам (19 а) получаем стандартную расчетную схему (таблица 2).

Решаем систему:

$$10\,296\,M_{OA} + 6\,982\,M_{OB} + 306 = 0,$$
$$25\,984\,M_{OA} + 9\,624\,M_{OB} + 238 = 0,$$

откуда:

$$M_{OA} = 0{,}0156; \quad M_{OB} = -0{,}0668.$$

Умножая матрицы переходов на найденные значения M_{OA} и M_{OB} получаем их значения на всех опорах (в основных узлах рамы), что очевидно из расчетной схемы.

Ординаты эпюры моментов:

а) для защемленных стоек рамы AA', BB', CA', DD', EE', FF', GG' согласно (18) при отсутствии нагрузки для стоек длинною l (AA', BB') — $M(0) = \varphi_N$, $M(l) = -2\varphi_N$, длиною $2l$, (остальных) $-M(0) = \varphi_N/2$, $M(2l) = -\varphi_N$;

б) для горизонтальных ригелей $A'D'$, $D'E'$, $E'F'$, FG', $B'H'$ и вертикальных стоек $A'B'$, $D'H'$, $E'K'$, $F'L'$, $G'M'$ ординаты моментов на концах согласно (17) равны — для ригелей: $M(0) = 2\varphi_O + \varphi_N$, $M(l) = -(\varphi_O + 2\varphi_N)$, для стоек: $M(0) = \varphi_O + \varphi_N/2$, $M(2l) = -(\varphi_O + 2\varphi_N)/2$;

в) для загруженных ригелей $H'K'$, $K'L'$, $L'M'$ эпюра параболическая и строится элементарным приемом.

Размерность изгибающих моментов $P^*l^* = (2EI/l^2)\,l = 2EI/l$, но так как размерность равномерно распределенной нагрузки $q = 24P^*/l^* = 48EI/l$, то в функции от q она равна $P^*l^* = ql^2/24$.

2°. Определить наименьшие собственные частоты колебаний стальной рамы круглого поперечного сечения радиусом 3 см (рис. 10).

Согласно данных граничных условий (27 б) и наличии трех пролетов ($n = 3$) уравнение колебаний:

$$A^3 T_3 / (\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda)^3 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем $A(\lambda) = 0$ или (см. таблицу 1) $\lambda_1 = 3{,}93$, $\lambda_2 = 7{,}07$.

Далее, согласно (27 а):

$$T_3 = 1 - 3D = 0 \text{ или } D = BC/A^2 = 1/3.$$

Решая последнее равенство графически получаем $\lambda_3 = 3{,}26$ и $\lambda_4 = 4{,}61$.

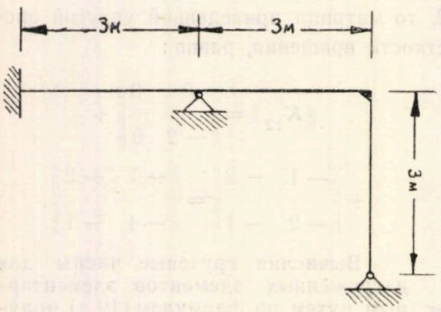


Рис. 10

Как известно

$$\lambda^4 = \mu F\omega^2 l^4/(EI),$$

где F — площадь поперечного сечения, а остальные обозначения прежние.

Так как момент инерции круга $I = Fr^2/4$, а $\mu = \gamma/g$, где: γ — объемный вес стали 7,8 кг/см^3, g — ускорение силы тяжести, то

$$\omega^2 = [(981 \,.\, 2{,}1.10^6 \,.\, 3^2)/(7{,}8 \,.\, 4 \,.\, 300^4)]\,\lambda^4 = 0{,}0733\,\lambda^4 \text{ сек}^{-2},$$

или

$$\omega = 0{,}271\,\lambda^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Число колебаний в минуту

$$f = 30\omega/\pi = [(30 \,.\, 0{,}271)/3{,}14]\,\lambda^2 = 2{,}59\,\lambda^2 \text{ (кол/мин)}.$$

Таким образом, наименьшее числа колебаний:

$$f_1 = 2{,}59 \,.\, 3{,}26^2 = 27{,}5 \text{ кол/мин}; \quad f_2 = 2{,}59 \,.\, 3{,}93^2 = 39 \text{ кол/мин};$$

$$f_3 = 2{,}59 \,.\, 4{,}61^2 = 55 \text{ кол/мин}; \quad f_4 = 2{,}59 \,.\, 7{,}07^2 = 129{,}4 \text{ кол/мин}.$$

Поступила 25 XI 1960 г.

ВЗИПП, Москва СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, Гостехиздат, М., 1954.
2. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А., *Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике* ИИЛ, М., 1959, (пер. с англ.).
3. Лейбензон Л. С., *Курс теории упругости*, Гостехиздат, М., 1947.
4. Крылов А. Н., *Собрание трудов*, т. **X**, АН СССР, М., 1948.
5. Смирнов А. Д., *Устойчовость и колебания сооружений*, Трансжелдориздат, М., 1958.
6. Fuhrke H., Ing. Archiv, 1955, **XXIII**, *5*.
7. Falkenheiner H., Rech. aéron., 1950, **IX—X**, *17*.
8. Биргер И. А., *Некоторые математические методы решений инженерных задач*, М., 1956.

LE CALCUL DES PORTIQUE PAR LA MÉTHODE MATRICIELLE

(Résumé)

On expose une méthode matricielle pour le calcul statique et dynamique des portiques combinées à contour ouvert ou fermé.

CALCULUL CADRELOR PRIN METODA MATRICIALĂ

(Rezumat)

Se expune o metodă matricială pentru calculul static şi dinamic al cadrelor combinate cu contur deschis şi închis.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

D. C. 539.4 ; 624.07

A THEORY FOR ELASTIC THIN SHELLS AND EDGE EFFECTS

BY
PLACIDO CICALA

1. Introduction

A theory of thin elastic shells based only on linearity hypotheses has been presented elsewhere [1] [1]). The main concepts of this theory may be outlined as follows. Stresses and displacements along normals to the mid-surface are represented by series expansions, whose coefficients are unknown functions v of the coordinates ξ_a, ξ_b of the mid-surface. For a generic homogeneous solution, representing the stress state for the shell loaded on its contour, the orders of magnitude of the variables v are compared with a representative one w chosen among the v by writing

$$v = [wt^n] \,. \tag{1}$$

This notation means that the values of v and of the product wt^n take the same order of magnitude when the thickness t tends to zero while all other dimensions are fixed. We call *solutions of class* h *in* ξ_a the homogeneous solutions for which differentiations with respect to ξ_b do not alter the orders of magnitude, while $\partial v/\partial\xi_a = [vt^{-h}]$. The differential system for the infinite variables v is written in an implicit form from which the different classes of homogeneous solutions can be individuated and, for each of them, the progression of exponents n can be found. Once these elements are determined, the implicit relationships are used to deduce the necessary equations, with just as many terms as needed for a prescribed order of accuracy.

The idea of abandoning all *a priori* assumptions, as the Bernoulli hypotheses is not new; but the introduction of general expansions has led to enormous complications even with truncated series. The new device suggested here consists in writing the explicit equations only after the progression of orders of magnitude has been determined. The procedure leads to consistent approximations and, hence, to the simplest formulation for an assigned order of error.

---

1) Other installments follow; bibliography and analytical details omitted here for brevity will be found in [1].

Examination of the general differential system shows the existence of solutions of classes 0,1/2 and 1. Class 0 contains the well known *membrane* and *inextensional* solutions. Class 1 contains stress distributions limited to a very narrow edge strip, which usually are disregarded. The present investigation is restricted to the intermediate class of solutions and extends to shells of any form whatsoever.

2. Notation

Let $\mathbf{x}_m$ be the vector coordinate of a point of the mid-surface. A point in the body is defined by $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m + \zeta\mathbf{n}$, where $\mathbf{n}$ is the unit vector normal to the mid-surface; the coordinate ζ ranges between $\pm t/2$. The thickness t is supposed to be constant. Coordinates ξ_a, ξ_b are arbitrarily established in the mid-surface giving $\mathbf{x}_m(\xi_a, \xi_b)$. We denote by $f^{\cdot}, f'\ f^0$ respectively the derivatives $\partial f/\partial\xi_a$, $\partial f/\partial\xi_b$, $\partial f/\partial\zeta$ of a function f. Let:

$$\mathbf{h}_a = \mathbf{x}_m^{\cdot},\ \mathbf{h}_b = \mathbf{x}_m',\ \mathbf{k}_a = \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{h}_a + \zeta\mathbf{n}^{\cdot},\ \mathbf{k}_b = \mathbf{x}' = \mathbf{h}_b + \zeta\mathbf{n}'; \tag{2}$$

$$h_a = |\mathbf{h}_a|,\ h_b = |\mathbf{h}_b|,\ k_a = |\mathbf{k}_a|,\ k_b = |\mathbf{k}_b|; \tag{3}$$

$$h_{ab} = \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{h}_b,\ k_{ab} = \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{k}_b,\ m = |\mathbf{h}_a \times \mathbf{h}_b|,\ n_{ab} = |\mathbf{k}_a \times \mathbf{k}_b|; \tag{4}$$

$$\varrho_a = \mathbf{h}_a \cdot \mathbf{n}^{\cdot},\ \varrho_b = \mathbf{h}_b \cdot \mathbf{n}',\ \varrho_{ab} = 2\mathbf{h}_a \cdot \mathbf{n}'. \tag{5}$$

The (infinitesimal) displacement vector is expressed as

$$\mathbf{u} = u_a\mathbf{h}_a + u_b\mathbf{h}_b + u_c\mathbf{n} = \mathbf{u}_{ab} + u_c\mathbf{n}. \tag{6}$$

Consider the elementar parallelepiped whose edges $\mathbf{k}_a\,d\xi_a$, $\mathbf{k}_b\,d\xi_b$, $\mathbf{n}\,d\xi$ start from a point P within the body; $\mathbf{f}\,d\xi_a\,d\xi_b\,d\zeta$ denotes the exterior load on the parallelepiped; $(s_a\mathbf{k}_a + s_{ab}\mathbf{k}_b + s_{ac}\mathbf{n})\,d\xi_b\,d\zeta$, $(s_{ab}\mathbf{k}_a + s_b\mathbf{k}_b + s_{bc}\mathbf{n})\,d\xi_a\,d\zeta$ and $(s_{ac}\mathbf{k}_a + s_{bc}\mathbf{k}_b + s_c\mathbf{n})\,d\xi_a\,d\xi_b$ are the stress resultants on the faces opposite to P.

3. General equations

If the material is elastic and isotropic, with the usual notation for the elastic constants E, G and ν, we have the relations:

$$k_a^4 s_a + (k_{ab}^2 - \nu n_{ab}^2)\,s_b + 2k_a^2 k_{ab}\,s_{ab} - \nu k_a^2\,s_c = En_{ab}\,\mathbf{k}_a \cdot (\mathbf{u}_{ab}^{\cdot} + u_c\mathbf{n}^{\cdot}), \tag{7}$$

$$k_b^4 s_b + (k_{ab}^2 - \nu n_{ab}^2)\,s_a + 2k_b^2 k_{ab}\,s_{ab} - \nu k_b^2\,s_c = En_{ab}\,\mathbf{k}_b \cdot (\mathbf{u}_{ab}' + u_c\mathbf{n}'), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &2[2k_a^2 k_b^2 - (1-\nu)\,n_{ab}^2]\,s_{ab} + 2(k_a^2 s_a + k_b^2 s_b - \nu s_c)\,k_{ab} = \\ &= En_{ab}[\mathbf{k}_b \cdot (\mathbf{u}_{ab}^{\cdot} + u_c\mathbf{n}^{\cdot}) + \mathbf{k}_a \cdot (\mathbf{u}_{ab}' + u_c\mathbf{n}')], \end{aligned} \tag{9}$$

$$s_c - \nu k_a^2\,s_a - \nu k_b^2\,s_b - 2\nu k_{ab}\,s_{ab} = En_{ab}\,u_c^0, \tag{10}$$

$$k_a^2\,s_{ac} + k_{ab}\,s_{bc} = Gn_{ab}(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{u}_{ab}^0 - \mathbf{n}^{\cdot} \cdot \mathbf{u}_{ab} + u_c^{\cdot}), \tag{11}$$

$$k_{ab}\, s_{ac} + k_b^2\, s_{bc} = G n_{ab}\, (\mathbf{k}_b \,.\, \mathbf{u}_{ab}^0 - \mathbf{n}' \,.\, \mathbf{u}_{ab} + u_c') \,. \tag{12}$$

The generic variable v, be it a component of stress (such as s_{bc}) or displacement (such as u_a), is expressed by the series

$$v = \sum v_j \zeta_j, \quad (j = 0,1,\ldots), \tag{13}$$

where ζ_j are Legendre's polynomials of first kind of the argument $2\zeta/t$ (e.g.: $\zeta_0 = 1$, $\zeta_1 = 2\zeta/t$). Similar development is used for $\mathbf{f}$. The series (13 are replaced in (7)...(12). Then each equation is multiplied by $(2j+1)\zeta_j \,\mathrm{d}\zeta$ and integrated through t; a term f is thus transformed into an expression denoted by $(f)_j$. For the present purpose this transformation is completely defined by the following relations:

$$(A\zeta^i v)_j = [tj/(4j-2)]\,(A\zeta^{i-1}v)_{j-1} + [t(j+1)/(4j+6)]\,(A\zeta^{i-1}v)_{j+1}, \tag{14}$$

$$(Av)_j = Atv_j, \tag{15}$$

$$(Av^0)_j = A(4j+2)(v_{j+1} + v_{j+3} + \ldots). \tag{16}$$

Equations (14) and (15) hold as well for $v^\cdot$ and v'. Here A is a factor independent of ζ and i a positive integer ($\leqq 4$ in equations (7) ... (12)).

Thus, for each subindex j, six equations are obtained from (7) ... (12). Furthermore, three equations of equilibrium are deduced from the vector relation:

$$\begin{aligned}(s_a \mathbf{k}_a + s_{ab}\mathbf{k}_b + s_{ac}\mathbf{n})_j^\cdot + (s_{ab}\mathbf{k}_a + s_b\mathbf{k}_b + s_{bc}\mathbf{n})_j' + \mathbf{f}_j = \\ = [(4j+2)/t]\sum (s_{ac}\mathbf{k}_a + s_{bc}\mathbf{k}_b + s_c\mathbf{n})_k,\end{aligned} \tag{17}$$

where $k = j-1,\ j-3,\ldots,0$, if j is an odd integer; if j is even the summation terminates at $k = 1$. For $j = 0$, the right hand member is zero. The transformations (14), (15) apply; besides we have

$$(Av)_j^\cdot = A^\cdot tv_j + Atv_j^\cdot, \quad (Av)_j' = A'tv_j + Atv_j'. \tag{18}$$

4. The solutions of class 1/2

The above equations will be applied to the calculation of the homogeneous solutions ($\mathbf{f} = 0$) satisfying the conditions $v' = [v]$, $v^\cdot = [vt^{-1/2}]$. The values of n defining the orders of magnitude according to (1) are given in Table 1 (a). In a first approximation, the following set of equations is obtained:

$$2m^2 u_{a1} = -\, th_b^2 w^\cdot, \qquad 2m^2 u_{b1} = th_{ab} w^\cdot, \tag{19}$$

$$2(1-\nu^2)m^3 s_{a1} = -\, Eth_b^4 w^{\cdot\cdot}, \qquad 6s_{ac0} = ts_{a1}^\cdot, \tag{20}$$

$$s_{ac0}^\cdot = \varrho_b\, s_{b0}, \qquad h_b^4 s_{b0} = Em\varrho_b w, \tag{21}$$

where $w = u_{c0}$.

Table 1

Values of the exponent n *in equation (1)*

j	u_a, u_b	u_c	s_a	s_b	s_{ab}	s_c	s_{ac}, s_{bc}
			(a) solutions of class 1/2				
0	0.5	0	0+0.5*)	0	0+0.5	0+1	−0.5+1
1	0.5	1	0	0	0	0+1	0.5+1
2	1.5	1	1	1	1	1	0.5
3	1.5	2	1	1	1	1	1.5
4	2.5	2	2	2	2	2	1.5
			(b) solutions of class 1/3				
0	1/3	0	0+3/3	0+1/3	0+2/3	0+4/3	−1/3+4/3
1	2/3	3/3+1/3	1/3	1/3	1/3	1/3+4/3	2/3+4/3
2	5/3	4/3	4/3	4/3	4/3	4/3	3/3
3	6/3	7/3	5/3	5/3	5/3	5/3	6/3
4	9/3	8/3	8/3	8/3	8/3	8/3	7/3
			(c) solutions of class 1/4				
0	1/4	0	0+1	0+1/2	0+3/4	0+3/2	−1/4+3/2
1	3/4	4/4+1/2	2/4	2/4	2/4	2/4+3/2	3/4+3/2
2	7/4	6/4	6/4	6/4	6/4	6/4	5/4
3	9/4	10/4	8/4	8/4	8/4	8/4	9/4
4	13/4	12/4	12/4	12/4	12/4	12/4	11/4

*) To evidence the progression laws, the few discrepant terms are marked in addition.

By elimination we get the resultant equation:

$$h_b^8 t^2 w^{\cdots\cdot} + 12(1-\nu^2)m^4 \varrho_b^2 w = 0 . \tag{22}$$

5. The case of ruled surfaces

The above solution is not valid if the line $\xi_a = \text{const.}$ is straight ($\varrho_b = 0$), as may occur for ruled surfaces. Here we put

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_a(\xi_a) + \xi_b \mathbf{r}(\xi_a) , \tag{23}$$

with $\mathbf{r}^2 = 1$. The corresponding homogeneous solutions turn out to belong to class 1/3; the exponents n for (1) take the values given in Table 1(b). The equations (19), (20) still hold; moreover we have:

$$\dot{s}_{ab0} = -s'_{b0} , \tag{24}$$

$$\dot{s}_{ac0} = \varrho_{ab} s_{ab0} , \quad h_b^4 \dot{s}_{b0} = -E\varrho_{ab} m^2 (w/m)' = 0 . \tag{25}$$

By elimination we get:

$$h_b^8 t^2 w^{\cdots\cdot} + 12(1-\nu^2)m^4 \varrho_{ab}^2 [m(w/m)']' = 0 . \tag{26}$$

The solution is again invalid if $\varrho_{ab} = 0$, that is, if the surface is developable. In this case, the homogeneous solutions belong to class 1/4, the exponent n takes the values given in Table 1 (c) and the equations (25) are to be replaced by the following:

$$(27) \qquad \dot{s}_{ac0} = \varrho_a s_{a0}, \quad h_b^4 \ddot{s}_{b0} = E m \varrho_a w'', \quad m^2 \dot{s}_{a0} = -(s_{ab0} m^2)',$$

while (19), (20) and (24) hold unchanged. From the new set we get:

$$(28) \qquad h_b^8 t^2 w^{::::} + 12(1-\nu^2)\varrho_a^2 (m^4 w''' + 6m^3 m' w''' + 6m^2 m'^2 w'') = 0.$$

6. Conclusions

The proposed theory has yielded a general formulation of the differential equations governing edge effects. The solutions of these equations, associated with those of class 0, are apt to represent the perturbation produced by a regular distribution of loads along an arbitrary contour line of an arbitrary surface. In the general case a fourth order equation in ξ_a is obtained; this includes as special cases the theory of revolution surfaces (Geckeler) and translation surfaces (Zerna). An exceptional case is presented by ruled surfaces, loaded along a straight line. For developable surfaces, the question is akin to the well known problem of a cylinder loaded along a generatrix: an eight-order equation is reached at and the perturbation width is $[t^{1/4}]$. The case of skew ruled surfaces, very important for technical applications, reveals novel features; the perturbation width is $[t^{1/3}]$ and the governing equations is of the sixth order [2]).

The investigation needs to be carried on. The sets of equation leading to (22), (25) and (28) are affected by relative errors $[t^{1/2}]$, $[t^{1/3}]$ and $[t^{1/4}]$, respectively. If higher accuracy is required, more equations and terms can be deduced from (7) ... (18). Still more important than the refinement of the theory, should be its application to specific problems.

Received the 8 VI 1961

Polytechnic Institute,
Torino, Italy

REFERENCES

1. Cicala P, Giorn. del Genio Civile, 1959, pp. 238—256, 429—449, 714—723.

[2]) The complete solution is obtained by combining the particular solution taking account of **f** with the homogeneous solutions. For the general case, these are given by (22) and by two second-order equations of membrane and inextensional theories. For skew ruled surfaces, if the boundary conditions are set along straight generators, the sixth-order equation (25) holds jointly with two first-order equations for membrane and inextensional solutions. These disappear in the case when the surface is, developable, while the eight-order equation (28) intervenes. For boundary conditions the mentioned paper suggests a form aiming at consistent approximations.

ОНТНОСИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ О ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ С ОСОБОЙ ЗАМЕТКОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСТРЫХ РЕБЕР

(Резюме)

Представляется общая теория относящаяся к тонким упругим оболочкам. Исследуются затем, вытекающие из этой теории, влияния на острые ребра поверхностей, а также на грани любой формы.

O TEORIE A ÎNVELIŞURILOR ELASTICE SUBŢIRI, CU PRIVIRE SPECIALĂ ASUPRA MUCHIILOR ASCUŢITE

(Rezumat)

Se formulează o teorie generală a învelişurilor elastice subţiri. Se studiază apoi efectele ce decurg din această teorie, asupra muchiilor ascuţite ale suprafeţelor şi asupra marginilor de orice formă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C Z. 624.02

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND CALCULUL SEISMIC AL CONSTRUCŢIILOR DIN PANOURI MARI

DE

ANTON ŞESAN, DANIEL DIACONU şi I. CIONGRADI

Calculul şi execuţia construcţiilor din panouri mari, la solicitările forţelor orizontale, are o importanţă deosebită în regiunile cu puternice zone seismice.

Recentele prescripţii apărute în U.R.S.S., S.U.A. şi în alte ţări, recomandă determinarea forţelor seismice pe baza criteriului de rigiditate dinamică a clădirilor la acţiunile seismice, funcţie de curbele spectrale de răspuns (spectrul deplasărilor, vitezelor şi acceleraţiilor), calculate pe baza înregistrărilor reale ale cutremurelor.

Spectrele standard de proiectare utilizate în diferite ţări şi propuse la noi în ţară, necesită determinarea cu anticipaţie a perioadelor de oscilaţie proprie ale clădirilor, funcţie de distribuţia maselor, forma geometrică a clădirii şi natura terenului de fundaţie.

Formulele teoretice şi empiric-practice utilizate în proiectare pentru determinarea perioadelor proprii necesită o verificare a acestora pe clădiri existente.

În practica producerii vibraţiilor clădirilor, pentru măsurarea perioadelor lor proprii se pot folosi exploziile subterane la distanţe relativ mari de clădire, platforme vibrante sau izbirea terenului învecinat la o distanţă optimă de construcţie, cu o greutate ce este lăsată să cadă de la mare înălţime. Aceste metode sînt însă costisitoare şi dificil de realizat. În determinările ce le-am întreprins ne-am folosit de starea de vibraţie permanentă a clădirilor ce se datoreşte microseismelor (starea permanentă de mişcare a scoarţei pămîntului).

Cu toate că microseismele sînt vibraţii şocant nearmonice, înregistrările obţinute arată că oscilaţiile clădirii sînt practic armonic pure, de frecvenţe diferite după cele două direcţii de bază (direcţii paralele cu laturile clădirii), stabile în timp şi fără defazaj la oscilaţiile diferitelor nivele. Valorile diferite ale frecvenţelor pe tipuri diferite de clădiri, întreţinute de aceleaşi microseisme, elimină de asemenea ipoteza oscilaţiilor forţate, care nu pot întreţine frecvenţe diferite.

Oscilaţiile la microseisme nefiind forţate clădirea vibrează pe frecvenţa proprie.

Starea de microvibraţii a clădirilor datorită microseismelor a fost folosită recent în U.R.S.S. şi în R. P. Chineză, pentru determinarea frecvenţelor proprii ale construcţiilor.

Înscrierea vibraţiilor necesită un sistem de referinţă, adică a unui punct „fix", în raport cu care să se facă înregistrarea, şi a unui aparat suficient de sensibil la amplitudini ale acestor microvibraţii, de ordinul micronului. Acestea şi-au găsit rezolvarea prin construirea unui aparat cu înregistrare electrică şi care funcţionează pe principiile generale ale unui seismograf. Aparatul este cuplat cu amplificatorul vertical al unui oscilograf catodic pe ecranul căruia apare oscilograma vibraţiilor clădirii. Oscilograma este înregistrată pe o peliculă cu ajutorul unui aparat special care marchează pe aceeaşi peliculă şi timpul, cu o precizie de 0,01 sec. Aparatul a fost construit şi etalonat în laboratorul nostru, după necesităţile măsurătorilor ce trebuiau efectuate.

Cutia aparatului, plasată pe construcţia a cărei vibraţie urmează a fi înregistrată, urmăreşte oscilaţiile acesteia. Pendulul realizează datorită inerţiei sale punctul „fix". Masa pendulului m şi rigiditatea k a axei sale de sprijin-rotaţie s-au ales astfel încît frecvenţa proprie ν_1 a acesteia, dată de relaţia $\nu_1 = [1/(2\pi)]\sqrt{k/m}$, să fie de ordinul a 0,5 Hz, ($T = 2$ ses).

Dacă în momentul montării aparatului sau în timpul funcţionării acestuia pendulul este pus în mişcare, de ecuaţie:

$$x_1 = A_1 e^{-\delta_1 t} \sin (2\pi \nu_1 + \varphi_1),$$

şi dacă mişcarea construcţiei este descrisă de

$$x_2 = A_2 e^{-\delta_2 t} \sin (2\pi \nu_2 + \varphi_2),$$

atunci ecuaţia mişcării relative dintre pendul şi clădire are forma:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{-\delta_1 t} \sin (2\pi \nu_1 + \varphi_1) + A_2 e^{-\delta_2 t} \sin (2\pi \nu_2 + \varphi_2).$$

Se observă că dacă $\delta_1 > \delta_2$, atunci primul termen se anulează repede şi mişcarea rezultantă se reduce la termenul al doilea, care reprezintă mişcarea construcţiei. Pendulul este astfel construit încît să fie respectată condiţia $\delta_1 > \delta_2$.

Determinarea perioadelor proprii s-a efectuat la clădirile din panouri mari cu P + 4 etaje, în cvartalul dr. C. I. Parhon din Iaşi.

Înregistrările după ambele direcţii s-au efectuat la diferite nivele pe podestele din casa scării, fiind verificate la un interval de cîteva zile. Abaterile observate au fost sub 1% din citirea de referinţă.

Pe direcţie transversală media frecvenţei este de 3,30 Hz, ($T_{med} = 0{,}303$ sec, $\omega_{med} = 20{,}7$), citirea minimă fiind de 3,25 Hz la blocul D_7 iar cea maximă de 3,34 Hz la blocul D_9.

Frecvenţa medie pe direcţie longitudinală este de 3,56 Hz, (T_{med} = = 0,281 sec, ω_{med} = 22,4), citirea minimă fiind de 3,33 Hz la blocul D_7 şi cea maximă de 3,95 Hz la blocul D_3.

Abaterea medie pătratică $\sigma = 0{,}0332$, ($C_v = 1{,}006\,\%$), pe direcţie transversală, este mai mică decît cea pe direcţie longitudinală unde $\sigma = 0{,}189$, ($C_v = 5{,}32\,\%$), deoarece prezenţa rosturilor de tasare şi neomogenitatea terenului de fundaţie măresc dispersia măsurătorilor.

Rezultatele nu s-au putut compara cu frecvenţele altor clădiri de aceeaşi distribuţie dar cu altă structură de rezistenţă, din lipsa unor asemenea construcţii.

Comparativ s-au putut face măsurători la blocuri cu structură de cadre din beton armat cu diafragme centrale de rigidizare (P+8 etaje) unde s-au obţinut frecvenţe medii apropiate (ν_{med} = 2,03 Hz la blocurile din Piaţa Unirii şi ν_{med} = 1,96 Hz la cele din cvartalul 23 August) cu toate că blocurile din Piaţa Unirii au parterul parţial flexibil şi teren de fundare diferit.

După proiectul de prescripţii STAS 2923-60, clădirile din panouri mari prefabricate s-ar putea încadra fie în tipul A_2, fie în tipul A_3.

Faţă de rezultatele experimentale rezultă că o încadrare la tipul A_3 conduce la nepotriviri mari (de circa 25% în plus pe direcţie transversală şi 31% în plus pe direcţie longitudinală), iar încadrarea la tipul A_2 se apropie — în cazul clădirilor din panouri mari prefabricate după proiectul 4117 şi în condiţiile de fundare din cvartalul dr. C. I. Parhon — de rezultatele experimentale (cu 2,8% în minus pe direcţie transversală şi cu 1,07% în minus pe direcţie longitudinală).

Pentru a evita în proiectare încadrări apreciative care să conducă la rezultate mult diferite faţă de cele reale, şi întrucît în prezent nu s-au efectuat determinări experimentale care să orienteze încadrarea diferitelor tipuri de construcţii — şi mai ales a structurilor noi, a căror comportare la cutremur este necunoscută — este necesară extinderea acestor determinări, ce prezintă un deosebit interes pentru siguranţa construcţiilor.

Primit la 28 V 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statica construcţiilor

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО СЕЙСМИЧЕСКИМ РАСЧЕТАМ ДЛЯ КРУПНОПАНЕЛЬНЫХ ЗДАНИЙ

(Резюме)

В работе даются экспериментальные данные в связи с собственной частотой колебаний сооружений (в том числе и для крупнопанельных зданий), и результаты измерений колебаний произведенных на специальной аппаратуре исполненой в лаборатории кафедры.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES CONCERNANT LE CALCUL SÉISMIQUE DES CONSTRUCTIONS À GRANDS PANNEAUX

(Résumé)

On présente les dates expérimentales concernant la fréquence propre de vibration du bâtiment (y compris les bâtiments à grands panneaux) et les résultats des mesures des vibrations, effectuées à l'aide d'un appareil spécial, confectionné dans le laboratoire de la chaire.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 677.72

CONTRIBUŢII LA STUDIUL CABLURILOR DE OŢEL

DE

VICTOR BAUŞIC şi D. HORBANIUC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi. din 4—6 februarie 1960

Pentu a putea dimensiona dispozitivele automate de prindere pe cablu, ale instalaţiilor de transportat, trebuie efectuată integrala:

$$(1) \qquad \int_{p=0}^{p=P} p\,ds,$$

unde: p — forţa de apăsare în falca dispozitivului, s — mărimea deformaţiei trasversale a cablului.

Această integrală reprezintă lucrul mecanic necesar pentru a comprima cablul între fălcile dispozitivului de prindere, cu forţa P necesară pentru a asigura o anumită forţă de tracţiune în dispozitiv. Acest lucru mecanic trebuie să fie egalat de energia furnizată dispozitivului pentru executarea operaţiei de cuplare pe cablu.

Greutatea constă în faptul că nu se cunoaşte expresia funcţiei:

$$(2) \qquad s = \varphi(p).$$

Unii autori [1] propun o relaţie de forma:

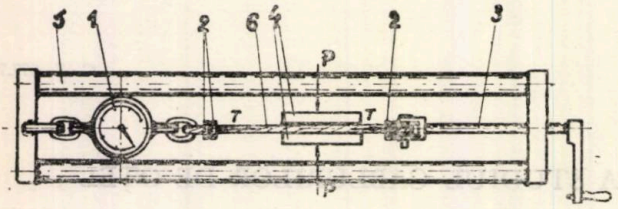
$$(3) \qquad s = \alpha p^n,$$

unde α şi n sînt constante ce depind de forma fălcilor şi diametrul cablului.

Date asupra valorilor acestor coeficienţi nu se găsesc în literatură şi din această cauză dimensionarea dispozitivelor de prindere se face încă în mod empiric.

În lucrarea de faţă ne propunem să stabilim valorile coeficienţilor α şi n pentru cablurile de oţel fabricate în R. P. R., care sînt folosite în instalaţiile de transport drept cabluri de tracţiune. Acestea sînt cablurile de construcţie normală 6×19, cu inimă vegetală, STAS 1354-50

În acest scop s-a realizat un dispozitiv (fig. 1) alcătuit dintr-un dinamometru cu scala 0...3 000 kgf, cleme pentru prinderea cablului şi un sistem de întindere cu şurub unde: *1* — dinamometru, *2* — cleme de prindere, *3* — şurub de întindere, *4* — fălci, *5* — batiul dispozitivului, *6* — cablu de studiat, *P* — forţa de apăsare transversală, *T* — forţa de întindere în cablu. Fălcile folosite au avut profilul plan şi pătrat (fig. 2 a şi 2 b).

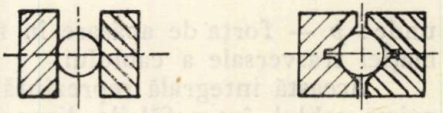


F:g. 1

Lungimea fălcilor a fost de 100 mm. Dimensiunile şanţului fălcilor pătrate au fost alese funcţie de dimensiunile cablului astfel ca la forţa maximă de apăsare cele două fălci să nu vină în atingere după comprimarea cablului.

Întregul dispozitiv a fost montat pe masa unei maşini universale de încercat, ce permitea executarea unei apăsări cu o forţă $P = 0 \ldots 50$ tf. Forţa maximă folosită a fost 10 tf.

Precizia de citire a forţei pe cadranul maşinii a fost $\pm$ 12,5 kgf. Pe maşină s-a montat un comparator de 1/100 mm cu ajutorul căruia s-au determinat deformaţiile transversale ale cablului. S-au luat măsuri pentru a împedica răsucirea cablului. Viteza de creştere a forţei de apăsare a fost, în medie, cuprinsă între 200 şi 250 kgf/sec. Fiecare încercare s-a întreprins în alte porţiuni de cablu.



a Fig. 2 *b*

Determinările s-au făcut în modul următor:

Pentru o anumită forţă T de întindere în cablul studiat, a cărei valoare a fost citită pe dinamometrul dispozitivului, s-a variat forţa de apăsare P de la 0 la 10 000 kgf şi s-au măsurat cu ajutorul comparatorului deformaţiile transversale ale cablului, corespunzătoare fiecărei forţe.

Rezultatele încercărilor întreprinse pe cablurile $\varnothing$ 6,2 mm şi $\varnothing$ 11 mm au fost reprezentate în graficele trasate în coordonate dublu logaritmice, din fig. 3 şi 4.

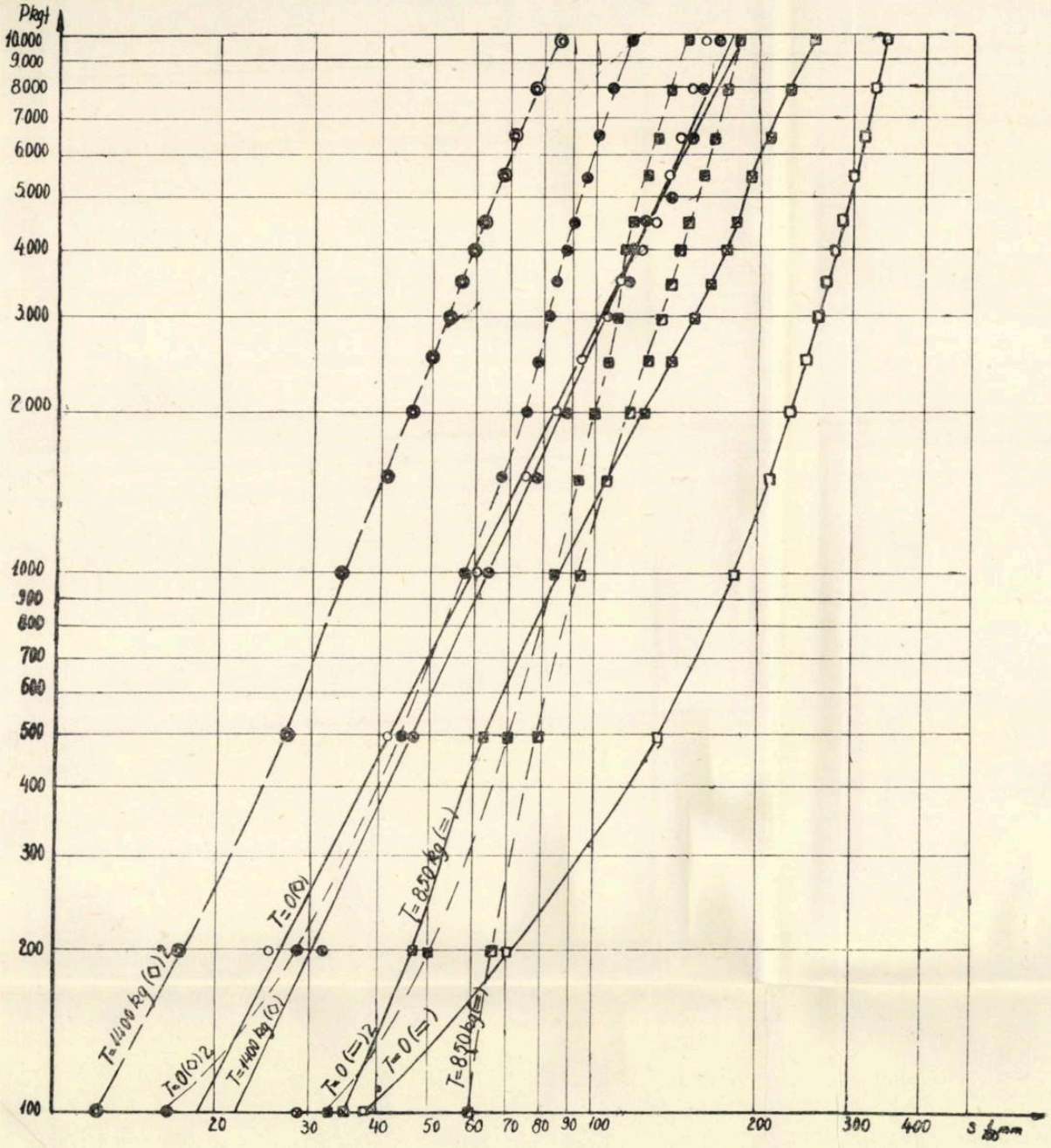
Cu ajutorul acestor grafice s-au calculat, pentru fălcile cu şanţ pătrat, valorile coeficientului n, cu ajutorul relaţiei:

$$n = [\log (S_1/S_2)]/[\log (P_1/P_2)]. \tag{4}$$

După determinarea coeficientului n s-a determinat valoarea coeficientului α cu relaţia:

$$\alpha = S/p^n. \tag{5}$$

Valorile calculate pentru S (sutimi de mm) şi p (kgf) sînt trecute în tabelul 1.



Legendo.

- ○ T= 0 kgf (0) 1 - prima încercare, bacuri patrate
- ◉ T= 0 -"- 2 - a doua încercare pe acelaş loc, bacuri patrate
- ◉ T= 1400 -"- 1 - prima încercare, bacuri patrate
- ◉ T= 1400 -"- 2 - a doua încercare pe acelaş loc, bacuri patrate
- □ T= 0 -"- 1 - prima încercare, bacuri plate
- ■ T= 0 -"- 2 - a doua încercare pe acelaş loc, bacuri plate
- ▣ T= 850 -"- 1 - prima încercare, bacuri plate
- ▣ T= 850 -"- 2 - a doua încercare pe acelaş loc, bacuri plate

Fig. 3

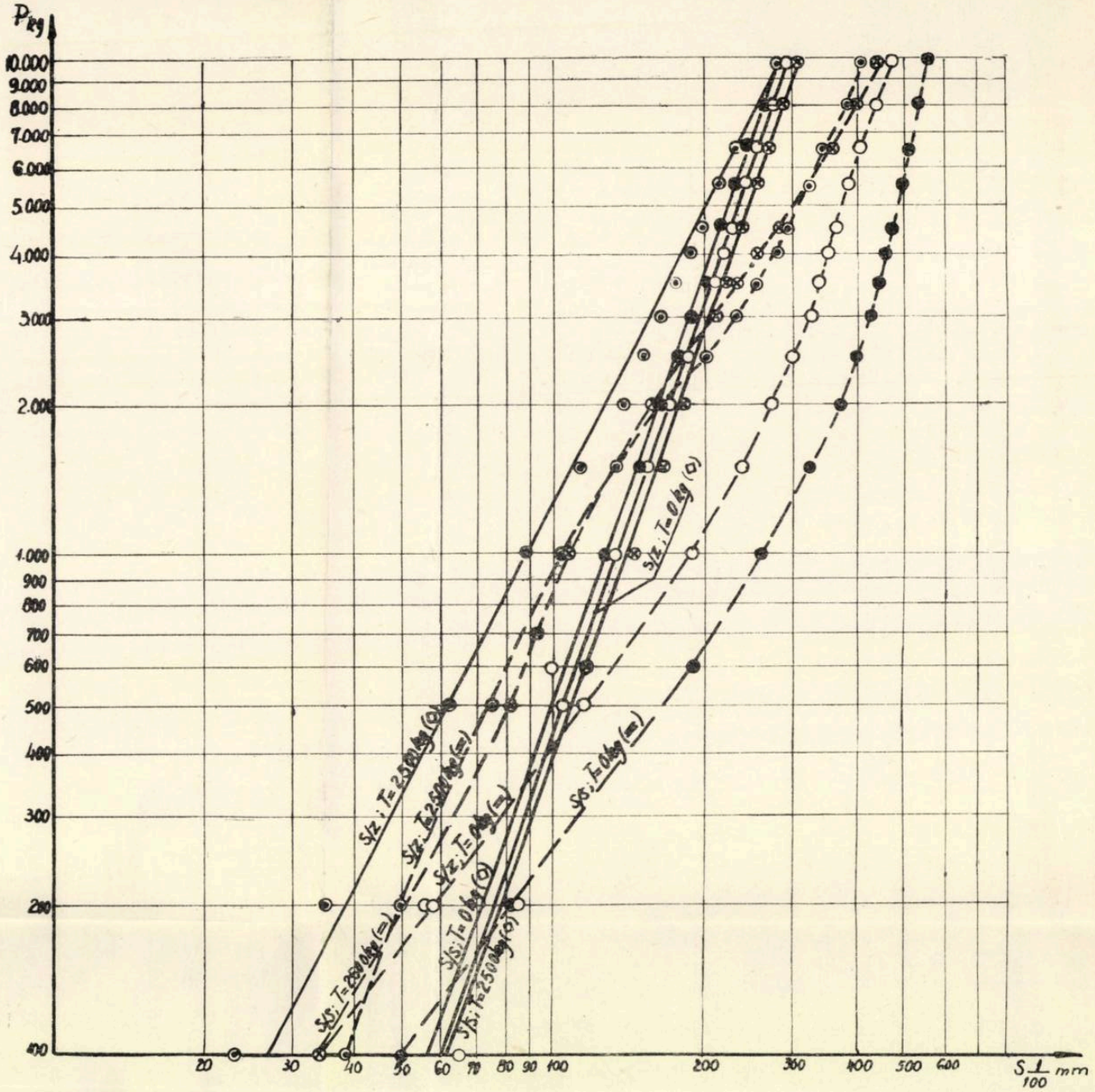
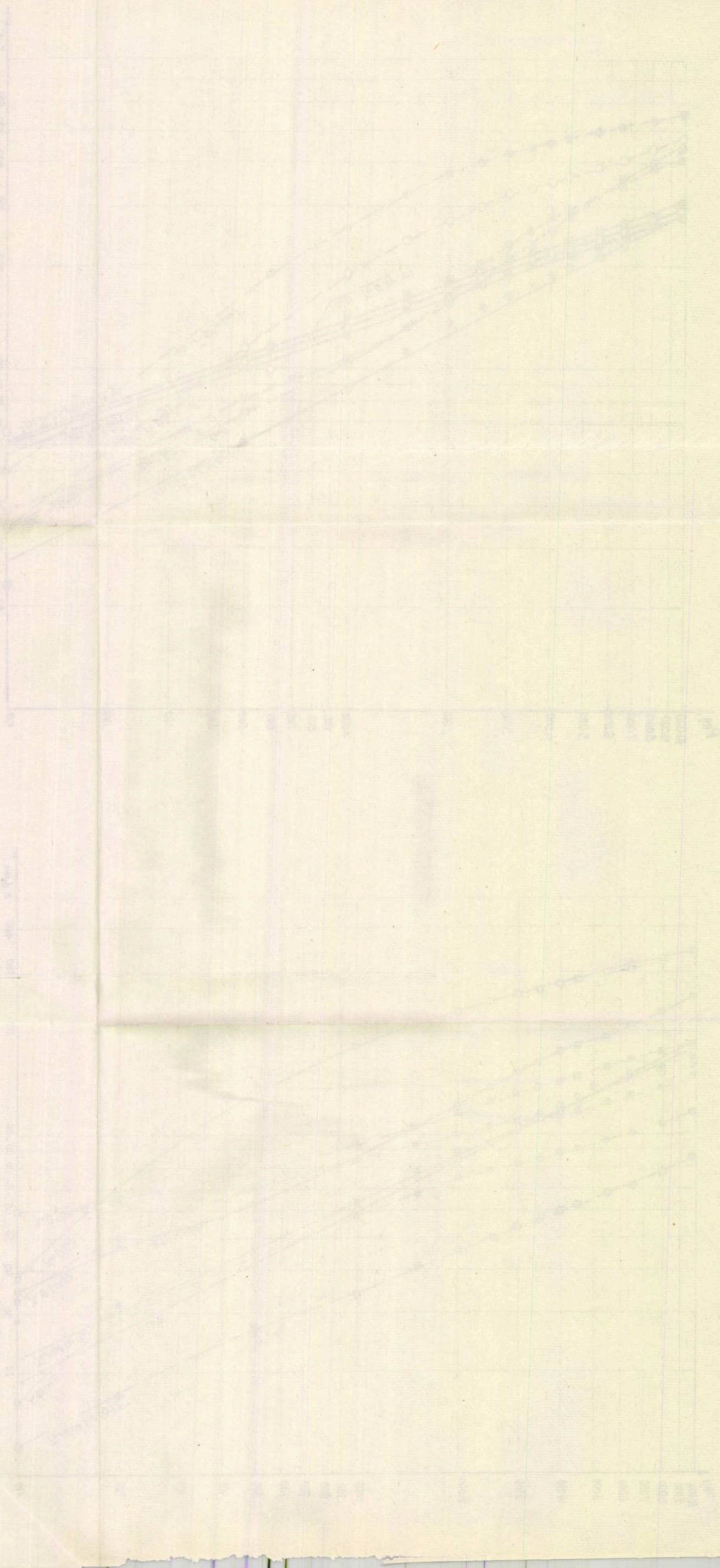


Fig. 4



Tabelul 1

Coeficientul	Cablu ∅ 6,2 *z/s*		Cablu ∅ 11 *s/s*		Cablu ∅ 11 *s/z*	
	$T = 0$	$T = 1\,400$	$T = 0$	$T = 2\,500$	$T = 0$	$T = 2\,500$
n	0,508	0,465	0,360	0,358	0,358	0,518
α	1,76	2,54	10,5	11,7	11,5	2,59

Determinările experimentale s-au efectuat în laboratorul de rezistența materialelor a Institutului politehnic din Iași.

Concluzii

1. Pentru fălcile cu șanț pătrat relația (3) se verifică, deoarece curba de variație a funcției (2), trasată în coordonate dublu logaritmice, este aproximativ o dreaptă. Pentru fălcile plane această relație nu este valabilă.

2. Se constată că deformațiile sînt ceva mai mici atunci cînd cablul este întins, ceea ce se explică prin faptul că toroanele cablului se strîng pe inimă atunci cînd sînt întinse.

3. Deformațiile la cablurile cu înfășurare în cruce sînt mai mici decît la cablurile cu înfășurare paralelă. La cablurile neîntinse diferențele sînt foarte mici, în timp ce la cablurile întinse diferențele sînt apreciabile.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de rezistența materialelor,
statică și beton armat

BIBLIOGRAFIE

1. Дукельский А. И., *Подвесные канатные дороги и кабельные краны,* Изд. 3, 1959, М.-Л., стр. 153.

К ИССЛЕДОВАНИЮ СТАЛЬНЫХ КАНАТОВ

(Резюме)

Экспериментально исследуются характеристики поперечных деформаций канатов тяги отечественной фабрикации. Указывается принцип использованного экспериментального исследования. Описывается задуманное и сконструированное с этой целью приспособление и даются результаты указанных исследований.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES CÂBLES D'ACIER

(Résumé)

Les Auteurs ont déterminé par voie expérimentale les caractéristiques de déformation en direction transversale des câbles de traction de fabrication indigène. On expose le principe de la méthode expérimentale utilisée, on décrit le dispositif réalisé en ce but et on donne les résultats expérimentaux obtenus.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 778.38

ИСКАЖЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПЛАНОВОГО АЭРОСНИМКА ЗА УГОЛ α

Ю. Б. КЕМНИЦ

Как известно, рабочие центры, являющиеся вершинами пучков направлений, по которым строится фототриангуляция, выбираются в пределах окружности заданного радиуса, описанной вокруг главной точки снимка. Одним из факторов, служащих основанием для расчета радиуса такой окружности, принимается допустимое максимальное искажение центрального направления, могущее возникнуть за счет отклонения оси аэрофотокамеры в момент съемки от отвесной линии, т. е. максимальное искажение за угол α. Известные в литературе для подобного расчета формулы не обладают должной общностью. Дело в том, что они дают возможность вычислять искажения лишь для частных случаев расположения рабочих центров (в главной точке, на главной вертикали и т. п.), либо являются приближенными, причем без оценки степени точности приближения.

В настоящей статье кратко излагаются исследования размеров искажений центральных направлений и углов, проведенные в достаточно общей форме для случая плановой съемки.

Выберем на снимке систему прямоугольных координат, приняв за ее начало главную точку, за положительное направление оси абсцисс — направление главной вертикали, а за ось ординат — главную оризонталь.

Условимся направление аэроснимка, проведенное из рабочего центра с координатами x, y измерять углом φ, отсчитываемым от линии, проходящей через рабочий центр параллельно положительному направлению оси абсцисс, по ходу часовой стрелки до данного направления. Тогда функциональная зависимость между φ и идентичным ему направлением φ_0 местности может быть выражена известной формулой:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\varphi\,[\cos\alpha - (x/f)\sin\alpha] + (y/f)\sin\alpha, \tag{1}$$

в которой f — фокусное расстояние объектива аэрофотокамеры.

Если искажение направления φ принять как разность $\Delta = \varphi - \varphi_0$ и ввести вместо прямоугольных координат полярные $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то, используя формулу (1), путем простых преобразований можно прийти к равенству:

$$\operatorname{tg}\Delta = A\,(1 - B), \tag{2}$$

в котором введены обозначения:

$$A = \sin^2(\alpha/2)\sin 2\varphi + (r/f)\sin\alpha\cos\varphi\sin(\varphi - \theta), \tag{3}$$

$$B = 2\sin^2(\alpha/2)\sin^2\varphi + (r/f)\sin\alpha\sin\varphi\sin(\varphi - \theta). \tag{4}$$

Формула (2) справедлива при любом удалении r рабочего центра от главной точки и при сколь угодно большом угле α. В случае же плановой съемки, когда угол α не превосходит 3°, эта формула может быть существенно упрощена на основании следующих соображений.

Докажем, что при $\alpha \leqslant 3°$ и $r \leqslant f$ в формуле (2), не снижая существенно ее точности, можно пренебречь величиной B и тогда она примет следующий более простой вид:

$$\operatorname{tg} \Delta = A. \tag{5}$$

Учтя (2), можно легко убедиться, что относительная погрешность приближенного равенства (5) выражается формулой

$$(\operatorname{tg} \Delta - A)/\operatorname{tg} \Delta = B.$$

Поэтому для оценки точности приближенного равенства (5) достаточно оценить степень малости величины B. Для этого на основании (4) можем написать очевидное неравенство

$$B \leqslant 2 \sin^2 (\alpha/2) + (r/f) \sin \alpha.$$

Подставив сюда $\alpha = 3°$ и $r = f$, получим, что $B \leqslant 2{,}7\%$, т. е. приходим к выводу, что приближенное равенство (5) при плановой съемке выполняется с очень высокой степенью точности, так как в этих условях $\operatorname{tg} \Delta$, вообще говоря, величина сама всегда малая.

Кроме того, если поиметь в виду, что при $\alpha = 3°$ погрешность приближенного равенства $\sin \alpha \cong \alpha$ характеризуется относительной ошибкой в 0,04%, а приближенное равенство $\sin \alpha/2 \cong (\alpha/2)$ выполняется с еще более высокой степенью точности, то используя их, можем (5) придать вид:

$$\operatorname{tg} \Delta = (\alpha^2/4) \sin 2\varphi + k\alpha \cos \varphi \sin(\varphi - \theta), \tag{6}$$

где введено обозначение:

$$k = r/f, \tag{7}$$

а угол α выражен в радианах.

Так как в пределах $0 < \Delta < \pi/2$ тангенс изменяется монотонно, то отыскание $|\Delta|_{\max}$ можно свести к отысканию $|\operatorname{tg} \Delta|_{\max}$. Поэтому, приняв за независимые переменные φ и θ и испытывая $|\operatorname{tg} \Delta|$ на экстремум, получаем, что функция $|\operatorname{tg} \Delta|$ достигает максимума, равного:

$$|\operatorname{tg} \Delta|_{\max} = (\sqrt{k^2 + 2\alpha^2} + 3k) \sqrt{4\alpha^2 - (\sqrt{k^2 + 2\alpha^2} - k)^2}/8, \tag{8}$$

при значениях аргументов, определяемых формулами:

$$\begin{cases} \varphi = [(2i + 1)/2]\pi \arccos [(-k + \sqrt{k^2 + 2\alpha^2})/(2\alpha)], \\ \theta = 2i\pi + \arccos [(-k + \sqrt{k^2 + 2\alpha^2})/(2\alpha)], \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{9}$$

Если воспользоваться приближенным равенством $|\operatorname{tg} \Delta|_{\max} \cong |\Delta|_{\max}$, то формуле (8) можно придать следующий окончательный вид:

$$|\Delta|_{\max} = (\sqrt{k^2 + 2\alpha^2} + 3k) \sqrt{4\alpha^2 - (\sqrt{k^2 + 2\alpha^2} - k)^2}. \tag{10}$$

Для оценки сделанного при этом приближеня вычислим $|\Delta|_{\max}$ по формулам (8) и (10), положив k при этом $k = 1$ и $\alpha = 3°$. Тогда соответственно получим: 4°30′,7 и 4°31′,3. Разница между этими значениями, равная 0′,6, составляет от $|\Delta|_{\max}$ лишь 0,2%, т. е. является величиной очень малой.

На основании подобных же соображений формуле (6) можно придать такой более простой вид:

$$\Delta = (\alpha^2/4) \sin 2\varphi + k\alpha \cos \varphi \sin(\varphi - \theta). \tag{11}$$

Выведенные формулы (10) и (11) позволяют теоретически предрассчитывать размеры искажений направлений планового аэроснимка и их максимальных значений. Надо заметить, что эти формулы оказываются применимыми к анализу искажений направлений, проведенных из центров, расположенных не только в непосредственной близости к главной точке снимка, но и на значительном удалении от нее. Из предыдущего следует, что если центр пучка направлений удален от главной точки на расстоя-

ние равное даже фокусному расстоянию аэрофотокамеры, то и в этом случае погрешность формул (10) и (11) не превосходит 2,7%, т. е. эти формулы с оговоренной степенью приближения практически „работают" на всей поверхности снимка.

Исследуем теперь геометрическую сторону вопроса. Для этого воспользуемся уравнениями (9). Сравнив их, придем к равенству:

$$\varphi = \theta + [(2i + 1)/2]\pi, \quad (i = 0, 1, 2,...),$$

подстановка из которого значения φ в первое из уравнений (9) позволяет после элементарных преобразований получить формулу:

$$r = -(f\alpha/2).(\cos 2\theta/\cos\theta). \tag{12}$$

Известно, что расстояние точки нулевых искажений от главной точки снимка определяется по формуле $r_c = f\operatorname{tg}(\alpha/2)$, которую для случая плановой съемки с достаточной степенью точности можно заменить следующей приближенной: $r_c \cong f\alpha/2$. Подставив отсюда значение r_c в формулу (12), получим:

$$r = -r_c(\cos 2\theta/\cos\theta). \tag{13}$$

Формула (13) является уравнением кривой в полярных координатах, известной под названием строфоиды; она изображена на рис. 1.

Изображенная на рис. 1 строфоида имеет двойную точку в главной точке снимка O, где касается биссектрис координатных углов, и две ветви, асимптотически приближающиеся к горизонтали с абсциссой, равной $+r_c$. Она образуется вращением луча $\overline{AC}$ вокруг точки нулевых искажений C, несущего отрезки $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, равные одновременно ординате $\overline{OB}$.

Из предыдущих исследований можно усмотреть, что эта строфоида является геометрическим местом точек, в которых направления, перпендикулярные направлению θ радиуса-вектора r, обладают, по отношению ко всем прочим направлениям, проведенным как в той же точке, так и в любой другой с тем же радиусом-вектором r, максимальным искажением.

Из (7) и (10) видно, что при увеличении r увеличивается и $|\Delta|_{\max}$. Поэтому, если на снимке задана некоторая окружность с $r = r_{\max}$ то в точках пересечения ее строфоидой (13) и будут располагаться точки E и F (см. рис. 1), являющиеся точками касания к данной окружности направлений, искажения которых по абсолютной величине более, чем любых других направлений, проходящих, как через эти же точки, так и через все прочие точки, расположенные и на этой окружности и внутри нее. На рис. 1 эти максимально искаженные направления показаны полупрямыми $\overline{Em}$, $\overline{Em'}$, $\overline{Fn}$ и $\overline{Fn'}$.

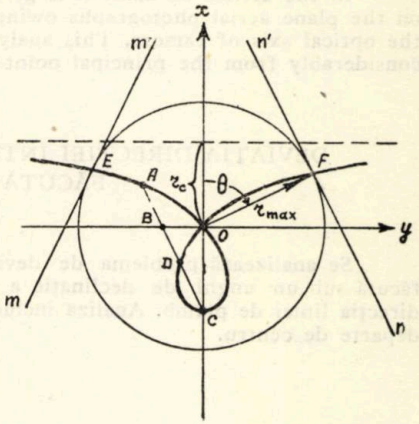


Рис. 1

В заключение остановимся на вопросе искажения углов. Рассматривая угол β как разность двух направлений, для его искажения можем написать формулу $\Delta_\beta = \Delta_2 - \Delta_1$, в которой Δ_1 и Δ_2 — искажения направлений, образующих этот угол.

На основании формулы (11) можно получить:

$$\Delta_\beta = (\alpha^2/2)\sin\beta\,[\cos(2\varphi_1 + \beta) + (2k/\alpha)\cos(2\varphi_1 + \beta - \theta)], \tag{14}$$

где φ_1 — направление, обладающее искажением Δ_1.

Исследования показывают, что функция, стоящая в правой части этого равенства, достигает максимума при:

$$\varphi_1 = (i\pi - \beta)/2, \quad \theta = 2i\pi, \quad (i = 0, 1, 2,...),$$

равного

$$|\Delta_\beta|_{max} = \alpha(\alpha/2 + k)\sin\beta. \tag{15}$$

Из этой формулы видно, что наименее искажаются углы, близкие к 180°. Это вполне соответствует известному положению о том, что перспектива прямой есть прямая. Из формулы (15) так же следует, что наиболее искажаются углы близкие к 90°. Положив поэтому в ней $\beta = 90°$, получим формулу:

$$|\Delta_\beta|_{max} = \alpha(\alpha/2 + k), \tag{16}$$

которая позволяет расчитывать максимальное искажение, которое вообще может иметь угол планового снимка с вершиной, не выходящей за пределы окружности заданного радиуса.

Выведенные формулы (10), (11), (14)...(16) и уравнение строфоиды (13) в достаточно строгом и общем виде решают вопрос о размерах и геометрическом распределении по поверхности планового аэроснимка искажений направлений и углов, в предположении, что фотографируемая местность является плоской.

Поступила 10 III 1961 г.

Московский институт землеустройства, СССР

DISTORTION OF DIRECTIONS ON THE PLANE AERIAL PHOTOGRAPHS OWING AN ANGLE α

(Summary)

In the article an analysis is given into the distortion of the bundle of directions on the plane aerial photographs owing to angle of declination from the plumb line of the optical axis of camera. This analysis includes the case of the top of rays removed considerably from the principal point too.

DEVIAŢIA DIRECŢIEI ÎNTR-O FOTOGRAFIE AERIANĂ PLANĂ FĂCUTĂ SUB UN UNGHI α

(Rezumat)

Se analizează problema de deviaţie a direcţiei într-o fotografie aeriană plană făcută sub un unghi de declinaţie a axei optice a aparatului de fotografiat faţă de direcţia liniei de plumb. Analiza include şi cazul în care fasciculul de raze este situat departe de centru.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 691.328.2

FOLOSIREA CALCARELOR COCHILIFERE CA AGREGATE PENTRU BETOANE OBIŞNUITE ŞI DE MARCĂ SUPERIOARĂ

DE

VLADIMIR BOGHIAN, DANIEL DIACONU, LUIZA TANASACHI
şi MIRCEA MANOLOVICI

1. Introducere

După prevederile STAS 1667–54, agregatele pentru betoane, nisipul de concasare şi piatra spartă, trebuie să provină din roci cu rezistenţă la compresiune, pe cuburi, în stare umedă, de minimum 1,5 ori marca betonului, dar nu mai puţin de 200 kg/cm^2.

Calcarele cochilifere, care au o foarte mare răspîndire în diferite regiuni ale ţării, nu corespund acestor cerinţe. Întrucît agregatele pentru betoane reprezintă materiale de masă în construcţii, ele trebuie procurate pe cît posibil din resurse locale, pentru realizarea unui cost redus în construcţii. De aceea se impune un studiu mai adîncit al posibilităţilor de ameliorare a acestor calcare, în vederea utilizării lor în construcţii pe scară cît mai largă.

Trebuie subliniat faptul că rezolvarea acestei probleme — şi în special a folosirii calcarelor cochilifere ca agregat în beton armat — prezintă o deosebită importanţă economică pentru dezvoltarea construcţiilor în unele regiuni.

2. Posibilităţi de ameliorare

Rezistenţele mecanice reduse ale calcarelor cochilifere se datoresc porozităţii lor relativ ridicate cît şi slabei cimentări a oolitelor.

Prin mărirea compactităţii materialului, cel puţin a stratului superficial al granulelor — ceea ce este posibil tocmai datorită porozităţii mari a agregatului — rezistenţele sale mecanice pot fi mult îmbunătăţite.

Ca agent pentru mărirea compactităţii, în acest caz, poate fi folosit însăşi laptele de ciment necesar preparării betonului. Capacitatea de absorbţie ridicată a agregatului — dacă acesta are o anumită umiditate — face ca laptele de ciment să fie absorbit în porii stratului superficial al granulelor, unde întărindu-se, perfectează procesul de cimentare a oolitelor, măreşte compactitatea materialului îmbunătăţindu-i rezistenţele mecanice şi în acelaşi timp îi micşorează capacitatea de absorbţie a apei şi-i măreşte rezistenţa la îngheţ-dezgheţ.

Funcţie de adîncimea de pătrundere a laptelui de ciment în corpul granulelor depinde şi gradul de consolidare obţinut. Granulaţia agregatului trebuie aleasă în acest caz corespunzător cu porozitatea rocii astfel ca procesul de consolidare să fie cît mai eficient.

De asemenea, datorită porozităţii ridicate şi capacităţii de absorbţie a acestor agregate se pot crea condiţii de autovacuumare a betonului. Surplusul de apă din pasta de ciment din jurul granulelor este absorbit spre zona centrală a acestora, ceea ce favorizează întărirea şi formarea unei pietre de ciment mai compacte şi deci mai rezistente decît la betoanele cu agregate obişnuite.

Pentru ca aceste procese să se desfăşoare într-un mod cît mai favorabil, este necesar a se adopta o tehnologie corespunzătoare de preparare a betonului. În acest

scop poate fi adoptată următoarea tehnologie: a) prepararea prealabilă în betonieră a laptelui de ciment, prin amestecarea apei şi cimentului timp de 0,5 min, corespunzător dozajului betonului; b) introducerea în betonieră a agregatului mare 7/30 mm şi amestecarea acestuia cu laptele de ciment timp de 1,5...2 min; c) introducerea agregatului mic şi amestecarea cu restul materialelor timp de 1,5...2 min.

Faţă de efectele care se obţin în ceea ce priveşte ameliorarea agregatului, deşi tehnologia propusă pentru prepararea betonului diferă de cea obişnuită (prin introducerea materialelor în betonieră în trei tranşe deosebite) ea reprezintă totuşi un procedeu simplu şi puţin costisitor.

Cercetările, ale căror rezultate se prezintă în cele ce urmează, efectuate în cadrul facultăţii de construcţii a Institutului politehnic din Iaşi şi secţiei INCERC, Iaşi, se referă la calcarele cochilifere de la Coasta Bîrnovei — masivul Repedea, Iaşi — a căror rezistenţă la compresiune pe piatră spartă, în stare uscată, corespunde unui rest pe ciurul de ∅ 10 mm, de 33,5% în greutate, iar în stare saturată, corespunde unui rest de 26,8% faţă de 60% minimum, cît se prevede prin STAS 1667-54

Studiul acestor calcare prezintă interes nu numai prin faptul că sînt caracteristice pentru categoria de roci respective, dar şi pentru avantajele economice care rezultă din folosirea lor la construcţiile din Iaşi.

3. Obţinerea de betoane obişnuite

a) *Condiţiile în care s-au efectuat cercetările*

Pentru determinarea rezistenţei la întindere cercetările de laborator s-au efectuat, pe cuburi de beton cu latura de 20 cm, pe prisme de beton cu dimensiuni de $55\times10\times10$ cm şi pe epruvete cu secţiunea de 10×10 cm. În acest scop s-au confecţionat 225 cuburi, 27 prisme şi 6 epruvete.

Cimentul cu marca P 400 folosit, a avut $R_{c28} = 433$ kg/cm^2.

Agregatul obţinut prin concasarea calcarului cochilifer cu ajutorul unui concasor tip semiindustrial, cu fălci, s-a sortat în trei fracţiuni: 0/7 mm; 7/15 mm şi 15/30 mm. Fracţiunea mai mare de 30 mm s-a reconcasat pentru a obţine granule mai mici de 30 mm. La confecţionarea betoanelor umiditatea agregatului a variat în limitele 5...6%. Prepararea betonului s-a făcut într-o betonieră cu capacitatea de 150 l.

Confecţionarea epruvetelor de beton şi păstrarea acestora pînă la încercare s-a făcut conform prevederilor STAS 1333-50 şi 1275-50.

Compactarea betonului în matriţe s-a realizat prin vibrare timp de circa 45 sec pe masă vibrantă, cu frecvenţa de 2800 vibraţii pe minut.

La stabilirea raportului A/C s-a plecat de la valoarea rezultată din relaţia prof. B. Skramtaev, corespunzătoare pentru betoane din piatră spartă:

$$R_b = R_c\,(C/A - 0{,}5), \tag{1}$$

sporindu-l apoi după necesităţi, funcţie de marcă, astfel ca să se obţină o lucrabilitate corespunzătoare realizării prin vibrare a unei bune compactizări. În general, pentru asigurarea unei bune lucrabilităţi, a fost necesar un raport A/C sporit cu 5...10% faţă de valoarea rezultată din relaţia (1).

Deoarece nisipul rezultat din concasare are un conţinut redus de fracţiune fină, prin combinarea fracţiunilor 0/7 mm, 7/15 mm şi 15/30 mm în proporţii corespunzătoare, se poate obţine uşor o bună compoziţie granulometrică a agregatului.

Consistenţa betonului din care s-au confecţionat epruvetele, determinată conform STAS 3622-55, a variat în limitele: tasarea — 0,8...1,2 cm, iar răspîndirea — 34...38 cm.

În cercetările efectuate pentru obţinerea de betoane obişnuite s-a urmărit: a) performanţele ce pot fi obţinute în ceea ce priveşte rezistenţa la compresiune a betonului cu agregat din calcare cochilifere; b) influenţa diferiţilor factori cum ar fi: tehnologia de preparare, durata de vibrare, granulaţia agregatului etc., asupra calităţii betonului; c) posibilitatea reducerii consumului de ciment prin: spălarea nisipului, utilizarea nisipului de rîu în locul celui de concasaj, folosirea de adausuri plastifiante.

b) *Rezultatele cercetărilor*

Rezistenţele la compresiune ale betoanelor cu agregat avînd granulozitatea indicată în tabelul 1, cu nisip de concasaj, confirmă pe deplin ipotezele luate în consideraţie.

Tabelul 1

Diametrul mm	0,2	1	3	7	15	30
Fracţiune mai mică ca d (%)	5,5	18,5	35	50	70	100

Tabelul 2

Nr. crt.	Compoziţia betonului: Agregate kg/m³, Fracţiunea 0/7	7/15	15/30	Dozaj ciment kg/m³	A/C	γ_{sa} kg/m³: proaspăt	28 zile	R_{c28} kg/cm²	Marca: proiectată	realizată %
1	932	373	558	127	1,50	2 190	2 120	70	B 50	141
2	955	382	573	171	1,80	2 295	2 184	94,4	B 70...90	135...105
3	910	364	546	233	0,95	2 270	2 163	159,3	B 110...140	145...114
4	905	362	543	280	0,78	2 316	2 213	198	B 170...200	116...99
5	887	355	533	312	0,71	2 310	2 230	231	B 200	115
6	866	345	520	332	0,68	2 290	2 237	269,7	B 250	108
7	965	346	524	355	0,57	2 300	2 197	280,6	B 250...300	113...94

După cum se observă din tabelul 2, cu agregat din calcar cochilifer avînd granulaţia 0,30 mm, folosind dozaje normale de ciment, se pot realiza betoane cu mărci de la B 50 pînă la B 250. Rezistenţele la compresiune obţinute depăşesc în general cu pînă la 15% mărcile proiectate. Numai în cazul betonului B 300 marca proiectată n-a fost realizată, aceasta datorindu-se şi raportului A/C folosit, care fiind prea mic, a influenţat negativ asupra calităţii betonului, neputîndu-se asigura o compactare corespunzătoare (din tabelul 2 se observă că γ_{sa} la 28 zile a betonului proiectat cu marca B 300 este mai mică decît a betoanelor proiectate cu marca B 200 şi B 250).

Greutatea specifică a acestor betoane variază în limitele 2 100...2 200 kg/m³, deci cu 7...8% mai mică decît cea a betoanelor cu agregate obişnuite.

Analizînd rezultatele obţinute în funcţie de raportul A/C, de activitatea cimentului R_c şi de rezistenţele de rupere la compresiune ale betonului R_b, se constată pentru coeficientul α din relaţia (1) (care caracterizează calitatea agregatului) o variaţie în limitele 0,55...0,75. Valoarea sporită a coeficientului α, rezultată din experienţele efectuate, pune în evidenţă în primul rînd proprietăţile tehnice relativ ridicate ale agregatului cît şi capacitatea de absorbţie de apă a acestuia relativ mai mare în comparaţie cu cea a agregatului de rîu.

1. INFLUENŢA TEHNOLOGIEI DE PREPARARE A BETONULUI

Pentru stabilirea influenţei tehnologiei de preparare a betonului asupra rezistenţei sale la compresiune s-au efectuat în paralel şi cercetări pe betoane confecţionate cu o tehnologie obişnuită. Rezultatele obţinute, redate în tabelul 3, arată că folosirea tehnologiei noi, propuse, conduce la obţinerea unor betoane cu rezistenţe la compresiune superioare celor obţinute la betoanele confecţionate cu tehnologia obişnuită (fig. 1).

Astfel, la betonul cu dozaj de ciment de 332 kg/m³, confecţionat cu tehnologia nouă propusă, s-a obţinut o rezistenţă la compresiune de 269,7 kg/cm², în timp ce la betonul cu dozaj apropiat de ciment (326 kg/m³) confecţionat cu tehnologia obişnuită, s-a obţinut o rezistenţă la compresiune de 230 kg/cm², deci cu circa 15% mai mică.

Tabelul 3

Nr. crt.	Compoziţia betonului: Agregate kg/m³ Fracţiunea 0,7	7/15	15/30	Dozaj ciment kg/m³	A/C	γ_{sa} kg/m³ proaspăt	28 zile	R_{c28} kg/cm²	Marca proiectată	realizată %
1	862	345	518	217	0,88	2 133	2 077	126	B 110	115
2	888	355	539	276	0,85	2 283	2 187	196	B 170	115
3	872	348	522	311	0,76	2 290	2 197	225	B 200	113
4	846	338	526	326	0,65	2 230	2 170	230	B 200...250	115...92

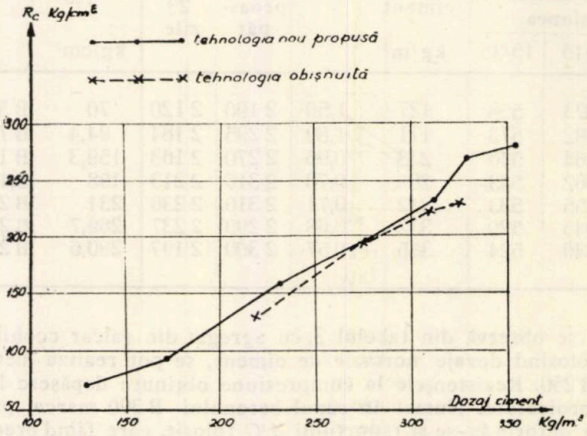


Fig. 1. — Variaţia rezistenţei R_{c28} în funcţie de tehnologia de confecţionare a betonului.

2. INFLUENŢA DURATEI VIBRĂRII

În ceea ce priveşte durata vibrării cercetările de laborator arată o creştere redusă a rezistenţei la compresiune a betonului prin creşterea duratei de vibrare (tabelul 4). Astfel: a) betonul vibrat timp de 45 sec şi cel vibrat timp de 30 sec au aceleaşi rezistenţe la compresiune; b) betonul vibrat timp de 60 sec are o rezistenţă la compresiune cu 5,7% mai mare decît cea a betonului vibrat timp de 30 sec.

Deci la raportul *A/C* folosit, o vibrare de 30...35 sec poate fi socotită suficientă.

Tabelul 4

Nr. crt.	Compoziţia betonului: Agregate kg/m³ Fracţiunea 0/7	7/15	15/30	Dozaj ciment kg/m³	A/C vibr. sec.	γ_{sa} kg/m³ proaspăt	28 zile	R_{c28} kg/cm²	Marca proiectată	realizată %
1	881	353	528	309	0,76/30	2 310	2 230	230	B 200	115
2	887	358	533	310	0,72/45	2 310	2 230	231	B 200	115,5
3	881	353	528	309	0,76/60	2 295	2 230	243	B 200	121,5

3. INFLUENȚA GRANULAȚIEI AGREGATULUI ASUPRA REZISTENȚEI BETONULUI

Analizînd comparativ rezistențele la compresiune a betoanelor cu agregat avînd granulația 0/30 mm, cu rezistențele obținute la betoanele cu agregat avînd granulația 0/25 mm (tabelul 5) și cele ale betoanelor cu agregat avînd granulația 0/20 mm (tabelul 6), nu se constată diferențe mari (fig. 2). Astfel, la betoanele cu dozaj de ciment de

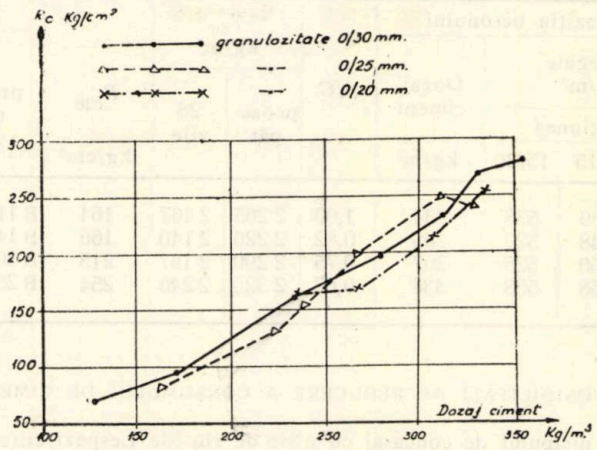


Fig. 2. — Variația rezistenței R_{c28} în funcție de granulația agregatului.

233...240 kg/m³, cu agregat avînd granulația 0/30 mm, s-a obținut o rezistență la compresiune de 159,3 kg/cm², la cele cu agregat avînd granulația 0/25 mm s-a obținut o rezistență de 155 kg/cm², iar la cele cu agregat avînd granulația 0/20 mm s-a obținut o rezistență de 164 kg/cm², mai mare deci cu numai 3% decît la betonul cu granulația 0/30 mm. În cazul însă a dozajului de ciment de 307...312 kg/m³, rezistența cea mai mare

Tabelul 5

Nr. crt.	Compoziția betonului				A/C	γ_{sa} kg/m³		R_{c28}	Marca	
	Agregate kg/m³ Fracțiunea			Dozaj ciment		proaspăt	28 zile		proiectată	realizată
	0/7	7/15	15/30	kg/m³				kg/cm²		%
1	941	377	565	163	1,27	2 250	2 120	84	B70	120
2	905	362	543	222	0,99	2 250	2 183	131	B110	119
3	915	365	350	240	1,00	2 310	2 227	155	B140	111
4	870	348	520	265	0,82	2 328	2 257	198	B170	117
5	885	355	533	311	0,73	2 310	2 230	250	B200	125
6	865	346	520	329	0,67	2 280	2 240	242	B200...250	121...97

la compresiune s-a obținut la betonul cu granulația de 0/25 mm (250 kg/cm² față de de 215 kg/cm² cît s-a obținut la betonul cu granulația 0/20 mm și față de 231 kg/cm² cît s-a obținut la betonul cu granulația 0/30 mm). Pentru precizarea influenței granulației agregatului asupra rezistenței betonului la compresiune mai sînt însă necesare cercetări. De aceea, la începutul introducerii în construcții a betoanelor cu astfel de

agregate, la elementele de beton sau beton armat cu secţiuni mari, se pot folosi agregate cu granulaţia 0/30 mm, şi numai pentru elementele de beton armat avînd secţiuni mici ar urma să se folosească agregate cu granulaţia 0/25 mm sau 0/20 mm.

Tabelul 6

Nr. crt.	Compoziţia betonului				A/C	γ_{sa} kg/m³		R_{c28}	Marca	
	Agregate kg/m³			Dozaj ciment		proaspăt	28 zile		proiectată	realizată
	Fracţiunea									
	0/7	7/15	15/30	kg/m³				kg/cm²		%
1	895	359	538	234	1,00	2 265	2 167	164	B 110...140	149...117
2	870	348	520	265	0,82	2 220	2 140	166	B 140...170	119...98
3	875	350	526	307	0,75	2 290	2 197	215	B 200	108
4	880	358	538	336	0,67	2 320	2 240	254	B 250	102

4. POSIBILITĂŢI DE REDUCERE A CONSUMULUI DE CIMENT

Înlocuirea nisipului de concasaj cu nisip de rîu (de Lespezi, curent folosit în betoane la Iaşi) nu a condus la obţinerea unor betoane cu rezistenţe mai mari decît cele obţinute la betoanele cu nisip de concasaj (tabelul 7). Aceasta se datoreşte şi faptului că în compoziţia granulometrică a agregatului folosit, cu nisip de rîu (tabelul 8), procentul de fracţiune fină (< 1 mm) a fost mai mare (circa 26%) decît în cazul betoanelor cu nisip de concasaj, la care fracţiunea mai mică de 1 mm a fost de numai 15%.

Tabelul 7

Nr. crt	Compoziţia betonului				A/C	γ_{sa} kg/m³		R_{c28}	Marca	
	Agregate kg/m³			Dozaj ciment		proaspăt	28 zile		proiectată	realizată
	Fracţiunea									
	0/7	7/15	15/30	kg/m³				kg/cm²		%
1	965	384	580	165	1,19	2 290	2 140	70,5	B 70...90	101...79
2	920	369	550	226	0,99	2 290	2 173	104	B 110	95
3	925	370	555	242	1,05	2 320	2 200	121	B 140	86
4	910	368	546	270	0,81	2 320	2 223	149	B 170	87
5	872	348	424	305	0,76	2 280	2 200	204	B 200	102

Tabelul 8

Diametrul mm	0,2	1	3	7	15	30
Fracţiune mai mică ca d (%)	7,5	26,15	33,65	50	70	100

Rezultatele obținute în acest caz sînt deosebit de interesante din punct de vedere economic întrucît demonstrează pe deplin posibilitatea utilizării nisipului de concasaj în locul nisipului de rîu, care în unele cazuri este mult mai costisitor.

Pentru a mări lucrabilitatea și compactitatea betoanelor cu nisip de concasaj poate fi folosit un adaus de moliftan ca plastifiant, care utilizat în proporție de 0,3%, raportat la dozajul de ciment, a condus la obținerea unor betoane cu rezistențe la compresiune mai mari cu 13...17% decît rezistențele obținute la betoanele fără adaus de moliftan (tabelul 9).

Tabelul 9

Nr. crt.	Compoziția betonului: Agregate kg/m³ Fracțiunea 0/7	7/15	15/30	Dozaj ciment kg/m³	A/C	Moliftan %	γ_{sa} kg/m³ proaspăt	28 zile	R_{c28} kg/cm²	Marca proiectată	realizată %
1	900	360	542	221	0,98	0,665	2 240	2 174	147	B 110	134
2	908	363	545	237	0,98	0,710	2 290	2 213	180	B 110...140	164...129
3	893	360	540	274	0,81	0,820	2 290	2 233	234	B 170	138
4	873	348	522	306	0,72	0,920	2 270	2 253	263	B 200	131
5	870	346	525	332	0,65	1,000	2 290	2 233	307	B 250	123

Astfel, la betonul proiectat ca marcă B 170, cu adaus de 0,33% moliftan, s-a obținut o rezistență la compresiune de 234 kg/cm² în comparație cu 198 kg/cm² cît s-a obținut la betonul fără adaus de moliftan (fig. 3).

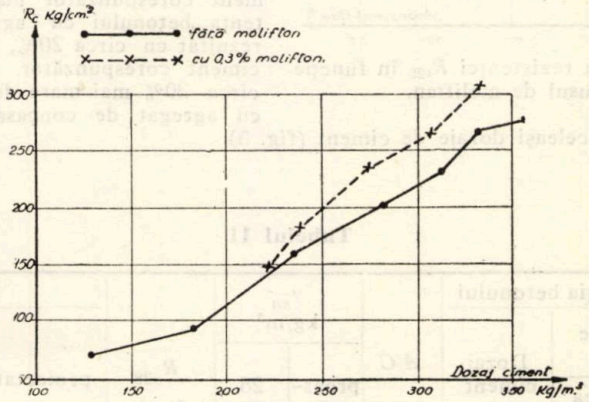


Fig. 3. — Variația rezistenței R_{c28} în funcție de dozajul de ciment cu și fără adaus de moliftan.

Cercetările efectuate pe betoane cu dozajul de ciment corespunzător mărcii B 200, cu scopul de a determina cantitatea de adaus de moliftan cu efectul cel mai eficace, arată creșterea rezistențelor la compresiune a betonului o dată cu creșterea adausului de moliftan, de la 0,2% la 0,5% (tabelul 10).

Tabelul 10

Nr. crt.	Compoziţia betonului: Agregate kg/m³ Fracţiuneea 0/7	7/15	15/30	Dozaj ciment kg/m³	A/C	Moliftan %	γ_{sa} kg/m³ proaspăt	28 zile	R_{c28} kg/cm²	Marca proiectată	realizată %
1	871	348	523	309	0,72	—	2 270	2 200	236	B 200	118
2	870	348	523	311	0,73	0,1	2 275	2 193	242	B 200	121
3	878	352	528	312	1,70	0,2	2 285	2 230	275	B 200	138
4	871	348	523	309	0,68	0,3	2 260	2 193	242	B 200	121
5	883	353	530	313	0,66	0,4	2 285	2 230	285	B 200	143
6	878	353	528	312	0,66	0,5	2 273	2 224	300	B 200	150

La betonul cu adaus de 0,5% moliftan s-a obţinut creşterea cea mai mare a rezistenţei la compresiune (27%) în comparaţie cu betonul fără adaus de moliftan (R_c=300 kg/cm² la betonul cu 0,5 % adaus de moliftan, faţă de 236 kg/cm² cît s-a obţinut la betonul fără adaus de moliftan (fig. 4)).

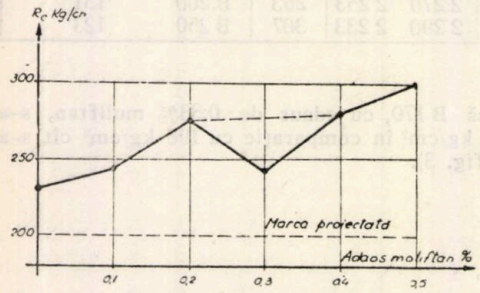


Fig. 4. — Variaţia rezistenţei R_{c28} în funcţie de adausul de moliftan.

În comparaţie cu betoanele cu agregat de rîu, avînd compoziţia granulometrică indicată în tabelul 8, la mărci de beton pînă la B 140 nu se observă diferenţe mari în ceea ce priveşte rezistenţa la compresiune la betoanele cu agregat de concasaj ; la mărci mai mari însă, betoanele cu agregat de rîu au rezistenţe la compresiune mai mari (tabelul 11). Astfel, pentru dozajul de ciment corespunzător mărcii B 170 rezistenţa betonului cu agregat de rîu a rezultat cu circa 20%, iar la dozajul de ciment corespunzător mărcii B 200 cu circa 30% mai mare decît la betoanele cu agregat de concasaj, cu granulaţia 0,30 mm, avînd aceleaşi dozaje de ciment (fig. 5).

Tabelul 11

Nr. crt.	Compoziţia betonului: Agregate kg/m³ Fracţiunea 0/15	15/30	Dozaj ciment kg/m³	A/C	γ_{sa} kg/m³ proaspăt	28 zile	R_{c28} kg/cm²	Marca proiectată	realizată %
1	1 020	1 020	168	1,11	2 395	2 253	81,5	B 70...90	117...91
2	955	955	236	0,88	2 350	2 295	161,0	B 110...140	146...115
3	950	950	277	0,72	2 385	2 300	241,0	B 170...200	148...118
4	940	940	312	0,63	2 390	2 340	305,0	B 200	153
5	920	920	352	0,57	2 395	2 350	370,0	B 250...300	148...120

Dar prin adausuri corespunzătoare de moliftan se pot obţine şi la betoanele cu agregat din calcar cochilifer rezistenţe la compresiune sensibil apropiate de rezistenţele betoanelor cu agregat de rîu.

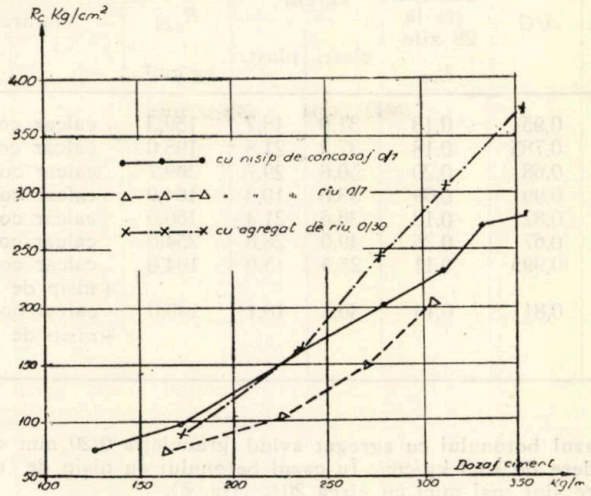


Fig. 5. — Variaţia rezistenţei R_{c28} în funcţie de natura agregatului.

5. REZISTENŢA LA INTINDERE, CONTRACŢIE, DEFORMAŢII

Determinările de laborator referitoare la rezistenţa la întindere pură a betoanelor din calcare cochilifere cu marca B 200, efectuate pe epruvete standard, au furnizat rezistenţe medii $R_t = 17{,}9$ kg/cm² pentru betonul fără adaus de moliftan şi $R_t = 18{,}2$ kg/cm² pentru betonul cu adaus de 0,3% moliftan, apropiate de rezistenţele medii obţinute pentru betoane agregate obişnuite de rîu (tabelul 12).

Tabelul 12

Nr. crt.	Compoziţia betonului				A/C	Moliftan	R_t
	Agregat kg/m³			Dozaj ciment			
	Fracţiunea						
	0/7	7/15	15/30	kg/m³		%	kg/cm²
1	871	348	523	309	0,72	—	17,9
2	871	348	523	309	0,68	0,3	18,2

În tabelul 13 se prezintă rezultatele privind rezistenţa la întindere din încovoiere determinată pe prisme cu dimensiunile de $55 \times 10 \times 10$ cm.

Rezistenţa la întindere din încovoiere variază foarte puţin funcţie de granulaţia agregatului. Astfel, pentru dozajul 233...234 kg ciment/m³, în cazul betonului cu agregat avînd granulaţia 0/30 mm, s-a obţinut o rezistenţă la întindere din încovoiere de 18,7

Tabelul 13

Nr. crt.	Dozaj ciment kg/m³	A/C	Contracţia la 28 zile ‰	R_{ti} kg/cm² elast.	R_{ti} kg/cm² plast.	R_{c28} kg/cm²	Natura agregatului
1	233	0,95	0,13	31,9	18,7	159,3	calcar cochilifer 0/30 mm
2	280	0,785	0,18	37,2	21,8	198,0	calcar cochilifer 0/30 mm
3	332	0,68	0,29	50,6	29,7	269,7	calcar cochilifer 0/30 mm
4	234	0,99	0,09	33,0	19,3	164,0	calcar cochilifer 0/30 mm
5	265	0,82	0,18	36,6	21,4	166,0	calcar cochilifer 0/20 mm
6	336	0,67	0,25	49,0	28,8	254,0	calcar cochilifer 0/20 mm
7	226	0,995	0,11	25,5	15,0	104,0	calcar cochilifer 7/30 mm +nisip de rîu 0/7 mm
8	270	0,81	0,14	30,8	18,1	149,0	calcar cochilifer 7/30 mm +nisip de rîu 0/7 mm

kg/cm², iar în cazul betonului cu agregat avînd granulaţia 0/20 mm s-a obţinut o rezistenţă la întindere de 19,3 kg/cm². În cazul betonului cu nisip de rîu rezistenţele la întindere obţinute sînt mai mici cu circa 20% (fig. 6).

Contracţii. În ceea ce priveşte contracţia la 28 zile de la confecţionare, determinată pe prisme avînd dimensiunile 55×10×10 cm, aceasta variază funcţie de dozajul de ciment, fiind mai accentuată la betonul cu

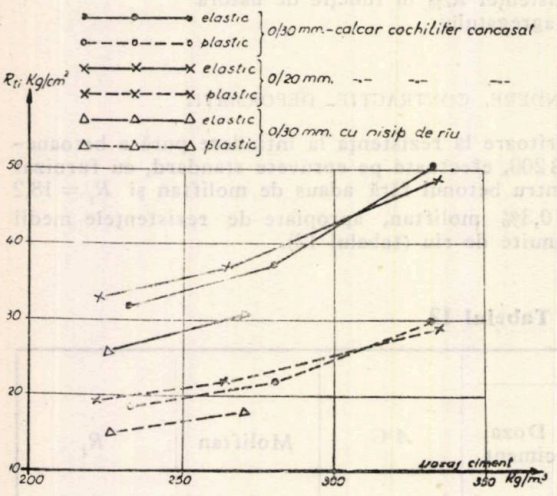


Fig. 6.— Variaţia R_{ti} elastic şi plastic în funcţie de dozajul de ciment.

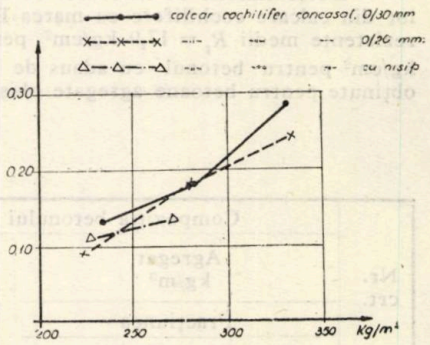


Fig. 7. — Variaţia contracţiei (‰) în funcţie de dozajul de ciment.

agregat avînd granulaţia 0/30 mm şi mai redusă la betonul cu nisip de concasaj (tabelul 13). Pentru betoane cu dozaje apropiate de ciment (265...280 kg/m³) s-au obţinut contracţii de 0,18 mm/ml în cazul agregatului din calcar cochilifer concasat, faţă de 0,44 mm/ml în cazul betonului cu nisip de rîu (fig. 7).

Deformaţii. În fig. 8 se prezintă diagrama eforturi unitare-deformaţii la încercări repetate pentru betoane cu dozaj de ciment corespunzătoare mărcilor B 170 şi B 200. Determinările s-au efectuat pe cuburi cu latura de 20 cm, cu tensometre mecanice.

Modulul de elasticitate în determinările efectuate, a rezultat mai mic decît valorile stabilite prin relaţia teoretică aproximativă:

$$E^b = 1\,000\,000/(1{,}7 + 360/R_b)\,.$$

Astfel, pentru betonul marca B 140, modulul calculat cu ajutorul relației de mai sus rezultă $E_b = 292\,000$ kg/cm², iar pentru betonul marca B 170, $E_{b\ calc} = 317\,000$kg/cm², față de $E_{b\ real} = 204\,000$ kg/cm². Din acest punct de vedere betoanele cu agregat din calcare cochilifere se apropie de betoanele cu agregate ușoare poroase care, după cum se știe, au modul de elasticitate mai mic decît betoanele obișnuite.

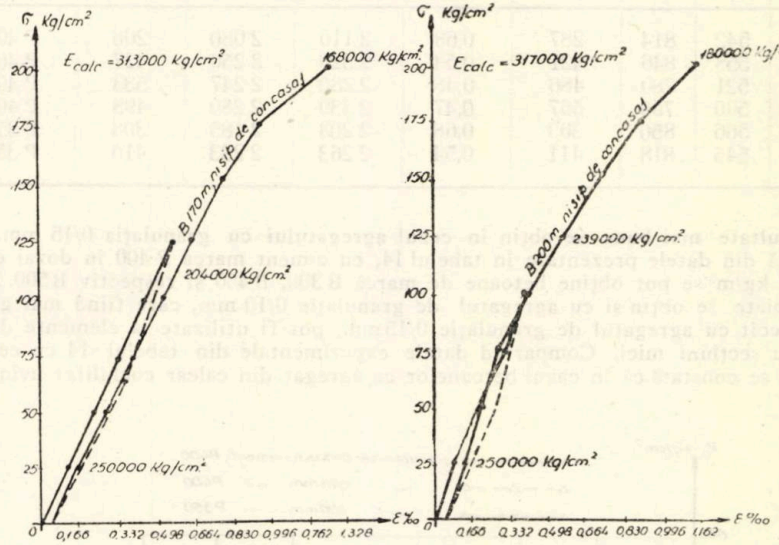


Fig. 8. — Diagrama tensiuni-deformații.

4. Obținerea de betoane de mărci superioare

Calcarele cochilifere concasate, cu granulația 0,15 mm și 0,10 mm, pot fi folosite ca agregate în betoanele de mărci superioare. În tabelele 14 și 15 se prezintă rezultatele cercetărilor de laborator pe betoane cu agregat avînd granulația 0/15 mm, respectiv 0/10 mm.

Tabelul 14

Nr. crt.	Compoziția betonului			A/C	γ_{sa} kg/m³		R_c
	Agregat kg/m³		Dozaj ciment		proaspăt	28 zile	
	Fracțiunea						
	0/7	7/15	kg/m³				kg/cm²
1	690	1 034	246	0,82	2 177	2 107	196
2	705	1 058	314	0,68	2 293	2 250	354
3	601	1 051	356	0,59	2 133	2 270	401
4	682	1 022	411	0,53	2 330	2 275	438
5	651	976	443	0,47	2 277	2 258	474
6	648	970	502	0,43	2 337	2 308	527

Tabelul 15

Nr. crt.	Compoziţia betonului: Agregate kg/m³, Fracţiunea 0/0,2	0,2/5	5/10	Dozaj ciment kg/m³	A/C	γ_{sa} kg/m³: proaspăt	28 zile	R_c kg/cm²	Marca cimentului
1	271	542	814	287	0,68	2 110	2 080	206	P 400
2	279	558	846	421	0,54	2 320	2 250	427	P 400
3	260	521	780	486	0,48	2 280	2 247	533	P 400
4	250	500	750	567	0,47	2 330	2 280	498	P 400
5	283	566	850	300	0,68	2 203	2 185	308	P 350
6	272	545	818	411	0,54	2 263	2 233	410	P 350

Rezultate mai bune se obţin în cazul agregatului cu granulaţia 0/15 mm. După cum rezultă din datele prezentate în tabelul 14, cu ciment marca P 400 în dozaj de 300, 400 şi 500 kg/m³ se pot obţine betoane de marcă B 300, B 400 şi respectiv B 500. Rezultate apropiate se obţin şi cu agregatul de granulaţie 0/10 mm, care fiind mai greu de realizat decît cu agregatul de granulaţie 0/15 mm, pot fi utilizate la elemente de construcţii cu secţiuni mici. Comparînd datele experimentale din tabelul 14 cu cele din tabelul 11 se constată că în cazul betoanelor cu agregat din calcar cochilifer avînd gra-

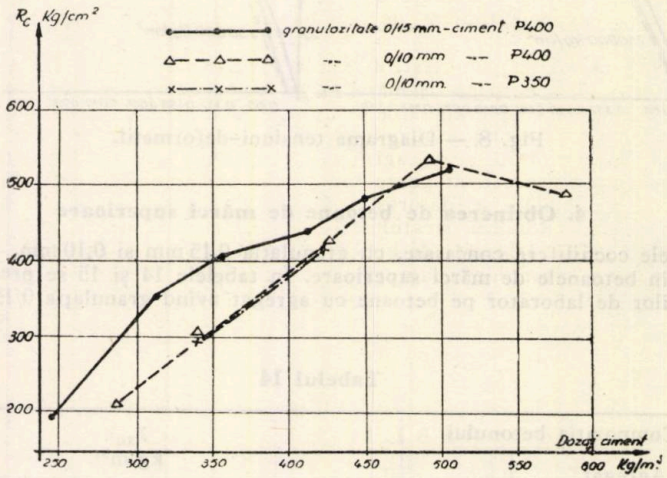


Fig. 9. — Variaţia rezistenţei R_{c28} în funcţie de dozajul de ciment.

nulaţia 0/15 mm, pentru dozaje apropiate de ciment se obţin rezistenţe la compresiune mai mari decît în cazul betoanelor cu agregat de rîu cu compoziţie granulometrică obişnuită (0/30 mm). Astfel, în timp ce la betoanele cu agregat de rîu cu dozaje de ciment de 236 kg/m³ şi 312 kg/m³ s-au obţinut rezistenţe la compresiune de 161 kg/cm² şi respectiv 305 kg/cm², la betoanele cu agregat din calcar cochilifer (cu nisip de concasaj) avînd dozaje apropiate de ciment şi anume: 246 kg/m³ şi 314 kg/m³, s-au obţinut rezistenţe la compresiune de 196 kg/cm² şi respectiv 354 kg/cm² (fig. 9).

Aceste rezultate se datoresc faptului că la agregatele cu granule mai mici fenomenele indicate mai sus şi anume: procesul de consolidare superficială al granulelor, procesul de autovacuumizare cît şi aderenţa pietrei de ciment cu agregatul, datorită

feţelor sale rugoase, au loc cu o intensitate mult mai mare decît la agregatele cu granule mari, compensînd în parte şi efectul defavorabil al fracţiunii fine (0/0,2 mm) conţinută în acest caz în proporţie de 16,3%. Mărcile B 300 şi B 400, în cazul agregatului cu granulaţia 0/10 mm, pot fi obţinute şi cu ciment P 300 (tabelul 15). Obţinerea acestor mărci de betoane cu agregat local creează posibilităţi de folosire în construcţii a unor prefabricate din betoane de mărci superioare, cu secţiune redusă, ceea ce conduce nu numai la ieftinirea costului agregatelor de carieră ci şi la reducerea greutăţii construcţiilor.

5. Concluzii

Din calcarele cochilifere, prin concasare, se pot obţine agregate (piatră spartă şi nisip) atît pentru betoane obişnuite cît şi pentru betoane de mărci superioare.

Obţinerea de betoane cu rezistenţe la compresiune care depăşesc de cîteva ori rezistenţa rocii, se datoreşte unui complex de procese şi anume : a) capacitatea de absorbţie relativ mare a agregatului are drept efect o absorbţie a laptelui de ciment în stratul superficial al granulelor, pe care-l consolidează şi-i măreşte astfel rezistenţele mecanice ; b) datorită capacităţii de absorţie a apei se produce o autovacuumizare naturală a betonului în urma căreia la suprafaţa granulelor agregatului se formează o piatră de ciment compactă şi rezistentă; c) rugozitatea pronunţată a feţelor granulelor de calcar cochilifer asigură o bună aderenţă între agregat şi piatra de ciment.

Asigurarea desfăşurării acestor procese în condiţii cît mai bune necesită aplicarea unei tehnologii corespunzătoare de preparare a betonului.

Pentru a mări lucrabilitatea betoanelor cu nisip de concasaj se pot folosi adausuri plastifiante. Adăugînd moliftan în proporţie pe 0,2...0,3% din dozajul de ciment se obţine sporirea rezistenţelor la compresiune a betonului cu pînă la 27% în cazul mărcii B 200, în comparaţie cu rezistenţele obţinute la betoane fără adaus de moliftan (tabelul 10).

La betoane cu dozaj mai mare de ciment, cu adaus de moliftan, rezistenţele la compresiune sînt sensibil apropiate de rezistenţele betoanelor cu agregat de rîu (tabelul 11).

Din calcar cochilifer concasat, avînd granulaţia 0/15 mm şi 0/10 mm (cu nisip de concasaj) se pot realiza betoane de mărci superioare. Rezultate mai bune se pot obţine în cazul agregatului cu granulaţia 0/15 mm, cînd, utilizînd ciment P 400 în dozaj de 300, 400 şi 500 kg/m^3, se pot realiza betoane de marcă B 300, B 400 şi B 500 (tabelul 14). Rezultate apropiate se obţin şi cu agregat avînd granulaţia 0/10 mm (tabelul 15), dar acesta fiind mai greu de realizat poate fi utilizat la elementele de construcţii cu secţiuni mici. Aceste rezulate se datoresc faptului că la betonul din agregat cu granule mici procesul de consolidare al stratului superficial al granulelor, procesul de autovacuumizare cît şi aderenţa pietrei de ciment cu agregatul sînt proporţional mai importante decît în cazul betonului cu agregat avînd granule mari.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de construcţii
şi
INCERC, secţia Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Коноплепко И. А., Майлян Л. П., Савин С. Е., Бетон и железобетон, 1960, *3*.
2. Сизов П. В., Строит. пром., 1955, *1*.

ОБЫЧНЫЕ БЕТОНЫ И БЕТОНЫ ПОВЫШЕННЫХ МАРОК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ИЗ ИЗВЕСТНЯКА-РАКУШЕЧНИКА

(Резюме)

Приводятся результаты лабораторных исследований по возможностн использования известняка-ракушечника в качестве заполнителей в бетонах.

Используя определенную технологию приготовления бетона, благодаря повышенной абсорбционной способности заполнителя, цемент проникает в поверхностные

слоя зерен, где, при твердении, усовершенствуется процесс цементации пород, увеличивается плотность материала и, улучшаются их механические свойства.

При этом способе, используя дробленный известняк-ракушник и цемент Р 400, возможно получить бетон марок приближающихся к В 400.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Зависимость прочности R_{c28} от технологии приготовления бетона.

Рис. 2. — Зависимость прочности R_{c28} от крупности заполнителя.

Рис. 3. — Зависимость прочности R_{c28} от дозажа цемента с добавкой молифтана и без него.

Рис. 4. — Зависимость прочности R_{c28} от добавки молифтана.

Рис. 5. — Зависимость прочности R_{c28} от природы заполнителя.

Рис. 6. — Зависимость эластичной и пластичной R_{ti} от дозажа цемента.

Рис. 7. — Зависимость сокращения бетона от дозажа цемента.

Рис. 8. — Диаграмма напряжений-деформаций.

Рис. 9. — Зависимость прочности R_{c28} от дозажа цемента.

BÉTONS USUELS ET DE MARQUES SUPÉRIEURES À CALCAIRES COQUILLIERS

(Résumé)

On présente les résultats des recherches de laboratoire en ce qui concerne la possibilité de l'amélioration des calcaires coquilliers en vue de leur emploi comme des agrégats en bétons. En appliquant une certaine technologie de la préparation du béton, dû à la capacité d'une haute absorption de l'agrégat, le lait de ciment pénètre dans la couche superficielle des granules, où, en se consolidant, il donne la possibilité de perfectionner le processus de solidification des oolytes, il augmente la compacité du matériel et il améliore ses résistances mécaniques.

D'après ce procédé, en utilisant des calcaires coquilliers faibles, concassés, et le ciment P 400, on peut obtenir des bétons à marque jusqu'au B 400.

Explication des figures

Fig. 1. — La variation de la résistance R_{c28} en fonction de la technologie de préparation du béton.

Fig. 2. — La variation de la résistance R_{c28} en fonction de la granulation de l'agrégat.

Fig. 3. — La variation de la résistance R_{c28} en fonction du dosage de ciment avec et sans moliftan.

Fig. 4. — La variation de la résistance R_{c28} en fonction de la quantité de moliftan ajoutée.

Fig. 5. — La variation de la résistance R_{c28} en fonction de la nature de l'agrégat.

Fig. 6. — La variation de R_{ti} élastique et plastique en fonction du dosage de ciment.

Fig. 7. — La variation de la contraction en fonction du dosage de ciment.

Fig. 8. — Le diagramme tensions-déformations.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 625.8

CONSIDERAŢIUNI ASUPRA UNOR PROPRIETĂŢI ALE BETOANELOR ASFALTICE ŞI ASUPRA MODULUI LOR DE DETERMINARE ÎN LABORATOR

DE

D. GANJULA şi ZAHARIA SALINIUC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică pe ţară în probleme rutiere, Iaşi, 21—23 decembrie 1961

1. Introducere

După cum este cunoscut, betonul asfaltic ca îmbrăcăminte rutieră este un conglomerat monolit alcătuit din: agregat mineral grosier, agregat mărunt, pulbere minerală şi bitum, preparat la cald şi transformat în monolit dens prin comprimare cu cilindrii compresori şi prin circulaţie. Stabilirea unei proporţii juste între aceste materiale şi asigurarea unei anumite compactităţi reprezintă o condiţie esenţială pentru obţinerea unui beton asfaltic fără de care amestecul realizat nu s-ar putea denumi beton.

Materialele ce intră în compoziţia betonului asfaltic sînt foarte diferite ca natură şi de asemenea ca proprietăţi; piatra se alege de obicei din roci bazice de duritate mare, filerul este o pulbere minerală rezultată din măcinarea unor roci mult mai slabe, iar bitumul — un material plastic-vîscos cu o constituţie şi proprietăţi cu totul diferite de ale filerului şi pietrei. În procesul tehnologic se caută a se aduce aceste materiale în starea cea mai favorabilă unei amestecări cît mai omogene şi a unui contact cît mai intim pentru a asigura o cît mai bună conlucrare a lor prin trecerea în monolit. Proprietăţile materialului rezultat — betonul asfaltic — sînt mult diferite de cele ale materialelor componente. În afară de aceasta ele variază mult în funcţie de temperatură; astfel, există un interval în care betonul asfaltic are proprietăţile corpurilor rigide ca piatra, un alt interval în care se comportă asemănător corpurilor plastice şi un interval de tranziţie. Aceste intervale, ca de altfel toate proprietăţile betonului asfaltic, sînt determinate de proprietăţile materialelor componente şi de raportul cantitativ dintre ele.

Din această cauză unii specialişti [1], [3] sînt de părere că aprecierea calităţii unui pavaj asfaltic trebuie să se facă: a) la temperaturile cele mai ridicate, cînd materialul capătă proprietăţi plastice; b) la temperaturile cele mai coborîte, cînd betonul asfaltic devine rigid şi din această cauză are o capacitate redusă de deformare; c) la o temperatură intermediară, la care este probabilă saturarea cu apă.

2. Încercările de laborator

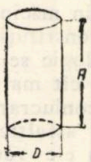
Încercările ce se întreprind în laborator au drept scop să dea indicaţii asupra compactităţii şi proprietăţilor mecanice ale betonului asfaltic. Încercările se fac pe corpuri de probă sau epruvete special executate în laborator. Se întîlnesc de obicei două feluri de epruvete: cubice sau cilindrice. Rezultatele care se obţin nu sînt absolute ci sînt legate de forma şi dimensiunile epruvetelor încercate.

În tabelul 1 se indică dimensiunile şi forma epruvetelor utilizate în prezent la cele mai cunoscute încercări dintr-o serie de ţări.

Este uşor de observat că se preferă forma cilindrică deoarece prezintă avantaje atît în transmiterea uniformă a eforturilor produse prin încercările mecanice cît şi în obţinerea unor caracteristici fizice mai puţin variate în masa epruvetei. Se observă de asemenea că se preferă utilizarea unor epruvete avînd alte dimensiuni pentru mortare decît pentru betoane asfaltice.

Tabelul 1

Dimensiunile folosite pentru epruvetele supuse încercărilor fizico-mecanice

Încercarea / Ţara		Forma	Dimensiuni adoptate pentru (cm)				Observaţii
			mortare asfaltice	betoane asfaltice			
				fine	mijlocii	grosiere	
U.R.S.S.	Norme tehnice		$D=5{,}00$ $H=5{,}00$	$D=5{,}00$ $H=5{,}00$	$D=7{,}00$ $H=7{,}00$	$D=10{,}00$ $H=10{,}00$	Compactare $P=300$ kg/cm² $t=3$ m $T=140$°C
Franţa	Duriez		$D=8{,}00$ $H\cong 9{,}00$		$D=8{,}00$ $H\cong 9{,}00$		Compactare $P=120$ kg/cm² $t=3$ m $T=120$°C
Olanda	Nijboer		$D=8{,}00$ $H=20{,}00$		$D=15{,}00$ $H=45{,}0$		Compactare $P=100$ kg/cm² cu vibrare laterală
S. U. A.	Marshall				$D=10{,}16$ $H=6{,}35$		Compactare 50 lovituri pe fiecare bază $G=4{,}5$ kg $H=45$ cm
	Hubbard şi Field		$D=5{,}08$ $H=2{,}54$		$D=15{,}26$ $H=5{,}08$		Compactare 60+20 lovituri $H=10$ cm apoi $P=210$ kg/cm²
	Triaxial (Asphalt-institut)				$D=10{,}16$ $H=20{,}32$		—
	Triaxial (Stabilometru Hweem)		$D=10{,}16$ $H=6{,}35$				—

Între dimensiunea minimă a epruvetei şi dimensiunea maximă a agregatului mineral nu există un raport constant ; el este maxim în cazul mortarelor asfaltice şi se micşorează pentru betoane. În cadrul dimensiunilor standardizate în U. R. S. S. raportul este 25...10 pentru sandasfalt, 10 pentru betonul asfaltic fin, 4,7 pentru betonul asfaltic de granulozitate mijlocie şi 4 pentru betonul asfaltic grosier. O regulă mai veche cerea ca dimensiunea minimă a epruvetei să întreacă cel puţin de 6 ori dimensiunea maximă a agregatului mineral.

Forma cubică a epruvetelor este cea mai dezavantajoasă deşi aceasta este cea mai veche; dezavantajul este şi mai accentuat din cauza modului de compactare în straturi, prin lovituri cu soneta. Executînd în laborator un cub confecţionat în conformitate cu normativele, pentru care s-a constatat o greutate unitară aparentă $\gamma = 2{,}11$ g/cm^3 şi o absorbţie de apă de 5,41 % şi desfăcîndu-l în bucăţi, s-a găsit pentru acestea $\gamma =$ $= 2{,}23...2{,}17$ g/cm^3 iar absorbţia de apă 5,80...6,30 %. Rezultate analoge s-au obţinut şi pentru un cub de beton asfaltic fin care avea aceleaşi dimensiuni ca şi cubul de sandasfalt.

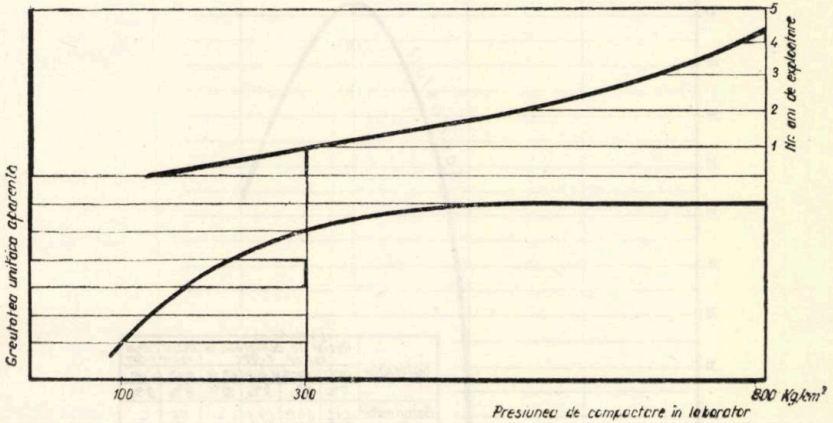


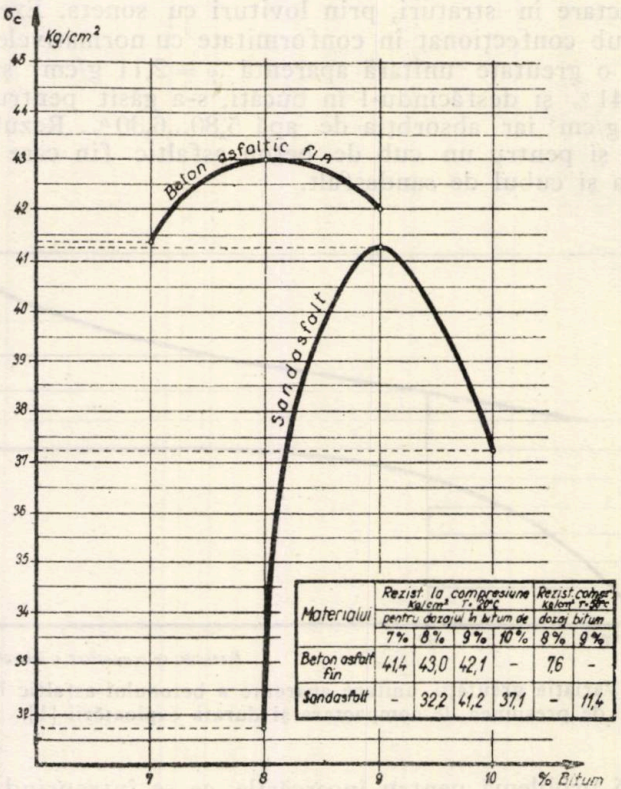
Fig. 1. — Variaţia greutăţii unitare aparente a betonului asfaltic în funcţie de presiunea de compactare şi durata exploatării [1].

O primă problemă pentru încercările ce se întreprind în laborator o constituie stabilirea unei astfel de metode de confecţionare a epruvetelor, încît acestea să aibă o structură cît mai apropiată de cea a betonului asfaltic din carosabilul drumurilor. În Uniunea Sovietică s-a considerat, de exemplu, că betonul asfaltic încercat în laborator trebuie să aibă compactitatea pavajului după un an de exploatare (fig. 1). De exemplu s-a ajuns să se fixeze pentru mixturile la cald compresiunea de compactare de 300 kg/cm^2 aplicată timp de 3 minute asupra mixturii încălzite la aproximativ 140...160 °C, ceea ce prezintă numeroase avantaje tehnologice.

Din tabelul 1 se constată că se folosesc şi alte presiuni la confecţionarea epruvetelor ; de asemenea ele se pot realiza prin vibrare sau prin presiune statică. În Franţa se utilizează în prezent presiunea de 120 kg/cm^2 indicată de M. D u r i e z, dar acelaşi autor recomanda în 1946

să se utilizeze la confecţionarea epruvetelor cilindrice presiunea de 250 kg/cm² [2].

Pentru a cerceta în ce măsură dimensiunile şi condiţiile de compactare influenţează rezultatele obţinute la încercările din laborator, am realizat două mixturi asfaltice: un sandasfalt şi un beton asfaltic fin după metoda Ewers (fig. 2), realizînd curbe granulometrice care se încadrează în intervalul recomandat de normele sovietice T. U. 1955 (fig. 3). Cu aceste mixturi



Materialul	Rezist. la compresiune kg/cm² t=20°C pentru dozajul în bitum de				Rezist. compr. kg/cm² t=20°C dozaj bitum	
	7%	8%	9%	10%	8%	9%
Beton asfaltic fin	41,4	43,0	42,1	-	7,6	-
Sandasfalt	-	32,2	41,2	37,1	-	11,4

Fig. 2. — Stabilirea dozajului de bitum pentru mixturile asfaltice studiate.

s-au confecţionat epruvete cilindrice avînd $H = D = 5$ cm pentru sandasfalt şi $H = D = 7$ cm pentru beton asfaltic fin, care s-au compactat cu presiune variabilă şi anume: $p = 200; 300; 400$ kg/cm², timp de 3 minute. Rezultatele arată (fig. 4) că greutatea unitară aparentă creşte mai repede pînă la presiunea de 300 kg/cm². Acelaşi caracter l-au avut curbele respective şi în cazul cînd aceste presiuni s-au aplicat timp de 2 minute sau 4 minute (fig. 5). Absorbţia de apă, determinată sub vacuum de 15 mm coloană de mercur, dimpotrivă s-a dovedit mai mare pentru presiunile de compactare mai mici (fig. 6) sau aplicate un timp mai scurt

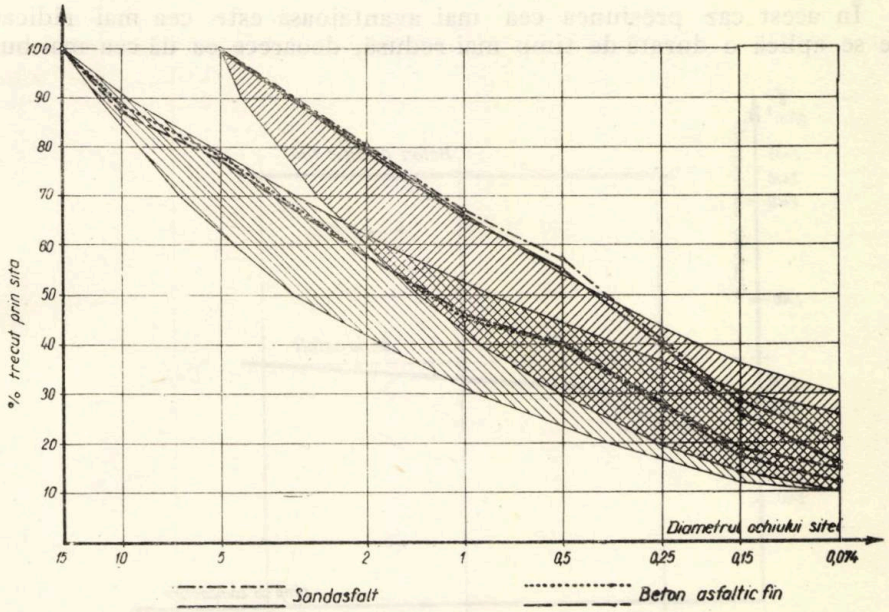


Fig. 3. — Curbele granulometrice pentru mixturile asfaltice studiate.

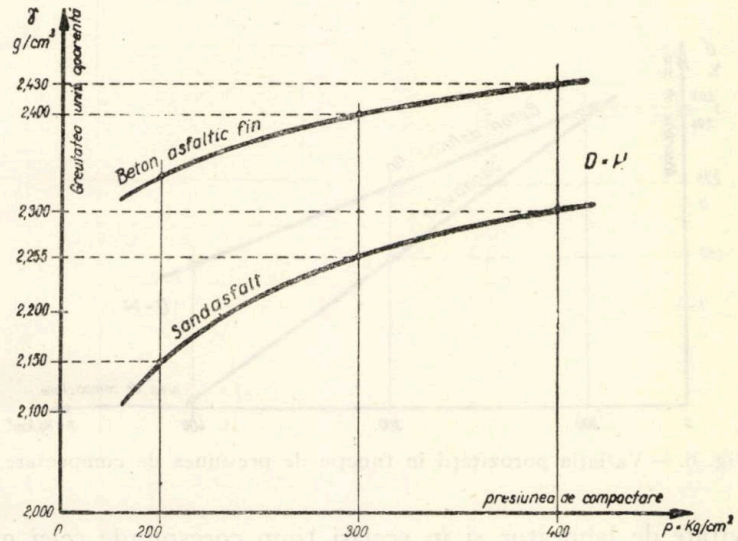


Fig. 4. — Variaţia greutăţii unitare aparente în funcţie de presiunea de compactare.

(fig. 7), ceea ce de asemenea este în concordanţă cu considerentele teoretice.

În acest caz presiunea cea mai avantajoasă este cea mai ridicată, care se aplică o durată de timp mai redusă, deoarece ea dă cea mai bună

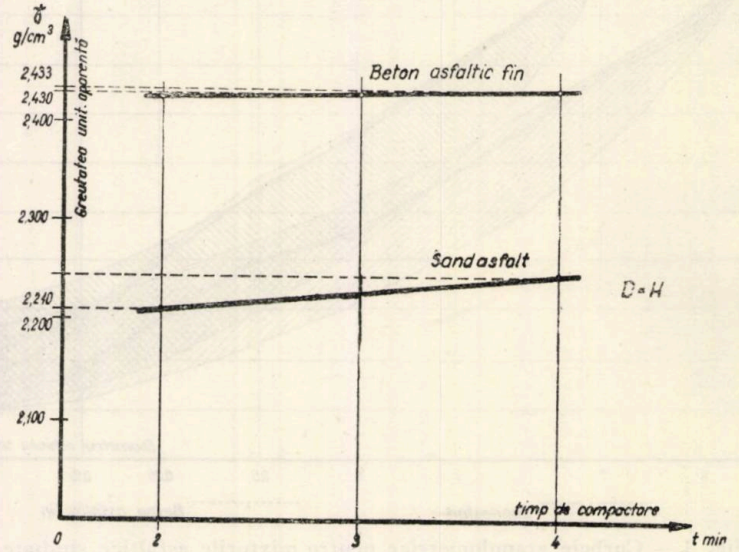


Fig. 5. — Variaţia greutăţii unitare aparente în funcţie de durata compactării.

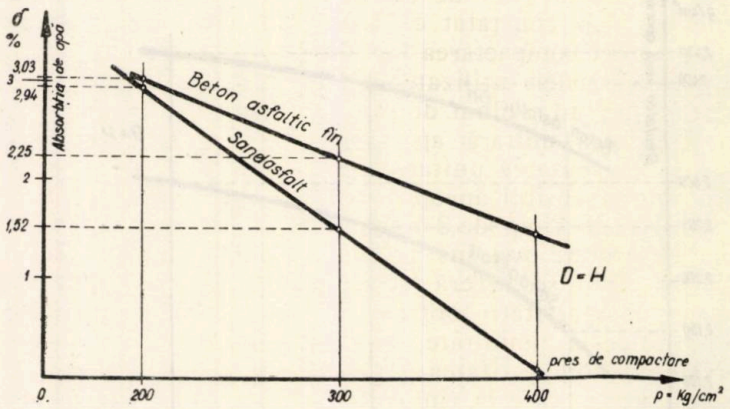


Fig. 6. — Variaţia porozităţii în funcţie de presiunea de compactare.

productivitate de laborator şi în acelaşi timp corespunde celei mai slabe răciri a epruvetei în timpul compactării. În aceste condiţii alegerea acestei presiuni se va face astfel ca să nu se producă sfărîmarea agregatului mineral.

Pentru cele două mixturi utilizate în laborator analiza granulometrică efectuată după confecţionarea epruvetelor cu presiunile $p = 300$ kg/cm^2 şi $p = 400$ kg/cm^2, aplicate timp de 2, 3 şi 4 minute, a arătat că practic nu se produce sfărîmarea agregatului mineral (fig. 3, curbele punctate). Rezultă că aceste presiuni sînt corespuuzătoare din acest punct de vedere.

Urmărind greutatea unitară aparentă şi porozitatea pavajelor asfaltice realizate de constructorii de drumuri din Moldova între anii

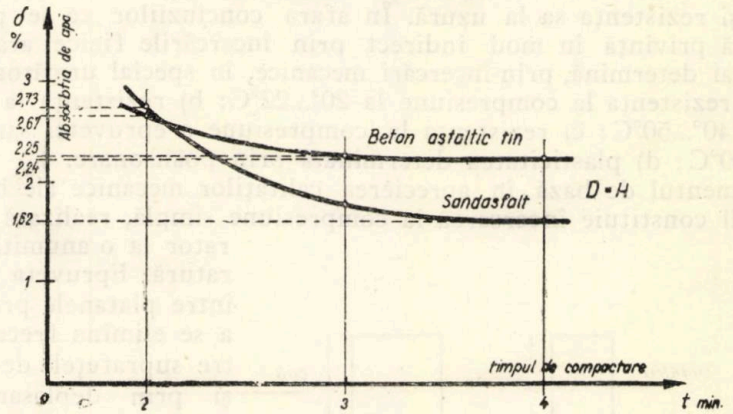


Fig. 7. — Variaţia porozităţii în funcţie de durata compactării.

1956...1961 cu aceleaşi materiale cu care s-a lucrat în laborator, adică cribluri de Voşlăbeni, filer de calcar de Fieni şi bitum rezidual de petrol de la Teleajen, s-a constatat că aceste caracteristici sînt apropiate de cele obţinute prin compactarea cu $p = 300$ kg/cm^2, timp de 3 minute.

Pentru materialele utilizate în laborator s-a calculat greutatea specifică şi admiţînd un volum de goluri remanente de 2...3% rezultă din calcul: a) greutatea unitară aparentă de 2,41...2,42 g/cm^3 pentru beton asfaltic fin; b) greutatea unitară aparentă de 2,30 g/cm^3 pentru sandasfalt, adică valori sensibil apropiate de cele obţinute experimental pentru $p = 300$ kg/cm^2 timp de 3 minute.

Din cele arătate mai sus rezultă că un prim grup de încercări ce se fac în laborator se referă la compactitatea betonului asfaltic. Prin determinarea compactităţii obţinem indicaţii directe asupra comportării mixturii asfaltice la umiditate, îngheţ-dezgheţ, uzură şi chiar rezistenţă la compresiune. Compactitatea se urmăreşte prin greutatea unitară aparentă şi porozitate, care la rîndul ei se determină prin absorbţia de apă sub vacuum. În general greutatea unitară aparentă variază în jurul valorii de 2,3 g/cm^3 pentru sandasfalt şi 2,4 g/cm^3 pentru beton asfaltic fin. Cu cît este mai ridicată greutatea unitară aparentă mixtura este de calitate mai bună, fiind mai compactă sau din rocă de greutate mai mare.

În legătură cu această problemă observăm că greutatea unitară aparentă determinată după normele noastre actuale (STAS 1338 52) nu se poate compara întotdeauna cu valorile indicate în alte ţări, deoarece ea

se obţine prin raportarea greutăţii epruvetei la volum, după efectuarea vacuumului, care deci apare mărit din cauza umflării prin saturarea cu apă. Normele din numeroase alte ţări raportează greutatea la volumul iniţial.

3. Încercări mecanice

Din punct de vedere al proprietăţilor mecanice interesează îndeosebi rezistenţa betonului asfaltic la solicitări mecanice, stabilitatea sa termică (plasticitatea sau deformabilitatea sa în funcţie de variaţia temperaturii) şi rezistenţa sa la uzură. În afara concluziilor ce se pot trage în această privinţă în mod indirect prin încercările fizice arătate mai sus se mai determină, prin încercări mecanice, în special următoarele mărimi: a) rezistenţa la compresiune la 20°...22°C; b) rezistenţa la compresiune la 40°...50°C; c) rezistenţa la compresiune a epruvetei saturate cu apă, la 20°C; d) plasticitatea determinată prin poansonare.

Elementul de bază în aprecierea calităţilor mecanice ale betonului asfaltic îl constituie încercarea la compresiune simplă, realizată în laborator la o anumită temperatură. Epruveta se aşează între platanele presei, fără a se elimina frecarea dintre suprafeţele de contact, şi prin deplasarea unui piston se realizează un efort variabil de compresiune simplă crescînd de la zero pînă la valoarea maximă, citită la manometru în momentul ruperii epruvetei. Nu se realizează deci o apăsare constantă ci un efort a cărui creştere este fixată în timp fie prin viteză de deformare constantă, adică deplasare cu viteză constantă a platanului sau pistonului presei, fie prin creşterea cu viteză constantă a presiunii, urmărită la manometru.

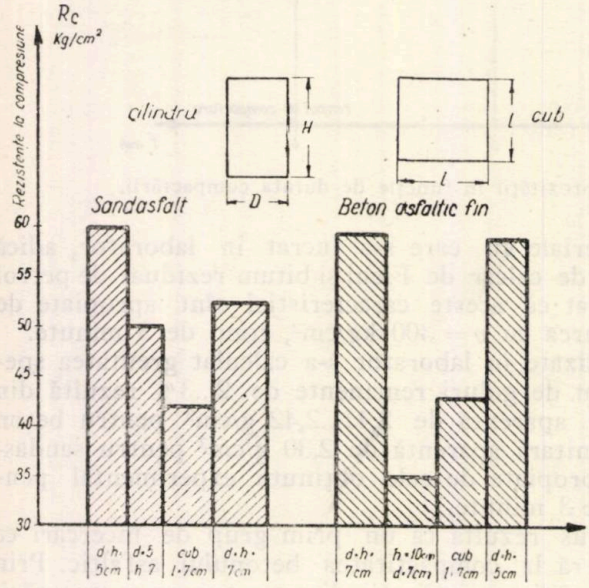


Fig. 8. — Reducerea rezistenţei la compresiune pentru epruvetele cubice faţă de epruvetele cilindrice de diverse dimensiuni.

Ordinul de mărire cu care se face încărcarea la încercările de compresiune simplă influenţează foarte mult asupra rezultatelor obţinute.

Valorile obţinute în laborator pentru rezistenţa la compresiune sînt relative. În fig. 8 se reprezintă valorile obţinute pentru rezistenţa la compresiune a betonului asfaltic fin şi a sandasfaltului, la aceeaşi temperatură (20°C), cu aceeaşi viteză de deformare (v = 5 mm/min), în cazul folosirii epruvetelor cubice sau cilindrice şi de asemenea pentru elemente

geometrice variabile ale epruvetelor. Rezultă că pentru epruvetele cubice se obţin rezistenţe la compresiune mai mici decît pentru epruvetele cilindrice de diametru egal cu înălţimea. Celelalte concluzii care s-ar putea

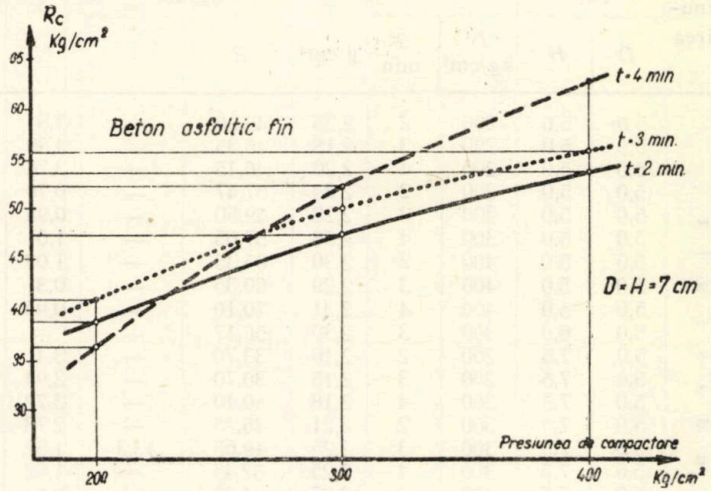


Fig. 9. — Variaţia rezistenţei la compresiune în funcţie de compactare, pentru betonul asfaltic fin.

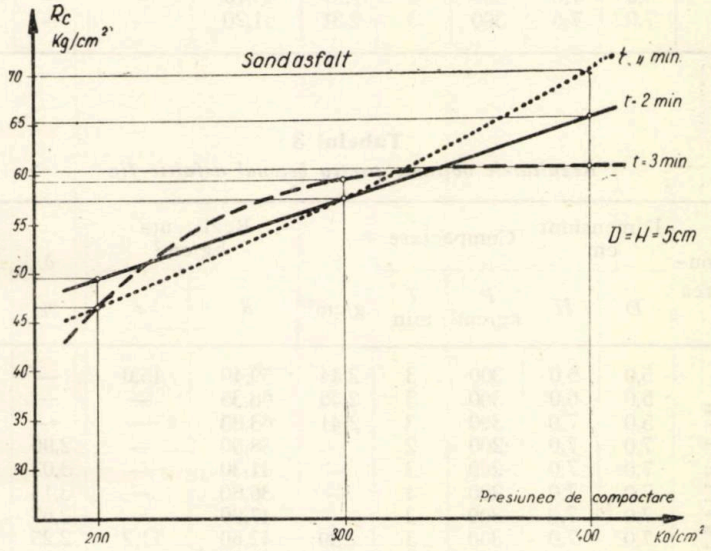


Fig. 10. — Variaţia rezistenţei la compresiune în funcţie de compactare, pentru sandasfalt.

trage din analiza fig. 8 sînt condiţionate de diferenţele înregistrate cu privire la greutatea unitară aparentă şi porozitate.

În fig. 9 şi 10 se redă variaţia rezistenţei la compresiune în funcţie de compactarea epruvetelor.

Tabelul 2

Rezultatele obținute pentru sandasfalt

Nr. crt.	Denumirea	Dimensiuni cm		Compactare		γ	Rezistența kg/cm²		δ	Deformația specifică
		D	H	P kg/cm²	T min	g/cm³	R	r	%	ε
1	Sandasfalt	5,0	5,0	200	2	2,25	49,90	—	3,81	0,0575
2		5,0	5,0	200	3	2,18	46,35	—	4,30	0,0685
3		5,0	5,0	200	4	2,20	46,15	—	3,76	0,0700
4		5,0	5,0	300	2	2,29	57,47	—	0,76	0,0605
5		5,0	5,0	300	3	2,28	59,50	—	0,98	0,0785
6		5,0	5,0	300	4	2,28	57,65	—	1,01	0,0635
7		5,0	5,0	400	2	2,30	65,35	—	1,09	0,0800
8		5,0	5,0	400	3	2,29	60,35	—	0,31	0,0740
9		5,0	5,0	400	4	2,31	70,10	—	0,93	0,0695
10		5,0	6,0	300	3	2,30	56,17	—	—	0,0510
11		5,0	7,5	200	2	2,16	33,70	—	3,41	0,0490
12		5,0	7,5	200	3	2,15	30,70	—	2,94	0,0455
13		5,0	7,5	200	4	2,18	40,10	—	3,72	0,0435
14		5,0	7,5	300	2	2,21	46,25	—	2,73	0,0470
15		5,0	7,5	300	3	2,25	49,65	13,3	1,52	0,0460
16		5,0	7,5	300	4	2,25	52,45	—	1,62	0,0450
17		5,0	7,5	400	2	2,27	64,25	—	0,12	0,0495
18		5,0	7,5	400	3	2,29	59,25	—	0,18	0,0455
19		5,0	7,5	400	4	2,30	63,00	—	0,32	0,0470
20		5,0	7,0	300	2	2,31	48,10	—	—	0,0430
21		7,0	7,5	300	3	2,31	51,20	—	—	0,0600

Tabelul 3

Rezultatele obținute pentru betonul asfaltic fin

Nr. crt.	Denumirea	Dimensiuni cm		Compactare		γ	Rezistența kg/cm²		δ	Deformația specifică
		D	H	P kg/cm²	T min	g/cm³	R	r	%	ε
1	Beton asfaltic fin	5,0	5,0	300	3	2,44	59,40	15,0	—	0,063
2		5,0	6,0	300	3	2,45	66,35	—	—	0,054
3		5,0	7,0	300	3	2,41	63,85	—	—	0,041
4		7,0	7,0	200	2	—	38,90	—	2,90	0,054
5		7,0	7,0	200	3	—	41,30	—	3,03	0,054
6		7,0	7,0	200	4	—	36,80	—	3,14	0,054
7		7,0	7,0	300	2	—	47,90	—	2,67	0,060
8		7,0	7,0	300	3	2,39	42,60	11,2	2,25	0,057
9		7,0	7,0	300	4	—	52,60	—	2,24	0,054
10		7,0	7,0	300	3	2,40	57,90	—	—	0,060
11		7,0	7,0	400	2	2,44	54,10	—	—	0,061
12		7,0	7,0	400	3	2,43	55,80	—	—	0,058
13		7,0	7,0	400	4	2 43	62,50	—	—	0,054
14		7,0	10,0	300	3	2,42	—	14,6	—	—
15		10,0	10,0	300	3	2,29	90,80	—	—	0,054

În tabelele 2 şi 3 se prezintă valorile obţinute pentru încercările de rezistenţă efectuate, şi anume, în tabelul 2 — pentru sandasfalt, iar în tabelul 3 — pentru beton asfaltic fin, indicîndu-se şi valorile obţinute pentru deformaţia relativă în momentul ruperii. Referitor la viteza cu care se realizează încercarea la compresiune simplă trebuie de observat de la început că valorile obţinute pentru încercarea la compresiune cresc pe măsură ce creşte viteza de deformare [1], [3]. În normativele tehnice romîneşti nu se dă nici o indicaţie în această privinţă, ceea ce constituie o lipsă importantă. În alte ţări această viteză este variabilă: a) în Franţa $v = 1{,}56$ mm/sec; b) în U.R.S.S. $v = 0{,}05$ mm/sec.; c) în SUA — pentru încercarea Hubbard-Field $v = 1$ mm/sec; pentru încercarea Marshall $v = 0{,}847$ mm/sec; pentru încercarea Hweem $v = 0{,}025$ mm/min; d) în Olanda, pentru încercarea Nijboer $v = 0{,}05...0{,}20$ mm/min.

Se observă că normativele mai recente impun viteze de deformaţie reduse; între acestea se încadrează şi viteza cerută de normele sovietice.

Pentru caracterizarea stabilităţii termice este necesar a se urmări variaţia rezistenţei la compresiune în funcţie de temperatură, cunoscut fiind că reducerea ei la temperatura de 50°C, la 25...33% din rezistenţa la compresiune la 20°C, poate compromite calitatea asfaltului prin producerea de deformaţii plastice.

Încercările efectuate în laborator s-au încheiat cu stabilirea rezistenţei la întindere. Aceasta s-a făcut prin încercarea la compresiune a epruvetelor cilindrice aşezate pe generatoare (încercarea denumită de obicei braziliană sau Mesnager). Rezistenţa la întindere s-a calculat conform relaţiei adoptate pentru betonul asfaltic $r = \alpha P/(HD)$, în care $\alpha = 1$ (şi nu $\alpha = 0{,}63$ ca în cazul materialelor perfect rigide). Funcţie de R şi r s-a calculat, conform ipotezei de rezistenţă Mohr, unghiul de frecare internă şi coeziunea, pentru care s-au găsit valorile din tabelul 4, din

Tabelul 4

Valorile obţinute pentru frecarea internă şi coeziunea mixturilor asfaltice încercate

Materialul	Dimensiuni cm		Rezistenţa kg/cm²		tg φ	c kg/cm²	$\varphi°$
	h	d	R	r			
Sandasfalt	5	5	54,2	17,0	0,580	15,1	30° 10′
	7	7	51,2	17,6	0,560	15,0	29° 20′
	7	5	48,1	13,3	0,690	12,7	34° 40′
Beton asfaltic fin	5	5	59,4	14,1	0,785	14,8	38° 20′
	7	7	57,9	12,0	0,880	13,0	41° 30′
	7	5	63,9	14,6	0,809	15,2	39° 00′

care se constată, aşa cum este şi firesc, că betonul asfaltic fin este mai stabil ca sandasfaltul.

Trebuie de menţionat că cercetările întreprinse în acest domeniu de către diverşi autori [1], [3] au arătat că variaţia de temperatură sau

vitezele de formaţie nu influenţează tangenta unghiului de frecare internă, în timp ce parametrul denumit „coeziune" este sensibil influenţat de aceşti factori. Rezultă că aceste aspecte ale valorilor obţinute pentru rezistenţa betonului asfaltic la solicitările mecanice lărgesc posibilitatea cunoaşterii comportării sale.

În problema stabilirii timpului la care trebuie încercate epruvetele la solicitări mecanice, în laborator, s-a constatat [4] că rezistenţa mecanică nu creşte în timp, după cele circa 24 ore necesare stabilizării structurii, aşa cum se întîmplă în cazul betonului de ciment, astfel că epruvetele pot fi încercate şi după acest timp.

Rezultatele obţinute pentru mixturile analizate în laborator în cazul de faţă au arătat valorile: 53; 58; 63 kg/cm² după respectiv 24; 48; 72 ore, însă aceste valori medii s-au determinat după un nur ăr redus de încercări.

4. Concluzii

Din cele arătate mai sus se desprind următoarele concluzii:

1. Epruvetele cubice pentru diferitele tipuri de mixturi asfaltice, utilizate în prezent pe scară largă în practica laboratoarelor rutiere din ţara noastră, prezintă numeroase dezavantaje şi este necesară înlocuirea lor.

2. Epruvetele cilindrice cu diametrul egal cu înălţimea de mărime variabilă, corespunzătoare dimensiunii maxime a agregatului mineral utilizat, sînt cele mai raţionale şi utilizarea lor conform STAS 1338-52 trebuie extinsă. În acest caz este indicată compactarea la presiunea $p = 300$ kg/cm², timp de 3 minute, la temperatura $t = 140...160°C$, sau prin vibrarea corespunzătoare.

3. Este necesar să se pretindă laboratoarelor determinarea greutăţii unitare aparente cu relaţia $\gamma = G_1/V_1$, unde V_1 este volumul determinat prin diferenţa dintre cîntărirea în aer şi în apă, şi nu prin relaţia recomandată de STAS 1338-52, unde V_1 reprezintă volumul după saturarea cu apă.

4. Încercările efectuate în laborator diferind în mare măsură de modul în care pavajele realizate lucrează în carosabil, nu pot da informaţii complete şi precise asupra comportării lor. Din acest punct de vedere încercări ca cele descrise mai sus se completează unele pe altele. De aceea este recomandabil ca ele să se facă în întregime sau în orice caz să se aleagă în funcţie de importanţa lucrării. Este absolut necesar a se avea în vedere influenţa temperaturii şi a vitezei de deformaţie asupra rezistenţei la compresiune iar în cazuri mai complexe şi stabilirea valorii $\operatorname{tg}\varphi$, sau φ şi c (coeziunea).

În sfîrşit subliniem că aceste rezultate trebuie interpretate în mod adecvat. Există două tendinţe în aprecierea calitativă a lucrărilor de pavaje, bine conturate de J. Oberbach [5]: unii tehnicieni se lasă conduşi numai de experienţă neglijînd sau neîncrezîndu-se în rezultatele de laborator, alţii, dimpotrivă acordă o importanţă exagerată laboratorului. În realitate nu trebuie să se exagereze nici într-un sens nici în celălalt;

trebuie să se folosească laboratoarele pentru cunoaşterea materialelor, a mixturilor realizate şi a controlului lor, interpretînd întotdeauna rezultatele şi confruntîndu-le cu realitatea.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de drumuri şi poduri

BIBLIOGRAFIE

1. Иванов Н. Н., *Строительство автомобильных дорог,* ч. **II**, НТИАЛ, М., 1957.
2. Duriez M., *Liants routiers,* Dunod, Paris, 1946.
3. Arrambide J., Duriez M., *Liants routiers et enrobés,* Dunod, Paris, 1959.
4. Лысихина А. И.. *О стабильности битумов и взаимодействии их с минеральными материалами,* Дориздат, М., 1952.
5. Oberbach J., Strasse u. Autobahn, 1956, *1*, S. 9—13.

К ВОПРОСУ О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АСФАЛЬТОБЕТОНОВ И О СПОСОБЕ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ В ЛАБОРАТОРИИ

(Резюме)

Изучаются некоторые вопросы связанные с формой и размерами испытуемых в лаборатории образцов асфальтобетонных смесей, а также вопросы связанные с физико-механическими испытаниями.

На основании полученных результатов рекомендуется использование цилиндрических образцов и устанавливаются условия их уплотнения. Для лучшего установления качества асфальтового бетона выявляется необходимость определения объемного веса, использования определенной скорости при механических испытаниях и установления параметров для характеризования пластичности.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Изменения объемнового веса асфальтового бетона в зависимости от давления уплотнения и времени эксплуатации [1].
Рис. 2. — Определение дозировки битума для исследуемых асфальтовых смесей.
Рис. 3. — Гранулометрические кривые для исследуемых асфальтовых смесей.
Рис 4. — Изменение объемного веса в зависимости от давления уплотнения.
Рис. 5. — Изменение объемного веса в зависимости от времени уплотнения.
Рис. 6. — Изменение пористости в зависимости от давления уплотнения.
Рис. 7. — Изменение пористости в зависимости от времени уплотнения.
Рис. 8. — Снижение сопротивления на сжатие для кубических образцов по сравнению с цилиндрическими различных размеров.
Рис. 9. — Изменение сопротивления на сжатие в зависимости от уплотнения для мелкозернистного асфальтового бетона.
Рис. 10. — Изменение сопротивления на сжатие в зависимости от уплотнения для песчанного бетона.

CONSIDÉRATIONS SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES BÉTONS ASPHALTIQUES ET SUR LEURS MÉTHODES DE DÉTERMINATION DANS LE LABORATOIRE

(Résumé)

On étudie quelques problèmes concernant la forme et les dimensions des éprouvettes utilisées dans le laboratoire et leur compacité. Toutefois on donne quelques précisions quant aux essais physiques et mécaniques.

BIBLIOTECA CENTRALĂ A MUZEULUI TEHNIC "DIMITRIE LEONIDA" BUCUREŞTI 1948

En se basant sur les résultats obtenus on aboutit a présenter nombre de recommandations concernant l'utilisation des éprouvettes cylindriques, l'établissement de la pression de compacité, la détermination du poids unitaire apparent, la détermination de la vitesse de déformation à la compression et de certains indicatifs quant à la stabilité des mixtures asphaltiques, compte tenu de l'angle de friction interne et de la cohésion.

Explication des figures

Fig. 1. — Variation du poids unitaire apparent du béton asphaltique en fonction de la pression de compacité et de la durée d'exploitation [1].

Fig. 2. – Établissement du dosage en bitume pour les mixtures asphaltiques étudiées.

Fig. 3. — Courbes granulométriques pour les mixtures asphaltiques étudiées.

Fig. 4. — Variation du poids unitaire apparent en fonction de la pression de compacité.

Fig. 5. — Variation du poids unitaire apparent en fonction de la durée de compactage.

Fig. 6. — Variation de la porosité en fonction de la pression du compactage.

Fig. 7. — Variation de la porosité en fonction de la durée du compactage.

Fig. 8. — Réduction de la résistance à la compression pour les éprouvettes cubiques par comparaison aux éprouvettes cylindriques de différentes dimensions.

Fig. 9. — Variation de la résistance à la compression en fonction de la compacité, pour le béton asphaltique fin.

Fig. 10. — Variation de la résistance à la compression en fonction de la compacité, pour le sandasphalte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 1—2, 1962

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 677.6

STUDIU ASUPRA CARACTERISTICILOR PELICULELOR DE APRET PE BAZĂ DE AMIDON ŞI INFLUENŢA ACESTORA ASUPRA CARACTERISTICILOR FIRELOR DE URZEALĂ

DE

I. ŞTEFĂNESCU, AUREL MARCHIŞ, OLIMPIA MARCHIŞ şi MARIA OANCEA

1. Introducere

Încleierea constituie cea mai importantă problemă de pregătire a firelor de urzeală în vederea ţeserii. Importanţa acestei operaţii reiese din faptul că firele de urzeală încleiate corespunzător pot fi ţesute pe război fără ruperi. Ruperea frecventă a firelor de urzeală provoacă oprirea războaielor, deci pierderi de producţie, măresc gradul de ocupare al muncitorului, micşorînd numărul de maşini deservite de acesta, şi în sfîrşit nodurile ocazionate de legarea firelor rupte influenţează negativ asupra calităţii produsului.

2. Importanţa problemei

Capacitatea firelor de urzeală de a rezista la operaţia de ţesere este dată de pelicula de apret ce se formează şi se fixează pe suprafaţa acestora. Calitatea acestor pelicule este în funcţie de foarte mulţi parametri ca: materiile prime folosite, alcătuirea reţetelor, metodele de preparare, modul şi timpul de păstrare, modul de aplicare şi fixare a apretului pe fir etc. Pe de altă parte nu s-au stabilit relaţii între toţi aceşti parametri şi caracteristicile peliculelor rezultate. De asemenea, un studiu sistematic asupra modului de obţinere a peliculelor şi asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale acestora lipseşte. În sfîrşit, pînă în prezent nu s-au pus la dispoziţia producţiei metode care să înlesnească obţinerea unor pelicule corespunzătoare, încît procesul tehnologic este controlat empiric, iar calitatea încleierii este departe de a satisface procesul ţeserii.

3. Cercetarea problemei în literatura de specialitate

În literatura de specialitate materialele publicate arată deosebita atenţie care se acordă studiului fenomenelor legate de operaţia de încleiere. Complexitatea operaţiei, care reclamă studierea amănunţită a unor procese chimice, fizice, fizico-chimice, du-

blată de importanţa tehnologică deosebită pe care această secţie o are în tehnologia ţeserii, au făcut ca studiile abordate să fie aprofundate pe anumite aspecte şi cercetările să se desfăşoare în decursul mai multor ani.

Cercetătorii sovietici au publicat încă din anii 1945 ... 1946, continuînd în 1958, unele probleme ale vîscozităţii apretului de încleiat. O rezolvare totală şi în ansamblu a problemelor legate de influenţa vîscozităţii apretului (care considerată izolat nu poate fi luată drept parametru de reglare) asupra peliculelor sau filmelor obţinute din apret, precum şi asupra ansamblului peliculă-fir nu a apărut în literatura de specialitate. La Institutul textil din Franţa, în decurs de mai mult de un deceniu, s-au studiat diferite probleme ale încleierii, rezultatele obţinute făcînd obiectul a numeroase comunicări [1] ... [4].

Bazat pe un bogat material experimental, obţinut în condiţii optime de cercetare (în ceea ce priveşte aparatura, utilajul, posibilitatea de a efectua încercări în laborator, semi-industrial şi industrial), specialiştii francezi au studiat problemele tensiunilor optime, au aprofundat fenomenele legate de transformări în structura macromoleculară a firelor în timpul încleierii. De asemenea s-au preocupat de construcţia modernă a maşinilor de încleiat, precum şi de realizarea unor aparate de măsură şi control, care să reproducă în laborator condiţiile industriale. În aceste lucrări se aprofundează, pe cale teoretică, studiul fenomenelor legate de vîscozitate, de obţinerea peliculelor, de studierea acestora şi a ansamblului peliculă-fir.

Acordînd o deosebită importanţă vîscozităţii apretului, ca factor hotărîtor pentru puterea de lipire a acestuia, puterii apretului de formare a peliculelor, proprietăţilor mecanice ale acestora şi ale ansamblului peliculă-suport fir, sînt trasate curbele specifice ale variaţiei vîscozităţii apretului în decursul pregătirii lui [1].

Lucrări efectuate cu scopul de a obţine pelicule de apret şi de a studia proprietăţile acestora sînt prezentate şi în literatura de specialitate germană [5].

4. Desfăşurarea lucrărilor proprii

Lucrările colectivului nostru s-au desfăşurat în cadrul unei întreprinderi de bumbac şi al laboratorului de ţesătorie din Institutul politehic din Iaşi. În condiţiile reale de lucru ale maşinii de încleiat s-au desfăşurat studii privind unele probleme referitoare la: apret, firul încleiat şi comportarea urzelii în prelucrarea pe război. Scopul acestor cercetări l-a constituit urmărirea variaţiei unor parametri în timpul prelucrării unei partizi în vederea punerii în evidenţă a legităţilor existente şi a indicării unor parametri de lucru la încleiat, optimi, verificaţi prin comportarea firelor la ţesut.

5. Studiul vîscozităţii

Determinările s-au desfăşurat pe baza reţetelor de apret folosite curent în întreprindere.

Sînt distincte patru tipuri de apret, funcţie de fineţea firelor încleiate şi de tipul de liant (amidon de cartofi şi amidon de porumb).

a) *Apreturi pe bază de amidon de cartofi*

1° Apret slab (fir Nm 27/1, 34/1)
700 l apă
0,050 kg cloramină
50 kg amidon
2 kg glicerină
1 kg seu
0,250 kg formol (vara)

2° Apret tare (fir Nm 50/1, 100/2, albe şi colorate)
700 l apă
60 kg amidon
0,060 kg cloramină
2,400 kg glicerină
1,2 kg seu

b) *Apreturi pe bază de amidon de porumb*

1° Apret slab (fir Nm 27/1, 34/1)

700 l apă
60 kg amidon
0,300 kg cloramină
2,4 kg glicerină
1,2 kg seu
0,300 kg formol (vara)

2° Apret tare (fir Nm 50/1, 54/1, 100/2, albe şi colorate)

700 l apă
70 kg amidon
0,350 kg cloramină
1,4 kg seu
2,8 kg glicerină
0,350 kg formol (vara)

Prepararea apretului

Se încarcă malaxorul cu cantitatea de apă necesară la temperatură normală. Separat amidonul, împreună cu cloramina, este pregătit cu apă la 22°C, sub forma laptelui de amidon. După introducerea laptelui în malaxor se ridică temperatura la 40°C şi se începe agitarea. Temperatura creşte pînă la 70°C timp de 25 de min, după care se adaugă seul topit. Se ridică temperatura la 92°C şi se adaugă glicerină. Cu aburul închis se continuă agitarea timp de 5 min. În unele cazuri se adaugă la sfîrşit, în perioada de vară, formolul.

Pentru a pune în evidenţă corelaţia dintre însuşirile apretului din cadă şi malaxor, şi în primul rînd vîscozitatea, s-au întreprins măsurători în

Tabelul 1

Art. Vrancea 80, nf = 1860 fire, Nm = 34/1, partidă 2314, apret slab cartofi, 16 IX 1961

Nr. crt.	Ora	T °C existent	T °C corectat	Sf	F S	μ cp	Observaţii
			Apret din malaxor				
1	8^{30}	92	76	1,09	2,4 bm	656	
2	8^{50}	72	71	1,05	2	550	
3	9^{10}	72	70	1	1	276	Agitat
4	9^{30}	68	70	1	1,4	386	
5	10	73	70	1,03	1	274	
6	10^{25}	68	70	1,03	1	274	
7	10^{50}	67	70	1,01	77,6 bs	358	
8	11^{15}	68	74	1,01	72,2	330	
9	11^{35}	68	73	1,01	67	320	
10	11^{55}	68	72	1,05	65,4	273	
11	12^{15}	68	73	1,04	70	310	
12	13^{30}	66	70	1,01	66,2	300	
			Apret din cadă				
1	8^{35}	70	70	0,956	41 bis	625	
2	8^{55}	68	71	0,956	24	370	Adaus apret din 5 în 5 min
3	9^{15}	64	68	0,956	20,4	220	
4	9^{40}	76	70	0,956	7,3	114	
5	9^{45}	74	70	0,956	8	125	
			Înlocuit cureaua, abur direct în cadă, 80...82°C				
6	10^{15}	82	75	0,957	4,6	71,8	
7	10^{30}	78	71	0,957	5,6	87,5	Rupt curea
8	12	70	70	0,958	6,4	100	
9	12^{20}	66	70	0,958	6	94	
10	12^{35}	64	70	0,99	5,2	81	

paralel. Probele s-au luat din 15 în 15 min, măsurătorile s-au efectuat cu vîscozimetrul Höppler, ceea ce a necesitat măsurarea temperaturii şi densităţii apretului, semnalîndu-se cu precizie intervenţiile din exterior

Tabelul 2

Art. Vrancea 80, nf = 1 860 fire, Nm = 34/1, partida 2 316, apret slab cartofi, 18 IX 1961

Nr. crt.	Ora	T °C existent	T °C corectat	Sf	F S	μ cp	Observaţii
			Apret din malaxor				
1	7^{50}	82	70	1,1	3,4 bm	934	
2	8^{10}	78	70	1,1	3,1	850	
3	8^{30}	76	70	1,05	2,8	770	
4	8^{50}	68	74	1,1	2,5	680	
5	9^{10}	70	74	1,07	2,55	700	
6	9^{30}	70	75	1,1	2,4	650	
7	9^{50}	68	75	1,08	1,9	516	
8	10^{15}	68	73	1,08	2,1	574	
9	10^{40}	68	74	1,09	1,9	522	
10	11	70	72	1	2,1	576	
11	11^{05}	70	70	1	2,2	605	
12	11^{25}	66	71	1,1	1,8	490	
13	11^{45}	64	70	1,06	2,1	574	
14	11^{55}	64	70	1,06	2,1	574	
15	12^{20}	60	63	1,06	2,2	600	
16	12^{40}	58	65	1,1	2	546	Terminat partida
17	13^{10}	50	65	1,12	1,8	488	
18	13^{50}	50	68	1,13	1,8	486	
19	14	48	68	1,13	1,8	486	
			Apret din cadă				
1	8	72	70	1,01	3 bm	830	Lucrat fără cilindru scufundător
2	8^{15}	70	70	1,01	2,8	775	
3	8^{20}	68	70	1,03	2,2	610	
4	8^{40}	66	68	1	1,4	384	
5	8^{55}	72	70	0,959	1,42	400	Adăugat apret
6	9^{15}	68	70	0,958	38 bs	600	
7	9^{40}	68	73	0,958	30,4	475	Lucrat fără cilindru scufundător
8	9^{55}	64	70	1	26,8	418	
9	10^{20}	68	69	1	33,3	520	Adăugat apret
10	10^{50}	70	72	1	17	264	
11	11^{10}	66	70	1	15,4	236	
12	11^{30}	66	70	0,958	13,2	206	Lipsă sul
13	12^{15}	72	72	0,958	10,4	164	
14	12^{30}	70	70	0,958	12	187	Început acelaşi articol
15	13^{30}	70	70	0,957	9,4	147	
16	13^{55}	68	70	0,957	9,1	142	
17	14^{05}	66	70	0,956	9,2	144	
			Terminat partida				

(adaus de apret în cadă cu pompa sau găleata, deschiderea aburului direct în cadă sau malaxor, agitarea apretului în malaxor).

În urma prelucrării datelor obţinute (tabelele 1 ... 6) s-au trasat graficele corespunzătoare, în care cu linie plină s-au reprezentat curbele

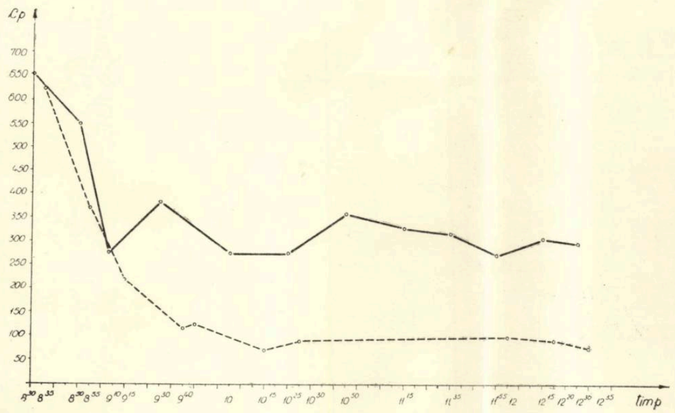


Fig. 1

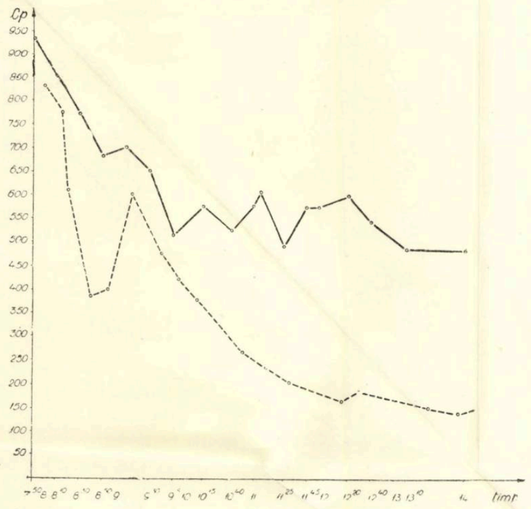


Fig. 2

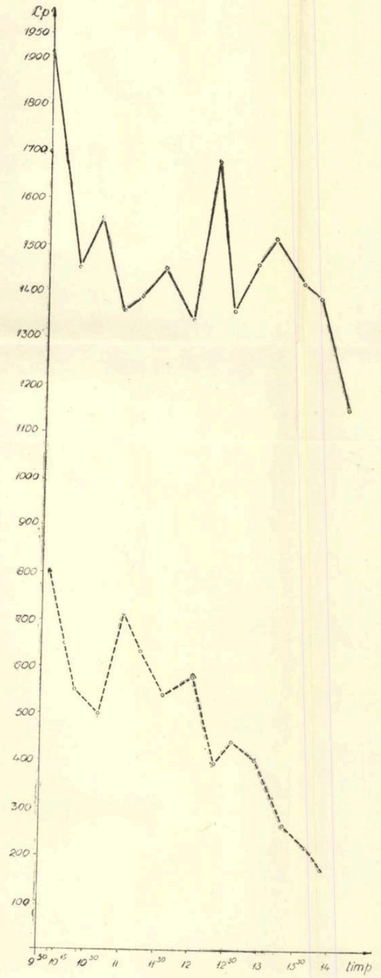


Fig. 3

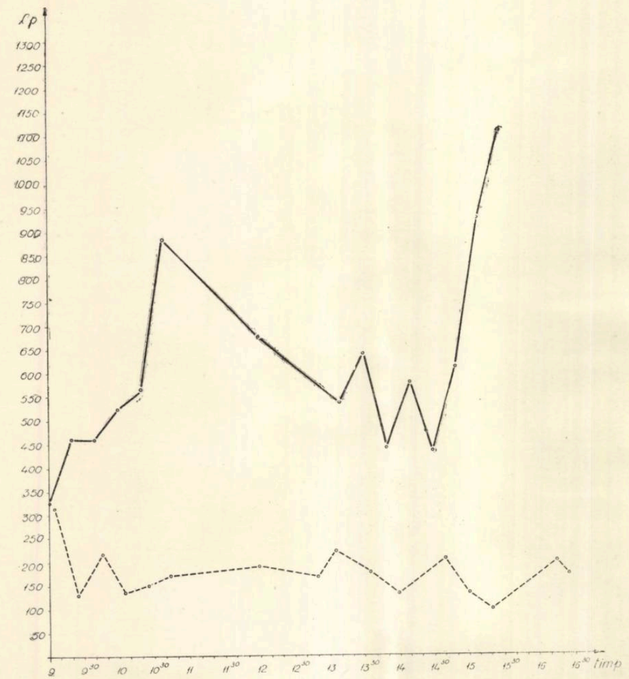


Fig. 4

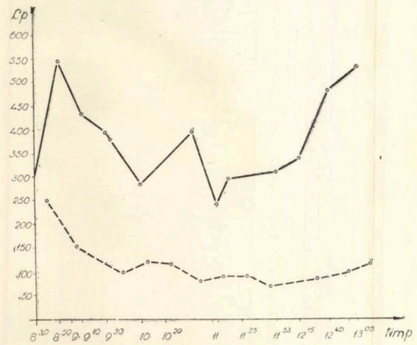


Fig. 5

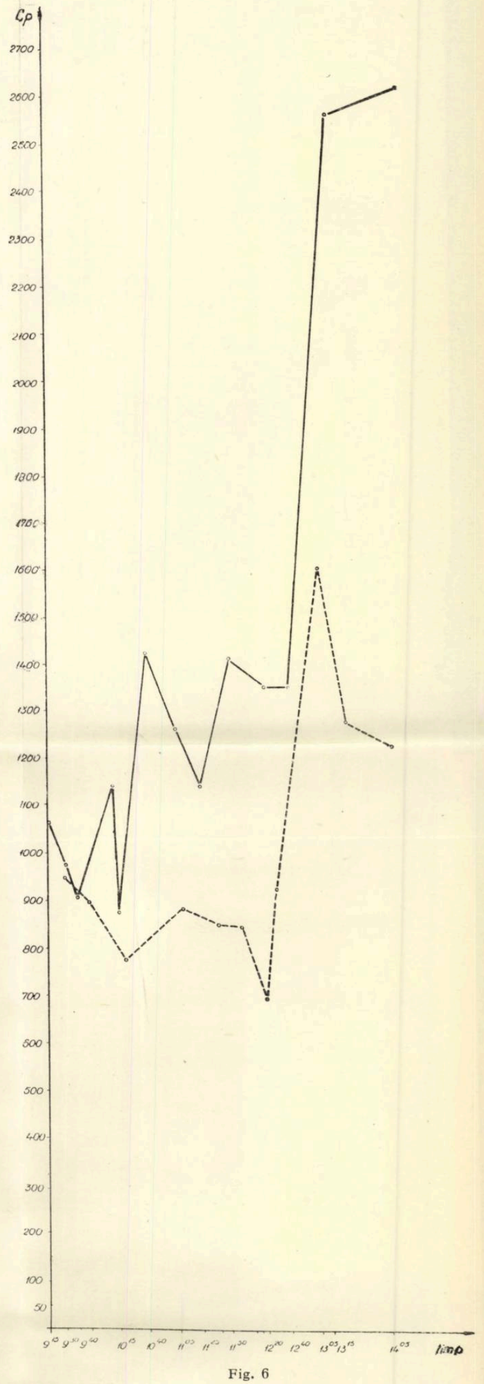


Fig. 6

corespunzătoare apretului din malaxor iar cu linie punctată — curbele corespunzătoare apretului din cadă.

Pentru a ne situa în condiţiile reale din cadă, măsurătorile s-au efectuat la temperatura existentă aici, temperatura malaxorului corectîndu-se corespunzător.

Din cercetarea fig. 1...6 rezultă următoarele concluzii:

a) În decursul desfăşurării partizii vîscozitatea în cadă scade a-

Tabelul 3

Art. 12 carou, nf = 2 600 fire,
Nm = 50/1, partida 2325, 35% vopsit, apret tare cartofi, 20 IX 1961

Nr. crt.	Ora	T °C existent	T °C corectat	Sf	F S	μ cp	Observaţii
			Apret din malaxor				
1	9^{50}	78	73	1,05	7 bm	1 910	Agitat
2	10^{15}	80	74	1,05	5,3	1 450	
3	10^{35}	76	72	1,05	5,7	1 560	
4	10^{55}	76	74	1,04	5	1 360	Agitat
5	11^{10}	76	73	1,03	5,1	1 390	Agitat
6	11^{30}	76	71	1,06	5,3	1 450	
7	11^{55}	74	72	1,05	4,9	1 340	Agitat
8	12^{15}	68	70	1,08	6,2	1 680	
9	12^{30}	66	69	1,06	5	1 360	Agitat
10	12^{50}	66	72	1,05	5,4	1 460	
11	13^{05}	62	70	1,04	5,6	1 520	
12	13^{30}	60	69	1,03	5,2	1 420	Agitat
13	13^{45}	54	69	1	5,1	1 390	Agitat
14	14^{10}	52	69	1,01	4,2	1 150	
			Apret din cadă				
1	9^{55}	74	73	1	3 bm	821	
2	10^{20}	68	71	1	2	548	Adăugat apret
3	10^{40}	66	72	0,959	1,8	494	
4	11	66	71	0,959	45,6 bs	715	
5	11^{15}	62	70	0,957	40,5	635	
6	11^{35}	62	71	0,956	34,4	539	
7	12	60	70	0,956	37	578	
8	12^{20}	62	73	0,957	25,2	394	Adăugat apret
9	12^{35}	62	73	0,957	28	438	
10	12^{55}	60	68	0,957	19	399	
11	13^{20}	60	69	0,95	17	266	
12	13^{40}	60	70	0,95	14	219	
13	13^{55}	56	69	0,94	10	168	

proape continuu pentru toate tipurile de apret studiate. Mărimea acestei scăderi este de 3...5 ori faţă de valoarea iniţială.

b) În malaxor vîscozitatea apretului pe bază de amidon de cartofi îşi păstrează aproape constantă valoarea, cu tendinţa de scădere spre sfîrşitul partizii. Invarianţa acestei valori este o consecinţă a faptului

că apretul pe bază de amidon se întăreşte mai greu decît apretul de porumb (fenomen sesizat şi în literatură [6]). Tendinţa de scădere spre sfîrşitul partizii se poate explica pe baza încălzirii şi agitării, din ce în ce mai frecvente, către sfîrşitul apretului din malaxor.

Tabelul 4

Art. Făget 80, nf = 1 860 fire, Nm = 34/1, partida 1780, apret slab porumb, 18 VII 1961

Nr. crt.	Ora	T °C existent	T °C corectat	Sf	F S	μ cp	Observaţii
				Apret din malaxor			
1	9	74	80	1,15	1,2 bm	324	
2	9^{20}	72	82	1,15	1,7	460	
3	9^{40}	72	78	1,15	1,7	460	
4	10	67	79	1,06	1,9	523	
5	10^{20}	66	76	1,2	2,1	565	
6	10^{40}	60	74	1,23	3,3	885	Agitat
7	12	72	82	1	44,9 bs	676	
8	13^{10}	89	80	1	35,3	534	
9	13^{30}	85	80	1	42,4	640	Agitat
10	13^{50}	85	80	1,2	34	441	
11	14^{10}	87	80	1	38,2	576	
12	14^{30}	86	80	1,2	29	436	
13	14^{50}	85	80	1,02	40,5	610	
14	15^{10}	80	77	1,02	61,4	923	
15	15^{30}	82	80	1	74	1 110	
16	15^{50}	74	78	1	83,8	1 260	
				Apret din cadă			
1	9^{05}	80	80	0,955	20,7 bs	312	
2	9^{25}	84	81	0,955	8,4	127	Adăugat apret
3	9^{45}	80	80	0,951	14	212	
4	10^{05}	84	80	0,955	9	136	
5	10^{25}	83	81	0,953	9,9	149	Adăugat apret
6	10^{45}	80	80	0,955	11,2	169	Adăugat apret
7	12	84	80	0,953	12,2	183	
8	12^{50}	80	80	0,955	11,4	172	Adăugat apret
9	13^{15}	77	79	0,954	13,5	220	
10	13^{35}	78	80	0,956	11,8	179	
11	14	80	80	0,955	8,7	134	Adăugat apret
12	14^{40}	77	80	0,957	13,4	202	
13	15	78	80	0,955	8,8	133	
14	15^{20}	78	80	0,955	6,7	101	Adăugat apret
15	16^{15}	78	80	0,950	13	196	
16	16^{25}	78	79	0,950	11,6	175	

c) Graficele vîscozităţii pentru apretul pe bază de amidon de porumb, în cele două variante (fig. 4, 5 şi 6), indică variaţii mari, cu tendinţă de creştere la sfîrşitul partizii, de circa 3 ori faţă de mărimea iniţială.

d) Vîscozitatea apretului în cadă este sensibilă la orice modificare a parametrilor de lucru (adaus de apret cu pompa sau găleata la inter-

vale neregulate, deschiderea aburului direct în cadă şi malaxor şi agitarea în malaxor). Din fig. 6 se observă că adăugînd în cadă apret cu vîscozitatea 2 250 cp, vîscozitatea în cadă devine 1 600 cp, la sfîrşitul partizii înregistrîndu-se creşterea vîscozităţii din cadă de la 1 060 la 1 200 cp.

e) În cazul utilizării firelor vopsite (care intră la încleiat fără a fi uscate) se produce o scădere pronunţată a vîscozităţii în cadă datorită

Tabelul 5

Art. 140, nf = 3 484 fire, Nm = 27/1, apret slab porumb, 13 VII 1961

Nr. crt.	Ora	T °C		Sf	F S	μ cp	Observaţii
		existent	corectat				
				Apret din malaxor			
1	8^{30}	90	90	1	28,6 bs	300	
2	8^{50}	90	80	1	39	546	
3	9^{10}	88	83	1	30,8	433	
4	9^{30}	84	83	1	28	392	Dat abur
5	9^{35}	82	80	1	27,2	380	
6	10	84	80	1	20,4	286	
7	10^{20}	84	81	1	28	392	
8	10^{45}	84	80	1,01	24	336	Dat abur
9	11^{05}	84	80	1,02	17	238	
10	11^{25}	82	81	1,02	21	292	
11	11^{55}	86	80	1,01	22	308	
12	12^{15}	86	81	1,01	24,3	340	
13	12^{40}	78	80	1	34	476	
14	13^{05}	62	81	1,07	37,8	530	
				Apret din cadă			
1	8^{40}	83	80	0,95	16 bs	250	
2	9^{05}	83	81	0,95	10	156	
3	9^{25}	84	80	0,95	8	125	
4	9^{45}	82	80	0,946	6,4	100	
5	10^{05}	83	80	0,946	7,5	117	
6	10^{25}	80	80	0,946	7,4	115	
7	10^{50}	80	80	0,943	5,2	82,4	
8	11^{10}	81	81	0,94	5,8	92	
9	11^{30}	81	81	0,94	5,7	90,1	
10	11^{50}	81	80	0,94	4,4	69,5	Adăugat apret
11	12^{30}	82	80	0,94	5,2	82,4	Adăugat apret
12	12^{55}	80	80	0,94	6,2	98	Adăugat apret nou
13	13^{15}	80	80	0,94	7,7	121	

surplusului de apă. Aceasta explică şi diferenţa mare între valorile vîscozităţii din malaxor şi cadă chiar pentru mărimile iniţiale (fig. 3).

În ultima parte a lucrărilor s-a folosit o metodă simplificată de măsurare a vîscozităţii, cu ajutorul unei pîlnii, întîlnită în literatură [7].

S-a lucrat simultan cu aparatul Höppler şi cu pîlnia. S-au trasat curbele de variaţie a vîscozităţii observîndu-se un paralelism perfect al

Tabelul 6

Art. 55, nf = 2 960 fire, Nm = 50/1, partida 1 763, apret tare porumb, 14 VII 1961

Nr. crt.	Ora	T °C existent	T °C corectat	Sf	F S	μ cp	Observaţii
				Apret din malaxor			
1	9^{15}	90	82	1,05	3,4 bm	1 060	Dat abur
2	9^{40}	80	80	1,05	3	909	
3	10^{10}	90	79	1,05	3,8	1 140	
4	10^{15}	90	81	1,05	2,9	876	Agitat
5	10^{40}	85	80	1,07	4,7	1 420	
6	11^{05}	86	81	1,1	4,2	1 260	
7	11^{25}	86	80	1,09	4,2	1 140	
8	11^{50}	86	80	1,1	5,2	1 410	
9	12^{20}	84	80	1,12	5	1 350	
10	12^{40}	84	80	1,13	5	1 350	
11	13^{15}	80	80	1,2	9,8	2 660	
12	14^{05}	74	80	1,2	10	2 720	
				Apret din cadă			
1	9^{30}	80	80	0,951	70,2 bs	950	
2	9^{50}	80	80	0,95	68,8	900	
3	10^{20}	81	81	0,95	51,4	775	
4	11^{10}	81	81	0,954	58,3	880	
5	11^{40}	82	82	0,95	56	846	
6	12	80	80	0,95	55,7	842	
7	12^{20}	91	85	0,95	45,8	690	Adăugat apret
8	12^{40}	82	82	0,95	60,8	920	Adăugat apret
9	13^{05}	80	80	0,946	106	1 600	
10	13^{15}	80	80	0,95	84	1 270	
11	14^{10}	80	80	0,95	77,4	1 170	

curbelor în toată evoluţia determinărilor. Pe această bază, din valorile numerice s-a dedus un coeficient de transformare 1,63 (valoarea vîscozităţii calculate fiind mai mare).

Metoda de lucru fiind mai expeditivă, în determinările ulterioare ale vîscozităţii legate de studiul peliculelor s-a folosit exclusiv această metodă (fig. 7, 8, curbele $-\times-\times-$).

Pîlnia este astfel dimensionată (fig. 9) încît la timpul de scurgere a apretului, în sec, corespunde, în tabelul 7, vîscozitatea, în cp.

6. Cercetări asupra peliculelor

În scopul aprofundării fenomenelor care se produc la nivelul apret-fir în timpul încleierii s-a pus problema studierii peliculelor obţinute din apret.

În literatura de specialitate este folosit acest procedeu pentru a pune în evidenţă în special caracteristicile peliculelor în funcţie de materialele folosite.

Tabelul 7

Relația dintre timpul de scurgere și viscozitate

Timp sec.	μ cp	Timp sec.	μ cp	Timp sec.	μ cp
3,5	1	15,5	86	27,5	171
4	5	16	90	28	174
4,5	8	16,5	93	28,5	178
5	12	17	97	29	181
5,5	15	17,5	100	29,5	185
6	18	18	103	30	188
6,5	23	18,5	107	30,5	192
7	26	19	110	31	195
7,5	29	19,5	113	31,5	199
8	33	20	117	32	203
8,5	37	20,5	120	32,5	207
9	40	21	124	33	210
9,5	43	21,5	127	33,5	213
10	46	22	131	34	217
10,5	50	22,5	135	34,5	220
11	54	23	138	35	224
11,5	57	23,5	142	35,5	227
12	61	24	146	36	231
12,5	65	24,5	149	36,5	235
13	68	25	152	37	238
13,5	71	25,5	156	37,5	242
14	75	26	160	38	245
14,5	78	26,5	163	38,5	248
15	83	27	167	39	251

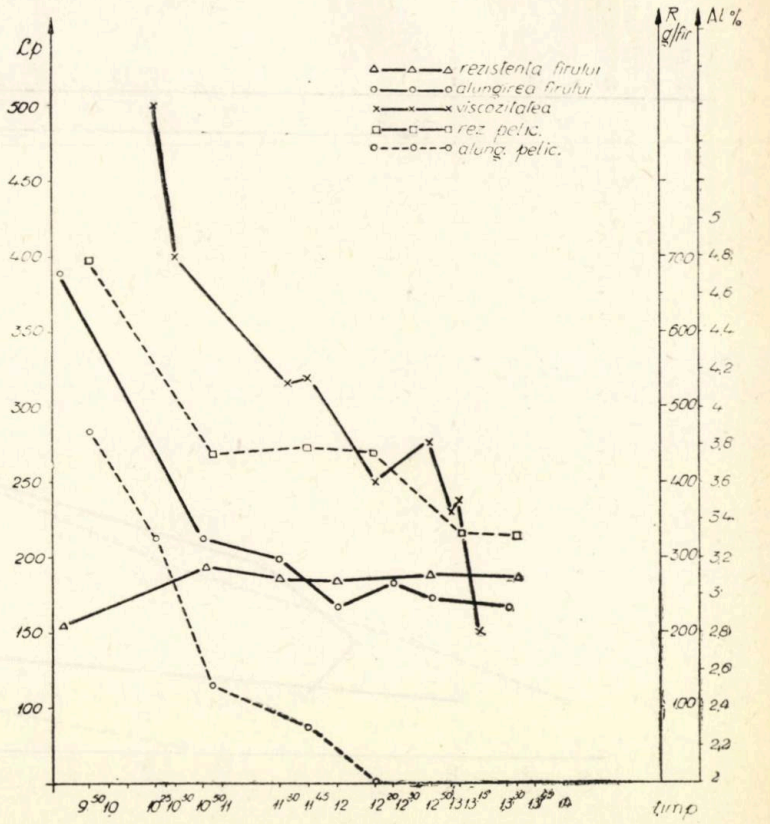


Fig. 7

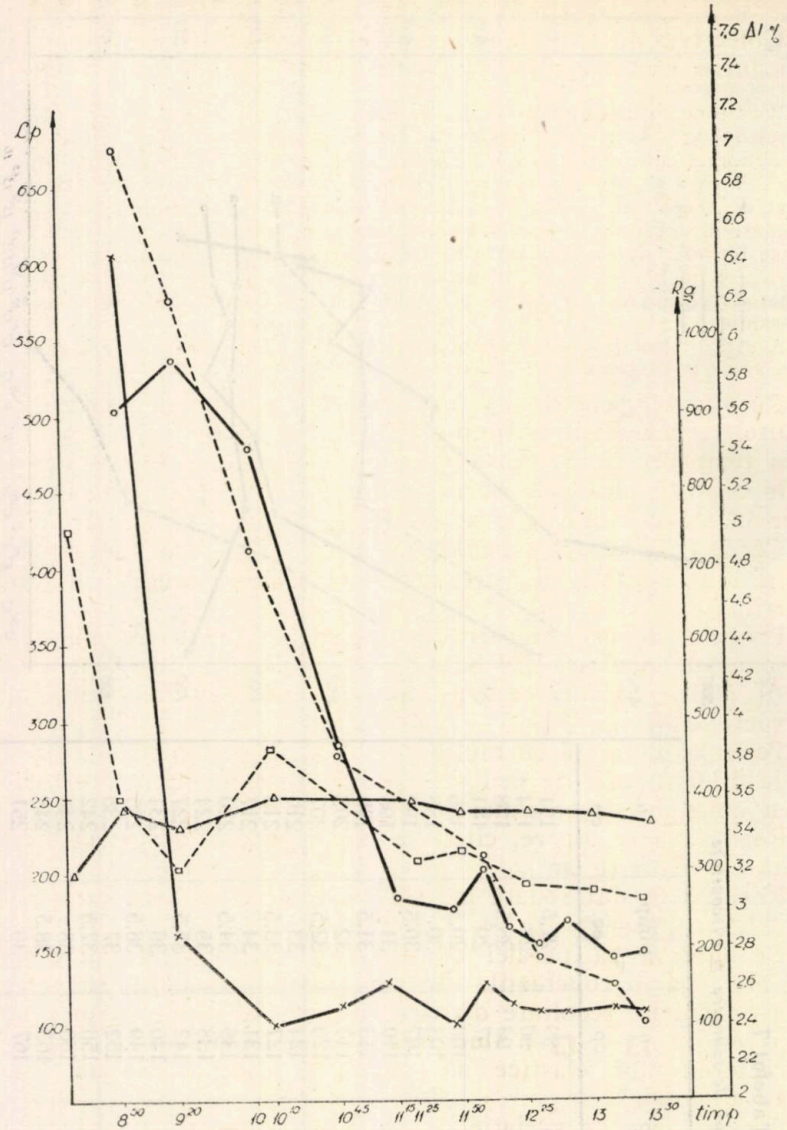


Fig. 8

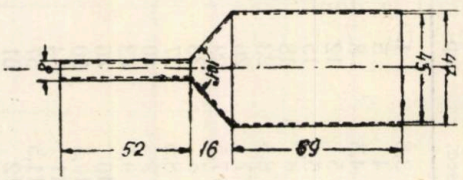


Fig. 9

Colectivul nostru şi-a propus acest studiu pentru a pune în evidenţă relaţia între caracteristicile peliculei şi caracteristicile firelor încleiate.

Problema obţinerii peliculelor din apret este prezentă din ce în ce mai frecvent în literatura de specialitate (sovietică, franceză, germană). Este aprofundată [5] problema obţinerii peliculelor, în special din apreturi pe bază de produşi sintetici şi derivaţi celulozici. În privinţa apretului pe bază de amidon pregătirea peliculei pe sticlă cu strat de ceară este foarte dificilă. Pelicula este foarte mult influenţată de gradul de scindare al apretului (vîscozitatea) iar tensiunea superficială a acestuia nu lasă apretul să se întindă. Apretul se menţine ca un strat dens cu margini rotunjite care după uscare nu se poate desprinde. În urma acestor observaţii este indicată concluzia [5] că prin metoda plăcuţelor de sticlă acoperite cu ceară nu se pot obţine pelicule subţiri şi detaşabile.

Aceste dificultăţi le-am întîmpinat şi în cercetările noastre. În urma acestor greutăţi am ajuns la precizarea următoarei metodici de lucru.

Recoltarea peliculei se face pe plăcuţe din oţel inoxidabil, perfect lustruite, cu marginile rotunjite. Plăcuţa se ţine în apret pînă ajunge la aceeaşi temperatură cu cea a apretului. Este apoi scursă, iar uscarea se face în condiţii climatice normale. După uscare peliculele au fost ţinute 24 ore în aceste condiţii şi apoi pregătite pentru încercările ulterioare.

Cercetările asupra peliculelor au avut drept scop determinarea grosimii şi uniformităţii ei, precum şi măsurarea sarcinii de rupere şi a alungirii.

Probele au fost pregătite la dimensiuni de 1×20 mm, încercate la dinamometrul pentru fire Schopper cu distanţa între cleme 10 mm şi scala 0...500 g. Măsurarea grosimilor s-a efectuat cu un micrometru de construcţie Kowo.

Pelicula, detaşată cu multă uşurinţă de pe placă, a fost tăiată cu lama la dimensiunile de mai sus, alegîndu-se pentru încercări porţiuni cît mai omogene ca grosime.

Rezistenţa la rupere, citită la dinamometru, a fost calculată ca rezistenţă specifică (g/cm^2).

Rezultatele sînt redate în tabelele 8 şi 9, pe baza cărora s-au trasat curbele –□––□– şi –o––o– din fig. 7 şi 8.

Se observă că paralel cu scăderea vîscozităţii (curba –×––×–), semnalată deja în concluziile din paragraful precedent, rezistenţa la rupere a peliculelor recoltate din acelaşi apret scade pe măsura prelucrării partizii (curba –□––□–). Alungirea la rupere, parametrul cel mai expresiv al caracteristicilor elastice ale peliculei, scade la valori foarte mici (curba –o––o–).

Aceeaşi lege de variaţie se observă la apretul pe bază de amidon de cartofi, în cele două tipuri de reţete.

Deosebit de semnificativă este observaţia că scăderea bruscă a alungirii are loc numai la două ore după pregătirea apretului în malaxor (curbele –o––o– din fig. 7, 8), începutul partizii avînd loc după o oră de la pregătirea apretului.

7. Observaţii asupra firelor încleiate

Un criteriu de bază pentru aprecierea calităţii firelor îl constituie rezistenţa la rupere. Această apreciere nu este în întregime concludentă în cazul operaţiei de încleiat. Creşterea rezistenţei la rupere prin încleiere nu este hotărîtoare pentru procesul

Tabelul 8

Caracteristici articol: art. 94, partida 916, Nm=50/1, nf=2 600 fire.

Caracteristici fir crud: rezistența la rupere 212 g/fir, alungirea 4,7%.

Nr. crt.	Ora	T	Vîscozitatea		Caracteristici pelicule (val. medii pt. 20 det.)		Caracteristici fire încleiate (val. medii pt. 50 det.)		Comportarea pe război a urzelilor studiate
		°C	S	cp	R g/cm²	Alung. %	Rezist. la rupere g/fir	Alung. %	Ruperi pe ml țesut
1	9^{50}	63	97	657	690,6	3,86	—	—	—
2	10^{25}	65	73,5	495	557,4	3,28	284	3,30	—
3	10^{55}	65	60	398	442,6	2,30	—	—	—
4	11^{35}	64	50	328	445	2,27	275	3,00	0,51
5	11^{45}	66	50,8	334,8	447,5	2,25	270	2,90	—
6	12^{20}	60	38,7	248,8	452,7	2,00	—	—	—
7	12^{50}	58	39,6	255	360	2,01	280	2,95	—
8	13	54	35,8	229,4	345	2,02	—	—	—
9	13^{05}	56	36,4	234	346	2,02	—	—	—
10	13^{15}	60	32,7	208,2	332,76	2,02	—	—	—
11	13^{45}	62	24,5	149	331	2,01	275	2,9	0,70

Tabelul 9

Caracteristici articol: art. Făget 90, partida 595, Nm=34/1, nf=2 090 fire.

Caracteristici fir crud: rezistența la rupere 300 g/fir, alungirea 5%.

Nr. crt.	Ora	T	Vîscozitatea		Caracteristici pelicule (val. medii pt. 20 det.)		Caracteristici fire încleiate (val. medii pt. 50 det.)		Comportarea pe război a urzelilor studiate
		°C	S	cp	R g/cm²	Alung. %	Rezist. la rupere g/fir	Alung. %	Productivit. m/oră
1	8^{50}	87	90	608	912,40	7,00	385	3,6	4,50
2	9^{20}	86	26,1	160,6	974,00	6,20	360	3,22	—
3	10	92	17,5	100	855,2	4,90	400	3,86	4,37
4	10^{45}	84	19,8	115,4	472,25	3,82	—	—	—
5	11^{15}	85	21,8	127	260,00	3,60	395	3,26	—
6	11^{45}	82	17,5	100	250,00	3,4	—	—	—
7	12	82	20,8	122,4	300,00	3,28	—	—	—
8	12^{15}	82	19,7	114,7	221,20	3,00	380	3,14	—
9	12^{30}	84	19	110	213,76	2,76	—	—	—
10	12^{45}	86	19	110	236,90	2,70	375	3,10	3,80
11	13^{10}	85	19,2	111,2	186,40	2,60	—	—	—
12	13^{25}	85	19	110	194,2	2,40	365	3,06	—

de ţesere, ci ea trebuie considerată în strînsă legătură cu modificările în alungirea firelor.

Scăderii mari a alungirii la rupere a firelor încleiate îi corespunde o reducere mare a capacităţii de deformare elastică ; deşi este însoţită de o creştere mare a rezistenţei la rupere, eficacitatea încleierii este mult redusă.

În condiţiile bazei materiale existente s-au făcut încercări la rupere pe firele încleiate, la dinamometrul Kowo. Rezultatul a peste 2 000 de determinări arată că la toate tipurile de reţetă şi la majoritatea articolelor apar după încleiere creşteri mari ale rezistenţei. Scăderea alungirii atinge valori între 12,1 % pînă la 40 %. Rezultatele obţinute sînt cuprinse în tabelul 10.

Tabelul 10

Rezultatele încercărilor la rupere

Reţeta	Articolul	Fineţe fir 34/L (30 text)	Fire crude		Fire încleiate				
			Rezist. la rupere g/fir	Alung. %	Rezist. la rupere g/fir	Alung. %	Creş-terea rezist. %	Scăd. alung. %	Indice lucru mec g. cm
Apret slab cartofi	Făget 80	34/1	358,00	4,12	342,70	2,66	4,5	35	2 280
	Făget 90	34/1	365,00	5,31	388,30	3,38	6,4	36,4	3 275
	Vrancea 80	34/1	316,04	6,89	380,98	4,29	17,8	37,8	4 080
	Vrancea 80	34/1	288,00	4,57	376,00	2,70	30,6	41,0	2 540
Apret tare cartofi	94	50/1	212,00	4,70	277,10	3,35	30,8	29,6	2 268
	94	50/1	227,00	5,05	257,00	3,00	13,2	40,0	1 925
	12 carou	50/1	271,00	5,52	363,7	4,57	34,2	17,2	4 160
	7	50/1	196,00	5,30	389,0	4,48	47,9	15,4	3 235
Apret slab porumb	Export 140	27/1	463,00	5,42	614,0	4,03	32,8	25,6	6 170
	186	34/1	350,00	5,44	415,6	3,03	18,8	44,5	3 150
	201	27/1	253,00	4,53	386,0	3,06	52,0	32,6	2 950
	Flamura	27/1	256,00	4,10	379,0	3,05	48,0	25,6	2 890
Apret tare porumb	55	50/1	266,64	5,02	367,4	4,10	37,6	18,3	3 680
	Rareş	50/1	262,76	5,28	349,96	4,54	33,4	14,1	3 970
	Romulus	54/1	270,00	5,12	295,00	4,50	9,3	12,1	3 320
	12 carou	50/1	243,54	5,29	321,60	4,40	32	18,4	3 540

8. Relaţia fir, peliculă, vechime a apretului

După studiul separat al unor elemente referitoare la problema încleierii, lucrările s-au orientat către un studiu complex, pe grup de parametri, în scopul stabilirii unor corelaţii care să scoată în evidenţă condiţiile optime de lucru.

Partea experimentală s-a axat pe studiul reţetelor pe bază de amidon, folosite la încleierea unor partizi complete, din articole diferite. Respectînd condiţia ca întreaga partidă să fie prelucrată cu apret din acelaşi malaxor, iar începutul partizii să se facă pentru cadă alimentată cu apret proaspăt, s-a procedat, la intervale de timp egale, la determinări complexe, anume : a) s-a determinat vîscozitatea şi parametrii care o influenţează (temperatura, densitatea apretului) ; b) pentru aceleaşi momente s-au luat pelicule cercetate ulterior ; c) pentru toate sulurile din partidă s-au luat probe de fir încleiate, notîndu-se şi sulurile, pentru urmărirea lor pe războaie. S-a determinat rezistenţa şi alungirea la rupere a acestor fire.

Cu valorile obţinute s-au trasat graficele din fig. 7 şi 8, în care în ordonată s-a reprezentat viscozitatea (cp), rezistenţa la rupere a peliculei şi a firului (g), alungirea la rupere a peliculei şi a firului (%), iar în abscisă timpul corespunzător desfăşurării partizii.

Curbele —o—o— şi —Δ—Δ— reprezintă caracteristicile firului. Se constată o strînsă legătură între caracteristicile peliculei şi cele ale firului.

Curba variaţiei rezistenţei firului încleiat arată în prima parte, faţă de rezistenţa firului crud, creşterea normală obţinută prin încleiere. Pe măsura desfăşurării partizii, însă, datorită scăderii vîscozităţii (curba —×———×—) şi scăderii rezistenţei peliculei (curba —□—□—) rezistenţa, firelor scade.

Alungirea la rupere a firelor scade faţă de alungirea firelor neîncleiate, aşa cum s-a arătat mai sus. Se poate stabili însă o legătură între alungirea la rupere a peliculei şi cea a firului. În timp peliculele devin din ce în ce mai rigide şi de rezistenţă mai mică. Apretul, ale cărui însuşiri sînt reflectate de aceste pelicule, pătrunde în fir, datorită scăderii vîscozităţii, face mai strînsă legătură peliculă-fir, dar pelicula fiind mai rigidă, capacitatea de alungire a firului scade. Deşi se presupune o pătrundere mai intensă a apretului, care ar explica o creştere continuă a rezistenţei firului, aceasta scade în timp, corespunzător cu variaţia parametrilor apretului şi peliculei.

După primele două ore de lucru alungirea peliculei scade cu 41% faţă de valoarea iniţială, obţinînd pentru fir o scădere de 12%. În continuare, după alte 45 min alungirea peliculei scade brusc, cu repercusiuni negative asupra alungirii firelor (2,9% alungire, tabelul 8).

În cazul apretului tare (tabelul 9) se constată aceleaşi fenomene.

Fenomenele remarcate pe baza analizei graficelor trasate au fost confirmate de comportarea pe război a urzelilor încleiate. Sulurile din aceeaşi partidă au fost prelucrate pe război în condiţii asemănătoare. Numărul ruperilor însă a fost crescător la sulurile încleiate cu apret, depăşind 2 ore de întrebuinţare.

Evidenţa calităţii şi cantităţii producţiei arată corespunzător o descreştere (tabelele 8 şi 9).

Din tabelul 8 rezultă că numărul de ruperi la ml ţesut, pentru articolul 94, a crescut de la 0,51 pentru sulul 2, la 0,70 pentru ultimul sul din partidă.

Din tabelul 9 rezultă că sulul de la începutul partizii s-a prelucrat cu o productivitate de 4,5 m/oră şi penultimul cu 3,8 m/oră.

9. Concluzii

a) Vîscozitatea inițială a apretului pe bază de amidon de cartofi, în malaxor, se păstrează aproape constantă.

b) Vîscozitatea apretului în cadă scade continuu în timpul folosirii, pînă la epuizare.

c) Vîscozitatea apretului pe bază de amidon de porumb creşte de 3...4 ori într-o perioadă de 5...6 ore.

d) Vîscozitatea apretului scade în cadă, în timpul încleierii urzelilor vopsite aduse în stare umedă la încleiat.

e) Vîscozitatea apretului în cadă se modifică prin efectuarea unor operaţii ca : adăugarea de apret proaspăt şi de apă, deschiderea conductei de abur direct, agitarea mecanică etc.

f) Obţinerea peliculelor pentru încercări mecanice de laborator este posibilă prin folosirea plăcuţelor metalice netede, de preferinţă de cupru sau alamă.

g) Există o relaţie strînsă între caracteristicile mecanice ale peliculelor de apret şi cele ale firelor încleiate.

h) Efectele încleierii optime se obţin prin folosirea apretului maxim în timp de 2 ore de la pregătire. În consecinţă se recomandă ca durata utilizării să nu depăşească acest interval de timp.

i) Ca urmare a concluziei precedente numărul de ruperi ale urzelii pe războiul de ţesut cresc proporţional cu vechimea apretului.

Primit la 28 VI 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de ţesătorie

BIBLIOGRAFIE

1. Schutz R., Bull. Inst. Text. France, 1959, *81*, pp. 87–90.
2. Tatu M., Ibid., 1959, *85*, pp. 127—130.
3. Meybek J., Schutz R., Ibid., 1959, *83*, pp. 99—126.
4. Constant J., Revue textile Tiba, 1957, *5*, pp. 308—312; Ibid., 1957, *8*, pp. 503—506; Ibid., 1957, *9—10*, pp. 572—580.
5. Schnutzler Netzschau K., Deutsche Textiltechnik, 1958, 8, *11*, S. 542—545.
6. Mîndrea N., Löwy A., *Încleierea urzelilor de bumbac*, Ed. Tehn., Buc., 1957.
7. *** L'ind. text., 1958, *861*, p. 595.

ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛЕЯЩИХ ПЛЕНОК, ОСНОВАННЫХ НА КРАХМАЛЕ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ХЛОПЧАТОБУМАЖНЫХ НИТЕЙ ДЛЯ ОСНОВЫ

(Резюме)

Различия между физико-механическими характеристиками клеящих пленок и хлопчатобумажных нитей для основы вызывают частые разрывы последних, в процессе тканья.

В статье даются результаты исследований (лабораторных и производственных) изменений вязкости клея во времени, характеристик клеящих пленок, а также и характеристики проклееных нитей.

Предлагаются методы изготовления и пользования клея, а также и получения клеящих пленок.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE PHYSISCH-MECHANISCHEN EIGENSCHAFTEN DER STÄRKESCHLICHTEFILME UND IHR EINFLUSS AUF DIE CHARAKTERISTIKEN DER BAUMWOLLKETTFÄDEN

(Zusammenfassung)

Die Unterschiede zwischen den physisch-mechanischen Eigenschaften der Schlichtefilme und jenen der Baumwollketfäden verursachen häufige Brüche der letzteren während des Webens.

Die Arbeit enthält Untersuchungen über die Veränderung der Viskosität der Schlichte mit der Zeit, über die Schlichtefilme, so wie über die geschlichteten Fäden im Laboratorium und während des Webens.

Die Schlussfolgerungen enthalten Empfehlungen über die Zubereitungsart der Schlichte, über die Art der Erzeugung der Filme und über die Verwendungsart der Schlichte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 677.03

CERCETĂRI REFERITOARE LA INFLUENŢA PROCESELOR TEHNOLOGICE ASUPRA ELASTO-PLASTICITĂŢII UNOR MATERIALE TEXTILE

DE

I. VLAD

1. Introducere

În ultima vreme calitatea materialelor textile şi tehnologia de prelucrare se apreciază în mod deosebit după proprietăţile elasto-plastice stabilite prin aşa-numitele încercări ciclice „încărcare - descărcare - odihnă" [1]. Condiţiile acestor încercări sînt în funcţie de domeniile de întrebuinţare ale materialelor şi procesele tehnologice de prelucrare [1], [2]. Ele urmăresc utilizarea raţională a materiilor prime textile şi conservarea proprietăţilor acestora în timpul prelucrărilor mecanice şi chimice.

La Institutul textil din Moscova, prof. dr. G. N. Kukin şi colaboratorii au efectuat cercetări amănunţite în domeniul studiului influenţei diferiţilor factori (temperatură, umiditate, torsiune, tratamente chimice etc.) asupra proprietăţilor elasto-plastice, la o gamă mare de materiale textile. Influenţa proceselor de ţesere şi finisare, în ansamblu, asupra unor asemenea proprietăţi, a fost mai puţin cercetată şi de aceea am considerat util să întreprindem cercetări în acest domeniu la unele materiale fabricate din amestecuri de fibre naturale şi artificiale.

2. Modul de lucru

Caracteristicile materialelor studiate sînt date în tabelul 1, iar condiţiile de cercetare — în tabelul 2.

Încărcarea ţesăturii pentru cele trei trepte de cercetare (P_1, P_2, şi P_3 (tabelul 2), atît pe urzeală cît şi pe bătătură (probe cu lăţimea de 25 mm) s-a stabilit cu relaţiile:

$$P_1 = 5P/200, \quad P_2 = 15P/200, \quad P_3 = 30P/200,$$

în care P — sarcina de rupere a ţesăturii, (kgf/50 mm).

Încărcarea firelor (urzeală şi bătătură) iniţială şi din ţesătura finisată, pentru cele trei trepte de cercetare, s-a stabilit în funcţie de încărcarea ţesăturii, cu relaţiile:

Tabelul 1

Caracteristicile materialelor

Nr. crt.	Denumirea materialelor	Compoziţia	Finețea N	Sarcina de rupere kgf	Coeficientul de variaţie la sarcina de rupere %	Alungirea la rupere %	Coeficientul de variaţie la alungirea la rupere %	Desimea fire/dm²	Greutatea g/m²	Contextura
1	Fir de urzeală	Lînă şi viscoză	$\frac{28}{1}/\frac{60}{1}$	0,424	8,4	13,7	21,1	—	—	—
2	Fir de bătătură	Lavsan (50%) şi celofibră viscoză (50%)	48/2	0,486	13,6	10,2	14,3	—	—	—
3	Ţesătură pe urzeală	Lînă şi viscoză	$\frac{28}{1}/\frac{60}{1}$	80,8	—	30,0	—	338	288	Serge 2/2
4	Ţesătură pe bătătură	Lavsan (50%) şi celofibră viscoză (50%)	48/2	67,4	—	16,7	—	232	—	—

Tabelul 2

Condiţiile de cercetare a proprietăţilor elasto-plastice

Nr. crt.	Denumirea materialelor	Încărcarea P_1 kgf	Încărcarea P_1 % faţă de sarcina de rupere	Încărcarea P_2 kgf	Încărcarea P_2 % faţă de sarcina de rupere	Încărcarea P_3 kgf	Încărcarea P_3 % faţă de sarcina de rupere	Timpul min. T_1 Încărcare	Timpul min. T_2 Odihnă	Umiditatea relativă a aerului %	Temperatura aerului °C
1	Fir de urzeală de pe bobine	0,024	5,6	0,072	16,8	0,144	33,6	240	180	65±2	22±2
2	Fir de urzeală din ţesătură	0,024	—	0,072	—	0,144	—	240	180	65±2	22±2
3	Fir de bătătură de pe bobine	0,029	5,9	0,087	17,7	0,174	35,4	240	180	65±2	22±2
4	Fir de bătătură din ţesătură	0,029	—	0,087	—	0,174	—	240	180	65±2	22±2
5	Ţesătură pe urzelă	2,00*)	5	6,00*)	15	12,00*)	30	60	120	65±2	22±2
6	Ţesătură pe bătătură	1,70*)	5	5,10*)	15	10,10*)	30	60	120	65±2	22±2

*) Lăţimea probelor 25 mm.

$$P_1 = 5P/(2dl), \quad P_2 = 15P/(2dl), \quad P_3 = 30P/(2dl),$$

în care: d — desimea țesăturii, (fire/dm), l — lățimea probelor, (mm).

Din cele de mai sus se constată că la stabilirea influenței prelucrării asupra proprietăților elasto-plastice ale firelor a fost adoptată metoda de cercetare bazată pe condiții identice de studiu înainte și după prelucrare. De asemenea, pentru cercetarea influenței structurii țesăturii asupra aceloraşi proprietăți s-a admis repartiția uniformă a încărcării țesăturii pe firele componente. Prin compararea proprietăților elasto-plastice ale țesăturii, respectiv ale firului sub formă de țesătură, în anumite condiții, cu proprietățile elasto-plastice ale firului extras din țesătură în aceleași condiții (P/n, P — încărcarea țesăturii, n — numărul firelor din probă), există posibilitatea stabilirii influenței legăturii țesăturii asupra proprietăților elasto-plastice ale firului.

Proprietățile elasto-plastice ale materialelor, în general fiind determinate de deformația totală și componentele ei, pentru stabilirea lor s-a folosit relația:

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_e + \varepsilon_r$$

în care: ε — deformația totală corespunzătoare timpului T_1 (tabelul 2), ε_i — deformația elastică instantanee, care în cazul de față corespunde timpului de 4 sec [1], ε_e — deformația elastică încetinită, corespunzătoare timpului T_2, ε_r — deformația plastică (remanentă).

Lucrările experimentale s-au efectuat pe aparatele „Relaxometru pentru 5 fire, P — 5" [1] și „Relaxometru pentru țesături", la Institutul textil din Moscova, catedra Studiul materialelor textile.

3. Rezultatele cercetărilor

Pe baza rezultatelor măsurătorilor s-au construit diagramele încărcare-odihnă ale firului de urzeală (inițial și final), firului de bătătură (inițial și final) și țesăturii (pe urzeală și pe bătătură) și s-au stabilit deformațiile și componentele lor în funcție de încărcare și timp.

Diagramele încărcare-odihnă scot în evidență următoarele aspecte ale influenței proceselor de țesere și finisare asupra elasto-plasticității materialelor cercetate:

La firul de urzeală inițial (fig. 1, diagramele *1*, *2* și *3*) se constată că cea mai mare parte a deformației se produce în momentul încărcării; în funcție de timp, deformația se produce lent, în circa 30 min mai pronunțat, iar după aceea creșterea deformației este neînsemnată. Aspectul deformației firului, menționat mai sus, este amplificat la încărcarea P_3 (fig. 1, diagrama *3*). Revenirea corespunzătoare perioadei de odihnă este importantă la încărcările P_1 și P_2 și mai redusă la încărcarea P_3, în comparație cu deformația totală. Această constatare duce la concluzia că tensionarea firului în procesele de prelucrare nu trebuie să depășească 17% din sarcina de rupere.

După prelucrare proprietățile elasto-plastice ale firului de urzeală s-au modificat simțitor (fig 1, diagramele *4*, *5* și *6*). Deformația este foarte mare în momentul încărcării (la toate treptele de cercetare), iar

în funcţie de timp se constată o creştere însemnată a ei, în special la încărcarea P_3 (fig. 1, diagrama *6*). Revenirea firului după înlăturarea sarcinii este foarte mică în comparaţie cu cea a firului iniţial, chiar la solicitări mici.

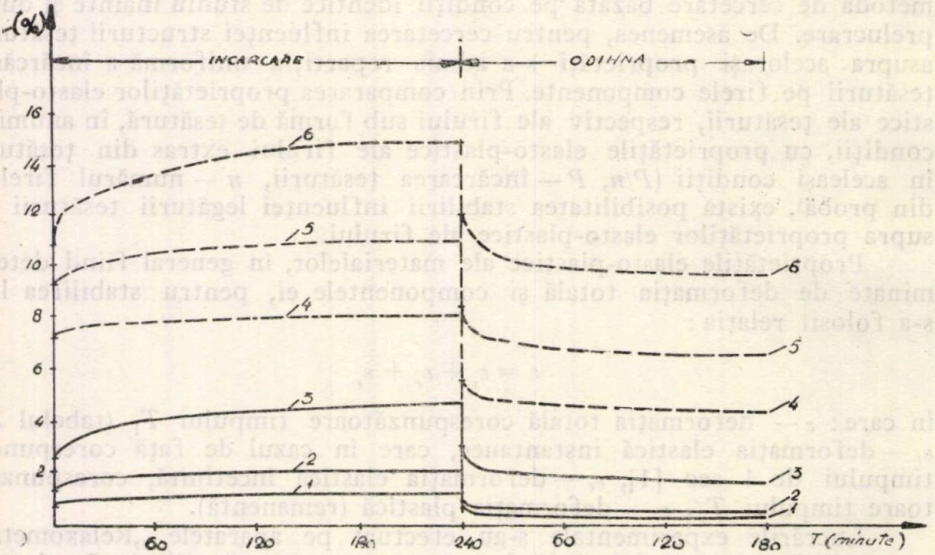


Fig. 1. — Diagramele încărcare-odihnă ale firului de urzeală înainte şi după prelucrare.
——— înainte de prelucrare; - - - - după prelucrare.

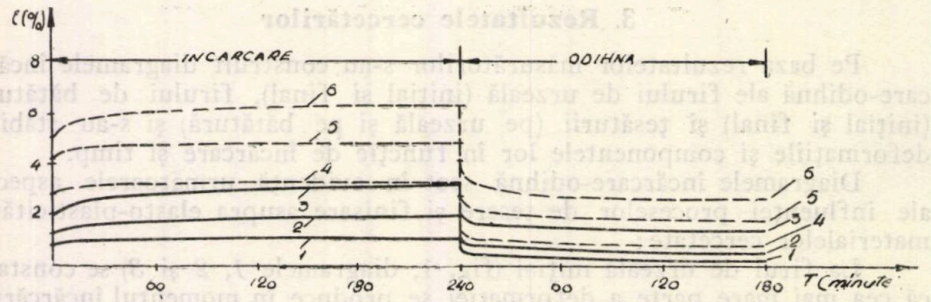


Fig. 2. — Diagramele încărcare-odihnă ale firului de bătătură înainte şi după prelucrare.
——— înainte de prelucrare; - - - - după prelucrare.

Firul de bătătură iniţial (fig. 2, diagramele *1*, *2* şi *3*) se comportă asemănător firului de urzeală iniţial, atît în ceea ce priveşte deformaţia corespunzătoare încărcării cît şi revenirea în perioada de odihnă. Firul de bătătură final (fig. 2, diagramele *4*, *5* şi *6*), extras din ţesătură (după ce a suferit prelucrările în ţesătorie şi finisare), prezintă deformaţii mai mici în comparaţie cu cele ale firului final de urzeală.

La ţesătură deformaţia pe bătătură corespunzătoare încărcării (fig. 3, diagramele *1*, *2* şi *3*) este mult mai mică în comparaţie cu deformaţia

pe urzeală (fig. 3, diagramele *4*, *5* și *6*); în schimb revenirea țesăturii pe urzeală este mai mare decît pe bătătură, în raport cu deformația totală.

În tabelul 3 și fig. 4 se prezintă deformația și componentele ei în funcție de încărcare. De asemenea, în ultima coloană a tabelului 4 se dau valorile coeficientului de plasticitate stabilite cu relația:

$$C_p = \varepsilon_r/\varepsilon,$$

notațiile fiind cele utilizate anterior.

Din datele cuprinse în tabelul 3 și din analiza fig. 4 se constată următoarele:

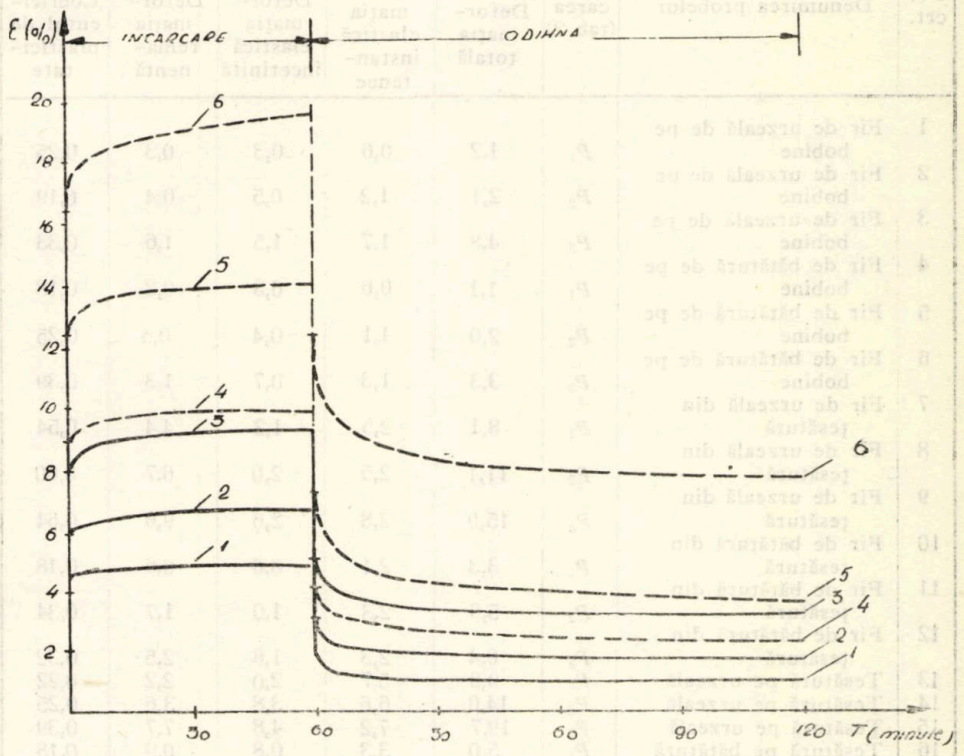


Fig. 3. — Diagramele încărcare-odihnă ale țesăturii pe urzeală și pe bătătură.
——— pe bătătură; - - - - pe urzeală.

Deformațiile firelor de urzeală inițial și de bătătură inițial sînt aproape identice la încărcările P_1 și P_2. La încărcarea P_3 deformația firului de urzeală este mai mare decît cea a firului de bătătură. La ambele fire plasticitatea este mare la încărcarea P_3 (fig. 4 a și 4 b). În procesele de țesere și finisare plasticitatea firului de urzeală a crescut foarte mult (fig. 4 c) în comparație cu cea a firului de bătătură (fig. 4 d). Solicitările multiple la care a fost supus firul de urzeală în procesele de țesere și finisare constituie cauza creșterii plasticității sale. Cercetările de față au tocmai scopul de a scoate în evidență importanța acestor solicitări

sub aspectul influenţei ce o exercită asupra proprietăţilor firului. Stabilirea unor parametri optimi de lucru în ţesătorie şi finisare, pe baza proprietăţilor elasto-plastice ale firelor iniţiale, constituie calea cea mai sigură în vederea conservării proprietăţilor firelor.

Tabelul 3

Valorile deformaţiei totale şi ale componentelor ei în funcţie de încărcare, raportate la lungimea iniţială

Nr. crt.	Denumirea probelor	Încărcarea (tab. 2)	Deformaţia faţă de lungimea iniţială %				
			Deformaţia totală	Deformaţia elastică instantanee	Deformaţia elastică încetinită	Deformaţia remanentă	Coeficientul de plasticitate
1	Fir de urzeală de pe bobine	P_1	1,2	0,6	0,3	0,3	0,25
2	Fir de urzeală de pe bobine	P_2	2,1	1,2	0,5	0,4	0,19
3	Fir de urzeală de pe bobine	P_3	4,8	1,7	1,5	1,6	0,33
4	Fir de bătătură de pe bobine	P_1	1,1	0,6	0,3	0,2	0,18
5	Fir de bătătură de pe bobine	P_2	2,0	1,1	0,4	0,5	0,25
6	Fir de bătătură de pe bobine	P_3	3,3	1,3	0,7	1,3	0,39
7	Fir de urzeală din ţesătură	P_1	8,1	2,5	1,2	4,4	0,54
8	Fir de urzeală din ţesătură	P_2	11,1	2,5	2,0	6,7	0,60
9	Fir de urzeală din ţesătură	P_3	15,0	2,8	2,6	9,6	0,64
10	Fir de bătătură din ţesătură	P_1	3,3	2,1	0,6	0,6	0,18
11	Fir de bătătură din ţesătură	P_2	5,0	2,3	1,0	1,7	0,34
12	Fir de bătătură din ţesătură	P_3	6,4	2,3	1,6	2,5	0,32
13	Ţesătură pe urzeală	P_1	9,9	5,7	2,0	2,2	0,22
14	Ţesătură pe urzeală	P_2	14,0	6,6	3,8	3,6	0,25
15	Ţesătură pe urzeală	P_3	19,7	7,2	4,8	7,7	0,39
16	Ţesătură pe bătătură	P_1	5,0	3,3	0,8	0,9	0,18
17	Ţesătură pe bătătură	P_2	6,9	3,8	1,5	1,6	0,22
18	Ţesătură pe bătătură	P_3	9.4	4,2	2,0	3,2	0,34

Modificările survenite în structura firelor de urzeală şi bătătură în timpul prelucrării, reliefate de proprietăţile elasto-plastice, se observă şi la ţesătură (fig. 4 a şi 4 b), anume deformaţiile totale sînt mari atît pe urzeală cît şi pe bătătură.

Se constată că prin contextură (în cazul ţesăturii cercetate serge 2/2) se reduce mult plasticitatea pe urzeală a ţesăturii (fig. 5 e) şi mai puţin pe bătătură (fig. 4 f). Acest aspect arată că modul de legare al firelor în ţesătură reprezintă un mijloc important de îmbunătăţire a proprietăţilor elasto-plastice.

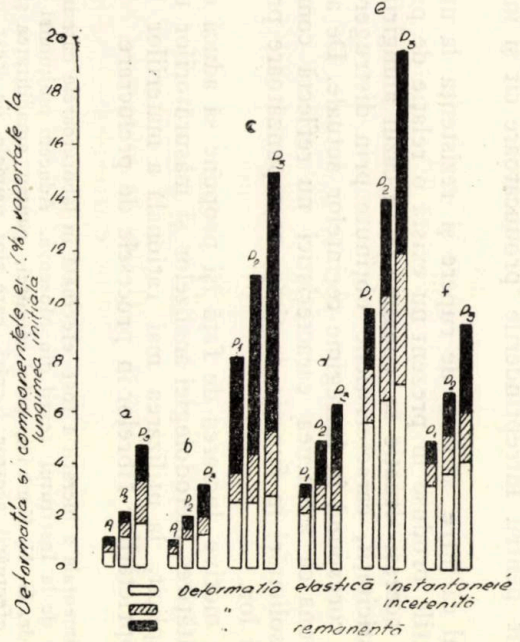


Fig. 4. — Deformația și componentele ei (%) raportate la lungimea inițială.

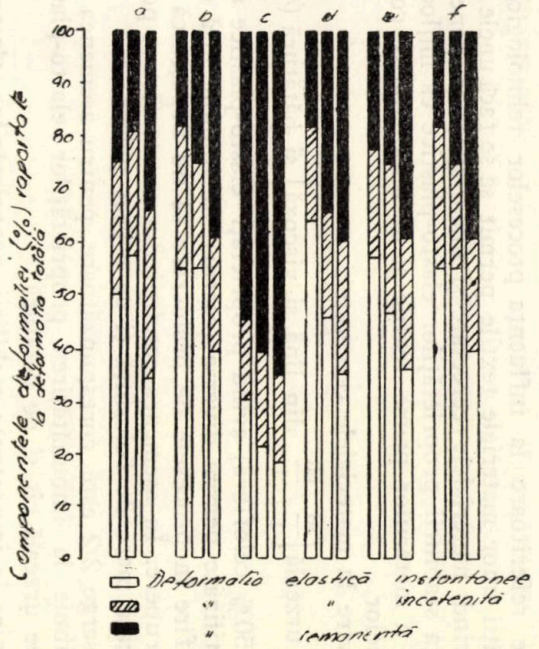


Fig. 5.— Componentele deformației (%).

4. Concluzii

Cercetările referitoare la influenţa proceselor tehnologice asupra elasto-plasticităţii unor materiale textile permit să se facă unele aprecieri particulare privind materialele cercetate şi unele aprecieri generale privind importanţa stabilirii proprietăţilor elasto-plastice ca mijloc de utilizare raţională a materiilor prime textile şi de îmbunătăţire continuă a calităţii produselor.

a) Cu privire la materialele cercetate:

Firele de urzeală $\left(\frac{28}{1} / \frac{60}{1}\right.$, din lînă şi viscoză$\left.\right)$ şi bătătură (48/2, din 50% lavsan şi 50% celofibră) avînd proprietăţi elasto-plastice asemănătoare, pot fi utilizate pentru diverse ţesături. Se impune însă ca tensionarea acestor fire în procesele de prelucrare să nu depăşească 17% din sarcina lor de rupere. În asemenea condiţii din aceste fire se pot obţine produse cu durată mare de folosinţă şi cu aspect plăcut.

Legătura serge 2/2 este corespunzătoare pentru asemenea fire, întrucît ea contribuie la îmbunătăţirea proprietăţilor elasto-plastice ale ţesăturii, atît pe urzeală cît şi pe bătătură.

b) Cu privire la importanţa stabilirii proprietăţilor elasto-plastice ale materialelor textile:

În ţara noastră aprecierea proprietăţilor fizico-mecanice ale materialelor textile se face aproape exclusiv pe baza caracteristicilor de distrugere (sarcina de rupere, alungirea la rupere, rezistenţa la îndoiri repetate etc.). Aceste caracteristici sînt prevăzute în standarde şi constituie norme legale atît pentru întreprinderile producătoare cît şi în relaţiile comerciale.

Prin faptul că între sarcina de rupere şi rezistenţa la utilizare a materialelor textile produse în prezent nu există o relaţie de proporţionalitate şi cum aceeaşi situaţie se constată şi în cazul alungirii pînă la rupere şi a elasticităţii, caracteristicile obţinute prin distrugerea materialelor nu mai corespund în întregime cerinţelor actuale. De asemenea, se poate menţiona că asemenea caracteristici nu reflectă comportarea materialelor la solicitări în funcţie de timp, corespunzătoare prelucrării şi întrebuinţării lor.

Din aceste motive lucrarea de faţă îşi propune să aducă o contribuţie la îmbunătăţirea metodologiei analizelor şi măsurătorilor textile în R. P. R. şi, implicit, la utilizarea mai raţională a materiilor prime şi conservarea proprietăţilor fibrelor în procesele de prelucrare.

Partea experimentală a lucrării a fost efectuată în laboratoarele catedrei Studiul materialelor textile de la Institutul textil din Moscova. Aducem mulţumiri pe această cale profesorului dr. G. N. Kukin, şeful catedrei, pentru amabilitatea şi sprijinul acordat în timpul efectuării acestor lucrări, care sînt primele de acest gen în ţara noastră.

Primit la 17 III 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de filatură

BIBLIOGRAFIE

1. Кукин Г. Н., Соловьев А. Н., Науч. исслед. тр. Моск. текст. ин-т, 1956, **XVII.**
2. Кукин Г. Н., Технол. текст. пром., 1962, *1.*
3. Андреев П. П., *Математические таблицы*, Госстатиздат, М , 1952.
4. Speakman J. B., *Mechano-chemical methods for use with animal fibers*, Leeds University, 1947.
5. *** *Handbuch der Werkstoffprüfung*, II. Aufl., *Die Prüfung der Textilien*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
6. Zilinski T., *Nauka o wloknie*, Warszawa, 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ЭЛАСТИЧНОСТЬ И ПЛАСТИЧНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

(Резюме)

Представляются результаты исследований влияния ткачества и химической обработки на эластичность и пластичность некоторых пряж, изготовленных из смеси натуральных и искусственных волокон и влияние сплетения ткани на те же свойства.

Исследовательская часть настоящей работы была проведена в лабораториях Московского текстильного института. Автор выражает глубокую признательность заведующему кафедрой исследований текстильных материалов, проф., д-ру техн. наук Г.Н. Кукину за исключительно ценные руководство и помощь, оказанные ему в период проведения этих работ, являющихся первыми в своем роде в Румынии.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Диаграммы нагрузки - отдых основной пряжи до и после обработки. ——— до обработки; - - - после обработки.

Рис. 2. — Диаграммы нагрузки - отдых уточной пряжи до и после обработки. ——— до обработки; - - - после обработки.

Рис. 3. — Диаграммы нагрузки - отдых ткани на основе и утке. ——— на основе; - - - на утке.

Рис. 4. — Деформация и составные ее части (%) относительно первоначальной длины.

Рис. 5. — Составные части деформации (%).

RESEARCHES ABOUT THE INFLUENCE OF THE TECHNOLOGICAL PROCESSES UPON THE ELASTO-PLASTICITY OF SOME TEXTILE MATERIALS

(Summary)

The paper presents results of research-work, regarding the influence of weaving and finishing processing on elasto-plasticity of yarns formed of natural and man-made fibre mixtures, as well as the influence of fabric texture on the same properties.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Load-rest diagrams of warp yarn, before and after processing. —— before processing; - - - after processing.

Fig. 2. — Load-rest diagrams of weft yarn before and after processing. —— before processing; - - - after processing.

Fig. 3. — Load-rest diagrams of fabric, warp- and weft-way. —— warp way; - - - weft-way.

Fig. 4. — Deflection and its components (%) related to initial legth.

Fig. 5. — Deflection components (%).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

Д. К. 675.025

АГРЕГАТ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЯГКИХ КОЖ НА УЧАСТКИЕ СУШКИ

Г. В. ЛИВЫЙ, А. Г. ХРИПИН и М. А. БРАГИНСКИЙ

Одним из узких мест в производстве мягких кож является участок сушки, имеющий при обычном (классическом) способе производства большое количество довольно длительных операций (основная сушка, увлажнение, тяжки, пролежки, подсушка на рамах).

В настоящее время ведутся работы по комплексной механизации этого участка с усовершенствованием технологии подготовительных операций и самого процесса сушки.

Здесь надо отметить разработку и внедрение как в СССР так и заграницей сушильно-увлажнительных агрегатов, а также однофазных способов сушки; сушка внаклейку на гладкие поверхности, контактная сушка, сушка методом «Секотан», сушка на рамах со специальной предварительной подготовкой кож (например, обработка их углеводородными эмульсиями или синтетическими жирами) и др.

Новым направлением в сушке мягких кож является также сушка в динамическом состоянии, при которой кожи в процессе сушки периодически испытывают определенные механические воздействия.

Для механического воздействия на кожу в процессе сушки в различное время предлагалось несколько устройств:

1. Механическая сушилка А. А. Попрядухина (советский патент № 19534, кл. 28, 1931 г.), где используется вертикально-замкнутый двухцепной транспортер, параллельные ветви которого соединены через определенные промежутки стержнями, между которыми на ремнях крепятся кожи.

Кожи в данном случае изгибаются при переходе концевых блоков на барабанах, но не испытывают деформаций растяжения.

2. Сушильное устройство с бесконечным пластинчато-цепным транспортером (французский патент № 701 222, кл. 28, за 1931 г.), в котором кожи на концевых блоках испытывают изгиб с растяжением (расслаблением) в одном направлении — в направлении движения транспортера.

3. В 1951 г. И. П. Губским (СССР) был предложен способ сушки кож, натянутых на рамы, при котором кожи в процессе сушки подвергают воздействию внешних сил, периодически меняющих свое направление (авторское свидетельство № 96 770, кл. 28). В настоящее время на Киевском кожкомбинате апробируется сушилка с саморегулирую-

щимися раздвижными рамами, позволяющая проводить сушку и периодическим растяжением во взаимно-перпендикулярных направлениях.

Вышеописанные устройства производят лишь частичные механические воздействия: или изгиб с растяжением в одну сторону (транспортеры), или растяжение в радиальных направлениях (многосекторные рамы).

В Украинском научно-исследовательском институте кожевенно-обувной промышленности (Укр. НИИКП) в 1960 году разработана

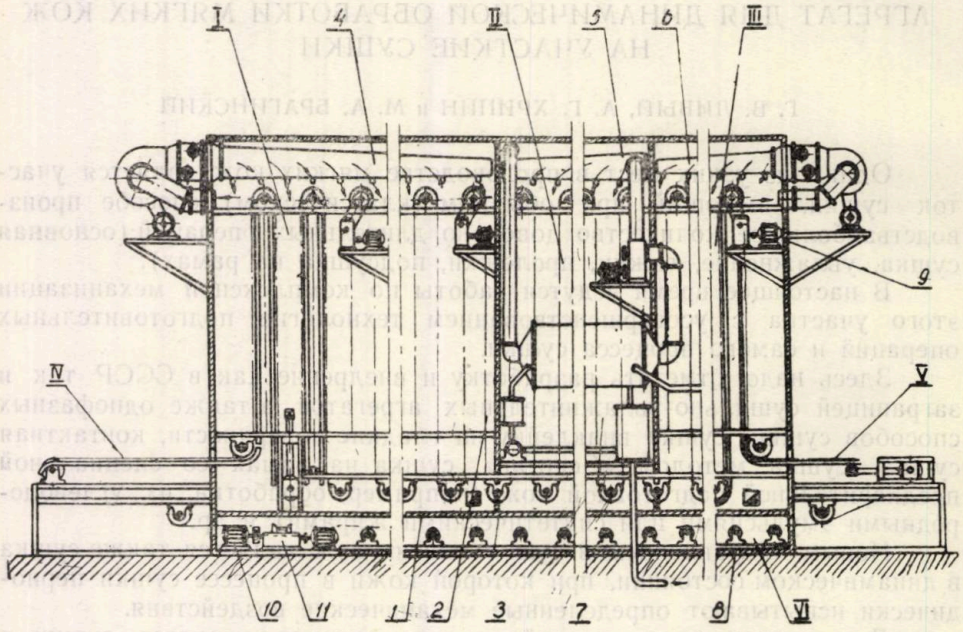


Рис. 1. — Общий вид агрегата для динамической обработки кож.

конструкция агрегата для динамической обработки хромовых кож на участке сушки, представляющая собой бесконечный транспортер с раздвижными пластинами, движущийся по зигзагообразной трассе в рабочем пространстве агрегата (рис. 1).

Рабочее пространство агрегата, отделенное от нерабочего нижней теплоизоляционной перегородкой *1*, разделяется вертикальными теплоизоляционными перегородками *2* на три секции: камеру основной сушки *I*, увлажнительную камеру *II* и камеру подсушки *III*.

Пространство под валами нижних блоков звездочек на границах секций перекрываются короткими теплоизоляционными щитами *3*.

Теплотехническая часть агрегата спроектирована на основе сушильноувлажительных агрегатов типа СУА, разработаны и внедренных в СССР [1].

Подвод воздуха в сушильные камеры *I* и *III*, а также циркуляция влажного воздуха в увлажнительной камере *II* обеспечивается соответ-

ствующими воздуховодами *4*, *5* и *6* с узкими щелями по всей длине (эжекционный метод). Увлажнение воздуха для камеры *II* осуществляется в смесителе *7*, где струя воздуха проходит сквозь распыленную воду.

В рабочей зоне агрегата по зигзагообразной трассе движется цепной транспортер с раздвижными пластинами, на который пружинными невыпадающими зажимами (рис. 2) крепятся кожи. Закрепление кож производится на участке *IV* (рис. 1), снятие кож на участке *V*. Холостая ветвь транспортера проходит под рабочей зоной в канале *VI*, опираясь на ролики *8*.

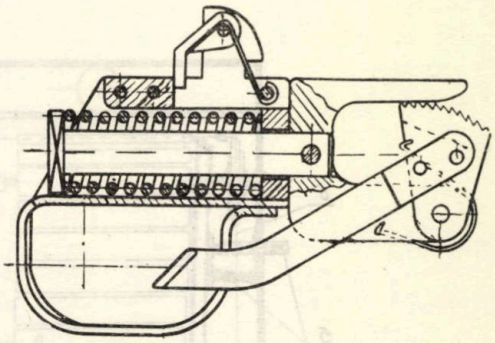


Рис. 2. — Пружинный невыпадающий зажим.

С целью уменьшения максимальных натяжений в цепях транспортера вся его трасса разбита на три примерно равные по сопротивлениям участка, на каждом из которых установлены свои приводные механизм *9*, соединенные с ведущим двигателем *10* и вариатором *11* по синхронизирующей схеме „электрического вала“ [2]. Расчет усилий в цепях транспортера производился с применением формул и упрощенных методов, предложенных нами для транспортеров зигзагообразного вида [3].

Техническая характеристика агрегата

1. Производительность	30	кож/час
2. Рабочий проход	1 400	мм
3. Скорость транспортера	0,011	м/сек
4. Длина транспортера	175	м
5. Продолжительность цикла комплексной сушки	4,4	часа.
Из них: основная сушка	2,4	часа
увлажнение	1	час
подсушка	1	час
6. Установленная мощность	31	квт
7. Вес агрегата	31	тонн
8. Габариты: длина	17 800	мм
ширина	3 300	мм
высота	4 400	мм

Этот агрегат дает более полный комплекс механических воздействий на кожу, а именно: наряду с многократным изгибом при растяжении в продольном направлении — кожа в определенное время подвергается растяжению в поперечном направлении [4].

Растяжение кож в продольном направлении происходит в то время, когда раздвижные пластины, на которых крепятся кожи, будут огибать звездочки верхних блоков. Это растяжение осуществляется за счет того, что поверхность пластин и закрепленная на них кожа перемещаются по окружности, радиус которой больше радиуса начальной окружности звездочек.

При повороте вокруг нижних блоков — кожа, наоборот, будет расслабляться т. к. она проходит здесь по радиусу меньшему, чем радиус начальной окружности звездочек.

На рис. 3 дана схема поперечного сечения агрегата, объясняющая растяжение кож в поперечном направлении. Поперечное растяжение

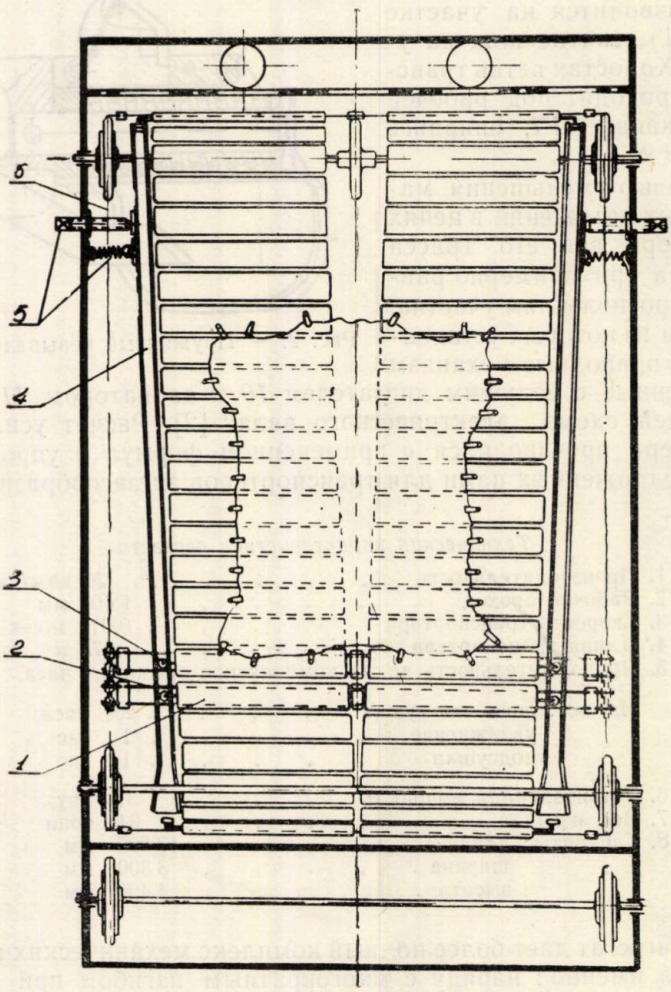


Рис. 3. — Схема поперечного сечения агрегата.

кож происходит во время движения раздвижных пластин с кожами от нижних блоков звездочек к верхним. При этом максимальное растяжение в поперечном направлении (совместно с растяжением в продольном направлении) происходит на верхних блоках.

Растяжение кож в поперечном направлении осуществляется за счет того, что раздвижные пластины *1* (рис. 3), имеющие возможность перемещаться по стержням *2*, взаимодействуют своими роликами *3* с

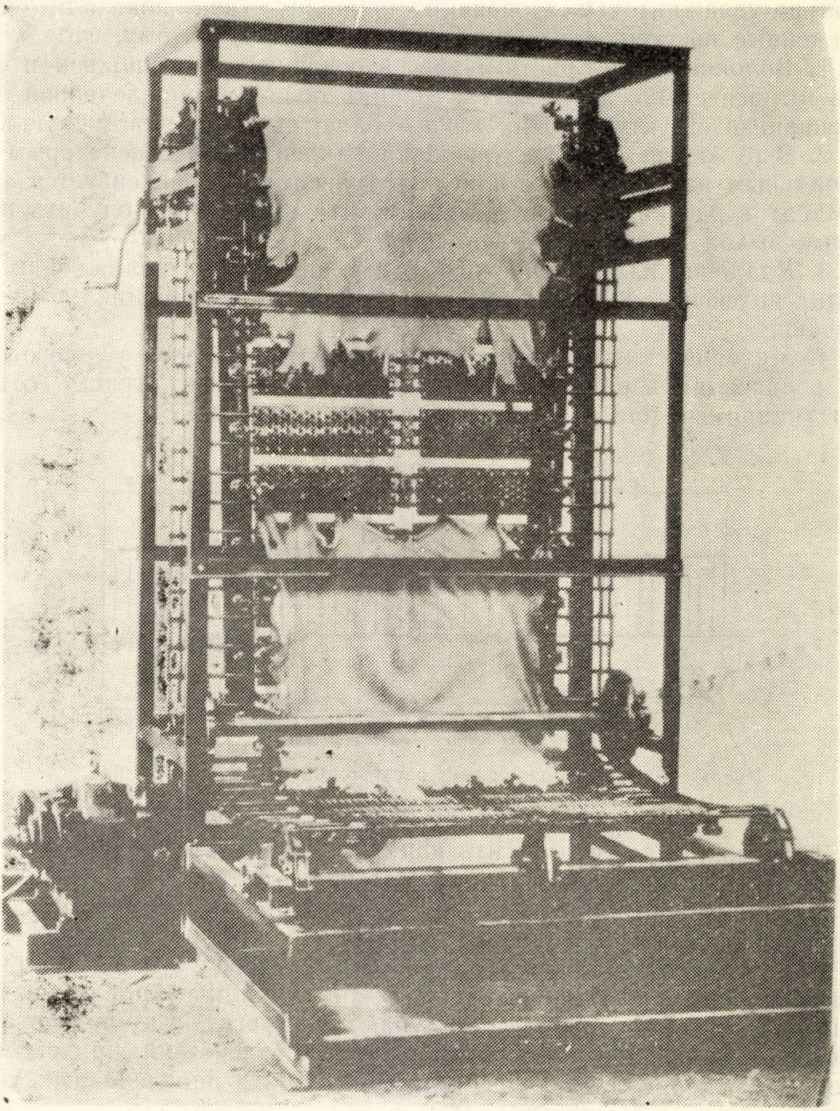


Рис. 4. — Общий вид стенда агрегата.

направляющими рельсами *4*, которые могут устанавливаться пружинно-винтовым механизмом *5* под определенным углом к цепи *6*.

Для свободного входа роликов в направляющие рельсы последние имеют в нижней части раструбы.

После перехода кож через верхний блок они, наоборот, будут расслабляться в поперечном направлении, т. к. расстояние между направляющими рельсами по мере движения к нижним блокам — уменьшается.

Такой комплекс механических воздействий на кожу в процессе сушильно-увлажнительных операций приводит (как показали опыты, проведенные на стенде, изображенном на рис. 4) к тому, что:

1. Волокна кожи, растягиваясь и сокращаясь, изгибаясь и сдвигаясь относительно друг друга, препятствуют в определенной мере „склеиванию" структуры кожи, что позволяет получить эластичную кожу.

2. В то же время структура кожи, закрепленная с некоторым первоначальным натяжением на пластины транспортера, фиксируется (формируется) в расправленном состоянии, что позволяет получить повышенный выход площади готовой кожи.

3. Удаление влаги при сушке и сорбция ее при увлажнении происходит интенсивнее, что сокращает производственный цикл на участке сушки.

4. Механические воздействия, прилагаемые к коже, ускоряют процесс релаксации в ней и, как следствие, уменьшают усадку готовой кожи (например, при намачивании и высушивании).

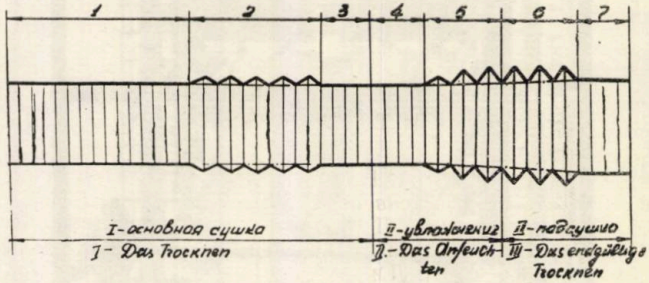


Рис. 5. — Схема поперечных растяжений для сушки опойка.

Здесь надо также отметить влияние предварительной подготовки кож на качество и выход площади готового товара.

Методика проведения динамической обработки кож на описанном агрегате заключается в следующем:

После соответствующей подготовки кож перед сушкой (поддубка синтанами, жирование синтетическими жирами или обработка различными эмульсиями и др.) они поступают в агрегат, где подвергаются описанному выше комплексу механических воздействий, причем поперечное растяжение кож осуществляется лишь в определенных участках рабочей зоны агрегата.

На рис. 5 показана схема поперечных растяжений для опойка. На участках *1*, *3*, *4* — поперечных растяжений не дается, т. к. они или не нужны (участок *1*), или вредны (участки *3*, *4*). На выходе агрегата (участок *7*) — рельсы установлены снова параллельно, но несколько шире, чем на входе (участок *1*). Это делается с целью повышения выхода площади и придания лучшего товарного вида готовых кож.

Кожи, снятые со стенда, не требовали тяжек и пролежек на участке сушки и шли на окончательные отделочные операции по единой методике (шлифование, аппретирование, прессование и т. д.). Для свиных хромовых кож между первым и вторым аппретированием производилась легкая тяжка огузков на тянульной машине, предусмотренная единой методикой для отделочных операций.

Согласно отработанных на стенде технологических и механических режимов в УкрНИИКП"е разработан рабочий проект опытного образца агрегата для динамической обработки кож на участке сушки, который будет установлен на одном из кожзаводов Украины.

Технико-экономическое обоснование применения таких агрегатов заключается в следующем:

1. Проводится полуавтоматизация участка сушки с экономией производственной площади.

2. Происходит рост производительности труда с облегчением условий труда рабочих.

3. Увеличивается выход готового товара с единицы сырья.

4. Резко сокращается производственный цикл на участке сушки хромовых кож.

Поступила 6 XII 1961 г.

Украинский научно-исследовательский институт кожевенно-обувной промышленности, Киев, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов И. В., Евзлин Л. Н., Чуданов В. С., Лег. пром., 1958, *8*.
2. Дьячков В. К., *Подвесные конвейеры*, Машгиз, Москва, 1950 г.
3. Хрипин А. Г., Абрамская Л. В., Технол. лег. пром., 1960, *3*.
4. Хрипин А. Г., Брагинский М. А., Фастовец О. С., Карпухин Г. Г., Терещенко Ф. П., Ливый Г. В., Ibid., 1959, *6*; Ibid., 1960, *2*.

AGGREGAT FÜR DIE DYNAMISCHE BEARBEITUNG DES OBERLEDERS WÄHREND DES TROCKNENS

(Zusammenfassung)

Das Trocknen des Oberleders im dynamischen Zustand ist eine des mehreren Richtungen in der Trocknungstechnologie. Das Leder während des Trocknens wird von bestimmten mechanischen Kräften beeinflüsst. Die Wirkung der Kräfte ersetzt in irgendeinem Mass das maschinelle Stollen des Leders.

In der Abhandlung wird das Aggregat für die dynamische Bearbeitung des Leders während des Trocknens beschrieben.

Das Aggregat ist ein endloser Kettenförderer mit Schiebeplatten, der sich im Raum drei Kammer (Trocknungskammer, Anfeuchtungskammer und Kammer für das endgültige Trocknen) zickzackartig bewegt.

Die Leder sind am Förderer mit speziellen Klemmen befestigt; dabei erleiden sie verschiedene Deformationen, und zwar: Biegung- und Längenausdehnung an den oberen Blöcken und eine wechselnde Querausdehnung während der Bewegung von einem Block bis zum anderen.

Das Leder für solch ein Trocknen soll eine ergänzende Vorbereitug haben, z. B. Syntanennachgerbung, Bearbeitung mit Emulsionen usw.

Die technisch-wirtschaftlichen Vorteile dieses Verfahrens sind: a) Abkürzung des technologischen Kreislaufs des Trocknens; b) Steigerung der Arbeitsproduktivität; c) Zunahme der Flächenausbeute der Leder; d) Verbesserung der Arbeitsbedingungen.

Das Aggregat ist in dem Ukrainischen Forschungsinstitut für Lederindustrie entwickelt und wird in einer der Lederfabriken der Ukraine eingestellt.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Gesamtansicht des Aggregats für die dynamische Bearbeitung des Leders.
Abb. 2. — Nichtausfallende Federklemme.
Abb. 3. — Schema des Querschnittes des Aggregats.
Abb. 4. — Gesamtansicht des Standes.
Abb. 5. — Schema der Querausdehnungen für das Trocknen des Boxkalfs.

AGREGAT PENTRU PRELUCRAREA DINAMICĂ A FEŢELOR DE PIELE ÎN TIMPUL USCĂRII

(Rezumat)

În lucrare se prezintă descrierea agregatului pentru prelucrarea dinamică a pielii în timpul uscării.

Agregatul constă dintr-o translaţie în lanţ fără sfîrşit prin intermediul căreia se produce o mişcare în zigzag a trei pieptene (pieptene de uscare, de înmuiere şi de uscare definitivă).

Pielea se fixează de lanţul de transmisie prin intermediul unor clame speciale, fiind supusă astfel la diferite deformaţii datorită cărora necesită o tratare specială prealabilă a ei.

După trecerea în revistă a avantajelor, se subliniază că agregatul este elaborat în Institutul de cercetări pentru industria pielii din R.S.S. Ucraina şi urmează să fie instalat într-una din fabricile de piele din republică.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Vedere generală a agregatului pentru prelucrarea dinamică a pielii.
Fig. 2. — Clamă cu arc cu deschidere înăuntru.
Fig. 3. — Schema secţiunii transversale a agregatului.
Fig. 4. — Amplasarea generală a agregatului.
Fig. 5. — Schema extensiunilor transversale pentru uscarea pielii de box.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 1—2, 1952

Ştiinţe economice

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 1—2, 1962

Экономические науки

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 1—2, 1962

Economic

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 1–2, 1962

C. Z. 33 (D)

POLITICA P. M. R. DE CREARE ŞI DEZVOLTARE A BAZEI ECONOMICE A SOCIALISMULUI ÎN R. P. R.

DE

P. MÎLCOMETE, C. NICOLICIOIU, I. MATEI, MIRCEA BOŢA, I. ADUMITRĂCESEI
GEORGETA MACARIE, MARIA POPA, ISPAS MOŢIU şi G. MEDRIHAN

Extras din comunicarea prezentată în sesiunea ştiinţifică festivă consacrată aniversării a 40 de ani de la înfiinţarea P. C. R., Iaşi, 4 mai 1961

1. Făcînd o analiză ştiinţifică, marxist-leninistă, a profundelor transformări social-economice care au avut loc în ţara noastră, Congresul al III-lea al P.M.R. a consfinţit măreaţa victorie obţinută de harnicul şi talentatul nostru popor muncitor condus de partid — crearea bazei economice a socialismului în R.P.R. Socialismul, pentru care au luptat şi s-au jertfit cei mai buni fii ai clasei muncitoare şi ai poporului muncitor, a învins în ţara noastră.

Consfinţind victoria socialismului, Congresul al III-lea al partidului a adoptat totodată directivele cu privire la planul de 6 ani şi la schiţa programului economic în perspectivă pe următorii 15 ani, în care sînt cuprinse sarcinile noii etape a dezvoltării ţării noastre pe drumul socialismului, etapa desăvîrşirii construcţiei socialiste şi a trecerii treptate la comunism.

Clasa muncitoare, ţărănimea, intelectualitatea, strîns unite sub gloriosul steag marxist-leninist al încercatului nostru partid, de la înfiinţarea căruia sărbătorim împlinirea a 40 ani, au pornit cu elan patriotic şi puteri înzecite la înfăptuirea măreţelor obiective stabilite de Congres, obţinînd noi victorii în dezvoltarea şi înflorirea patriei noastre socialiste.

2. În elaborarea şi înfăptuirea politicii de construire a socialismului, partidul nostru s-a călăuzit în permanenţă de atotbiruitoarea învăţătură marxist-leninistă, a folosit bogata experienţă a P.C.U.S., a celorlalte partide frăţeşti din ţările socialiste, precum şi propria sa experienţă, aplicînd în mod creator legile generale ale revoluţiei şi construcţiei socialismului, la condiţiile ţării noastre.

În acest sens, Partidul Muncitoresc Romîn a avut în vedere faptul că făurirea relaţiilor de producţie socialiste poate avea loc numai după cucerirea puterii politice de către clasa muncitoare şi instaurarea dictaturii proletariatului, că revoluţia socialistă abia începe prin cucerirea puterii politice de către proletariat, acesta folosind puterea de stat ca instrument principal în instaurarea noii orînduiri socialiste.

În procesul construcţiei socialiste, P.M.R., aplicînd în mod creator planul leninist de construire a socialismului, a promovat permanent o politică ştiinţifică, profund realistă şi continuu ofensivă, ţinînd seama de cerinţele şi posibilităţile obiective de dezvoltare a ţării, ceea ce a determinat înaintarea ţării noastre într-un ritm rapid pe calea socialismului.

Folosind puterea politică în conformitate cu cerinţele legii concordanţei relaţiilor de producţie cu caracterul forţelor de producţie, clasa muncitoare, condusă de partid, a naţionalizat, la 11 iunie 1948, principalele mijloace de producţie industriale, bancare, de asigurări, miniere şi de transporturi, transformîndu-le în proprietate socialistă de stat — ca bun al întregului popor.

A fost lichidată dominaţia economică a burgheziei, posturile de comandă din economie fiind trecute în mîinile clasei muncitoare. Burghezia industrială şi financiară, precum şi marea burghezie comercială, a fost lichidată ca clasă. Astfel a fost creat în economia ţării noastre sectorul socialist, în cadrul căruia şi-au pierdut puterea de acţiune legile economice ale capitalismului şi au început să acţioneze legile economice ale socialismului. Datorită rolului conducător al sectorului socialist, în economia naţională, ca urmare a caracterului relaţiilor de producţie socialiste în cadrul acestuia şi a faptului că sectorul socialist deţinea posturile de comandă în economie, au fost create condiţiile pentru conducerea planificată a economiei naţionale, pentru folosirea conştientă a legilor economice, în scopul extinderii şi dezvoltării continue a relaţiilor de producţie socialiste, pe ansamblul ţării.

Alături de sectorul socialist, creat ca urmare a naţionalizăii principalelor mijloace de produţie, în baza decretului din 11 iunie 1948, în economia ţării mai existau relaţii de producţie vechi. La oraşe existau întreprinderi industriale şi comerciale nenaţionalizate, iar la sate gospodăriile chiaburești. Acestea se bazau pe proprietatea particular-capitalistă asupra mijloacelor de producţie, pe exploatarea muncii salariate şi alcătuiau sectorul privat-capitalist. La oraşe au existat de asemenea numeroase ateliere ale micilor meseriaşi, care deşi bazate pe proprietatea privată asupra mijloacelor de producţie, nu exploatau munca străină, ci îşi desfăşurau activitatea prin munca proprie a micilor producători. Pe de altă parte, în agricultură existau numeroase gospodării ţărăneşti mici şi mijlocii, care de asemenea se întemeiau pe munca proprie a ţăranilor muncitori. Împreună cu atelierele micilor meşteşugari de la oraşe, acestea alcătuiau sectorul micii producţii de mărfuri.

Spre deosebire de sectorul socialist, în sectorul particular-capitalist şi în sectorul micii producţii de mărfuri acţionau legi economice specifice acestor sectoare. Însă existenţa, în cadrul economiei ţării, a mai multor sectoare economice, era o situaţie provizorie, o caracteristică proprie perioadei de trecere de la capitalism la socialism. Pornind de la această structură eterogenă în economie, P.M.R. a elaborat şi promovat cu consecvenţă politica de dezvoltare şi consolidare continuă a sectorului socialist, de atragere a micilor producători de mărfuri, pe baza liberului consimţămînt, pe făgaşul socialismului, şi de îngrădire, eliminare treptată şi apoi lichidare a elementelor capitaliste din economie, în vederea creării bazei economice a socialismului în ţara noastră.

Elaborînd linia generală în politica economică a perioadei de trecere de la capitalism la socialism, P. M. R. a pornit de la teza leninistă cu privire la necesitatea creării bazei tehnice materiale a socialismului, ca factor determinant al tuturor transformărilor economice şi sociale pe drumul construirii noii societăţi.

Încă la Conferinţa Naţională a P. C. R., din octombrie 1945, tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej arăta că [1, p. 62]: „La baza acţiunii de refacere şi reconstruire a ţării, trebuie să stea... refacerea şi dezvoltarea industriei grele.

... O industrie grea, puternică, bazată pe folosirea raţională a bogăţiilor naturale ale ţării şi dezvoltată pe linia nevoilor interne şi a posibilităţilor izvorîte din legături comerciale trainice cu vecinii, constituie pivotul în jurul căruia întreaga economie a ţării se va dezvolta în condiţii noi".

Ca urmare, P.M.R. şi statul nostru democrat popular au înfăptuit cu consecvenţă politica de industrializare socialistă a ţării, dezvoltînd cu precădere industria grea, cu pivotul ei principal — industria constructoare de maşini. Succesele obţinute în procesul industrializării socialiste a ţării, au dus la un puternic avînt al dezvoltării forţelor de producţie şi în consecinţă s-au creat condiţiile necesare pentru lărgirea şi consolidarea permanentă a relaţiilor de producţie socialiste.

Crearea bazei economice a socialismului înseamnă crearea, dezvoltarea şi consolidarea relaţiilor de producţie socialiste nu numai în industrie, ci şi în celelalte ramuri ale economiei naţionale. Printre acestea un loc important îl ocupă agricultura. De aceea, paralel cu lupta pentru industrializarea socialistă a ţării, şi bazîndu-se pe succesele obţinute în crearea bazei tehnice-materiale a socialismului, partidul nostru a dus o muncă susţinută pentru crearea şi dezvoltarea relaţiilor de producţie socialiste şi în agricultură.

În acest sens, Plenara C.C. al P. M. R. din 3...5 martie 1949, analizînd situaţia agriculturii din ţara noastră, aplicînd în mod creator planul cooperatist a lui Lenin şi folosind experienţa istorică a P.C.U.S., a elaborat linia politică generală de transformare socialistă a agriculturii ţării noastre, stabilind formele şi metodele pentru lichidarea înapoierii economice a agriculturii şi ridicarea nivelului de trai al ţărănimii

muncitoare. Plenara a stabilit că singura cale justă pentru asigurarea victoriei socialismului la sate şi a creşterii nivelului de trai al ţărănimii muncitoare, este calea unirii gospodăriilor individuale mici şi mijlocii, pe baza liberului consimţămînt, în gospodării agricole colective.

În opera de construire a bazei economice a socialismului, clasa muncitoare, în alianţă cu ţărănimea muncitoare, sub conducerea P.M.R., a avut de înfruntat nenumărate acţiuni duşmănoase ale elementelor exploatatoare, răsturnate de la putere. De asemenea, P.M.R. a demascat şi zdrobit grupul antipartinic şi antistatal A. Pauker-V. Luca, care a sabotat înfăptuirea liniei politice a partidului, de industrializare socialistă şi de transformare socialistă a agriculturii, frînînd desfăşurarea procesului de creare a bazei economice a socialismului în ţara noastră. Lichidarea la timp de către partid, a grupului antipartinic şi antistatal, a permis traducerea în viaţă cu succes a liniei leniniste de construire a socialismului.

Anii care au trecut de la instaurarea dictaturii proletariatului în ţara noastră au fost anii unor profunde transformări social-economice, ai ofensivei neîntrerupte a socialismului în toate domeniile, ai extinderii şi consolidării relaţiilor de producţie socialiste, ai creşterii puterii economice a ţării şi ridicării bunei stări a oamenilor muncii.

Astfel, ca rezultat al îndeplinirii planurilor de stat pe anii 1949... 1950 şi a planului cincinal pe anii 1951... 1955, poporul nostru muncitor, condus cu înţelepciune de către partid, pe calea construcţiei socialiste, a obţinut succese hotărîtoare în construirea bazei economice a socialismului. Industria socialistă devenise o temelie puternică a dezvoltării întregii economii, iar la sate socialismul cucerise poziţii puternice care deschideau perspectivele înaintării într-un ritm mai accelerat pe calea transformării socialiste a agriculturii. Alături de sectorul socialist, în economia R.P.R. mai existau însă, în perioada respectivă, sectorul micii producţii de mărfuri şi sectorul capitalist privat, ceea ce frîna dezvoltarea forţelor de producţie nu numai în agricultură, ci şi în întreaga economie naţională.

De aceea, Congresul al II-lea al P.M.R. a stabilit că sarcina fundamentală pentru perioada 1956... 1960, o constituie „făurirea economiei socialiste unitare, în care, pe baza dezvoltării continue a industriei socialiste, să se asigure transformarea socialistă a agriculturii, astfel ca în 1960 sectorul socialist în agricultură să fie preponderent, atît ca suprafaţă cît şi ca producţie marfă".

Pe baza sarcinilor trasate de Congresul al II-lea al partidului, oamenii muncii din ţara noastră au obţinut succese de însemnătate istorică în construcţia economiei şi culturii socialiste.

Traducînd în viaţă directivele Congresului partidului, poporul nostru muncitor a muncit cu entuziasm pentru creşterea continuă a forţelor de producţie, lărgirea şi consolidarea relaţiilor de producţie socialiste, dezvoltarea proporţională a economiei naţionale şi ridicarea nivelului de trai material şi cultural al maselor de oameni ai muncii.

Succesele obţinute în dezvoltarea industriei noastre socialiste au dus la obţinerea unei mari victorii a poporului nostru, pe drumul construirii vieţii noi — crearea bazei tehnico-materiale a socialismului în ţara noastră.

Producţia globală industrială a fost în 1960 de 5 ori mai mare decît cea din 1938. Ritmul de creştere a producţiei globale industriale a fost în 1956... 1960 de 10,8%, ceea ce a dus la o creştere continuă a greutăţii specifice a industriei în ansamblul economiei naţionale. Aceste succese au determinat înfăptuirea sarcinilor congresului al II-lea al P.M.R. şi în ceea ce priveşte transformarea socialistă a agriculturii. Ţărănimea muncitoare a păşit ferm pe calea arătată de partid, pe calea agriculturii socialiste. Sarcina trasată de Congresul al II-lea al P.M.R. de a asigura preponderenţa sectorului socialist în agricultură, atît ca suprafaţă cît şi ca producţie marfă, a fost îndeplinită încă la sfîrşitul anului 1959. Cooperativizarea agriculturii a fost în linii generale înfăptuită. Paralel cu lărgirea sectorului socialist în agricultură, a avut loc întărirea continuă economico-organizatorică a tuturor unităţilor agricole socialiste.

Prin înzestrarea agriculturii cu numeroase tractoare şi maşini agricole moderne s-a întărit baza tehnică a agriculturii şi a crescut continuu producţia agricolă. Astfel, producţia agricolă a anului 1960 a asigurat pe deplin necesităţile economiei naţionale, iar contribuţia unităţilor socialiste din agricultură, la formarea fondului central de cereale al statului, a ajuns la peste 85%.

În urma succeselor obţinute în dezvoltarea industriei şi agriculturii noastre socialiste, ca urmare a ofensivei neîntrerupte a socialismului în toate domeniile de acti-

vitate, în ţara noastră au fost create condiţiile pentru desfiinţarea exploatării omului de către om, a lichidării claselor exploatatoare. Astfel, prin aplicarea Decretului Prezidiului Marii Adunări Naţionale a R.P.R. din martie 1959, chiaburimea, ultima clasă exploatatoare din ţara noastră, a fost lichidată. Aceasta a însemnat totodată şi rezolvarea contradicţiei fundamentale a perioadei de trecere, contradicţia dintre socialism şi capitalism. Problema „care pe care" atît la oraşe cît şi la sate, a fost rezolvată definitiv în favoarea socialismului.

Făcînd bilanţul profundelor transformări din economia ţării noastre în anii construcţiei socialismului, în raportul prezentat la Congresul al III-lea al P.M.R. tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej arăta că „în Republica Populară Romînă a fost creată baza economică a socialismului". Socialismul, pentru care au luptat şi s-au jertfit cei mai buni fii ai clasei muncitoare şi ai poporului muncitor, a învins în ţara noastră.

3. Politica P.M.R. de creare a bazei economice a socialismului în ţara noastră, s-a realizat prin dezvoltarea şi consolidarea continuă a relaţiilor socialiste de proprietate, a schimbului socialist de activităţi şi a relaţiilor socialiste de repartiţie.

Pornind de la rolul determinant al relaţiilor de proprietate în cadrul bazei economice a societăţii, P.M.R. a acordat o atenţie principală creării, dezvoltării şi consolidării proprietăţii socialiste asupra mijloacelor de producţie în toate ramurile economiei naţionale. În desfăşurarea acestui proces partidul a aplicat cu consecvenţă teza leninistă cu privire la rolul conducător al proprietăţii de stat - formă superioară a proprietăţii socialiste.

Prin înfăptuirea actului revoluţionar de la 11 iunie 1948 principalele mijloace de producţie din industrie au trecut din mîinile burgheziei în mîinile statului socialist, ca bun al întregului popor. În anii construirii socialismului în ţara noastră, proprietatea socialistă de stat s-a dezvoltat continuu şi rapid, pe baza uriaşelor investiţii efectuate de statul democrat popular, ca urmare a activităţii creatoare desfăşurată de poporul nostru în toate ramurile economiei naţionale. În consecinţă, în perioada 1948...1959 au fost construite peste 200 întreprinderi mari şi moderne, iar circa alte 500 întreprinderi au fost reconstruite, dezvoltate şi reutilate. În acelaşi timp cu sporirea continuă a volumului de investiţii, P.M.R. a asigurat folosirea cît mai eficientă a acestora, prin îmbunătăţirea amplasării întreprinderilor, reducerea preţului de cost, scurtarea duratei de execuţie a lucrărilor.

Dezvoltarea şi consolidarea proprietăţii socialiste de stat în ţara noastră este concretizată în creşterea continuă a fondurilor fixe ale statului. În perioada 1951...1959 fondurile fixe productive au crescut de peste 2,1 ori, iar fondurile fixe neproductive de peste 1,6 ori.

Dezvoltarea impetuoasă a proprietăţii socialiste de stat în cursul procesului de industrializare socialistă a ţării, a asigurat premisele necesare pentru crearea şi dezvoltarea proprietăţii socialist-cooperatiste în agricultură. Prin înfiinţarea şi dezvoltarea S.M.T., P.M.R. a asigurat baza tehnico-materială pentru trecerea de la mica gospodărie ţărănească la marea gospodărie socialistă.

Pe baza înfăptuirii consecvente, de către partidul nostru, a politicii leniniste de transformare socialistă a agriculturii, proprietatea socialist-cooperatistă s-a extins continuu cuprinzînd, în 1960, peste 4/5 din suprafaţa arabilă a ţării şi din numărul familiilor ţărăneşti. Ca urmare, cooperativizarea agriculturii a fost, în linii generale, înfăptuită.

În acelaşi timp cu creşterea avutului obştesc al G.A.C., ca urmare a înfăptuirii procesului de colectivizare, proprietatea socialist-cooperatistă s-a dezvoltat într-o măsură tot mai mare, pe baza muncii depuse de colectivişti. În consecinţă, în perioada 1952...1959, fondul indivizibil al G.A.C. la 100 ha teren agricol, a crescut de 2,2 ori. La aceasta au contribuit atît reţinerile din veniturile băneşti cît şi extinderea reţinerilor din veniturile în natură, la un număr tot mai mare de gospodării colective.

În prezent proprietatea socialistă cuprinde în întregime industria, construcţiile, transporturile, comerţul, sistemul financiar şi de credit, iar în agricultură este dominantă şi în continuă creştere, ceea ce asigură posibilităţi tot mai mari pentru dezvoltarea economiei noastre naţionale.

Pe baza dezvoltării proprietăţii socialiste asupra mijloacelor de producţie, P.M.R. a asigurat extinderea şi consolidarea continuă a schimbului socialist de activităţi în cadrul economiei noastre naţionale, ca parte integrantă a bazei economice a socialismului.

Formarea schimbului socialist de activităţi s-a realizat, în primul rînd, prin înfăptuirea politicii partidului nostru, de dezvoltare a relaţiilor de colaborare şi ajutor

reciproc între clasa muncitoare şi ţărănimea muncitoare. În perioada construirii socialismului, în ţara noastră s-a dezvoltat continuu schimbul de mărfuri dintre industrie şi agricultură. Pe această cale, clasa muncitoare a asigurat aprovizionarea ţărănimii muncitoare cu cantităţi mereu sporite de produse industriale, atît pentru consumul individual cît şi pentru cel productiv, iar ţărănimea a furnizat în schimb produse agroalimentare pentru populaţia de la oraşe şi materii prime pentru industria producătoare de bunuri de consum. Prin înlocuirea sistemului de formare a fondului central de produse agricole pe calea cotelor obligatorii, cu sistemul de contractări şi achiziţii, P.M.R. a asigurat perfecţionarea formelor de desfăşurare a schimbului de mărfuri dintre oraş şi sat, în conformitate cu necesităţile dezvoltării economiei naţionale. Aşezarea relaţiilor economice dintre oraş şi sat pe baze comerciale, a dus la creşterea cointeresării ţărănimii muncitoare în creşterea producţiei agricole, în intensificarea schimbului dintre industrie şi agricultură, în trecerea ei pe calea socialismului. Ca urmare a succeselor obţinute în transformarea socialistă a agriculturii, în anul 1959, sectorul socialist a asigurat peste 3/4 din fondul central al statului la grîu, porumb, floarea soarelui şi circa 90% la sfecla de zahăr. În acelaşi timp cu dezvoltarea schimbului de mărfuri dintre industrie şi agricultură, partidul nostru a asigurat şi dezvoltarea continuă a schimbului socialist de activităţi dintre clasa muncitoare şi ţărănimea muncitoare, sub forma colaborării, direct în procesul de producţie. Această formă de colaborare s-a concretizat în deservirea unităţilor socialist cooperatiste din agricultură, cu tehnica modernă, de către S.M.T. Dezvoltarea schimbului socialist de activităţi între industrie şi agricultură a dus la întărirea continuă a relaţiilor dintre clasa muncitoare şi ţărănimea muncitoare.

P.M.R. a desfăşurat o susţinută activitate în direcţia dezvoltării schimbului socialist de activităţi între întreprinderi precum şi în cadrul fiecărei întreprinderi. Aşadar între întreprinderile noastre socialiste s-au dezvoltat relaţii de colaborare, în vederea aprovizionării tehnico-materiale şi a desfacerii producţiei. De asemenea, s-a extins cooperarea dintre diferite întreprinderi în vederea producerii unor anumite bunuri materiale. Între membrii colectivului fiecărei întreprinderi socialiste s-a dezvoltat şi întărit colaborarea şi ajutorul reciproc, în scopul îndeplinirii cu succes a sarcinilor de plan. Experienţa acumulată de muncitorii fruntaşi este împărtăşită şi celorlalţi muncitori, mai ales pe calea întrecerilor socialiste. În fiecare întreprindere s-a întărit colaborarea dintre colectivul de muncitori şi colectivul tehnico-administrativ, folosindu-se în acest scop contractele colective, consfătuirile de producţie, mişcarea inovatorilor.

Prin dezvoltarea multilaterală a schimbului socialist de activităţi, partidul nostru a asigurat un puternic avînt al economiei naţionale.

În strînsă legătură cu dezvoltarea relaţiilor socialiste de proprietate şi a schimbului socialist de activităţi, P.M.R. a extins aplicarea principiului socialist de repartiţie în toate ramurile economiei naţionale, asigurînd astfel cointeresarea materială a celor ce muncesc, în rezultatele activităţii lor.

În anul 1949, în întreprinderile şi instituţiile de stat a fost introdus sistemul socialist de salarizare, bazat pe cerinţele legii repartiţiei după muncă. O dată cu dezvoltarea sectorului socialist de stat s-a extins şi sfera de aplicare a sistemului socialist de salarizare în cadrul economiei naţionale. În acelaşi timp P.M.R. a îmbunătăţit mereu sistemul de salarizare, în conformitate cu cerinţele dezvoltării economiei naţionale şi ale ridicării nivelului de trai al celor ce muncesc. Măsuri deosebit de importante în această direcţie au fost luate de plenarele C. C. al partidului din decembrie 1956 şi iulie 1959. Ca urmare a majorărilor de salarii efectuate în perioada 1951...1959 salariul mediu, pe economia naţională, a crescut de peste 2,1 ori. În acelaşi timp cu sporirea salariilor, statul nostru a efectuat importante reduceri de preţuri, ceea ce a făcut ca salariul real să crească cu 28%, în perioada 1951...1955 (faţă de 1950) şi cu 33% în perioada 1956...1959 (faţă de 1955).

P.M.R. s-a preocupat şi de aplicarea consecventă a principiului socialist de repartiţie în G.A.C. sub forma repartiţiei după zile muncă. Înfăptuind cu consecvenţă transformarea socialistă a agriculturii, partidul a asigurat extinderea continuă a sferei repartiţiei după muncă la sate. În acelaşi timp, partidul nostru a îndrumat gospodăriile colective să îmbunătăţească sistemul de repartiţie. În această privinţă o importanţă deosebită o are recomandarea de a se acorda avansuri băneşti lunare sau cel puţin trimestriale şi recomandarea cu privire la retribuirea colectiviştilor nu numai după numărul zile-muncă efectuate, ci şi după producţia obţinută. Aplicarea acestor indicaţii

a dus la creşterea cointeresării materiale a colectiviştilor şi la întărirea economico-organizatorică a G.A.C.

Dezvoltarea şi consolidarea relaţiilor de producţie socialiste în economia ţării noastre a asigurat o puternică dezvoltare a forţelor de producţie. „Caracteristic pentru dezvoltarea economiei naţionale în anii puterii populare — sublinia tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej — este linia ei mereu ascendentă, creşterea impetuoasă a forţelor de producţie" [1, p. 14]. Relaţiile de producţie socialiste au permis ţării noastre, mai ales prin proprietatea socialistă, să realizeze progrese uriaşe, atît în privinţa dezvoltării mijloacelor de producţie cît şi în privinţa dezvoltării forţelor de muncă.

Pe baza proprietăţii socialiste, P.M.R. şi statul democrat-popular au înfăptuit o serie de măsuri în vederea valorificării cît mai raţionale a bogăţiilor naturale ale ţării, au asigurat creşterea continuă a volumului de investiţii şi a eficacităţii acestora, în vederea unei dezvoltări rapide a economiei naţionale. Între anii 1950...1959, volumul investiţiilor anuale a crescut de peste 3,1 ori. Proprietatea socialistă a creat condiţii deosebit de favorabile pentru dezvoltarea şi folosirea pe scară largă a ştiinţei şi tehnicii. În perioada 1950...1959 industria noastră a produs peste 500 tipuri de maşini şi instalaţii noi, ceea ce a contribuit la creşterea gradului de mecanizare, automatizare, electrificare şi chimizare a proceselor de producţie în toate ramurile economiei naţionale.

Pe baza extinderii continue a proprietăţii socialiste, P.M.R. a asigurat creşterea continuă a numărului de lucrători ocupaţi în economia naţională. În perioada 1951...1959 numărul salariaţilor din economia ţării noastre a crescut cu 44%, iar cel al muncitorilor cu peste 76%. În acelaşi timp partidul a iniţiat şi înfăptuit un vast program pentru pregătirea de noi cadre şi ridicarea nivelului de calificare a cadrelor existente. Ca urmare, în 1959 peste 3/4 din efectivul clasei muncitoare erau muncitori calificaţi, numărul cadrelor cu pregătire medie era de 220 000, iar cel al inginerilor de 59 000.

Uriaşele posibilităţi create de relaţiile de producţie socialiste pentru dezvoltarea rapidă şi multilaterală a economiei naţionale s-au concretizat în transformarea Romîniei dintr-o ţară agrară înapoiată într-o ţară industrial-agrară, în plină dezvoltare.

Victoria socialismului în ţara noastră a fost asigurată în primul rînd prin existenţa unei călăuze sigure — P.M.R., care a organizat şi condus în mod strălucit procesul de creare a relaţiilor de producţie socialiste în toate ramurile economiei naţionale, pe baza aplicării consecvente şi creatoare a învăţăturii marxist-leniniste. „Creşterea rolului conducător al partidului în toate domeniile activităţii sociale, sublinia tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej, în raportul prezentat la Congresul al III-lea al P.M.R. — întărirea continuă a rîndurilor sale, vasta muncă organizatorică şi politică pe care a desfăşurat-o în masă, au constituit factorul care a dus la obţinerea de către poporul muncitor a victoriei de însemnătate istorică — construirea bazei economice a socialismului în ţara noastră" [2, p. 86].

De asemenea, victoria socialismului în ţara noastră a fost asigurată datorită faptului că statul democrat-popular a îndeplinit cu succes rolul de instrument principal al construcţiei socialiste, prin desfăşurarea unei activităţi economico-organizatorice şi cultural-educative susţinute. Sub îndrumarea partidului nostru a crescut atît competenţa organelor de stat, în conducerea economiei şi culturii, cît şi participarea maselor populare la conducerea treburilor obşteşti.

Victoria socialismului în ţara noastră a fost asigurată prin activitatea creatoare desfăşurată de harnicul şi talentatul nostru popor, prin întărirea continuă a alianţei dintre clasa muncitoare şi ţărănimea muncitoare, a unităţii tuturor oamenilor muncii.

La victoria socialismului în ţara noastră a contribuit solidaritatea de neclintit şi sprijinul multilateral al ţărilor lagărului socialist şi înainte de toate ajutorul frăţesc primit din partea Uniunii Sovietice.

4. Consfinţind faptul că în ţara noastră a fost creată baza economică a socialismului, Congresul al III-lea al P.M.R. a marcat totodată intrarea ţării noastre într-o nouă etapă a dezvoltării sale, etapa desăvîrşirii construirii socialismului.

Sarcinile noii etape sînt cuprinse în prevederile planului de dezvoltare a economiei naţionale pe anii 1960...1965 şi în schiţa planului economic de perspectivă pe 15 ani, dezbătute şi aprobate de Congres. Planul de dezvoltare a economiei noastre naţionale pe anii 1960...1965 reprezintă o etapă hotărîtoare în opera de desăvîrşire a construirii socialismului în R. P. R. „Obiectivul principal al planului economic pe anii 1960...1965 — se precizează în Raportul la Congres — este dezvoltarea bazei tehnice materiale a socialismului, încheierea procesului de făurire a relaţiilor de producţie

socialiste în întreaga economie, în vederea desăvîrşirii construcţiei socialismului" [2, p. 27].

Aceasta înseamnă că, o dată cu dezvoltarea forţelor de producţie ale socialismului, se va încheia procesul de făurire a relaţiilor de producţie socialiste în întreaga economie. Consolidarea şi dezvoltarea mai departe a relaţiilor de producţie socialiste înseamnă în primul rînd dezvoltarea proprietăţii socialiste.

În procesul de dezvoltare a bazei tehnico-materiale a socialismului se va lărgi şi mai mult proprietatea socialistă de stat, va creşte şi se va întări rolul ei conducător în economia noastră naţională.

În anii şesenalului se vor investi în economia naţională, din fondurile statului 170...180 miliarde lei, ceea ce înseamnă aproximativ de două ori mai mult decît în perioada de 6 ani precedentă.

Concomitent cu creşterea numărului de întreprinderi, în cursul planului pe 1960...1965, ca şi a perioadei programului economic de perspectivă, se va intensifica caracterul social al producţiei, va creşte mult nivelul concentrării producţiei.

Paralel cu dezvoltarea proprietăţii socialiste de stat se va lărgi şi consolida şi proprietatea socialistă de grup, ceea ce se va realiza ca urmare a terminării colectivizării agriculturii.

Încheierea procesului de colectivizare se va face atît prin trecerea liber consimţită a ţărănimii muncitoare cu gospodăriile individuale în G.A.C., cît şi prin transformarea întovărăşirilor agricole în G.A.C.. Totodată va avea loc procesul de întărire şi consolidare economico-organizatorică a G.A.C..

În vederea creării unor condiţii mai bune pentru folosirea mai raţională a pămîntului, pentru aplicarea cu eficienţă economică a mijloacelor mecanizate şi pentru dezvoltarea multilaterală a producţiei agricole vegetale şi animale, se desprinde tendinţa G.A.C. mici de a se uni în G.A.C. mai mari. Practica reorganizării, pe bază socialistă, a agriculturii, arată că cele mai bune rezultate economice sînt obţinute de G.A.C. care au o suprafaţă în jurul a 1500...2000 ha, în funcţie de zonele naturale şi economice, de condiţiile locale şi de caracterul producţiei. În cadrul acestor gospodării se realizează o productivitate ridicată la hectar, sporeşte în ritm viu avutul obştesc şi pe baza acestora se asigură creşterea continuă a veniturilor ţăranilor colectivişti.

Tocmai de aceea în raportul prezentat de către tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej la Congresul al III-lea al P. M. R. se subliniază că „Transformarea întovărăşirilor agricole în gospodării colective, unirea gospodăriilor colective mici în gospodării mai mari, întărirea economică organizatorică şi dezvoltarea lor multilaterală, constituie un proces unic neîntrerupt, care consolidează şi lărgeşte relaţiile de producţie socialiste la sate" [2, pp. 49—50].

Trebuie să subliniem rolul doosebit de important pe care-l are proprietatea socialistă de stat în lărgirea şi consolidarea proprietăţii cooperatist-colectiviste. Este suficient să amintim în acest sens că, în perioada şesenalului va spori considerabil sprijinul acordat ţărănimii colectiviste de statul nostru, prin mijloace mocanizate ale S.M.T., cadre de ingineri şi tehnicieni agricoli, prin credite pe termen lung şi fără dobîndă, materiale de construcţii, seminţe selecţionate, material săditor pomiviticol, animale de rasă etc.

În următorii 6 ani se vor investi în economie fonduri care vor depăşi cu circa 40% volumul celor investite în ultimii 10 ani. Investiţiile din fondurile proprii ale G.A.C., ale cooperaţiei meşteşugăreşti şi de consum, se vor ridica, în perioada şesenalului, la peste 11 miliarde lei, fapt care va contribui la creşterea gradului de socializare a proprietăţii cooperatist-colectiviste. Creşterea necontenită a gradului de socializare a producţiei reprezintă o legitate a dezvoltării sectorului socialist-cooperatist.

Pe baza dezvoltării şi consolidării proprietăţii socialiste, în cele două forme ale ei, va avea loc perfecţionarea continuă a multiplelor forme prin care se realizează schimbul de activităţi între oamenii muncii. Se vor îmbunătăţi continuu formele şi metodele de gospodărire şi conducere a producţiei, de organizare mai eficientă a procesului de producţie.

În anii planului şesenal şi a programului de perspectivă se va intensifica şi îmbunătăţi cooperarea între colectivele diferitelor întreprinderi şi ramuri industriale. În această direcţie, de un mare folos este şi va fi organizarea colaborării între întreprinderi pe principiul uzinei coordonatoare, recomandat de Congresul al III-lea al P.M.R.

Înfăptuirea victoriei depline a socialismului şi a trecerii treptate la comunism sînt inseparabil legate de dezvoltarea raporturilor economice dintre oraş şi sat, dintre industrie şi agricultură.

Pe baza creşterii salariului real, pînă în 1965, cu 40...45% faţă de nivelul din a doua jumătate a anului 1959, şi a veniturilor reale ale ţărănimii cu circa 40%, schimbul de mărfuri dintre sat şi oraş se va dezvolta tot mai mult. Spre exemplu, cantitatea de mărfuri pe care o va desface comerţul de stat şi cooperatist va fi în 1965 de 2 ori mai mare faţă de 1959.

În perioada şesenalului, ca urmare a încheierii colectivizării agriculturii, a creşterii gradului de mecanizare a agriculturii, se intensifică colaborarea între clasa muncitoare şi ţărănimea muncitoare, pe linia producţiei, prin intermediul S.M.T. Aşa cum a subliniat tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej „...S.M.T. ale statului se dovedesc a fi o pîrghie puternică în dezvoltarea agriculturii, un preţios sprijin în opera de reorganizare socialistă a satului, de întărire a alianţei între clasa muncitoare şi ţărănimea muncitoare" [1, p. 404].

O largă dezvoltare va cunoaşte colaborarea prietenească, creatoare, între clasa muncitoare şi ţărănimea colectivistă pe de o parte, şi intelectualitatea noastră devotată cauzei socialismului pe de altă parte. Oamenii de ştiinţă sînt chemaţi să aducă contribuţia lor importantă la introducerea tehnicii noi şi la soluţionarea problemelor tehnico-economice pe care le ridică dezvoltarea vertiginoasă a economiei naţionale. Se va adînci mult colaborarea oamenilor de ştiinţă cu lucrătorii din toate ramurile economiei naţionale.

Alături de dezvoltarea şi consolidarea formelor proprietăţii socialiste şi a formelor schimbului reciproc de activităţi, se vor perfecţiona şi relaţiile de repartiţie a produselor după cantitatea şi calitatea muncii. În acest sens Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. arată că: „În toate ramurile economiei naţionale va continua să se aplice cu consecvenţă politica de cointeresare materială a oamenilor muncii, pe baza principiului socialist al repartiţiei după cantitatea şi calitatea muncii depuse [2, p. 685].

În lumina Directivelor Congresului al III-lea, C. C. al P. M. R. şi Consiliul de Miniştri al R.P.R. au adoptat hotărîri de mare însemnătate pentru sporirea cointeresării materiale a muncitorilor, inginerilor şi tehnicienilor în ridicarea calificării lor şi promovarea tehnicii noi.

Hotărîrea cu privire la ridicarea nivelului tehnic al producţiei prevede luarea de măsuri pentru îmbunătăţirea retribuirii muncii personalului din serviciile constructorului şef, tehnologului şef şi metalurgului şef, în aşa fel încît cei mai buni ingineri, economişti şi tehnicieni să fie recrutaţi şi folosiţi în munca de concepţie tehnico-economică. Hotărîrea prevede instituirea fondului de premiere pentru rezultatele obţinute în introducerea tehnicii noi.

Pe aceeaşi linie se înscriu şi măsurile cuprinse în hotărîrea cu privire la pregătirea şi promovarea cadrelor tehnice, economice şi de cercetare ştiinţifică, precum şi la îmbunătăţirea salarizării lor.

În scopul stimulării în mai mare măsură a luptei pentru creşterea producţiei agricole, vegetale şi animale, al îndeplinirii planului de livrări şi reducerii preţurilor, Hotărîrea prevede pentru G.A.S. şi alte unităţi agricole de stat productive (ferme, îngrăşătorii etc.) salarizarea proporţională cu realizarea şi depăşirea planului.

Pentru îmbunătăţirea calităţii muncii S. M. T.-urilor, Plenara C.C. al P. M. R. din 31 octombrie...1 noiembrie 1960, a recomandat ca „la baza veniturilor lucrătorilor din S.M.T., să stea rezultatele obţinute în creşterea producţiei la hectar" [3].

În G.A.C., unde principiul socialist al repartiţiei se înfăptuieşte cu ajutorul zilei muncă, se va întări şi extinde retribuirea muncii atît în raport cu zilele-muncă prestate cît şi cu producţia obţinută de brigăzi şi echipe.

Ca urmare a desăvîrşirii construcţiei socialiste la sate, prin încheierea colectivizării agriculturii, formele de repartiţie a produselor după muncă vor căpăta în ţara noastră o sferă de aplicare atotcuprinzătoare. În stimularea materială a ţăranilor muncitori un rol de seamă îl va avea, în continuare, vînzarea produselor agricole către stat la preţuri remuneratorii, folosindu-se în acest scop sistemul achiziţiilor şi contractărilor. Toate aceste aspecte ale întăririi şi perfecţionării formelor de repartiţie a produselor, în etapa desăvîrşirii construcţiei socialiste în ţara noastră, vor duce la ridicarea nivelului de trai al oamenilor muncii.

Din cele arătate rezultă că pe baza dezvoltării forţelor de producţie, în etapa desăvîrşirii construcţiei socialiste relaţiile de producţie socialiste în ţara noastră se vor extinde şi maturiza continuu.

Proprietatea socialistă, ca bază a noilor relaţii de producţie, va realiza o nouă şi puternică extindere. Va spori conţinutul material, în primul rînd al proprietăţii de stat, care are rolul conducător în întreaga economie. De asemenea, înzestrarea tehnică, crescîndă, a agriculturii asigură premisa materială a încheierii procesului de colectivizare a agriculturii, a consolidării economico-organizatorice a unităţilor agricole socialiste, ceea ce înseamnă atît o lărgire cît şi o dezvoltare a proprietăţii socialiste de grup. Această creştere şi consolidare a proprietăţii socialiste este urmată direct de dezvoltarea celorlalte elemente ale relaţiilor de producţie şi anume, a schimbului de activităţi între membrii societăţii, precum şi a relaţiilor de repartiţie, care vor căpăta o sferă mai largă şi se vor perfecţiona continuu.

5. Dezvoltarea şi consolidarea relaţiilor de producţie socialiste în funcţie de nivelul crescînd al forţelor de producţie determină schimbări şi în domeniul suprastructurii. Astfel, în procesul desăvîrşirii construcţiei socialiste se va întări tot mai mult orînduirea socială şi de stat. Dezvoltarea numerică şi calitativă a clasei muncitoare şi făurirea noii clase a ţărănimii — ţăranimea colectivistă — ca urmare a încheierii procesului de colectivizare a agriculturii, va ridica pe o treaptă mai înaltă alianţa muncitorească-ţărănească, întărind baza socială a puterii noastre de stat. În etapa desăvîrşirii construcţiei socialiste, ca urmare a creşterii activităţii economice şi cultural-educative, sporesc sarcinile statului socialist, se ridică pe o treaptă nouă rolul economic al statului nostru. Are loc o perfecţionare continuă a vieţii de stat socialiste, se dezvoltă continuu democraţia socialistă, se înmulţesc formele şi metodele prin care masele de oameni ai muncii participă la viaţa de stat şi obştească. Creşte rolul opiniei publice socialiste, a formelor obşteşti de influenţare asupra celor ce încalcă normele vieţii sociale.

Avîntul iniţiativei creatoare a oamenilor muncii, atragerea celor mai largi mase la creaţia istorică conştientă în procesul desăvîrşirii construcţiei socialiste, sporeşte rolul şi însemnătatea muncii ideologice, a muncii politico-educative desfăşurate de partid în rîndurile poporului. Rezultă deci că, în etapa desăvîrşirii construcţiei socialiste, creşte rolul conducător al partidului în toate domeniile vieţii sociale, întrucît măreţele sarcini care trebuie înfăptuite cer unitatea de voinţă şi acţiune a întregului popor, profunda cunoaştere a legilor de dezvoltare a societăţii şi o clară perspectivă istorică.

Viaţa, experienţa acumulată de ţările socialiste, experienţa poporului nostru în construirea noii orînduiri, sub conducerea P.M.R., dovedesc valabilitatea generală a învăţăturii marxist-leniniste cu privire la rolul conducător al partidului în condiţiile construirii socialismului şi comunismului.

Tocmai conducerea de către partid a întregii vieţi sociale a permis obţinerea de către poporul nostru muncitor a victoriei de însemnătate istorică — crearea bazei economice a socialismului în ţara noastră — şi a deschis perspectiva luminoasă a desăvîrşirii construcţiei socialismului şi a trecerii treptate la comunism.

De aceea, privind la drumul parcurs, la perspectivele luminoase ce s-au deschis în faţa patriei noastre socialiste, fiecare om al muncii trăieşte, o dată cu sentimentul mîndriei patriotice pentru victoriile obţinute, şi sentimentul recunoştinţei nemărginite faţă de P.M.R., care aplicînd în mod creator măreţele idei ale marxism-leninismului, ne conduce cu înţelepciune pe drumul avîntului economico-cultural şi al creşterii bunăstării poporului nostru muncitor.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de economie politică

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghiu-Dej Gh., *Articole şi cuvîntări*, ed. III, Ed. polit., Buc., 1959.
2. — *Raport la cel de-al III Congres al P.M.R.*, Ed. polit., Buc., 1960.
3. — *Expunere la Plenara C. C. al P.M.R. din 31 octombrie...1 noiembrie 1960*, Ed. polit., Buc., 1960, p. 23.

ПОЛИТИКА РУМЫНСКОЙ РАБОЧЕЙ ПАРТИИ О СОЗДАНИИ И РАЗВИТИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БАЗЫ СОЦИАЛИЗМА В РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКЕ

(Резюже)

В работе представлены основные аспекты борьбы рабочего класса и других трудящихся под руководством Румынской Рабочей Патрии для создания социалистических производственных отношений в нашей стране. Проанализированы вопросы о создании, развитии и укреплении двух форм социалистической собственности (государственной и коллективно-кооперативной), развитие социалистического обмена деятельностями между различными социальными группами в производственном процессе и непрерывное усовершенствование отношений распределения.

На основе документов III-го Съезда Румынской Рабочей Партии, работа излагает аспекты развития и усовершенствовать производственных отношений в процессе завершения строительства социализма.

LA POLITIQUE DU PARTI OUVRIER ROUMAIN DE CRÉATION ET DE DÉVELOPPEMENT DE LA BASE ÉCONOMIQUE DU SOCIALISME DANS LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

(Résumé)

On présente les aspects principaux de la lutte de la classe ouvrière et des autres travailleurs, dirigés par la Parti Oouvrier Roumain, pour la création des rapports de production socialistes dans notre pays. On analyse des problèmes concernant la création, le développement et la consolidation des deux formes de propriété socialiste (d'état et coopératiste-collectiviste), le développement de l'échange socialiste d'activités entre les différents groupes sociaux pendant le processus de production, ainsi que le perfectionnement continuel des rapports des répartition.

Dans la lumière des documents du III-e Congrès du Parti Ouvrier Roumain, le travail présente des aspects du développement des rapports de production dans le processus d'achèvement de l'édification du socialisme.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

RECENZII РЕЦЕНЗИИ
BOOK REVIEWS COMPTES RENDUS
BUCHBESPRECHUNGEN RECENSIONI
ANALISIS DE OBRAS

1. CREANGĂ I., HAIMOVICI C., *Algebră liniară,* Ed. de stat did. şi pedag., Buc., 1962, 308 pp.

Cartea recenzată conţine materialul clasic din algebra liniară, cu completări suplimentare care nu se găsesc în monografiile obişnuite de specialitate.

Este bine cunoscută importanţa problemelor de algebră liniară şi interesul ce-l prezintă pentru celelalte discipline matematice şi pentru fizica matematică.

Lucrarea constituie printre altele şi o pregătire pentru studiul analizei funcţionale şi este indispensabilă în tehnică, unde se folosesc din ce în ce mai mult matricile şi tensorii — formaţii tipice ale algebrei liniare—şi chiar spaţiile abstracte.

Volumul cuprinde următoarele capitole : 1. Noţiuni fundamentale. 2. Spaţii liniare 3. Forme liniare, biliniare şi pătratice în spaţii liniare 4. Operatori liniari. 5. Matrici. 6. Forme normale. 7. Spaţii euclidiene 8. Operatori liniari în spaţiul unitar. 9. Operatori liniari în spaţiul euclidian. 10. Calcularea polinomului caracteristic al unui operator liniar prin metodele din algebra liniară. 11. Introducere în calcul tensorial. 12. Algebre liniare. Noţiuni generale. 13. Algebre liniare. Noţiuni speciale. 14. Reprezentări liniare ale grupurilor.

În cap. 1 se introduc principalele noţiuni asupra mulţimilor definindu-se cele patru structuri algebrice fundamentale: grup, inel, modul, corp, noţiuni care pot fi abordate cu puţine cunoştinţe anterioare dar care presupun o oarecare maturitate ştiinţifică. În cap. 2 se dau proprietăţile obişnuite ale spaţiilor liniare, iar în cap. 3 şi 4 se studiază formele liniare, biliniare, pătratice şi operatorii liniari. Capitolele 5 şi 6 constituie o introducere destul de dezvoltată în teoria matricilor, tratate în strînsă legătură cu spaţiile liniare. Spaţiile euclidiene şi operatorii lor liniari formează conţinutul capitolelor 7, 8, şi 9.

Cap. 10 are într-un anumit sens caracter algoritmic, deoarece trece în revistă cîteva metode de calcul efectiv al polinomului caracteristic al unui operator liniar. Aceste metode nu au devenit inutile prin apariţia maşinilor de calcul, ci dimpotrivă ele fac posibilă calcularea efectivă şi în cazurile mai complicate aşa cum sînt în mod obişnuit exemplele furnizate de practică.

Deosebit de util ni se pare cap. 11 în care tensorii sînt introduşi în mod natural, fiind puşi în legătură cu schimbările de bază dintr-un spaţiu liniar. Cap. 12, consacrat algebrelor liniare, conţine, printre altele, demonstraţia integrală a importantei teoreme a lui Frobenius şi un studiu succint dar suficient al algebrei cuaternionilor, care după cum se ştie are numeroase aplicaţii în mecanică.

Semnalăm de asemenea exemplul 3.4, p. 234, care constituie algebra lui Sobrero, cu numeroase aplicaţii în elasticitate. În cap. 13 se adînceşte studiul algebrelor liniare, iar în cap. 14 se studiază reprezentarea grupurilor prin operatori liniari. Destul de dezvoltat se tratează ca exemplu grupul Lorentz.

Cartea se termină cu o bibliografie de 22 titluri care reprezintă lucrări fundamentale de specialitate, dintre care 4 ale autorilor romîni.

Indicele alfabetic de la sfîrşitul lucrării ajută pe cititor să se orienteze în materialul prezentat, dar credem că ar fi fost utilă o separare a indicelui de nume de indicele de chestiuni.

În ansamblu considerăm că lucrarea recenzată umple un gol în literatura ştiinţifică românească. Ea prezintă multe calităţi didactice avînd la fiecare sfîrşit de capitol exerciţii de exemplificare a teoriei. Cartea poate servi ca introducere şi orientare studenţilor de la universităţi şi institutele politehnice, fiind în acelaşi timp utilă şi specialiştilor din acest domeniu.

*

Les réf. exposent ci-dessus, en langue roumaine, quelques détails concernant le livre de I. Creangă et C. Haimovici intitulé *Algèbre liniaire,* qui contient le matériel classique de l'algèbre liniaire, y compris nombre de problèmes supplémentaires qu'on ne trouve pas dans les monographies usuelles de spécialité.

Ştefania Ruscior, Al. Climescu

2. KUNZI H. P., KRELLE W.. *Nichtlineare Programmierung.* Monographien zur Unternehmensforschung, Bd. I, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962, XIII + 221 S.

Apariţia cu totul recentă a unui număr destul de mare de cărţi consacrate programării liniare a fost urmată anul trecut de apariţia sub forma cristalizată în volume a *teoriei matematice a proceselor optimale,* datorită laureaţilor premiului V. I. Lenin, L. S. Pontriaghin, V. G. Bolteanski, R. V. Gamkrelidze, E. F. Miscenko (Fizmatghiz, Moscova, 1961), iar anul acesta s-au publicat sub formă de primă cristalizare un volum de *programare dinamică* datorită lui R. Bellman şi S. E. Dreyfus *(Applied Dynamic Programming,* Princeton University Press, 1962, 388 pp.) şi volumul recenzat, datorit profesorilor H. P. Künzi şi W. Krelle, consacrat *programării neliniare.*

Aceste volume s-a putut realiza ca urmare a progreselor recente în domeniul ecuaţiilor diferenţiale neliniare şi a contribuţiei esenţiale oferită astăzi de posibilităţile cvasi-nemărginite ale maşinilor matematice (electronice) de calcul.

Majoritatea metodelor de programare neliniară expuse în acest volum, saturat de un număr de exemplificări deosebit de preţioase, datorite în parte cercetătorului ştiinţific W. Oettli, sînt centrate în jurul funcţiilor de optimizat pătratice (cu matrici definite sau semidefinite) şi cu restricţii liniare. Această renunţare voluntară a autorilor de a se opri la alte probleme neliniare ce au apărut în literatura matematică de specialitate apare cu atît mai justificată cu cît în ultimile luni s-au şi publicat numeroase încercări noi, sub formă de articole sau studii, în care se consideră funcţii de optimizat sau condiţii restrictive de natură mult mai generală.

Scopul volumului recenzat este cristalizat în următoarele două direcţii: a) prezentarea unor expuneri sistematice a cîtorva procedee de programare neliniară în vederea posibilităţii de aplicaţii practice nemijlocite; b) punerea în discuţia unor cercuri mai largi de specialişti (matematicieni sau economişti) a diverse alte metode în vederea precizării ulterioare a domeniului de aplicaţie sau a generalităţii ipotezelor de bază a lor.

O atenţie deosebită este acordată seriei de lucrări datorită lui R. A. K. Frisch, J. B. Rosen şi G. Zoutendijk, discutîndu-se în corespondenţă cu acestea din urmă programarea convexă şi pătratică.

Cîte un capitol din volum este consacrat metodelor lui Hildreth şi d'Esopo (cap. V); Theil şi van der Panne (VI); Reale (VII), Wolfe (VIII), Barankin şi Dorfman (IX), Frank şi Wolfe (X), Houthakker (XV).

Atenţia colectivelor largi de cercetători de la noi faţă de acest cerc de probleme aflat într-o strălucită şi impetuoasă dezvoltare reclamată de practică, permite să concludem asupra primirii bune ce se va acorda şi acestui volum, primul din seria de monografii consacrată problemelor de programare, inaugurată de editura Springer.

*

The theory of nonlinear programming, rapidly becoming more widely known and used in various important both technical and econnomical problems in this last years, due especially to the set of research studies by Rosen, Frisch, Zou-

thendijk and others, is in this book presented with competence by professors H. P. Künzi and W. Krelle, with collaboration ofered by W. Oettli.

Rev. gives oven in Roumanian language some details concerning this excellent volume, the first in *Monographs on Operations Research*, initiated by Springer-Editors.

D. Mangeron

3. LIONS J. L, *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. **III**, Springer-Verlag, Berlin-Götingen-Heidelberg, 1961, IX+292 pp.

În ultima decadă atenţia multor matematicieni cu reputaţie mondială în frunte cu acad. M. V. Keldîş, preşedinte al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., L. Gårding şi L. Hörmander, laureaţi al premiului Fields la cele mai recente congrese internaţionale ale matematicienilor, acad. I. N. Vekua, S. Agmon ş. a. a fost îndreptată către adîncirea problemelor de contur pentru ecuaţii diferenţiale autoadjuncte sau nu, de tip eliptic, mergînd în paralel cu cercetările ref., S. Vasilache, L. E. Krivoşein, V. Ia. Bîkov ş. a. relative la noi clase de probleme de contur pentru ecuaţii de tip neeliptic. Aceste cercetări au culminat printr-o serie de probleme consacrate studiului ecuaţiilor diferenţiale abstracte. În această ordine de idei s-a remarcat în deosebi contribuţia autorului volumului recenzat, J. L. Lions, participant activ la recenta serie de colocvii asupra ecuaţiilor cu derivate parţiale, promovate de C.N.R.M. din Belgia, condus de L. Godeaux.

Volumul recenzat are în centrul preocupărilor sale ecuaţii diferenţiale operaţionale (liniare) de forma

$$A(t)u(t) + u'(t) = f(t), \tag{1}$$

în care $A(t)$ este o familie de operatori nebornaţi într-un spaţiu Banach H şi, pentru a fixa ideile, $t \in [0, T]$, funcţia $f(t)$ fiind dată, continuă în $[0, T]$ în H, iar funcţia u admite derivata continuă în $[0, T]$ cu valori în H şi aparţine domeniului lui $A(t)$, $D(A(t))$ pentru fiecare $t \in [0, T]$.

Cele mai importante exemple ce se referă la acest studiu de valoare reflectă cazul în care $A(t)$ este un sistem diferenţial, domeniul lui $A(t)$ fiind fixat în consecinţă prin condiţii la limită.

Ref. subliniază îndeosebi profunda analiză făcută de către autor vastelor clase de *soluţii slabe*, propuse de diferiţi cercetători, referitoare la problema lui Cauchy pentru ecuaţia (1) şi condiţia iniţială $u(0) = u_0$, u_0 fiind dat în $D(A(0))$.

Un capitol (II) a fost consacrat studiului problemelor la limită variaţionale şi expunerii proprietăţilor unor spaţii funcţionale. Ultimul capitol (XII) schiţează posibilitatea de a se trata problemele expuse dintr-un alt punct de vedere decît cel folosit în cap. III ... X, utilizînd în acest scop operatori de transmutaţie. Cartea va interesa în mod deosebit colectivul de cercetători de la noi, aflat în plină înflorire. Merită subliniat şi faptul că în bogata şi într-adevăr bine pusă la punct bibliografie folosită de autor, figurează numeroase lucrări romîneşti, ca de ex., larga serie de lucrări datorite tov. C. Foiaş.

*

Negli ultimi due lustri l'attenzione dei matematici de tra i più noti, come lo sono, ad esempio, l'illustre Presidente dell'Accademia delle Scienze dell'U. R. S. S. M. V. Keldys, L. Gårding, L. Hörmander, laureati del premio Fields agli ultimi congressi internazionali dei matematici, I. N. Vekua, S. Agmon ed altri ancora, era stata diretta verso l'approfondimento dei problemi al contorno non autoaggiunti del tipo ellittico, mentre si è incominciata a svilupparsi, avente all'origine alcuni problemi posti e risoluti dal rif., una vasta serie di problemi al contorno del tipo non ellittico (M. Yu. Berezanski, L. F. Krivošein, S. Vasilache). Queste ricerche culminano tutt'ora con vari studi consacrati alle equazioni differenziali astratti. In questo campo vi è da sottolineare soprattutto il contributo dell'autore del volume qui resocontato, J. L. Lions.

Il ref. da qui sopra in lingua romena alcuni punti salienti di questo volume profondo in contenuto ed eccellente dal punto di vista della tradizionalmente buona veste tipografica dell'editore Springer, centrato intorno alla risoluzione del problema di Cauchy anche nell'ambito delle soluzioni deboli per le equazioni differenziali operazionali (lineari)

di forma (1), ove $A(t)$ è una famiglia de operatori non limitati in uno spazio Banach H, $t \in [0, T]$, $f(t)$ è una funzione data continua per $[0, T]$ in H, mentre la u ammette derivata continua per $[0, T]$ e ne prende valori in H ed appartiene al dominio dell'$A(t)$, $D(A(t))$, per ogni $t \in [0, T]$.

Si sottolinea pure l'utilizzazione del metodo variazionale, il di cui approfondimento è stato brillantemente fatto in questi ultimissimi anni dall'illustre accademico linceo M. P i c o n e, come pure il pregiato sforzo dell'autore di far sì che i capitoli del libro (I...XII) possano essere studiati in maniera quasi independente l'uno dall'altro Una vasta bibliografia, accuratamente rifflettente la contribuzione mondiale nel dominio e la veste eccelente data al volume dall'editore Springer fanno da questo libro un vero e proprio gioiello. *D. Mangeron*

4. KAMKE E., *Differentialgleichungen, Gewöhnliche Differentialgleichungen.* **I**, 4. wesentlich veränderte Auflage, Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe **A.** Bd. **7.**, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1962, XII + 316 S.

Prima ediţie a acestei cărţi a apărut acum 30 de ani. Ca urmare a faptului că toate cele trei ediţii anterioare au fost foarte favorabil primite de critica internaţională, cunoscutul specialist în domeniul ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi cu derivate parţiale prof. dr. E K a m k e [2]) s-a hotărît să aducă acestei ediţii următoare modificări menite a o îmbunătăţi şi mai mult: a) volumul recenzat este consacrat exclusiv ecuaţiilor diferenţiale ordinare, urmînd să apară în curînd şi volumul în care se va expune teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale; b) conţinutul volumului nu se mai mărgineşte exclusiv la domeniul funcţiilor reale; c) capitolele consacrate problemelor fundamentale de contur sînt prezentate mai amplu şi dintr-un punct de vedere mai general, reflectîndu-se astfel rolul pe care-l joacă astfel de probleme în diverse schematizări matematice a fenomenelor fizice şi tehnice moderne.

Ref. subliniază îndeosebi faptul că scopul pe care şi l-a propus autorul este fără îndoială atins. El este reflectat pe tot parcursul cărţii prin prezentarea sistematică a demonstraţiilor riguroase şi, pe de altă parte, prin conducerea cititorului pînă la tratarea numerică, cu aproximaţie dorită, a problemelor abordate. Bineînţeles, dat fiind spaţiul disponibil, autorul s-a mărginit să expună temeinic un număr restrîns de metode de calcul numeric. Trebuie menţionată, în fine, şi excelenta forma exterioară de prezentare a volumului.

*

La prima edizione del libro resocontato è stata pubblicata 30 anni or sono. In seguito al fatto che tutte le tre edizioni precedenti di questo libro, rapidamente esaurite, erano state accolte con molto favore dalla critica matematica internazionale, l'A.ha realizzato un suo antico desiderio, offrendoci all'occasione di questa quarta edizione in questo primo volume soltanto l'esposizione concernente equazioni differenziali ordinarie e lasciando per il secondo volume di prossima pubblicazione l'esposizione della teoria e pratica delle equazioni alle derivate parziali. Il riff. sottolinea alcuni tratti caracteristici di questo pregevole volume nei seguenti punti: a) l'esposizione concernente i equazioni differenziali ordinarie non si limita soltanto al dominio delle funzioni reali; b) lo spazio riservato ai problemi al contorno ed alla teoria degli autovalori è stato accrescito, in corrispondenza con l'importanza vieppiù crescente di tali problemi. La veste esteriore del volume, il settimo della collezione iniziatasi dall'Akademische Gesellschaft Geest et Portig K. G., Leipzig, *Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik,* è tradizionalmente eccellente. *Arsenie Oprea*

5. SIMMONARD M.. *Programmation linéaire,* Dunod, Paris, 1962, XX + 420 pp.

Dezvoltarea extrem de rapidă a tehnicii programării liniare, iniţiată în U. R. S. S. fapt ce nu a fost observat şi menţionat de autor, continuată de diferiţi cercetători ca urmare a lucrărilor lui G. B. D a n t z i g (1947), a prilejuit apariţia cu totul recentă a unor lucrări de sistematizare [2]) şi de cristalizare a rezultatelor obţinute. Cartea re-

[1]) A se vedea numeroasele volume ale autorului traduse în mai multe ediţii în limba rusă.

[2]) A se consulta, de ex., recenta lucrare sovietică: Ю д и н А. Б., Г о л ь ш т е й н Е. Г., *Задачи и методы линейного программирования*, Изд. Сов. Радио, М., 1961, 491 стр.

cenzată este prima de acest gen în limba franceză. Prima parte a volumului (cap. 1...10) este consacrată expunerii metodelor generale, începînd cu metoda simplex, metoda duală simplex, programarea liniară în numere întregi, metoda variabilelor mărginite (Dantzig şi Wolfe). Partea a doua este consacrată structurilor particulare, maximum de atenţie fiind acordat problemei transporturilor şi problemei de distribuţie. Ref. subliniază efortul lăudabil al autorului de a face din volum un manual cît mai independent, prin introducerea în trei apendice a unei prezentări a problemelor fundamentale de algebră liniară, a noţiunilor elementare referitoare la poliedrele convexe şi a definiţiilor relative la teoria grafelor. Ca deficienţă se menţionează lipsa indicaţiilor bibliografice, într-o bibliografie de altfel bogată (169 titluri), relative la larga şi valoroasa contribuţie a oamenilor de ştiinţă sovietici, începînd cu seria lucrărilor prof. dr. L. V. Kantorovici[3]).

*

This clearly written, well-organized book, offers a valuable introduction to linear programming, with emphasis both on the mathematical and practical aspects of the subject. The earlier chapters of the book (1...10) offer an exhaustive treatment of the theoretical foundantions. In the latter part of the book, the author attempts to guide the reader to various applications (transport and distribution problems especially). Geometrical representation is made use of wherever this appears helpful, and an extensive bibliography (169 titles) will assist those who wish to refer to the original sources. Three appendixes are dedicated to an introduction to linear algebra, to an elementary treatise on convex polyeders and to a set of definitions concernend the theory of graphes. As a lack of the author's extensive bibliography rev. remarks the absence of soviet references, beginning with the well known work by L.V. Kantorovici[3]). The printing is pretty and external form is traditionnaly well. *Elena Croitoru*

6. GUIRAUD P., *Problèmes et méthodes de la statistique linguistique,* Synthèse Library, Collection publiée sous la direction de B. H. Kazemier et D. Vouysje, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1959, 145 pp.

Problemele de distribuţie a faptelor de limbă, îndeajuns de vechi în istoria ştiinţei, au atras atenţia deosebită a cercetătorilor de diferite specialităţi o dată cu crearea maşinilor matematice de calcul. Volumul recenzat nu este propriu-zis un manual de statistică lingvistică. Autorul nu şi-a propus decît să regrupeze un număr de probleme particulare din domeniul lingvisticii şi a căutat să le rezolve, adesea cu fineţe şi ingeniozitate, prin metoda statistică. Prima parte a cărţii este destinată expunerii metodelor de statistică lingvistică, indicîndu-i-se postulatele şi limitele în care această metodă s-a dovedit a fi eficace. Aici se expune şi problematica statisticii lingvistice, ca de exemplu, caracterologia limbajului, problema raportului între frecvenţă şi structura fonică, a raportului între frecvenţă şi forma fonică, între frecvenţă şi vîrstă, între frecvenţă şi etimologie, între frecvenţă şi extensiune semantică etc. Partea a doua a cărţii este consacrată diferitelor probleme particulare, dintre care menţionăm acelea relative la limbaj şi informaţie şi la legătura dintre ecuaţia lui Estoup-Zipf şi caracterele statistice ale vocabularului. Apariţia unor studii ca prezentul volum este utilă astăzi, cînd, de exemplu, filiala din Novosibirsk a Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. întreprinde cu succes problema descifrării diferitelor scrieri antice folosind cu acest prilej puternicul aparat matematic de investigaţie ştiinţifică şi acel al maşinilor matematice (electronice) de calcul.

*

On souligne ci-dessus, tout en utilisant les considérations exposées par l'A. dans son avant-propos, quelques détails concernant ce livre consacré à l'étude d'un nombre de problèmes de la statistique linguistique, dont l'intérêt en est augmenté aujourd'hui par les possibilités toujours croissantes des machines mathématiques modernes de calcul. *Vladimir Scuirevici, Lidia Lupaşcu*

7. MESSIAH A., *Mécanique quantique,* vol. **I**, Dunod, Paris, 1962, 430 pp.

Acest volum elaborat de prof. A. Messiah, fără a pretinde — după cum previne însuşi autorul în prefaţa cărţii — a reflecta bogata bibliografie actuală în domeniu, iniţiază cititorul în principiile şi în formalismul mecanicii cuantice, fiind

[3]) Канторович Л. В., *Математические методы в организации и планировании производства,* Изд. ЛГУ, Л., 1939, 67 стр.

consacrat apoi metodelor şi aplicaţiilor teoriei expuse. Prima parte a lucrării prezintă, fără a face apel la noţiuni matematice prea abstracte, conţinutul fizic al mecanicii cuantice, fiind subdivizată în următoarele capitole: 1. Originile teoriei cuantice; 2. Unde de materie şi ecuaţia lui Schrödinger; 3. Sisteme cuantice cu o dimensiune; 4. Interpretarea statistică a dualităţii undă-corpuscul şi relaţii de incertitudine; 5. Dezvoltarea formalismului mecanicii ondulatorii şi interpretarea sa; 6. Aproximaţia clasică şi metodalui Brillouin, Kramers, Wentzel (BKW); 7. Formalismul general al teoriei cuantice. Cadrul matematic; 7. Descrierea fenomenelor fizice. Partea a doua cu care se termină acest volum (următoarele trei părţi sînt incluse în volumul al doilea, apărut în aceeaşi editură în 1960) este consacrată sistemelor fizice elementare.

Din deficienţele cărţii, aşa cum se întîmplă cu cea mai mare parte a lucrărilor în acest domeniu apărute în occident, ref. nu poate fi de acord cu unele lipsuri legate de fundamentarea fizică a mecanicii cuantice. În legătură cu aceasta se recomandă cititorului parcurgerea lucrărilor lui Bohr *Convorbiri cu Einstein* şi *Fizica cuantică şi Filozofia*, apărute în Успехи физических наук, 1958, **66**, p. 571 şi respectiv 1959, **67**, p. 37.

*

L'ouvrage du professeur A. Messiah, issu d'un cours professé au Centre d'Études nucléaires de Saclay et présenté en deux tomes, répond aux besoins d'une exposition simple et pourtant moderne de la mécanique quantique. En utilisant des notions mathématiques et physiques classiques, le lecteur est progressivement initié aux principes du formalisme de la théorie quantique, puis aux méthodes et aux applications qui en sont faites, la mécanique quantique étant exposée sous sa forme moderne, si concise et si claire. Afin que le lecteur puisse compléter la suite des données concernant les fondements physiques de la mécanique quantique, le réf. lui recommande la lecture des travaux de Bohr *Discussions avec Einstein* (УФН, 1958, **66**, p. 571) et *La physique quantique et la philosophie* (УФН, 1959, **67**, p. 37). L'exposé est précédé d'un chapitre d'introduction au calcul matriciel, à l'espace de Hilbert et aux notations de Dirac. Un certain nombre de tables et de formules d'usage courant sont doneées en appendice, ainsi qu'un résumé de la théorie des distributions et de la fonction δ.

C. Ruscior

8. ROSSEL J., *Physique générale*, Bibliothèque Scientifique, *36*, Éditions Du Griffon, Neuchâtel; Diffusion Dunod, Paris, 1960, 486 pp.

Autorul a căutat să cuprindă în acest volum ansamblul capitolelor esenţiale dintr-un curs de fizică generală, asigurînd adîncirea şi însuşirea cunoştinţelor printr-o serie de exerciţii şi probleme gradate expuse la finele copitolelor mai mari. Volumul începe cu o trecere în revistă a metodelor şi teoremelor de matematică folosite curent pe parcurs (pp. 9–28). Prima parte a volumului este centrată în jurul marilor legi ale conservării. Urmează apoi o expunere semicantitativă relativă la datele actuale asupra proprietăţilor particulelor elementare care constituie obiectele materiale ale realităţii obiective: atomi, molecule şi cristale, gaze, lichide, solide...

Următoarele patru părţi sînt consacrate respectiv mecanicii, fenomenelor ondulatorii, căldurii şi termodinamicii, electricităţii şi atomisticii. În ultima parte a cărţii se dau precizări noi, de natură cantitativă, asupra diferitelor domenii mai importante de fizică atomică, făcîndu-se astfel legătura indispensabilă cu cursurile de fizică din anii superiori de studiu. La finele volumului se indică bibliografia recomandată studenţilor interesaţi să aprofundeze domeniile expuse şi se reproduc tabele de unităţi mecanice şi electrice şi de constante fizice fundamentale (pp. 478–479).

Prezentarea exterioară a volumului şi execuţia figurilor sînt ireproşabile.

*

L'A., nell'intento di far colmare un vuoto risentito nella letteratura fisica di specialità in lingua francese, espone in questo libro i capitoli fondamentali di fisica generale, offrendoci una presentazione ben chiara e di un livello scientifico aseguato.

Dopo aver esposto l'elenco delle formule e dei teoremi incessantemente utilizzati nel testo (pp. 9–28), si passa — centrandosi sui teoremi di conservazione — ad una esposizione semiquantitativa delle proprietà delle particole elementari che ne constituiscono l'oggetto della realità obbiettiva.

i Le quattro parti seguenti sono consacrate rispettivamente ad una succinta presentazione dei domini della meccanica teoretica, dei fenomeni ondulatori, del calore e

della termodinamica, dell'elettricità ed atomistica. Nell'ultimo capitole della quinta parte l'A. ritorna sui problemi di fisica atomica dal punto di vista più quantitativo, preparando in tal modo il lettore (i studenti) all'approfondimento del corso di fisica nel corso degli anni superiori di studio, in conformità con i programmi colà tuttora vigenti. Il rif. sottolinea anche il fatto che ogni capitolo si chiude con un numero di esempi e problemi atti di suscitare l'interese per la fisica odierna. La forma esterioare del volume è impeccabile . *N. Calinicenco*

9. KUHN H. G., *Atomic Spectra*, Longmans, London; British Council, London 1962, 436 pp.

Întrucît ideile noastre relative la structura materiei şi la legile fundamentale ale fizicii s-au dezvoltat în bună parte bazîndu-se pe studiul spectrelor atomice, pentru care există în anii din urmă o bogată literatură în U.R.S.S (a se vedea cunoscutele volume datorite prof. B. I. Stepanov; M. V. Volkenstein ş. a., larg folosite pentru elaborarea teoriei vibraţiilor moleculelor poliatomice de D. Mangeron în volumul *Fundamentele Mecanicii*, apărut cu totul recent în Editura Academiei R.P.R.), S.U.A. (a se vedea cunoscutele volume ale lui G. Herzberg, traduse şi în limba română), ş. a., problema spectrelor atomice constituie subiectul unei părţi importante din orice curs de fizică atomică. Acest volum, ţinînd cont de numeroase rezultate la zi obţinute în domeniu, descrie cele mai importante fapte relative la spectrele atomice, începînd cu razele infra-roşii şi terminînd cu razele X, folosind aparatul matematic şi mecanic modern cristalizat în teoria lui Bohr-Sommerfeld şi mecanica cuantică. Volumul stabileşte o legătură strînsă între formalismul mecanicii cuantice şi cel al fizicii clasice permiţînd să se facă o apropiere concretă între materialul mai vechi, care a putut rămîne în picioare, şi teorii cu totul noi în acest domeniu. Ref. subliniază prezenţa şi folosirea efectivă a unei bogate bibliografii, în care —spre deosebire de unele cărţi din occident— este larg reprezentată bogata literatură ştiinţifică sovietică de specialitate.

*

Because our ideas of the structure of matter and the fundamental laws of physics have been developed largely from the study of atomic spectra (see the well known volumes in the domain by B. I. Stepanov, M. V. Volkenstein, G. Herzberg and others), the subject forms an important part of every course of atomic physics. An up-to-date textbook on this subject has been needed for some time. In this book Prof. Kuhn, F.R.S., describes the main facts of atomic spectra, from infra-red to X-rays, and provides interpretation by means of Bohr-Sommerfeld's theory and quantum mechanics. He stresses the close connection of the quantum-mechanical formalism with classical physics and with the older form of quantum theory in order to furnish a concrete approach to the modern theories. For the benefit of those engaged in research, the author indicates many recent developments and gives numerous references without omitting important Soviet scientists's research. Bibliography, Author Index and Subject Index an Appendix confirm the higt value of this textbook. *M. Şchiopu*

10. *** *Problems on continuum Mechanics.* Contributions in honor of the seventh Birthday of Academician N. I. Muskhelishvili. Society for industrial and applied Mathematics. Philadelphia, Penna, 1961, XX + 601 pp.

Şaptezeci şi cinci de oameni de ştiinţă din nouă ţări: U. R. S. S., R. P. Chineză. R. P. Polonă, India, Italia, Marea Britanie, Olanda, S. U. A. şi Suedia au oferit un număr de rezultate cristalizate în cercetările lor recente, sub formă de note sau lucrări originale, în vederea înserării lor în acest volum, tipărit cu ocazia sărbătoririi aniversării a 70 de ani de la naşterea celebrului mecanician sovietic acad. N. I. Mushelişvili, preşedinte al Academiei de Ştiinţe a R. S. S. Gruzia. În imposibilitatea de a trece în revistă aici din punct de vedere critic vastul ansamblu al lucrărilor incluse în volum, de înaltă valoare tehnico-ştiinţifică, subliniem doar că tematica lucrărilor include teoria elasticităţii şi plasticităţii, studiul plăcilor subţiri, termoelasticitate, teoria cuantică a cîmpului, scurgeri vîscoase, vîsco-elasticitate, mecanica solului, reologia, probleme de contur şi probleme de valori proprii precum şi unele studii

relative la ecuaţii integrale singulare. Publicarea simultană, prevăzută pentru data naşterii acad. Mushelişvili (16 februarie 1961), a volumului în limbile rusă şi engleză, datorită colaborării între Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. şi Societatea pentru matematică industrială şi aplicată din S. U. A., a făcut ca ansamblul de importante lucrări înserate în acest preţios volum să fie pus la dispoziţia cercetătorilor de pretutindeni.

★

Fifty-seven scientists from nine countries circling the northern hemisphere: U. S. S. R., P. R. China, P. R. Poland, Great Britain, Holland, India, Italy, Sweden and the United States, have contributed the papers collected in this anniversary volume to honor their illustrious colleague, Academician N. I. Muskhelishvili on his seventieth birthday [4]). These papers, representing recent work by their respective authors, form a cross-section on contemporary activity in continuum mechanics and related mathematical techniques. Included in the volume are the articles on elasticity, plasticity, shells, thermo-elasticity, quantum field theory, viscous flow, visco-elasticity, soil mechanics, creep and crack formation, as well as boundary value problems and eigenvalue problems, and singular integral equations.

The publication of English an Russian editions of this book on February 16, 1961, in the result of collaborative publication effort between the Academy of Sciences of the U. S. S. R. and the Society for Industrial and Applied Mathematics in the United States, and it introduces the concept of simultaneous bilingual publication on important and timely research.

Contributions to this memorial volume are N. Kh. Arutiunian, G. I, Barenblatt, N. N. Bogoliubov, V. V. Bolotin, Chen Lin-si, K. F. Chernykh, G. Colonnetti, I. I. Daniliuk, G. Iu. Dzhanelidze, F. G. Gakhov, A. L. Gol'denveizer, A. E. Green, R. Hill, P. G. Hodge, N. J. Hoff, D. D. Ivlev, L. M. Kachanov, A I. Kalandiia, S. Kaliski, W. T. Koiter, M. Ia. Leonov, A. I. Lurie, M. M. Manukian, B. V. Medvedev, G.K. Mikhailov, R. D. Mindlin, W. Nowacki, F. K. G. Odqvist, W. Olszak, W. Pogorzelski, W. Prager, G. N. Pykhteev, J. R. M. Radok, E. Reissner, G. N. Savin, B. R. Seth, G. S. Shapiro, M. P. Sheremet'ev, D. I Sherman, I. Ia. Shtaerman, N. Iu. Shvaiko, A. L. Siniavskii, M. G. Slobodianskii, V. I. Smirnov, I. N. Sneddon, V. V. Sokolovskii, L. N. Sretenskii, R. J. Tait, A. N. Tavkhelidze, G. I. Taylor, C. A. Truesdell, H. N. Tsien, Du Ching-hua, D. V. Vainberg, I. N. Vekua, N. P. Vekua and S. Zahorski. *D. Mangeron*

11. BIRD R. B., STEWART W. E., LIGHTFOOT E. N., *Transport Phenomena* John Wiley et Sons, London, N. Y., 1960, 780 pp.

Volumul constituie o introducere în domeniul problemelor legate de transportul de substanţă. Cele 22 capitole ale cărţii sînt consacrate unei tratări paralele sistematice a următoarelor trei procese de transport: transport de momente (scurgere a fluidelor vîscoase), transport de energie (propagare a căldurii) şi transport de masă (scurgere a diverselor amestecuri chimice). Expunerea este condusă treptat pînă la introducerea metodelor generale de folosire a ecuaţiilor de schimb de substanţă sau a ecuaţiilor de conservare. Aceste ecuaţii sînt folosite apoi în vederea obţinerii diferitelor rezultate interesînd cercetătorii şi inginerii, ca de exemplu determinări de viteze, de temperaturi, de profile de concentraţie ş. a. Ref. subliniază îndeosebi grupul de probleme consacrate teoriei stratului limită în fenomene de transport a substanţei, probleme de transport în sistemele turbulente ş. a. Unele probleme au căpătat în acest volum, pentru prima oară în literatura din occident, o prezentare interesînd nemijlocit procesul de învăţămînt. Astfel figurează, de exemplu, probleme de difuzie în asociaţie cu reacţii chimice ; difuzie în cazul mai multor componente: dinamica fluidelor nenewtoniene ; efecte de disipare a căldurii în cazul fluidelor vîscoase. Trebuie menţionată ca latură pozitivă şi folosirea la finele fiecărui capitol a seriilor de indicaţii asupra literaturii de specialitate din domeniul respectiv, reflectată în diferite reviste, menţio-

[4]) The rev. remembers with profound emotion the unforgettable rencounters with Academician N. I. Muskhelishvili during the Scientific Jubilee Session (fourthieth anniversary) of the reunited U. S. S. R., Gruz. S. S. R., Arm. S. S. R. and Azerb. S. S. R. Academies of Sciences (Tbilisi, December 3-5, 1961).

nîndu-se cu acest prilej numeroase contribuţii sovietice în domeniu. Un vast indice de materii şi indice de nume, precum şi trei apendice consacrate unor probleme moderne de matematică şi mecanică (unele aspecte de calcul tensorial ş. a.)—atît de indispensabilă astăzi viitorilor ingineri chimişti — ridică valoarea didactică a acestui volum.

*

In *Transport Phenomena* the authors give a parallel, systematic treatment of the three transport processes: momentum transport (flow of viscous fluids), energy transport (flow of heat), and mass transport (flow of chemical species in mixtures). In each of these three cases the beginner is introduced to problem-solving via simple „shell balances", which put the emphasis on the physical processes occuring. Then the more general methods using „equations of change" or „conservation equations" are introduced. These equations are then used to obtain all sorts of results of value to applied scientists and engineers: description of velocity, temperature, and concentration profiles. Rev. underlines the topics devoted to boundary-layer theory of transport phenomena, diffusion with chemical reaction, multicomponent diffusion, non-Newtonian fluid dynamics, viscous dissipation heat effects a. s. on. Large Subject- and Author Indexes, various examples, problems and questions for discussion confirm the hight value of this book. *C. Calistru*

12. GÜNTHER R., *Knitterechtmachen in Rezeptform,* Lapp - Verlag, München-Gladbach, 1959.

Autorul şi-a propus să redea într-o formă succintă—aceea a reţetelor de lucru—procedeele folosite în finisarea superioară a ţesăturilor, în vederea reducerii şifonabilităţii.

Sînt arătate procedeele pentru obţinerea de ţesături neşifonabile pe căi fizico-mecanice, prin înglobarea de răşini sintetice în fibre, prin modificarea chimică a fibrei. Se acordă atenţia necesară procedeelor celor mai noi în vederea obţinerii efectului de neşifonare şi în stare udă. Partea finală este consacrată metodelor de încercare a efectului de neşifonare. Lucrarea este utilă atît practicienilor cît şi oamenilor de ştiinţă, prin bogatul material practic pe care îl conţine.

*

Der Verfasser hat sich vorgenommen in einer kurzgefassten Form—die Rezeptform—die in der Hochveredlung der Textilien angewandten Verfahren zwecks Knittervermin-derung zu beschreiben.

Es werden die Verfahren für das Knitterechtmachen der Gewebe auf physisch-mechanischer Weise, durch Einlagern von Kunstharzen in die Faser, durch chemische Veränderung der Faser beschrieben. Es wird besondere Aufmerksamkeit den neuesten Verfahren zwecks Nassknitterechtmachen geschenkt.

Der letzte Abschnitt ist den Prüfmethoden der Knitterechtheit gewidmet. Die Arbeit ist sowohl für den Praktiker als auch für den Wissenschaftler nützlich, dank des wertvollen praktischen Materials das sie enthält. *M. Grindea*

13. NASLIN P., *Les régimes variables dans les systèmes linéaires et non linéaires,* Dunod, Paris, 1962, XVI + 524 pp.

Dezvoltarea rapidă a automaticii aplicate a contribuit la o largă difuzare a metodelor analitice, grafice şi numerice, menite a analiza comportarea dinamică a sistemelor liniare şi neliniare.

Scopul lucrării recenzate este acel de a prezenta un ansamblu de metode practice folosite în analiza sistemelor dinamice, indiferent de natura lor fizică. Ref. menţionează efortul autorului de a se folosi cît mai mult de consideraţii intuitive, fapt care permite ca volumul elaborat să poată fi cercetat de un vast cerc de tehnicieni şi ingineri. Regimurile tranzitorii utilizează în afară de calculul simbolic şi variate metode numerice şi grafice. Autorul acordă o mare importanţă studiului relaţiilor ce interced între regimurile tranzitorii şi regimul permanent armonic. Partea a doua a cărţii (cap. 8 şi 9) este consacrată studiului filtrelor neliniare, expunîndu-se în această ordine de idei unele metode topologice.

Volumul se încheie cu trei anexe consacrate respectiv expunerii pe scurt a metodei lui Graeffe relativă la rezolvarea ecuaţiilor algebrice ; seriilor şi integralelor lui Fourier : transformării lui Laplace şi calculului operaţional.

Bibliografia indicată este restrînsă, unele trimiteri fiind făcute la subsolul paginilor şi alte cîteva, aranjate pe teme, sînt date la finele cărţii. Acestea din urmă răspund la subdiviziunile : Teoria sistemelor liniare în general ; Teoria grafelor şi analiza proceselor ; Calculul simbolic ; Teoria servomecanismelor ; Sistemele neliniare. Volumul se termină cu un îngrijit indice alfabetic.

*

Автор отвечает цели изложить ансамбль практических методов используемых при анализе динамических, как линейных так и нелинейных систем. Использование физической наглядности позволяет автору избежать насыщенности текста математическими формулами, что делает книгу доступной большому кругу инженеров и техников. Вторая часть книги посвящена исследованию нелинейных фильтров, причем привлекается к изложению ряд топологических методов. Приложения к тому трактуют о методе Греффе решения алгебраических уравнений, о рядах и интегралах Фурье, о преобразование Лапласа и операционном исчислении.

Библиография — небольшая — приводится в сносках, а в конце книги даются некоторые тематические краткие библиографические указания, как напр. книги по теории графов, по символическому исчислению и др. *Gh. Vasiliu*

14. ГЕРОНИМУС Я. Л., *Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов,* Физматгиз, М., 1962, 399 стр.

Dezvoltarea impetuoasă a construcţiei automatelor şi aparaturii din ce în ce mai complexe şi variate, necesare diferitelor ramuri ale tehnicii şi industriei, paralel cu interesul crescînd al cercetătorilor faţă de teoria mecanismelor şi maşinilor, a contribuit şi contribuie din plin la lărgirea şi adîncirea neîncetată a domeniului consacrat sintezei mecanismelor, jalonat strălucit de I. I. Artobolevski, R. Beyer, Z. S. Bloh, S. A. Cerkudinov, V. V. Dobrovolski, Ia. L. Geronimus, N. I. Levitski, W. Lichtenheldt, K. Rauh, S. V. Veahirev ş. a.

Autorul, luînd ca punct de plecare ansamblul cunoştinţelor pe care le capătă inginerul în institutele tehnice de învăţămînt superior în domeniul analizei matematice, geometriei, cinematicii şi cinematicii mecanismelor, elaborează sistematic aparatul geometric ce se aplică la rezolvarea problemelor de sinteză a mecanismelor prin metode geometrice, ilustrînd totodată prin numeroase exemple de seamă posibilităţile concrete de aplicare a lor.

Ref. subliniază meritul deosebit al prof. Gheronimus, care constă în : a) înarmarea cercetătorilor şi inginerilor proiectanţi, cu puternice metode geometrice de investigaţie ştiinţifică : b) evitarea „reţetelor", practicate în unele cărţi similare anterioare; c) umplerea unui gol ce se resimte în programele de învăţămînt ingineresc în domeniul geometriei ; d) punerea în valoare a unui adevărat tezaur de procedee şi idei de natură geometrică, închise în şiragul de lucrări clasice ale lui A. P. Kotelnikov şi L. Burmester.

Menţionînd îndeosebi interesul problemelor relative la transformarea strofoidei în cerc, involuţia punctelor imagine de pe cerc ş. a. şi aplicarea lor la rezolvarea problemelor concrete de sinteză a mecanismelor (de ex., a problemei lui W. Lichtenheldt), reproducem aici din bogatul material al cărţii — care nu va întîrzia să fie tradusă în alte limbi, aşa cum s-a întîmplat şi cu alte lucrări recente ale autorului, recenzate în paginile acestui *Buletin* — următoarele probleme :

Şiruri de puncte şi fascicule de drepte ; construirea formelor geometrice de ordine superioare ; transformări geometrice ; metodele constructive ale geometriei proiective ; unele proprietăţi ale curbelor ciclice de ordinul al treilea, în particular curba lui Burmester şi metoda lui A. P. Kotelnikov; problema contactului curbelor plane ; două şi trei poziţii infinit vecine ale planului mobil; patru poziţii infinit vecine ale planului mobil; cinci poziţii infinit vecine ale planului mobil; şase poziţii infinit vecine ale planului mobil ; poziţii vecine ale planului mobil.

Consultarea şi studiul acestei opere deosebit de preţioase în domeniul sintezei mecanismelor, caracterizată prin aplicarea sistematică a metodelor geometrice, este mult uşurată prin prezentarea literaturii atît în ordine alfabetică cît şi topografică şi prin elaborarea îngrijită a indicilor de nume şi de materii înserate la finele volumului.

*

Lo sviluppo odierno della costruzione degli automati e degli apparecchi vieppiù complessi e variati utilizzati nella tecnica ed industria moderna, parallelamente all'interesse degli scienziati diretto verso lo studio della teoria dei meccanismi e macchine, contribuiscono possentemente all'allargamento ed all'approfondimento del dominio della scienza consacrato alla sintesi dei meccanismi, brillantemente rappresentato dall'I. I. Artobolevski, R. Beyer, Z. S. Bloch, S. A. Cerkudinov, V. V. Dobrovolski, Ia. L. Geronimus, N. I. Levitski, W. Lichtenheldt, K. Rauh, S. V. Veahirev ad altri ancora.

L'A., prendendo le mosse dall'insieme delle conoscenze che ne conseguisce l'ingegnere negli istituti politecnici nel dominio dell'Analisi matematica, della Geometria, della Cinematica e della Cinematica dei meccanismi, espone sistematicamente in questo volume i metodi geometrici possenti, che ne hanno la sua origine nei classici lavori di A. P. Kotelnikov ed i L. Burmester, che si applicano poi col successo alla risoluzione dei problemi di sintesi dei meccanismi.

Il rif., pur sottolineando la necessità di far tradurre anche questo eccelente e profondo volume dell A. insigne in altre lingue, riproduce qui sopra in lingua romena alcuni dettagli concernenti il suo contenuto. *D. Mangeron*

15. БАТЬ М. И., ДЖАНЕЛИДЗЕ Г. Ю., КЕЛЬЗОН А. С., *Теоретическая механика в примерах и задачах*, **II**, *Динамика*, ред. Г. Ю. Джанелидзе, Физматгиз, М., 1961 г., 616 стр.

Acest al doilea volum de *Mecanică teoretică ilustrată prin probleme şi exerciţii* este consacrat celui mai important capitol de mecanică şi anume dinamicii. Întrucît rezolvarea problemelor concrete de dinamică este adesea legată de dificultăţi pe care le întîmpină cercetătorul în ceea ce priveşte alegerea legilor şi teoremelor a căror aplicare este cea mai potrivită pentru problema dată, volumul conţine un capitol (cap. XI) redactat în mod special în vederea trecerii în revistă a metodelor de rezolvare a problemelor de dinamică.

Ref. subliniază în mod deosebit remarcabilul efort de sistematizare întreprins de autorii volumului cu ocazia acestei elaborări. În concordanţă cu procedeul utilizat şi în volumul precedent, fiecare subdiviziune sau paragraf al acestui curs este prevăzută de o expunere pe scurt a teoriei de bază urmată apoi de indicarea problemelor tipice ce pot fi rezolvate cu ajutorul teoremelor şi principiilor expuse. Tot aici se fac recomandări în ceea ce priveşte succesiunea operaţiilor în rezolvarea problemelor enunţate. Numeroase probleme concrete ce şi-au găsit rezolvarea în acest volum sînt prevăzute cu discuţii fructuoase prin care se compară şi se valorifică diferite metode de rezolvare.

Meritul deosebit al autorilor constă şi în faptul că problemele elaborate sînt noi. Ele completează bogatul ansamblu de culegeri de probleme publicate în U. R. S. S. în domeniul mecanicii teoretice, dintre care numeroase volume, ca de exemplu acel al lui I. V. Mescerski, au fost de mult traduse în mai multe limbi de uz internaţional curent, devenind culegeri de probleme de mecanică „de căpătîi" a multor generaţii de ingineri. Parcurgerea sistematică a volumului de către studenţii institutelor tehnice de învăţămînt superior, îndeosebi de către toţi acei care lucrează în domeniul mecanicii teoretice fără scoatere din producţie, va conduce fără îndoială la cimentarea capacităţii de a rezolva toate tipurile de bază de probleme de mecanică.

Volumul este alcătuit în aşa fel încît permite şi consultarea izolată a diferitelor capitole înserate într-însul. Cap. I (8) este consacrat ecuaţiilor diferenţiale de dinamică punctului material, cap. II (9)—teoremelor fundamentale ale dinamicii, cap. III (10)—dinamicii sistemului legat de puncte materiale, cap. IV (11)—trecerii în revistă—după cum s-a mai spus—a metodelor de rezolvare a problemelor de dinamică şi cap. V (12)—problemelor speciale de dinamică. Aici îşi găsesc loc diferite probleme de teoria şocurilor, de teoria micilor oscilaţii, de teoria giroscopului şi de stabilitate a mişcării. Ref. recomandă călduros traducerea volumelor recenzate şi în limba romînă.

*

Rev. underlines above in Roumanian language various aspects of this volume dedicated to *Theoretical Mechanics illustrated in exercises and problems* and recommands its translation into other languages. *N. Irimiciuc*

16. ODERFELD J., *Wstep do mechanicznej teorii maszyn*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1962, 296 str.

Volumul recenzat, datorit cunoscutului specialist polonez în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor prof. dr. Jan Oderfeld, organizatorul şi promotorul conferinţelor generale poloneze cu largă participare internaţională privitoare la această disciplină [5]), este consacrat analizei structurale, cinematicii şi dinamicii mecanismelor.

Ref. subliniază îndeosebi conţinutul capitolelor destinate sintezei mecanismelor, care răspund la nevoile imperioase de automatizare cît mai completă a proceselor de producţie.

Destinat studenţilor facultăţilor de mecanică şi putînd fi utilizat cu mult profit şi de tehnicienii şi inginerii proiectanţi în domeniul construcţiei de maşini, volumul, revizuit şi de apreciaţii specialişti polonezi prof. dr. M. Damasiewicz şi Z. Parszewski, conţine, în afara materialului cristalizat în anii din urmă în valoroasele tratate sovietice, traduse în numeroase limbi şi datorite acad. I. I. Artobolevski şi S. N. Kojevnikov, numeroase rezultate noi, datorite autorului şi şcolii sale, ca de exemplu, o nouă metodă de echilibrare dinamică, metoda de proiectare raţională a mecanismelor în sensul lui L. N. Reşetov [6]), algoritmul de determinare a centrelor momentane ş. a.

Numeroase exerciţii ilustrative, care completează şi concretizează teoria expusă în volum, sînt preluate în parte din culegerea de probleme a prof. A. Morecki, unul din talentaţii elevi al autorului.

Menţionăm, în fine, gîndul delicat al autorului, exteriorizat prin dedicarea acestui volum memoriei fostului său profesor Waclaw Moszynski.

*

Ce volume, rédigé par M. le prof. dr. Jan Oderfeld de l'Institut Polytechnique de Varsovie, promoteur et organisateur des conférences générales polonaises avec large participation internationale, consacrées à la théorie des mécanismes et machines [5]), est sousdivisé en trois parties qui répondent, respectivement, aux domaines de l'analyse structurelle, de la cinématique et de la dynamique des mécanismes.

Le réf. souligne tout particulièrement l'apport de l'auteur dans le domaine de la synthèse des mécanismes et remarque nombre de problèmes et de méthodes élaborés dans le cadre de son école qui y ont trouvés sa place. Quelques détails concernant ce sujet ont été données ci-dessus.

Somme toute, ce volume, destiné à l'usage des étudiants des facultés de mécanique des instituts polytechniques, peut-être utile d'une manière tout à fait particulière aux techniciens et ingénieurs constructeurs des machines. Il est souhaitable qu'on le fasse traduire dans d'autres langues d'usage international courant.

On doit remarquer enfin la pensée délicate de l'auteur : le livre a été dédié à la mémoire de son ancien professeur Waclaw Moszynski. *D. Mangeron*

17. TIPEI N., *Theory of Lubrication with applications to Liquid- and Gas-Film Lubrication*, Edited by William Gross, Stanford University Press, Stanford, California, 1962, 566 pp.

Recent a apărut în Editura Universităţii Stanford (S. U. A.) cartea *Theory of Lubrication with applications to Liquid- and Gas-Film Lubrication* (*Teoria lubrificaţiei cu aplicaţii în lubrificaţia cu lichide şi gaze)*, care reprezintă traducerea în limba engleză, revăzută şi completată, a lucrării *Hidroaerodinamica lubrificaţiei* publicată de Editura Academiei R. P. R.

După apariţia sa în 1957, cartea a fost elogios apreciată în ţară şi străinătate. Considerată ca un tratat de bază a fost tradusă în limba engleză şi publicată în S.U.A., la propunerea mai multor specialişti.

---

[5]) A se vedea D. Mangeron, *A III-a Conferinţă generală poloneză asupra teoriei mecanismelor şi maşinilor*) Rogów-Warszawa, 8-10 iunie 1961), St. şi cerc. Mec. apl., 1962, **13**, *1*, pp. 235-240.

[6]) A se vedea şi seria de lucrări consacrată mecanismelor cu legături pasive în sensul lui Reşetov elaborată la Iaşi de colectivul condus de tov. O. Munteanu şi Gh. Tudor.

Tratatul prof. N. Tipei, constituie, așa după cum arată și redactorul cărții, dr. W. A. Gross în cuvîntul său introductiv, expunerea cea mai completă a teoriei lubrificației existentă pînă în prezent.

Cartea prezintă principalele probleme privind lubrificația hidroaerodinamică, aducînd totodată rezultate concrete ce deschid noi căi de cercetare. Pe lîngă expunerea metodelor și soluțiilor cunoscute, autorul aduce o valoroasă contribuție originală în majoritatea problemelor tratate. Prin amploarea problemelor expuse depășește cadrul inițial al lubrificației, prezentînd interes și pentru alte domenii ale mecanicii fluidelor.

După prezentarea, în primele capitole, a unor chestiuni generale, privind frecarea dintre corpuri, ecuațiile de mișcare a fluidelor vîscoase și principalele proprietăți ale lubrifianților, restul cărții este consacrat studiului lubrificației cu lichide în diferite tipuri de lagăre, lubrificației cu gaze și lubrificației în regim turbulent.

Astfel, în capitolele IV, V și VI se expun problema bidimensională a lubrificației, unele metode pentru tratarea problemei tridimensionale, precum și o metodă personală de rezolvare cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe finite. S-a luat în considerare variația vîscozității, considerată de obicei constantă, și s-au adus, față de ediția romînească, unele completări în capitolul VI, o dată cu numeroase noi diagrame. Cu această metodă se obțin relații simple pentru distribuția presiunilor și caracteristicilor globale a'e lagărelor circulare, relații ce sînt în concordanță și cu datele experimentale. Plecînd de la această metodă, în capitolul VII se dă o soluție riguroasă a problemei pentru lagărele fără joc radial (a doua soluție matematică exactă, obținută în problema lubrificației, după aceea dată de Michell în 1905, pentru lagăre plane), iar în capitolul VIII se studiază alte tipuri de lagăre cu elemente geometrice variabile.

Următoarele două capitole se ocupă cu lubrificația cu forțe și viteze variabile și stabilitatea mișcării lagărelor. Se deduc relații pentru calculul caracteristicilor mișcării lagărelor plane și circulare, cu aplicații la lagărele de motoare, ca și criterii pentru aprecierea stabilității mișcării acestora. Rezultatele obținute în acest sens de autor sînt considerate ca cele mai complete din literatura de specialitate.

În capitolul XI se prezintă o soluție generală a problemei. De asemenea se tratează și studiul lubrificației în straturi groase și de grosime mijlocie, cu aplicații la lubrificația suprafețelor cu mișcare de alunecare și rostogolire. Se prezintă totodată și problema condițiilor la limită utilizate în studiul lubrificației și a calculului debitului de lubrifiant.

Capitolul XII este consacrat studiului lubrificației cu gaze. Aici se tratează distribuția presiunilor în diferite tipuri de lagăre de alungire infinită, iar apoi se prezintă o metodă pentru studiul problemei tridimensionale. Se fac de asemenea și unele considerații asupra lubrificației cu gaze în regim nepermanent.

Ultimul capitol se ocupă cu studiul lubrificației în regim turbulent. Acest capitol constituie o completare față de ediția în limba romînă.

Prin diversitatea problemelor tratate lucrarea se adresează deopotrivă cercetătorilor din domeniul lubrificației și celor din alte domenii ale mecanicii fluidelor vîscoase. În același timp prin dezvoltările matematice care sînt conduse pînă la stadiul aplicațiilor, este utilă și inginerilor din domeniul construcției de mașini, precum și studenților din învățămîntul tehnic superior.

Tratatul prof. N. Tipei reprezintă o contribuție valoroasă adusă patrimoniului științific mondial. Publicarea peste hotare înseamnă un nou succes al științei românești. Acest nou succes se încadrează armonios în strălucitul șirag de succese obținute în ultimii ani de colectivul Institutului de Mecanică Aplicată „Traian Vuia", condus cu atîta competență și autoritate științifică de acad. Elie Carafoli.

*

Il rif. sottolinea qui sopra alcuni dettagli concernenti il pregiato volume del prof. N. Tipei, dell'Instituto di Meccanica applicata „Traian Vuia" di Bucarest, pubblicato in traduzione in lingua inglese sotto gli auspici dello Stanford University Press (Stanford, California, U. S. A.), consacrato alla teoria della lubrificazione con applicazioni alla lubrificazione coi liquidi e coi gas. *C. Ciobanu*

18. GROSS W. A., *Gas film lubrication*, John Wiley and Sons Inc., N. Y., London 1962, 413 pp.

Interesul deșteptat de studiul teoretic al lubrificației cu gaze, cît și de aplicațiile practice mereu mai numeroase ale acesteia, au făcut să apară în ultimii ani multe

lucrări care tratează diferite probleme din domeniul respectiv. Nu a existat pînă în prezent o tratare completă care să întrunească toate elementele necesare pentru o cunoaştere adîncită a ungerii cu gaze, în ansamblu. Varietatea mare a formelor constructive şi a cazurilor posibile din punct de vedere teoretic şi practic a condus în mod inevitabil la o limitare a cercetărilor la unele dintre aceste situaţii. Meritul volumului dr. W. A. Gross constă în faptul că reuşeşte să cuprindă toate aspectele majore ale lubrificaţiei cu medii gazoase, redîndu-le pentru prima oară în mod unitar într-o lucrare de proporţii mari. Ca în cea mai mare parte a problemelor tehnicii moderne, tratarea matematică joacă un rol de seamă şi aici; autorul a reuşit să redea o imagine clară a soluţiilor, alegînd de preferinţă pe acelea care prezintă o mai mare precizie sau care conduc la formule finale uşor de folosit în calculele numerice. Un număr mare de diagrame sintetizează aceste rezultate sau permit comparaţia cu datele experimentale.

Autorul însuşi a adus contribuţii importante la rezolvarea ecuaţiilor de bază cu ajutorul maşinilor de calcul, sau prin aplicarea metodei perturbaţiilor şi, concomitent, a urmărit unele faze experimentale. De pe urma acestei activităţi, lucrarea în ansamblu a avut de cîştigat, dovedind în general o judicioasă selecţiune şi acordînd o pondere corectă diferitelor capitole. Pornind de la constatarea că în anumite condiţii, frecvente în practică, comportarea filmului lubrifiant de gaz este apropiată de aceea a mediilor incompresibile, totuşi cu condiţii la limită mai simple, autorul a redat în cursul diferitelor capitole o sinteză a ungerii cu lichide, în cazurile considerate. Din acest punct de vedere volumul este interesant pentru toţi acei care studiază ungerea hidrodinamică, indiferent de lubrifiantul folosit.

În primul capitol se prezintă tipurile principale de ungere şi de lagăre folosite, condiţiile de similitudine şi modelarea dinamică a fenomenului. Al doilea capitol tratează derivarea ecuaţiilor de bază ale ungerii, ecuaţia lui Reynolds şi a energiei, iar al treilea capitol expune problema bidimensională în cazul diferitelor forme ale filmului lubrifiant. Cap. 4 urmăreşte, în continuare, problema tridimensională, expunînd la început metodele de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale (analitică, analogică, numerică), apoi soluţiile pentru lagăre plane dreptunghiulare, lagăre axiale şi lagăre radiale, în regim uniform, fără alimentare exterioară. Lagărele alimentate sub presiune fac obiectul cap. 5, în care se studiază complet regimurile de lucru şi efectele compresibilităţii, ţinînd seama de viteza de scurgere a gazului, de dimensiunile filmului şi de forma suprafeţelor lubrificate. Ultimul capitol, al şaselea, prezintă regimurile de lubrificaţie nestaţionare, efectul variaţiei de grosime a filmului cu timpul şi al acceleraţiilor tangenţiale, oscilaţiile după normala la suprafeţe şi comportarea dinamică a lagărelor plane, apoi regimurile dinamice şi stabilitatea lagărelor radiale şi axiale; se scoate în evidenţă, pe lîngă instabilitatea de rotaţie, şi instabilitatea pneumatică, caracteristică ungerii cu gaze.

O mare varietate de lagăre este examinată în cursul diferitelor capitole: plane, axiale, radiale, suprafeţe paralele înclinate, cu trepte, cu înclinare variabilă, lagăre compuse, suprafeţe cu rostogolire, lagăre cu cuzinet flexibil etc. Lucrarea acoperă astfel toate situaţiile care apar în practica proiectării şi a construcţiei diferitelor agregate. Ea interesează deopotrivă pe cercetătorii din acest domeniu, pe proiectanţi, ingineri şi studenţi. Conţinînd rezultate foarte noi, tabele, date numerice şi numeroase referinţe bibliografice, volumul este un preţios ajutor pentru acei care se ocupă, sub toate formele, de lubrificaţia cu gaze. O menţiune specială merită condiţiile de prezentare, figurile şi diagramele, clar concepute şi excelent redate.

*

Rev. gives oven in Roumanian language, some details concerning Dr. Gross'book which covers all the major aspects of lubrication and first presents in a unitary manner this important problem of modern technique. The mathematical treatment plays here an important part; the author has succeded in giving a clear picture of the solutions, choosing preferable those which present a greater accuracy or lead to final formulas readly usuable to numerical calculations. A large number of diagrams synthetize the results or permit a comparison with experimental data. A special mention is to be made as regards the printing conditions, the figures and diagrams which are clearly conceived and excelently reproduced.

N. Tipei

19. *** *Applied Mechanics. Proceedings of the Tenth International Congress of Applied Mechanics.* Stresa (Italy) 1960. Edited by F. Rolla and W. T. Koiter, Elsevier Publishing Company, Amsterdam-New-York, 1962, XXIII+370 pp.

Congresul internaţional de mecanică aplicată, desfăşurat la Stresa între 31 august şi 7 septembrie 1960, este al zecelea din seria de congrese internaţionale în acest domeniu, programate să aibă loc din patru în patru ani. Volumul recenzat conţine textele integrale a patru conferinţe generale şi rezumatele celor 188 de comunicări prezentate la congres.

Referentul subliniază îndeosebi marea anvergură a celor patru conferinţe generale, menite a trece în revistă stadiul actual într-un număr din cele mai de seamă probleme din domeniul mecanicii teoretice şi aplicate.

Conţinutul primei conferinţe, expusă de academicienii sovietici N. N. Bogoliubov şi Iu. A. Mitropolski, este consacrat metodelor analitice în teoria oscilaţiilor neliniare (pp. 9–25). El reflectă deosebita contribuţie în domeniul mecanicii neliniare a vibraţiilor a oamenilor de ştiinţă sovietici, subliniată în literatura noastră de specialitate într-un articol al ref. publicat în acest *Buletin*[7]), precum şi în capitolul *Mecanica vibraţiilor*[8]) din recentul volum *Fundamentele mecanicii*, primit favorabil de critica sovietică[9]).

A doua conferinţă elaborată de A. Ferri (S.U.A.), este consacrată expunerii unor probleme de transfer de căldură în vecinătatea regiunii de stagnare a corpurilor teşite în viteză supersonică. Se menţionează că datele experimentale concordă cu prevederile teoretice în cazul următoarelor două probleme tratate mai în detaliu: studiul transferului de căldură în regiunea de stagnare a unui corp de formă toroidală şi studiul transferului de căldură printr-o anume metodă analitică, datorită autorului, în regiunea de vîrf, chiar şi pentru numere Reynolds suficient de mici (pp. 26–62).

A treia conferinţă, expusă de J. T. Stuart (Anglia), are ca subiect studiul unor efecte neliniare în stabilitatea hidrodinamică, avînd ca punct de plecare fundamentala lucrare a academicianului sovietic L. D. Landau (1944), laureat al premiului Nobel din acest an.

A patra conferinţă, elaborată de G. Colonetti, preşedintele comitetului italian de organizare a congresului, este consacrată problemei deformaţiilor neliniare a corpurilor solide (pp. 98–111), avînd la bază ceea ce se poate numi „mecanica ereditară", ce are ca fundament aparatul analitic creat de V. Volterra.

Rezumatele lucrărilor prezentate sînt consacrate mecanicii fluidelor şi mecanicii solidelor, fiecare rezumat fiind prevăzut cu indicaţia revistei în care articolul respectiv este sau urmează să fie publicat în extenso.

Raportul preliminar asupra congresului şi lista completă a numelor şi a adreselor participanţilor la congres (742)[10]) ridică şi mai mult valoarea acestui volum, apărut în excelente condiţii tehnice în editura Elsevier Publishing Company.

*

This volume of the Proceedings on the Tenth International Congress of Applied Mechanics (Stresa-Italy, August 31...September 6, 1960) contains the complete texts of four general lectures and abstracts of 188 contributed papers.

The four general lectures was delivered by outstanding scientists in their respective fields and they provide an excellent survey of current research:

Méthodes analytiques de la théorie des oscillations non-linéaires by N. N. Bogolioubov et I. A. Mitropolsky, Moscow (U.S.S.R.);

Some heat transfer problems near stagnation region of blunt bodies at hypersonic speed by A. Ferri, Freeport, N. Y. (U. S. A.);

Non-linear effects in hydrodinamics stability by J. T. Stuart, Teddington, Middx. (Great Britain);

---

[7]) Mangeron D., *Din problemele actuale al mecanicii neliniare a vibraţiilor. I. Contribuţia şcolii sovietice*, BIPI, 1957, 3 (7), *3—4*, pp. 347—359.

[8]) Gábos Z., Mangeron D., Stan I., *Fundamentele Mecanicii*, Buc., Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1962, 386 pp.

[9]) Новодворскис А. И., Новые книги за рубежом, 1962, *12*, стр. 19—20.

[10]) Menţionăm participarea activă la Congres a tov. conf. N. Cristescu (*Les ondes élastico-plastiques dans les fils*, pp. 309—310).

Non-linear deformations of solid bodies by G. Colonnetti, Rome (Italy).

The abstracts of the contributed papers deal whith Fluid Mechanics and Mechanics of Solids; reference is made to the journals in wich the complete papers have been or will be published.

A general report on the Congress and a complete list of names and adresses of participants further enhance the value of this Proceedings, excellentely printed by the Elsevier Publishing Company. *D. Mangeron*

20. FAISANDIER J., *Les mécanismes hidrauliques*, 2-e édition, Dunod, Paris, 1962, 336 pp.

Volumul recenzat este consacrat studiului mecanismelor hidraulice, atît din punct de vedere didactic cît şi din punct de vedere documentar, Astfel, cartea conţine, în primul rînd, enunţarea clară a principiilor esenţiale de transmisie a puterii cu ajutorul unui fluid hidraulic sub presiune şi dezvoltarea aparatului matematic corespunzător.

Studiul principiilor generale, a pompelor, a receptoarelor hidraulice şi a organelor intermediare merge în paralel cu unele probleme relative la proiectare, la încercări de montare şi de întreţinere a materialelor hidraulice etc.

Volumul poate fi consultat cu folos de inginerii şi tehnicienii care proiectează sau folosesc diverse instalaţii hidraulice.

*

L'Auteur satisfait plainement le but à la fois didactique et documentaire qu'il s'est assigné à son livre consacré à l'étude des mécanismes hidrauliques.

Cet ouvrage, qui représente le développement du cours professé par l'Auteur à l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, réunit outre l'étude des principes généraux, des pompes, des récepteurs hidrauliques et des organes intermédiaires etc., de nombreux compléments technologiques relatifs aux matériaux et aux méthodes d'usinage, un important exposé de la théorie des servomécanismes hydrauliques et électrohydrauliques et des exemples nombreux d'applications courantes de l'hydraulique.

Les référents soulignent d'une manière toute particulière les développements concernant une théorie du graissage des paliers plans et du coin d'huile : une analyse des systèmes hydrauliques fonctionnant aux températures élevées que l'on rencontre sur les avions supersoniques ; une théorie de la dynamique des fluides appliquée à la hydraulique.

On doit mentionner enfin la présentation excellente du volume dû aux soins traditionnellement bons des éditeurs Dunod. *Gh. Tudor, Spiridon Deleanu*

21. АЛЕКСАНДРОВ Л. И., АРТЕМЕНКО Н. П., ФЕЛЬДМАН Л. М., *Детали машин. Лабораторные работы*, Изд. Харьковского Гос. Унив. им. А. М. Горького, 1961, 155 стр.

În acest manual se expun lucrările de laborator pentru disciplina Organe de maşini. Se expune astfel metoda şi ordinea desfăşurării lucrărilor, descrierea aparaturii, schemele instalaţiilor şi analiza unor probleme teoretice legate de specificul lucrărilor.

În total sînt tratate astfel 18 lucrări de laborator, pe capitole de organe de maşini, după cum urmează :

a) 7 lucrări privitoare la îmbinări şi anume : repartiţia eforturilor într-o îmbinare nituită, repartiţia eforturilor într-una sudată, rezistenţa unei îmbinări presate, momentul de frecare a piuliţei şurubului, rigiditatea şi eforturile într-o îmbinare cu şuruburi cu strîngere iniţială, îmbinarea cu şuruburi solicitată cu moment încovoietor şi forţă axială, îmbinarea cu bolţuri.

b) 5 lucrări privitoare la organele mişcării de rotaţie şi anume : turaţia critică a unui arbore, momentul de frecare în cupla de fricţiune, pierderile prin frecare la lagărele cu rulmenţi şi la cele cu alunecare, rigiditatea arborilor la transmisia cu roţi dinţate.

c) 6 lucrări privitoare la organele de transmisie şi anume : capacitatea de încărcare şi randamentul la roţi de fricţiune şi curele, randamentul la roţi dinţate şi la transmisii elicoidale, demontarea şi montarea unui reductor, forţele componente la transmisia cu roţi conice.

Manualul reprezintă o lucrare originală atît prin natura lucrărilor prezentate cît şi prin faptul că pentru prima dată apare în literatura tehnică un îndrumar pentru laboratorul de organe de maşini.

Cartea este de mare folos permiţînd formarea la studenţi a deprinderilor practice în efectuarea experienţelor de cercetare ştiinţifică; de asemenea serveşte corpului didactic ca îndrumar la organizarea laboratorului de Organe de maşini, necesar facultăţilor de mecanică din institutele de învăţămînt tehnic superior.

*

In vorstehendem Lehrbuch werden die Versuchsarbeiten für das Laboratorium von Maschinenelemente behandelt. Es werden die Methode und die Reihenfolge der Arbeiten gegeben, die Beschreibung der Apparatur, die Installationsschema und die Analyse einiger theoretischen Probleme die mit dem spezifischen der Arbeiten in Verbindung sind.

Im ganzen werden auf dieser Weise 18 Arbeiten fürs Laboratorium behandelt, für die Abschnitte der verschiedenen Maschinenelemente, so wie folgt:

a) 7 Arbeiten für Verbindungen und zwar: Spannungsverteilung in einer genieteten Verbindung, Spannungsverteilung in einer geschweissten Verbindung, die Festigkeit einer Pressverbindung, das Reibmoment der Schraubenmutter, Steifigkeit und Spannungen in einer Verbindung mit vorgespannten Schrauben, eine durch ein Biegemoment und Axialkraft beanspruchte Schraubenverbindung, Bolzenverbindungen.

b) 5 Arbeiten betreffs Maschinenelemente der drehenden Bewegung und zwar: kritische Drehzahl einer Welle, das Reibmoment der Reibkupplungen, Reibverluste bei Wälz- und Gleitlagern, Steifigkeit der Zahnradwellen.

c) 6 Arbeiten behandeln Maschinenelemente der Fortpflanzungen und Drehbewegungen und zwar: Tragfähigkeit und Wirkungsgrad bei Reibrädern und Reimentriebe, bei Zahnradgetriebe und Schneckengetriebe, die Kraftkomponenten bei Kegelradgetriebe, Demontage und Montage einer Getriebeübersetzung.

Das Buch stellt eine erstmalige Behandlung dieses Problems dar, sowohl durch die Natur der Arbeiten wie auch dadurch dass zum ersten Mal ist dass in der technischen Literatur ein Leitfaden für das Laboratorium von Maschinenelemente erscheint.

Das Buch ist sehr nützlich um bei den Studenten praktische Eigenschaften für wissenschaftliche Versuche hervorzurufen; es dient ebenfalls dem Lehrkorps als Leitfaden für die Schaffung und Organisierung eines Laboratoriums für Maschinenelemente, das den mechanischen Fakultäten der technischen Hochschulen nötig ist.

N. Popinceanu

22. ЯКОБСОН М. О., *Технолгия станкостроения*, Машгиз, М., 1960, 548 стр.

Pe baza experienţei construcţiei de maşini unelte din Uniunea Sovietică şi din alte ţări, precum şi folosind rezultatele cercetărilor ştiinţifice întreprinse de ENIMS, de laboratoarele unor întreprinderi şi de autor, în lucrare sînt tratate problemele metodelor de prelucrare a principalelor piese ale maşinilor unelte: batiuri, arbori principali, şuruburi conducătoare, roţi dinţate, cilindrice şi conice, bucşe, flanşe etc.

Lucrarea conţine indicaţii amănunţite asupra materialelor şi condiţiilor tehnice de execuţie ale pieselor, asupra traseelor tehnologice de prelucrare mecanică, sculelor şi dispozitivelor folosite pentru prelucrare, recomandări asupra regimurilor de aşchiere şi utilajului necesar.

O deosebită atenţie este acordată problemelor mecanizării şi automatizării proceselor tehnologice; sînt prezentate linii automate pentru prelucrarea diferitelor tipuri de piese.

De asemenea sînt tratate probleme ale tehnologiei montării şi vopsirii maşinilor unelte.

În lucrare sînt luate în consideraţie metode şi utilaje moderne de prelucrare ca: prelucrarea de grup a pieselor, folosirea agregatelor şi maşinilor speciale de înaltă productivitate.

Fiind întocmită la un nivel superior, lucrarea se adresează inginerilor şi tehnicienilor din întreprinderile constructoare de maşini unelte şi institutelor de proiectare, constituind un preţios ghid în producţie şi în munca de proiectare.

*

Le réf. expose ci-dessus, en langue roumaine, quelques détails concernant le livre *La technologie des constructions des machines-outils*, par M. O. Iacobson, Ed. Machguisse, Moscou, 1960.

Casimir Bohosievici

23. *** *Contribuţii la istoria capitalului străin în Romînia, (De la sfîrşitul primului război mondial pînă la ieşirea din criza economică din 1929...1933)*, Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1960, 590 pp.

Această importantă lucrare apare sub redacţia tov. C. Murgescu şi N. N. Constantinescu şi este rodul muncii unui colectiv al secţiei de istorie a economiei naţionale a Institutului de cercetări economice al Academiei R.P.R.

Autorii lucrării recenzate demonstrează documentat şi convingător căile şi mijloacele folosite de oligarhia financiară internaţională pentru înfeudarea economică şi politică a Romîniei. Rezultatele analizelor multilaterale întreprinse au dus la concluzia de ansamblu că în perioada cercetată a avut loc o adîncire a înfeudării ţării pe calea extinderii metodelor de control asupra economiei prin participaţii şi finanţări bancare şi industriale, pe calea sporirii fără precedent a datoriei externe a statului romîn. De asemenea se apreciază mai departe că procesul de înfeudare economică a ţării s-a adîncit, ca urmare a concesiunilor zmulse de capitalul monopolist străin pentru împrumuturile înrobitoare acordate statului burghezo-moşieresc.

Vînzarea principalelor bogăţii ale ţării, concesionarea celor mai de seamă surse de venit naţional unor trusturi străine, încheierea unor contracte scandaloase cu capitalişti străini, sînt încununate de aplicarea faimosului „plan de la Geneva", care instituia un control străin direct asupra bogăţiilor ţării şi treburilor statului romîn.

Urmările nefaste social-economice şi politice ale unei asemenea imixtiuni ale capitalului străin în ţara noastră sînt reliefate cu deosebită tărie pe parcursul întregii lucrări.

Trebuie subliniat faptul că lucrarea conţine un material documentar în mare parte inedit, iar autorii au îmbogăţit prezentarea unor probleme cu o serie de scheme, tabele şi indice de nume.

Lucrarea *Contribuţii la istoria capitalului străin în Romînia* reuşeşte, în bună parte, să creeze o imagine atotcuprinzătoare asupra modului în care capitalul străin a pătruns şi a exploatat bogăţiile naturale şi masele largi muncitoare din ţara noastră, precum şi lupta continuă dusă de Partidul Comunist din Romînia împotriva subjugării economice a ţării.

Acest volum constituie un util instrument de informare ştiinţifică asupra unor probleme importante din istoria economiei noastre naţionale.

*

On indique ci-dessus en langue roumaine quelques détails concernant le livre *Contributions à l'histoire du capital étranger en Roumanie*, élaboré par l'Institut d'Études Économiques (réd. C. Murgescu et N. N. Constantinescu) et publié par les soins de la Maison éditrice de l'Académie de la République Populaire Roumaine.

D. Rusu, N. Davideanu

F 1812

F 1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

1963 DEC 3

Tomul VIII (XII)

FASC. 3 – 4

1962

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul VIII (XII)

FASC. 3 – 4

1962

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. D. ATANASIU, prof. C. CALISTRU, conf. Gh. CHIRIȚĂ,
prof. TOMA FĂRCAȘ, prof. TIBERIU GOLGOȚIU,
prof. ILIE MATEI, membru corespondent al Academiei R.P.R.,
prof. D. MANGERON, conf. AUREL MARCHIȘ,
prof. D. RUSU, prof. GH. VASILIU

Redactor responsabil: prof. CRISTOFOR SIMIONESCU,
membru corespondent al Academiei R. P. R.

Secretar: lector HUGO ROSMAN

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
TOMUL VIII (XII), fasc. 3—4 1962

SUMAR

Pag.

REDACŢIONALE XV

D. RUSU, Semicentenarul învăţământului tehnic superior din Moldova . XVII

MATEMATICI. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

AL. CLIMESCU, O funcţie de mulţime 1

FR. ŠIK, *l*-grupuri complete generate compact 5

D. MANGERON şi L. E. KRIVOŞEIN, Asupra unor metode de rezolvare a problemelor neomogene de tip Goursat pentru o clasă de ecuaţii liniare integro-diferenţiale de ordin superior 9

W. MEYER ZUR CAPELLEN, O. DINGERKURS şi W. RATH, Ridicarea la pătrat şi înmulţirea seriilor Fourier 19

K. ZATULOVSKAIA, Asupra ecuaţiilor diferenţiale trinome . . 25

S. GOLAB, Asupra teoriilor mişcărilor în spaţiile riemanniene . . 31

V. MURGESCU, Asupra introducerii unei metrici în spaţiul afin . . 37

I. ENESCU, Asupra caracterului spinorial al unor mărimi ce intervin în studiul rotaţiilor finite 47

G. LAKSHMINARAYANA, Încovoierea unui bloc circular incompresibil . 51

U. A. SASTRY, Torsionarea unui cilindru circular întărit printr-o bară pătrată cu colţuri rotunjite 57

K. ARNOLD, Un test χ^2 pentru contradicţii în cazul măsurătorilor repetate 61

N. IRIMICIUC, I. RUSU şi C. HUIU, Asupra bazelor unei geometrii reprezentative plan-axiale 65

C. RUSCIOR, N. CALINICENCO, GH. TACU şi MARCEL MOISE, Analiza spectrografică a unor minereuri radioactive . . . 75

S. CHAPMAN şi P. C. KENDALL, Mişcarea particulelor încărcate într-un cîmp magnetic discontinuu 81

M. PAŠEK, Circuit de transfer de căldură cu sodiu lichid şi rezultatele exploatării lui 93

Pag.

CHIMIE

T. GOLGOȚIU, I. HÎNCU, I. ANTONESCU, I. ROȘCA, J. LINDE și A. LUCA, Considerații asupra mecanismului deshidratării $CuCl_2.2H_2O$. 109

ȘT. IVĂȘCANU, Studiul depozitelor de crom obținute din soluțiile de policromat 113

C LEONTE, Contribuții la problema valorificării soluțiilor reziduale de la fabricile de sodă calcinată 121

TH. SĂVEANU, I. IBĂNESCU și M. VASILIU, Analiza intensificării proceselor de transfer în curgerea peliculară, cu ajutorul rugozității . 129

G. A. RAZUBAEV și L. S. BOGUSLAVSKAIA, Asupra capacității de reacție a radicalilor hidroxilici liberi în reacție cu esteri alifatici compuși în soluție 141

GH. BOTEZ, M. TUTOVEANU și E. COMĂNIȚĂ, Sulfamidele acizilor fenoxiacetici (IV) 149

H. I. AREȘIDZE și E. M. BENAȘVILI, Studiul hidrocarburilor aromatice condensate din fracția de petrol a țițeiului norian . . . 161

GH. N. ROZMARIN și CR. I. SIMIONESCU, Asupra mecanismului de destrucție fotochimică a celulozei 167

A. CHIRIȚĂ, GH. CHIRIȚĂ, M. MANCIU și GH. ALEXA, Contribuții la studiul obținerii enotaninului din semințe de struguri . . 183

I. IAROȘINSCHI-DRABIC și C. MAGA, Contribuțiuni la studiul ameliorării extracției materialelor tanante vegetale indigene (coaja de molid) (IV) 189

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

E. LUCA și GH. ILIESCU, Contribuții la determinarea filtrului optim în tehnica razelor X 203

D. BĂRBULESCU, Compensator în coordonate rectangulare folosind un circuit derivație cu reactanțe semicompensate 213

I. BEJAN și N. V. BOȚAN, Asupra parametrilor caracteristici ai releelor magnetice fără contacte, funcționînd pe sarcini inductive . . 221

A. POPOVICI, GH. ȘERBAN, V. VASILACHE, I. SUCHAR și P. HABA, Motor sincron reactiv monopolar monofazat 229

GH. ȘERBAN, M. VASILCIUC, I. BERGMAN și P. LEONTE, Contribuție la studiul teoretic și experimental al motorului asincron trifazat cu statorul în formă de arc 237

G. M. MAHARADZE, Asupra problemei proceselor tranzitorii în cazul regimurilor nesimetrice de funcționare a mașinilor sincrone . . 247

A. ȚUGULEA, Curenții turbionari induși de un fir rectiliniu parcurs de curent alternativ, într-un cilindru conductor paralel cu firul . . 265

H. ROSMAN și A. BRAIER, Asupra transmisiei cu factor de putere optim a energiei active prin sisteme electrice (III) 273

Pag.

MECANICĂ TEHNICĂ

D. MANGERON şi V. V. TOPENCIAROV, Unele probleme relative la operatorii generalizaţi ai lui Euler-Lagrange 285

V. BAUŞIC şi AL. CLIMESCU, Soluţie economică pentru dimensionarea barelor din tronsoane supuse la solicitări axiale . . . 289

J. SALOKANGAS, O nouă maşină de încercat la şocuri de răsucire şi rezilienţa oţelului de scule în funcţie de temperatura de lucru 295

N. G. POPINCEANU, D. NĂSTASE, M. D. GAFIŢEANU, T. GIOSAN şi M. PĂUN, Contribuţii la studiul problemei încercărilor pentru determinarea zgomotului la rulmenţi 303

M. V. HVINGHIA, Oscilaţii transversale ale resorturilor spirale cilindrice comprimate prin forţe axiale 311

A. BRAIER, Metodă grafică pentru studiul mişcării unor sisteme neliniare neautonome de tip general, cu un grad de libertate . . . 325

T. GOLGOŢIU, T. FĂRCAŞ, GH. AILINCĂI, C. CIOCHINĂ, E. ANDREI, B. GHEORGHIU şi I. HOPULELE, Comportarea la coroziune a oţelurilor carbon de calitate STAS 880—49 331

C. PICOŞ, B GHEORGHIU şi V. BURGARD, Influenţa coeficientului de dilatare liniară asupra mărimii deschiderii segmentului la montaj . 337

GH. CAŞLER şi AL. RENER, Determinarea constantelor şi exponenţilor din relaţiile momentului de torsiune şi a forţei axiale, la burghierea oţelurilor romîneşti (I) 345

GH. CAŞLER, AL. RENER şi D. ZETU, Determinarea constantelor şi exponenţilor din relaţiile momentului de torsiune şi a forţei axiale la burghierea oţelurilor romîneşti (II) 349

S. W. YUAN şi E. PENG, Scurgere laminară neizotermă în conducte cu pereţi lubrifiaţi 351

CONSTRUCŢII. HIDROTEHNICĂ

VL. KOLOUŠEK, Oscilaţii ale cadrelor rigide continue, multietajate . 363

N. ORLOVSCHI, Utilizarea momentelor active grupate la rezolvarea cadrelor cu lanţuri cinematice legate 373

V. FOCŞA, A. RADU şi A. VEREŞ, Studiul izolării termice a clădirilor de locuit cu pereţi din zidării eficiente, prin analogie electrică . 379

D. MATEESCU şi L. GĂDEANU, Studiul unei îmbinări prin suprapunere, executată cu o cusătură de sudură unilaterală, solicitată la încovoiere pură 387

Z. I. BRAUDE, Calculul construcţiilor de oţel supuse coroziunii . . 401

V. CIUBOTARU, Aprecierea modulului de elasticitate al pămîntului din patul drumurilor pe baza măsurătorilor deflectometrice . . 411

E. FLOREA şi S. LAZĂR, Posibilitatea de aplicare a programării liniare la transporturile de cărămidă şi beton ale întreprinderii nr. 1 de construcţii din Iaşi 415

Pag.

INDUSTRIE UŞOARĂ

D. MANGERON şi V. HANGANU, Asupra reglării automate a tensiunii firelor de urzeală la un război de ţesut 425

I. ŞTEFĂNESCU, A. MARCHIŞ, O. MARCHIŞ, F. REICHER şi M. OANCEA, Influenţa tensiunii firelor de urzeală din bumbac în procesul încleierii, asupra unor caracteristici fizico-mecanice ale ţesăturii 431

I. ŞTEFĂNESCU, N. BĂDAN şi V. HANGANU, Reglarea automată a umidităţii urzelilor de bumbac pe maşinile de încleiat . . 439

R. ZEIDMAN, C. CĂLIN, I. BAZAVAN, S. BRENMAN şi M. GRINDEA, Stabilitatea coloranţilor direcţi la temperaturi de peste 100° C . 445

V. N. ŢVETKOV, Interacţiuni între forţele care intervin la fixarea în cuie a tălpii 451

L. DUMA şi V. COCIU, Influenţa proprietăţilor boxului cu faţa naturală asupra procesului de formare 457

ŞTIINŢE ECONOMICE

E. POPA, I. C. ŞTEFĂNESCU, N. BĂDAN, E. FLOREA, V. COPILU şi C. RUSU, Eficienţa economică a modernizării şi înlocuirii utilajului la fabrica „Ţesătura"-Iaşi 467

D. RUSU, Un principiu fundamental în teoria contabilităţii . . . 473

* * *

I. MATEI, Elena Cocea 479

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ

Том VIII (XII), выпуск 3—4 1962 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОТ РЕДАКЦИИ XV

Д. РУСУ, К нятидесятилетию высьшего технического образования в Молдове XVII

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, Функция множества 1

ФР. ШИК, Полные *l*-группы компактно образованные . . . 5

Д. МАНЖЕРОН и Л. Е. КРИВОШЕИН, Некоторые методы решения неоднородных задач Гурса для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка 9

В. МЕЙЕР ЦУР КАПЕЛЛЕН, О. ДИНГЕРКУС и В. РАТ, Возведения в квадратную степень и умножение серий Фурье 19

К. Д. ЗАТУЛОВСКАЯ, О трехчленных дифференциальных уравнениях . 25

С. ГОЛАБ, К теории движений в риманновых пространствах . . 31

В. МУРДЖЕСКУ, О введении метрики в аффинное пространство . . 37

И. ЕНЕСКУ, О спинорном характере величин входящих в изучение конечных вращений 47

Г. ЛАКШМИНАРАЯНА, Изгиб кругового несжимаемого блока . . 51

У. А. САСТРИ, Кручение кругового цилиндра укрепленного квадратной балкой с закругленными углами 57

К. АРНОЛЬД, Тест χ^2 для разногласия в случае повторных измерений . 61

Н. ИРИМИЧУК, И. РУСУ и К. ГУЮ, К разработке оснований изобразительной плоско-аксиальной геометрии 65

К. РУЩОР, Н. КАЛИНИЧЕНКО, Г. ТАКУ и М. МОЙСЕ, Спектральный анализ некоторых радиоактивных руд 75

С. ЧЕПМЕН и П. К. КЕНДАЛЛ, Движение заряженной частицы в прерывном магнитном поле 81

М. ПАШЕК, Теплообменный контур с жидким натрием и результаты его эксплуатации 93

Стр.

ХИМИЯ

Т. ГОЛГОЦИУ, Я. ХЫНКУ, И. АНТОНЕСКУ, И. РОШКА, ДЖ. ЛИНДЕ и А. ЛУКА, О механизме дегидратации $CuCl_2.2H_2O$ . . 109

ШТ. ИВЭШКАНУ, Изучение хромовых отложений, полученных из полихроматных растворов 113

К. ЛЕОНТЕ, К вопросу об исследовании остаточных растворов аммиачно-содовых промышленных предприятий 121

Т. СЭВЯНУ, И. ИБЭНЕСКУ и М. ВАСИЛИУ, Анализ интенсификации процессов передачи в пленочном течении при помощи шероховатости 129

Г. А. РАЗУВАЕВ и Л. С. БОГУСЛАВСКАЯ, К вопросу о реакционной способности свободных гидроксильных радикалов в реакции с алифатическими сложными эфирами в растворе 141

Г. БОТЕЗ, М. ТУТОВЯНУ и Е. КОМЭНИЦЭ, Сульфамиды феноксиацетных кислот (IV) 149

Х. И. АРЕШИДЗЕ и Е. М. БЕНАШВИЛИ, Исследование конденсированных ароматических углеводородов керосиновой фракции норийской нефти 161

Г. Н. РОЗМАРИН и КР. И. СИМИОНЕСКУ, К вопросу о механизме фотодеструкции целлюлозы 167

А. КИРИЦЭ, Г. КИРИЦЭ, М. МАНЧУ и Г. АЛЕКСА, К изучению методов получения снотанина из виноградных семян . . . 183

И. ЯРОШИНСКИЙ-ДРАБИК и К. МАГА, К увеличению экстракции местных растительных дубильных веществ (еловая кора) (IV) . 189

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Е. ЛУКА и Г. ИЛИЕСКУ, К вопросу определения оптимального фильтра в технике X-лучей 203

Д. БЭРБУЛЕСКУ, Компенсатор в декартовых координатах с параллельной цепью имеющей полукомпенсированный реактанс . . . 213

И. БЕЖАН и Н. В. БОЦАН, Об изменении характеристических параметров магнитных бесконтактных реле, при их работе на индуктивных нагрузках 221

А. ПОПОВИЧ, Г. ШЕРБАН, В. ВАСИЛАКЕ, И. СУХАР и П. ГАБА, Однофазный однополюсный синхронный реактивный двигатель . 229

Г. ШЕРБАН, М. ВАСИЛЬЧУК, И. БЕРГМАН и П. ЛЕОНТЕ, Теоретическое и экеперимептальное исследование трехфазного асинхронного двигателя с дугообразным статором 237

Г. М. МАХАРАДЗЕ, О проблеме переходных процессов при несимметричных режимах работы синхронных машин 247

А. ЦУГУЛЯ, Вихревые токи индуктируемые прямолинейным проводом с переменным током в длинном проводящем параллельном цилиндре . 265

Г. РОСМАН и А. БРАЙЕР, О передаче с наилучшими коэффициентами мощности активной энергии через электрические системы (III) . 273

Стр.

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Д. МАНЖЕРОН и В. В. ТОПЕНЧАРОВ, Некоторые задачи относящиеся к обобщенным операторам Эйлера-Лагранжа 285

В. БАУШИК и АЛ. КЛИМЕСКУ, Экономичное решение для определения размеров составленных из отрезков балок, подверженных осевой нагрузке 289

И. САЛОКАНГАС, Новая установка для испытаний на крутящий удар и ударная вязкость инструментальной стали в зависимости от рабочей температуры 295

Н. Г. ПОПИНЧЯНУ, Д. НЭСТАСЕ, М. Д. ГАФИЦЯНУ, Т. ДЖОСАН и М. ПЭУН, Испытания для определения шума подшипников качения 303

М. В. ХВИНГИЯ, Поперечные колебания винтовых цилиндрических пружин, сжатых осевыми силами 311

А. БРАЙЕР, Графический метод изучения движения некоторых общих нелинейных неавтономных систем с одной степенью свободы . . 325

Т. ГОЛГОЦИУ, Т. ФЭРКАШ, Г. АИЛИНКЭЙ, К. ЧОКИНЭ, Е. АНДРЕЙ, Б. ГЕОРГИУ и И. ГОПУЛЕЛЕ, Коррозионная характеристика углеродистых сталей STAS 880—49 331

К. ПИКОШ, Б. ГЕОРГИУ и ВЛ. БУРГАРД Экеперимеитальное определение коэффициента линейного расширения у чугуна для поршневых колец и втулок цилиндров 337

Г. КАШЛЕР и АЛ. РЕНЕР, Определение параметров сил резания и крутящих моментов в процессе сверления румынских сталей (I) . 345

Г. КАШЛЕР, АЛ. РЕНЕР и Д. ЗЕТУ, Определение параметров сил резания и крутящих моментов в процессе сверления румынских сталей (II) 349

С. В. ЮАН и И. ПЕНГ, Ламинарное неизотермальное течение в трубопроводах в случае стенок со смазкой 351

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

ВЛ. КОЛОУШЕК, Колебания жестких многоэтажных сплошных рам . 363

Н. ОРЛОВСКИЙ, Расчет сложных рам методом групповых активных моментов 373

В. ФОКША, А. РАДУ и А. ВЕРЕШ, Исследования по электрической аналогии тепловой изоляции жилищных построек с облегченными стенками 379

Д. МАТЕЕСКУ и Л. ГЭДЯНУ, Исследование соединения внахлестку со сварным однофланговым швом, подверженным чистому изгибу . 387

З. И. БРАУДЕ, Расчет стальных конструкций при воздействии на них коррозии 401

В. ЧУБОТАРУ, Оценки модуля упругости дорожных грунтовых оснований на основе изменений прогибов покрытий 411

Е. ФЛОРЯ и С. ЛАЗЭР, Возможности применения линейного программирования в транспорте кирпича и бетона в ясском строительном предприятии № 1 415

Стр.

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

Д. МАНЖЕРОН и В. ХАНГАНУ, К вопросу автоматического регулирования натяжения основы на ткацком станке 425

И. ШТЕФЭНЕСКУ, А. МАРКИШ, О. МАРКИШ, Ф. РЕЙХЕР и М. ОАНЧА, Влияние натяжения основных хлопчатобумажных нитей в процессе шлихтования на некоторые физико-механические свойства ткани . 431

И. ШТЕФЭНЕСКУ, Н. БЭДАН и В. ХАНГАНУ, Автоматическое регулирование основ на машинах для проклеивания 439

Р. ЗЕЙДМАН, К. КЭЛИН, И. БАЗАВАН, С. БРЕНМАН и М. ГРИНДЯ, Устойчивость прямых красителей к температурам сверх 100°С . 445

В. Н. ЦВЕТКОВ, Силовые соотношения в гвоздевых креплениях низа обуви 451

Л. ДУМА и В. КОЧУ, Влияние свойств хромовой кожи с естественным лицом на процесс формирования 457

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Е. ПОПА, И. К. ШТЕФЭНЕСКУ, Н. БЭДАН, Е. ФЛОРЯ, В. КОПИЛУ и К. РУСУ, Экономическая эффективность модернизации и замены оборудования на фабрике „Цесэтура" — г. Яссы 467

Д. РУСУ, Основной принцип в теории бухгалтерии 473

* * *

И. МАТЕЙ, Елена Коча 479

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), Fasc. 3—4 1962

CONTENTS

	Pag.
EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS	XV
D. RUSU, Demicentenaire de l'enseignement technique supérieur dans la Moldavie	XVII
MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS	
AL. CLIMESCU, Une fonction d'ensemble	1
FR. ŠIK, Kompakt erzeugte vollständige l - Gruppen	5
D. MANGERON et L. E. KRIVOCHÉÏNE, Quelques méthodes de résolution des problèmes non homogènes de Goursat relatifs à une classe d'équations linéaires intégro-différentielles d'ordre supérieur	9
W. MEYER ZUR CAPELLEN, O. DINGERKUS und W. RATH, Quadrieren und Multiplizieren von Fourierreihen	19
CL. ZATULOVSKAYA, Sur les équations différentielles trinômes	25
S. GOLAB, Contribution à la théorie des mouvements dans les espaces de Riemann	31
V. MURGESCU, Sur l'introduction d'une métrique dans l'espace affin	37
I. ENESCU, Sur le caractère spinoriel des grandeurs intervenant à l'étude des rotations finies	47
G. LAKSHMINARAYANA, Bending of an incompressible circular block	51
U. A. SASTRY, Torsion of a circular cylinder reinforced by a square rod with rounded corners	57
K. ARNOLD, Ein χ^2 - Test für die Widerspüche bei Wiederholungsmessungen	61
N. IRIMICIUC, I. RUSU e C. HUIU, Sull'elaborazione di una geometria rappresentativa planare-assiale	65
C. RUSCIOR, N. CALINICENCO, GH. TACU et MARCEL MOISE, Analyse spectrographique de quelques minérais radioactifs	75
S. CHAPMAN and P. C. KENDALL, The motion of charged particles in a model discontinuous magnetic field	81
M. PAŠEK, Heat transfer sodium circuit and operational experiences	93

Pag.

CHEMISTRY

T. GOLGOȚIU, I. HÎNCU, I. ANTONESCU, I. ROȘCA, J. LINDE et A. LUCA, Considérations sur le mécanisme de la déhydratation du $CuCl_2.2H_2O$ 109

ȘT. IVĂȘCANU, Étude des dépôts de chrome obtenus par l'utilisation des solutions de polychromate 113

C. LEONTE, Contribution au problème de la valorification des solutions résiduelles obtenues aux fabriques de soude ammoniacale . . 121

TH. SĂVEANU, I. IBĂNESCU and M. VASILIU, Analysis of intensification of transfer processes in countercurrent gas-liquid film, by means of roughness 129

G. A. RAZUBAEV and S. L. BOGUSLAVSKAIA, On the reaction capacity of hydroxilic free radicals during chemical solution with some aliphatic esters 141

GH. BOTEZ, M. TUTOVEANU et E. COMĂNIȚĂ, Sulfamides des acides phénoxiacétiques (IV) 149

H. I. ARESHIDZE and E. M. BENASHVILI, Research for the condensed aromatic hydrocarbons in the kerosene fraction of the Norio petroleum 161

G. N. ROZMARIN und CR. I. SIMIONESCU, Über den photochemischen Abbaumechanismus des Zellstoffes 167

A. CHIRIȚĂ, GH. CHIRIȚĂ, M. MANCIU et GH. ALEXA, Contributions à l'étude de l'obtention l'oenotanin des pépins de raisin . . 183

I. IAROȘINSCHI-DRABIC und C. MAGA, Beiträge zum Studium der Extraktionsverbesserung einheimischer pflanzlicher Gerbmittel (die Fichtenrinde) (IV) 189

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

E. LUCA et GH. ILIESCU, Contributions à la détermination du filtre optimum dans la technique des rayons X 203

D. BĂRBULESCU, Compensateur en coordonnées rectangulaires en utilisant un circuit dérivation à réactances sémicompensées . . . 213

I. BEJAN et N. V. BOȚAN, Sur les paramètres caractéristiques des relais magnétiques sans contacts, fonctionnant sur des charges inductives 221

A. POPOVICI, GH. ȘERBAN, V. VASILACHE, I. SUHAR et P. HABA, Moteur synchrone réactif monopolaire monophasé . . . 229

GH. ȘERBAN, M. VASILCIUC, I. BERGMAN und P. LEONTE, Beitrag zum theoretischen und erfahrungsmässigen Studium des Drehstromasynchronmotors mit bogenartigen Ständer 237

G. M. MAKHARADZE, The problem of the transitional processes throughout symmetric working regim of the synchronous machines . 247

A. ȚUGULEA, Les courants tourbillonairs induits par un fil rectiligne traversé par un courant alternatif, dans un conducteur cylindrique parallèle au fil 265

H. ROSMAN et A. BRAIER, Sur la transmission à facteur de puissance optimum de l'énergie active par des systèmes électriques (III) . 273

Pag.

MECHANICAL ENGINEERING

D. MANGERON et V. V. TOPENTCHAROV, Quelques problèmes concernant les opérateurs généralisés d'Euler-Lagrange . . . 285

V. BAUŞIC et AL. CLIMESCU, Solution économique concernant la détermination des dimensions des poutres à tronçons soumis à effort axial 289

J. SALOKANGAS, Eine neue Maschine zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch und die Zähigkeit eines Werkzeugstahls bei Schlagartiger Verdrehung in Abhängigkeit von der Anlasstemperatur . . 295

N. G. POPINCEANU, D. NĂSTASE, M. D. GAFIŢEANU, T. GIOSAN und M. PĂUN, Beitrag zur Untersuhung der Laufgeräuschbestimmung an Wälzlagern 303

M. V. HVINGIA, Oscillazioni trasverali della molle spirali cilindriche sottoposti alle forze assiali 311

A. BRAIER, Méthode graphique pour l'étude du mouvement de certains systèmes non-linéaires, non-autonomes, d'un type général, à un degré de liberté 325

T. GOLGOŢIU, T. FĂRCAŞ, GH. AILINCĂI, C. CIOCHINĂ, E. ANDREI, B. GHEORGHIU et I. HOPULELE, Comportement à la corrosion des aciers-carbon de qualité STAS 880 — 49 . . . 331

C. PICOŞ, B. GHEORGHIU und V. BURGARD, Die Einfluss des Abstandes der Kolberinge bei der Montage, durch deren Längeausdehnungskoeffizienten 337

GH. CAŞLER et AL. RENER, Détermination des paramètres des forces de coupe et des moments concernant les aciers roumains soumis au perçage (I) 345

GH. CAŞLER, AL. RENER et D. ZETU, Détermination des paramètres des forces de coupe et des moments concernant les aciers roumains soumis au perçage (II) 349

S. W. YUAN and Y. PENG, Laminar nonisothermal pipe flow with coolant injection at wall 351

CONSTRUCTIONS. HIDROTECHNICS

VL. KOLOUŠEK, Vibrations of continuous and multistorey rigid frames 363

N. ORLOVSCHI, The use of the grouped active moments for resolving the frames with dependent sway-mechanism 373

V. FOCŞA, A. RADU et A. VEREŞ, Étude de l'isolation thermique des constructions avec parois en maçonnerie, par analogies électriques 379

D. MATEESCU et L. GĂDEANU, Étude d'un joint par recouvrement réalisé par une soudure unilatérale, soumis à un effort de flexion . 387

Z. I. BRAUDE, Le calcul des constructions en acier soumises à la corrosion 401

V. CIUBOTARU, Appréciation du module d'élasticité du sol de fondation des routes à l'aide des mesures déflectométriques 411

E. FLOREA et S. LAZĂR, Possibilités d'application de la programmation linéaire dans le transport des briques et du béton de l'Entreprise nr. 1 de constructions de Jassy 415

Pag.

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

D. MANGERON et V. HANGANU, Sur le réglage automatique de la tension des fibres de la chaîne dans un métier à tisser . . 425

I. ŞTEFĂNESCU, A. MARCHIŞ, O. MARCHIŞ, F. REICHER und M. OANCEA, Der Einfluss der Spannung der Baumwollketfäden beim Schlichten auf einige physich-mechanische Eigenschaften der Gewebe 431

I. ŞTEFĂNESCU, N. BĂDAN et V. HANGANU, Le réglage automatique de l'humidité des fils sur les encolleuses 439

R. ZEIDMAN, C. CĂLIN, I. BAZAVAN, S. BRENMAN et M GRINDEA, Stabilité des colorants directs aux températures depassant 100°C . 445

V. N. TZVETKOV, Force relations in nailed bottoning of footwear . 451

L. DUMA et V. COCIU, Influence des propriétés du box-calf à surface naturelle sur le processus de formation 457

ECONOMICS

E. POPA, I. C. ŞTEFĂNESCU, N. BĂDAN, E. FLOREA, V. COPILU et C. RUSU, Efficacité économique de la modernisation et substitution de l'outillage chez la fabrique „Ţesătura" – Jassy . . . 467

D. RUSU, Un principe fondamental dans la théorie de la comptabilité . 473

* * *

I. MATEI, Elena Cocea 479

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

REDACŢIONALE

ОТ РЕДАКЦИИ

EDITORSCHIP'S ANNOUNCEMENTS

Articole ale colaboratorilor străini primite la redacţia revistei *Buletinul Institutului politehnic din Iaşi*

Статьи иностранных сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

Papers received from abroad by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

АРЕШИДЗЕ Х. И. и ХЕЧИНАШВИЛИ Е. П., (Академия Наук Груз. ССР, Тбилиси, СССР), *Конденсированные ароматические углеводороды сацхенисской нефти.*

ГРИБАНОВ Ю. И., (Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, СССР), *К теории измеримых функций.*

BORŮVKA O., (Université, Brno, R. S. Tchéchoslovaque), *Sur l'ensemble des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre qui ont la même dispersion fondamentale.*

TOPENCHAROV V. V. and CHESHANKOV B. I., (Institute of Electrical and Mechanical Engineering, Sofia, P. R. Bulgaria), *Kinematic operator of the motion of a rigid body.*

МЕЛЬНИКОВА Н. С., (Академия Наук Москва, СССР), *О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, при нулевом градиенте температуры.*

БЕЛЕЦКИЙ В. Я., (Одесский технологический институт, СССР), *Синтез приближенных направляющих кривошипно-шатунных механизмов по наибольшему числу параметров их кинематической схемы.*

РЫЖАНОВ С. Г., (Кишиневский государственный университет, СССР), *К теории асимметричного деления.*

MURTHY M. G. K., (Regional Engineering College, Kazipet, Warangal, A. P., India), *On stresses of an isotropic, elastic disc in the form of a Limacon rotating steadily in its plane.*

MILTZLAFF G., (Technische Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg, D.D.R.), *Über ein Verfahren zur Lösung einer allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung.*

АРАБАДЖИ В. И. и РУДИК К. И., (Кишиневский государственный университет, СССР), *О некоторых характеристиках осаждения льда в коронном разряде.*

ВАЙНАУСКАС В. В., (Каунасский политехнический институт, СССР), *Применение ортогональных полиномов двух переменных для уравновешивания пространственных фототриангуляционных сетей.*

ЭЗРОХИ Т. Г., (Киевский политехнический институт, СССР), *О некоторых свойствах отображений круга.*

KUČERA J., (Institut Polytechnique, Prague, R. S. Tchéchoslovaque), *Nouvelle méthode de recherche de la commutation dans les machines électriques à courant continu.*

КОВРЕВСКИЙ А. П., (Академия Наук УССР, Харьков, СССР), *Колебания и устойчивость трубопроводов.*

БЕЛЕНЬКИЙ И. М., (Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, СССР), *Об одной обратной задаче в механике.*

ГРИБАНОВ Ю. И., (Казанский государственный университет им. В. И. Улианова-Ленина СССР), *О непрерывности адитивных интегральных преобразований банаховых пространств функций.*

WUNDERLICH W., (Technishe Hochschule, Wien, Österreich), *Über die Schwerpunktsbahn des Dreistab- und Schubkurbelgetriebes.*

BALARAM M., (Indian Institute of Technology, Kharagpur, India), *Flow of non-newtonian liquid against a rotating disc with stagnation point at infinity with large section.*

JAGADEESAN K., (Indian Institute of Technology, Kharagpur, India), *Hydromagnetic flow against a rotating disc.*

GOLECKI J., (Academy of Mining and Metallurgy, Cracow, P. R. Poland) and VALCZAK J., (Polytechnic Institute, Cracow, P. R. Poland), *Displacement Field and State of Stress in the Heavy Elastic Ring Supported at the Point (II).*

MEJZLÍK L., (Institut Polytechnique, Brno, R. P. Tchéchoslovaque), *L'influence de l'élasticité de la fondation sur les contraintes des barrages-voûtes.*

ГУДУШАУРИ Э. Г., (Грузинский политехнический институт, им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР), *Условия наличия одного и двух кривошипов в пятизвенном шарнирном механизме.*

ПОПОВ И. Н., (Таганрогский радиотехнический институт, СССР), *Экспериментальное исследование кинематики механизмов с помощью киносъемки.*

ЛИТВИНОВ И. М., (Академия строительства и архитектуры УССР, Киев, СССР), *Основные теоретические вопросы развития крупнопанельного строительства на просадочных грунтах и подрабатываемых территориях.*

БОНДАРЬ Н. Г., (Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта, СССР), *Новый метод теории нелинейных колебаний.*

ТАРАСЕНКО В. П. (Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта, СССР), *Жесткость и пространственные колебания загруженных железнодорожных балочных мостов.*

ХОХЛОВ А. А., (Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта, СССР), *Исследование динамической работы мостов под совмещенную езду.*

РОЙТБУРД З. Г., (Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта, СССР), *Работа сводов системы Майяра под динамической нагрузкой.*

BASUDEV GHOSH, (Dinabandhu Andrews College, Garia, India), *On the displacement due to a nucleus of torsional strain in a composite medium.*

BHATTACHARYYA P., (Siliguri College, Darjeeling, West Bengal, India), *Note on the disturbance produced in a semi-infinite incompressible viscous fluid by a normal transient force applied over a strip of the upper surface.*

BHARGAVA R. D. and RADHAKRISHNA H. C., (Indian Institute of Technology, Kanpur, India), *Circular inhomogeneity in orthotropic medium.*

SOULÉYMANE N., (Faculté des Sciences, Dakar, Sénégal), *Principe variationnel correspondant aux formes lagrangiennes des équations de Tzénoff-Mangeron.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

SEMICENTENARUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI TEHNIC SUPERIOR DIN MOLDOVA

În noiembrie 1962, Institutul politehnic din Iași a sărbătorit într-un cadru festiv semicentenarul învățămîntului tehnic superior din Moldova, prilej de trecere în revistă a drumului parcurs de învățămîntul ingineresc la Iași, de apreciere a marilor realizări înfăptuite în anii regimului democrat-popular, de valorificare a tradițiilor științifice progresiste din trecut și totodată de mobilizare a tuturor cadrelor didactice și studenților pentru îndeplinirea sarcinilor de mare răspundere ce stau în fața învățămîntului nostru tehnic superior.

În jumătatea de veac care a trecut de la înființarea institutului se disting net două perioade. Prima perioadă, dificilă și de lentă evoluție, este dominată de străduința de a menține acest învățămînt în Iași în ciuda greutăților materiale, a desconsiderării oficiale și a înapoierii industriale și agricole a Moldovei sub regimul burghezo-moșieresc. Cea de a doua perioadă, de stabilizare și avînt, se deschide o dată cu eliberarea țării și instaurarea regimului de democrație populară.

Economia Moldovei a fost multă vreme o economie feudală, iobăgia desființîndu-se abia în anul 1864, sub Cuza-Vodă. În cadrul acestor relații de producție, învățămîntul în general și cel tehnic în particular, nu putea depăși formele rudimentare.

După mutarea capitalei Moldovei de la Suceava la Iași, în timpul celei de a doua domnii a lui Alexandru Lăpușneanu (1564—1568), comerțul și meseriile cunosc aici o mare înflorire: Iașul devine cel mai însemnat centru cultural al principatului. Crește și numărul școlilor, rezervate însă claselor avute ale societății.

În prima parte a secolului al XVII-lea funcționează colegii la Iași și Cotnari, în care iezuiți poloni predau unele limbi străine și cunoștințe de aritmetică, geometrie și astronomie. Un moment important îl constituie înființarea la Iași, în 1640, a Colegiului lui Vasile Lupu, după modelul Academiei din Kiev întemeiată de Petru Movilă. Școala domnească vasiliană, în care se pare că studiul științelor ocupa un loc mai puțin însemnat, a trecut prin numeroase prefaceri Ea a căpătat cu timpul forma de Academie domnească, în care se predau, mai ales în limba greacă, atît cunoștințe elementare cît și de nivel mai înalt.

La începutul secolului al XVIII-lea, sub Nicolae Mavrocordat, Școala domnească de la Iași este reorganizată între 1712—1713, dar își păstrează caracterul feudal, fiind rezervată numai fiilor de boieri. Printre altele aici se preda aritmetica, geometria, algebra (cu logaritmi), astronomia și aplicațiile ei practice (agrimensura).

În cel de al treilea sfert al secolului al XVIII-lea, școlile elementare în limba romînă încep să capete o anumită dezvoltare. Pentru deservirea lor se trece la publicarea de cărți în romînește, printre care se numără și prima carte de aritmetică tipărită în principate, apărută la Iași în 1795.

Pînă în a doua jumătate a secolului al XVIII-lea, învățămîntul din Academie rămîne închis în vechile forme medievale. Dar paralel cu transformările sociale și economice din cea de a doua jumătate a secolului al XVIII-lea și începutul celui următor, învățămîntul se modifică treptat, adaptîndu-se noilor cerințe ale vieții. Charta din 1765, care acordă științelor un loc mai important, reprezintă primul pas spre reorganizarea Academiei domnești. Reforma învățămîntului din 1803 reușește să îndrepte, în parte, lipsurile vechilor forme și metode de învățămînt.

Gheorghe Asachi are marele merit de a fi înființat prima Școală de ingineri hotarnici și ingineri civili, cu predare în limba romînă. Aceasta a constituit o întruchipare a tendințelor progresiste privind predarea învățămîntului superior în limba romînă și laicizarea sa, tendințe ce se făceau simțite o dată cu ascensiunea treptată a burgheziei. Creată prin hrisovul lui Calimachi din 15 noiembrie 1813, ca „un clas de inginerie și hotărnicie în limba romînă", școala se deschide în 1814. La examenul general, absolvenții expun planuri topografice, arhitectonice și de fortificație.

Datorită strădaniilor lui Gheorghe Asachi se trece la organizarea vechii Academii Vasiliene, întemeiată la Mănăstirea Trei Ierarhi de către domnitorul Vasile Lupu. Reorganizată pe baze noi, în conformitate cu noile condiții economice și sociale, Școala Vasiliană începe să primească și fii de burghezi, cărora li se permitea de acum să ocupe unele posturi oficiale.

Experiența acestui învățămînt a constituit un îndreptar la organizarea, pe baza prevederilor Regulamentului Organic, a primei școli de stat, înființată în 1835, denumită Academia Mihăileană.

În prima perioadă de activitate, Academia Mihăileană număra printre colaboratorii săi pe toți oamenii de știință avansați ai vremii. Spiritul progresist care se manifesta în Academie a alarmat pe guvernanți, care, în încercarea de a limita accesul la învățătură al elevilor, s-au ridicat împotriva predării în limba romînă. Învățămîntul tehnic superior care se înfiripase la Academie se destramă în 1847, o dată cu desființarea acesteia.

Revoluția din 1848 a înlăturat reacțiunea din școala superioară. În 1849 se desființează Institutul francez și se trece la elaborarea unui „nou așezămînt" al școlilor moldovene. La începutul anului 1850 Mihail Kogălniceanu a elaborat primul proiect al unei școli politehnice din țara noastră, ce prevedea organizarea la Iași a unei „Școli de aplicație pentru drumuri, poduri și zidiri".

Proiectul de școală politehnică nu a fost realizat, căci regulamentul scolar pentru organizarea învățămîntului public, promulgat de Grigore Ale-

xandru Ghica la 1 ianuarie 1851, hotăra ca învățămîntul științelor aplicate să fie înglobat în cadrul facultății de filozofie, prevăzută cu două secții. Organizatorii învățămîntului nu au intenționat să separe învățămîntul tehnic superior de Academia reorganizată.

O dată cu unirea principatelor în 1859, ca urmare a luptei și aspirațiilor maselor populare, au fost create condiții mai favorabile pentru un învățămînt superior, capabil să formeze cadrele calificate pe care le cereau necesitățile vremii. În urma eforturilor unui număr de oameni progresiști și patrioți, în anul 1860 se înființează la Iași, sub domnia lui Alexandru Ion Cuza, prima Universitate din țară, în jurul căreia se grupează oameni de litere și de știință valoroși. Dorința întemeietorilor Universității de a sprijini crearea învățămîntului tehnic superior a rămas însă timp de patru decenii doar un deziderat, datorită atitudinii refractare a burghezo-moșierimii.

Abia după războiul de independență din 1877, condițiile social-economice devin mai favorabile învățămîntului tehnic. Deși exploatarea de către capitalul străin a materiilor prime, exportate în occident, continuă intens, industria face progrese într-un ritm ceva mai viu. Apar fabrici de zahăr, spirt, de hîrtie, tăbăcării. Burghezia romînă și străină caută noi plasamente de capital în industria extractivă și se pun bazele unui început de industrie grea. Apar cereri de ingineri, în special pentru industria de construcții, industria chimică, alimentară, a petrolului etc. Sub presiunea acestor fapte și în concordanță cu opiniile lor asupra necesității dezvoltării industriei, profesorii înaintați de la Universitatea din Iași încep să militeze din nou pentru organizarea unui învățămînt tehnic superior în cadrul Universității din Iași, care să acopere lipsa unei școli politehnice și a unui institut agronomic.

Datorită eforturilor întreprinse de savanți înaintați ca Petru Poni, Dragomir Hurmuzescu și Anastase Obregia, pe lîngă facultatea de științe se introduc o serie de cursuri suplimentare, tratînd chestiuni susceptibile de aplicații practice la noi în țară. Aceste cursuri libere erau consacrate industriei petrolului, care luase între timp o mare dezvoltare, în urma utilizării tot mai largi, pe plan mondial, a motoarelor cu ardere internă. Astfel, începînd cu anul 1903, se predau la facultatea de științe cursurile: Studiul chimic al petrolului (prof. P. Poni), Tehnologia petrolului (prof. An. Obregia). Geologia petrolului (prof. I. Simionescu), Aplicațiile industriale ale electricității (prof. Drag. Hurmuzescu).

Încercările fructuoase întărite prin constituirea catedrelor de chimie agricolă (1905) și chimie tehnologică (1906) au condus la organizarea primei Școli de electricitate de pe lîngă facultatea de științe a Universității din Iași (1910), devenită în 1915 Institut electrotehnic universitar.

Etapa de luptă pentru introducerea învățămîntului ingineresc la Universitatea din Iași, care a durat aproape două decenii, se încheie la 7 noiembrie 1912, cînd apare „Regulamentul pentru științele aplicate", prevăzînd înființarea la Universitate a secțiilor de electrotehnică și chimie aplicată. Evenimentul, avînd o semnificație deosebită în istoria procesului de dezvoltare a învățămîntului tehnic superior din Moldova, reprezintă totodată ac-

tul de înființare a actualului Institut politehnic din Iași, care și-a sărbătorit semicentenarul în noiembrie 1962.

Secțiile de electrotehnică și chimie aplicată, în jurul cărora s-au format toate facultățile actuale ale institutului, au funcționat între 1912 și 1937 în cadrul Universității din Iași. În acest răstimp, caracterizat prin eforturi de găsire a unei căi proprii de dezvoltare, specifică științelor tehnice, s-au ameliorat continuu planurile de învățămînt, s-au elaborat și editat primele cursuri de specialitate, au fost pregătite cadre didactice inginerești și numeroși ingineri valoroși.

În anul 1913, imediat după terminarea primului război mondial, au fost elaborate regulamentele tuturor secțiilor de științe aplicate. Secția de chimie tehnologică, transformată radical, capătă denumirea de secție industrială. În anul 1923, durata de studii se prelungește de la trei, la patru ani. Noile planuri introduc totodată cursuri noi, care lărgesc cultura tehnică generală a viitorilor ingineri.

Eforturile îndelungate ale oamenilor de știință înaintați pentru crearea unui învățămînt tehnic superior la Iași sînt încununate de succes în 1937, cînd se înființează Școala politehnică „Gh. Asachi". Ea funcționează cu secțiile de chimie industrială și electrotehnică. Legea din noiembrie 1938 transformă secțiile în facultăți și pune politehnicile pe picior de egalitate cu universitățile. Totodată, facultatea de științe agricole din cadrul Universității trece la Politehnica „Gh. Asachi", sub denumirea de facultate de agronomie. Printre cadrele didactice de valoare ale Politehnicii „Gh. Asachi" trebuie citați Acad. Ștefan Procopiu, Acad Radu Cernătescu, prof. C. V. Gheorghiu, membru corespondent al Academiei R.P.R., prof. Gh. Alexa, prof. Cesar Parteni.

Abia înființată, Politehnica din Iași intră într-o perioadă de sbucium care face ca procesul ei de dezvoltare să decurgă foarte lent. În anii celui de al doilea război mondial Politehnica din Iași este mutată, ceea ce agravează procesul de dezorganizare. Revenită în Iași în martie 1945, după eliberarea țării noastre de către Armata Sovietică, în dezvoltarea Politehnicii, care funcționa atunci cu patru facultăți (chimie industrială, electromecanică, construcții și agronomie), survine o schimbare hotărîtoare.

În anii regimului burghezo-moșieresc, învățămîntul tehnic superior era accesibil mai ales celor proveniți din clasele exploatatoare. Taxele ridicate constituiau unul din mijloacele prin care burghezia și moșierimea realizau politica lor de clasă. Elementelor dotate provenite din rîndul oamenilor muncii li se răpea astfel posibilitatea de a urma studii superioare, căci numărul neînsemnat de burse nu putea satisface nici pe departe necesitățile. Baza materială a Politehnicii era complet nesatisfăcătoare, statul burghezo-moșieresc preocupîndu-se în mod cu totul insuficient de dotarea institutiilor de învățămînt superior. Facultățile nu dispuneau de laboratoare corespunzătoare și de aparatura necesară desfășurării normale a procesului didactic.

După 23 August 1944, în urma schimbărilor structurale profunde în viața economică și social-culturală a țării, s-au îmbunătățit continuu condițiile de viață și de studiu ale studenților și cadrelor didactice, iar procesul

de învățămînt a căpătat o nouă orientare. Ritmul vertiginos de dezvoltare a economiei și culturii a impus sarcina pregătirii unui mare număr de specialiști cu calificare superioară. Reorganizarea învățămîntului superior, o dată cu a întregului învățămînt, a devenit o problemă de interes general, o problemă de stat.

Reforma învățămîntului din 1948 a deschis o etapă nouă, calitativ superioară, în istoria învățămîntului superior din țara noastră. Acesta a fost ridicat la înălțimea sarcinii de mare importanță de a pregăti cadrele cu calificare înaltă necesare desfășurării revoluției culturale și construirii bazei economice a socialismului. Învățămîntul superior capătă un conținut adînc științific, fiind legat din ce în ce mai strîns de practică și avînd la bază dezvoltării sale continue, învățătura marxist-leninistă.

Prin reforma învățămîntului Politehnica „Gh. Asachi" se transformă în Institutul politehnic din Iași. Facultatea de agronomie este reprofilată în institut independent, în cadrul institutului politehnic funcționînd facultățile de: chimie industrială, electrotehnică, mecanică și construcții. Numărul facultăților se mărește prin cuprinderea în 1955 a facultății de industrie ușoară și în 1962 a facultății de hidrotehnică agricolă. Din 1951 funcționează cursuri fără scoatere din producție, care permit muncitorilor înaintați, cu pregătire medie corespunzătoare, să capete o calificare superioară.

În perioada care s-a scurs de la reforma învățămîntului și pînă în prezent, pe măsura creșterii forțelor institutului, a bazei sale materiale, s-au creat condiții pentru pregătirea de cadre inginerești într-un număr sporit de specialități. Dacă în anul 1948 institutul avea 9 secții de specializare care cuprindeau 23 de catedre cu 144 cadre didactice, în anul 1963 dispune, în cadrul celor 6 facultăți, de 19 secții de specializare și 43 de catedre cu 464 cadre didactice. Numărul studenților este în continuă creștere, ajungînd în prezent la 5 000, față de 811 în anul 1948.

Din 1945 și pînă în momentul de față au primit diplome 5 134 de noi ingineri. Institutul posedă numeroase amfiteatre și săli de curs, laboratoare bine utilate, stații pilot moderne, cămine și cantine confortabile. Începînd din 1948 spațiul de învățămînt a crescut de aproape 5 ori, numărul laboratoarelor de aproape 3 ori, iar bibliotecile au primit peste 150 000 noi exemplare. Ca rezultat al aplicării reformei învățămîntului, porțile institutului sînt astăzi larg deschise fiilor de muncitori, țărani muncitori și intelectuali, care reprezintă majoritatea covîrșitoare a studenților. Un mare număr de studenți primesc burse. Cadrele didactice ale institutului continuă și dezvoltă pe un plan superior tradiția predării unor cursuri de înaltă ținută științifică, inaugurată de oamenii de știință înaintați care au pus bazele învățămîntului tehnic la Iași. În anii regimului democrat popular, cadrele didactice au dus o muncă continuă, sistematică și perseverentă, de îmbunătățire permanentă a conținutului cursurilor prin tratarea tuturor problemelor de pe pozițiile științifice ale materialismului dialectic, prin lărgirea și adîncirea documentării, prin prezentarea celor mai recente realizări ale științei și tehnicii. An de an se îmbunătățesc toate laturile procesului de învățămînt, ceea ce se reflectă pregătirea la nivel tot mai ridicat a absolvenților. Procesul de învățămînt urmărește formarea unor ingineri cu o

înaltă pregătire profesională, cu orizont larg politic și ideologic, capabili să rezolve sarcinile complexe ale desăvîrșirii construcției socialiste și a trecerii treptate la comunism în patria noastră. O contribuție de seamă în atingerea acestui scop o aduce organizația U.T.M. împreună cu Uniunea asociațiilor studenților din institut, sub conducerea organizațiilor de partid.

Practica demonstrează că marea majoritate a inginerilor formați în Institutul politehnic din Iași sînt capabili să rezolve cu succes sarcinile de producție. Mulți dintre aceștia lucrează în întreprinderi industriale deosebit de importante pentru economia națională cum sînt: Combinatul chimic din Borzești, Fabrica de fibre sintetice din Săvinești, Fabrica de rulmenți din Bîrlad, Fabrica de țevi din Roman, Uzinele chimice din Turda, Fabrica de antibiotice din Iași, diversele fabrici din sectorul hîrtiei și celulozei, industriei ușoare, industriei electrotehnice, marile șantiere de construcții etc. Multe din cadrele formate în institut după 1948 ocupă în prezent posturi de răspundere în industria noastră socialistă, aducînd o contribuție competentă la dezvoltarea industrială a țării.

Activitatea științifică este într-o continuă dezvoltare în cadrul Institutului politehnic din Iași, orientată cu hotărîre spre necesitățile economiei naționale, spre rezolvarea problemelor științifice și tehnice pe care le ridică construirea socialismului în țara noastră. Organizarea sesiunilor științifice la anumite intervale de timp și planificarea muncii științifice pe catedre contribuie la creșterea numerică și calitativă a lucrărilor de cercetare științifică. Numărul lucrărilor prezentate la sesiuni a crescut de la 51 în 1953 la 230 în 1960. La sesiunea științifică jubiliară a Institutului politehnic din Iași, din noiembrie 1962, au fost prezentate, în cadrul celor 9 secții, 348 de lucrări științifice. Numeroase cadre didactice prezintă lucrări științifice în colaborare cu cercetători din producție. De asemenea ele susțin comunicări apreciate în cadrul Academiei R.P.R., filiala Iași, în cadrul sesiunilor organizate de alte instituții de învățămînt superior din țară, la congrese și simpozioane internaționale. În anii regimului democrat-popular se desfășoară în cadrul institutului un proces puternic de formare a unor centre de cercetare științifică.

În Institutul politehnic din Iași este asigurată aspirantura la un număr de 13 specialități: Tehnologia industriilor anorganice, Tehnologia industriilor organice, Fibre textile și celuloză, Tehnologia chimică a materialelor textile, Pielărie și materii grase, Industrii anorganice, Măsuri electrice, Acționări electrice, Motoare cu combustie internă, Tehnologia metalelor, Materiale de construcții, Geotehnică și fundații și Proiectarea drumurilor. Conducătorii științifici la aceste specialități sînt cadre cu o vastă activitate științifică și o bogată experiență în specialitatea respectivă.

Lucrările științifice ale cadrelor didactice din institut se publică în mare parte în „Buletinul Institutului politehnic din Iași" precum și în publicațiile Academiei R.P.R., în reviste de specialitate din U.R.S.S. și din alte țări. „Buletinul" și-a asigurat și colaborarea multor specialiști de mare prestigiu din U.R.S.S., țările de democrație populară și din alte țări. Din 946 lucrări științifice publicate în „Buletinul Institutului politehnic din Iași" începînd din 1946, 725 sînt ale cadrelor didactice din institut, 89

ale unor specialiști din U.R.S.S. și 132 ale unor cercetători din țările de democrație populară și din alte țări. Prezența „Buletinului" în 84 de țări și în bibliotecile a peste 2 500 instituții științifice din întreaga lume asigură difuzarea rezultatelor muncii științifice a cadrelor didactice și contribuie la cunoașterea și aprecierea științei românești peste hotare.

În afara activității de cercetare științifică, cadrele didactice ale institutului publică numeroase cursuri și manuale, atît pentru uzul studenților cît și al inginerilor și tehnicienilor din producție. De asemenea specialiști din institut au contribuit la organizarea Muzeului politehnic din Iași, care joacă un rol de seamă în formarea culturii tehnice a tineretului.

Procesul dezvoltării continuie și multilaterale a întregii activități desfășurată în Institutul politehnic din Iași se încadrează organic în uriașul ansamblu al operei de desăvîrșire a construcției socialismului în țara noastră. Istoricele hotărîri ale Congresului al III-lea al Partidului Muncitoresc Romîn, eveniment de deosebită importanță în viața partidului și întregului nostru popor, prevăd sarcini sporite și pentru institutele de învățămînt tehnic superior. Pînă în anul 1965 numărul inginerilor din economia națională urmează să crească la 80 000 față de 59 000 în 1959. Perspectivele ce se deschid Institutului politehnic din Iași au fost clar conturate în expunerea făcută de tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej la adunarea activului de partid din regiunea Iași din septembrie 1961, unde s-a arătat că „potrivit sarcinilor de pregătire a cadrelor inginerești necesare economiei noastre naționale, s-a hotărît construirea în orașul Iași a unui institut politehnic..." (Gheorghe Gheorghiu-Dej, Pentru dezvoltarea economică și social-culturală a regiunii și orașului Iași, *Ed. Polit., Buc., 1961, p. 26*).

Noua cetate a științei și tehnicii care se va ridica în Iași va permite ca instruirea studenților să fie mai bogată în conținut și mai bine legată de practică, asigurînd viitorilor ingineri cunoașterea temeinică a tehnicii noi, sub cele mai variate aspecte.

Sărbătorind semicentenarul Institutului politehnic din Iași, cadrele didactice sînt perfect conștiente că datorează partidului și clasei muncitoare realizările cu care se mîndresc în prezent. Ele sînt hotărîte să îndeplinească pe viitor cu și mai multă energie sarcina de mare cinste și răspundere, de a contribui la formarea de cadre superioare, temeinic pregătite la nivelul tehnicii mondiale și profund atașate de popor.

Prof. dr. D. RUSU

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 3—4, 1962

Математика, Теоретическая механика, Физика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. D. 519.51

UNE FONCTION D'ENSEMBLE

PAR

AL. CLIMESCU

Note présentée dans la session scientifique jubiliaire de l'Institut Polytechnique de Jassy, 8—10 Novembre 1962

1. Des considérations d'ordre physique, qui ne seraient pas à leur place ici, nous ont conduit à penser que la classe de fonctions d'ensemble ci-dessous définie présente un certain intérêt.

O désignera l'ensemble vide, A, B,... des ensembles quelconques, $\cap$ et $\cup$ seront les symboles désignant respectivement la réunion et l'intersection, un atome sera un élément quelconque d'un ensemble donné ; par abus de notation et de langage nous confondrons l'atome p et l'ensemble $\{p\}$.

Par définition, un indice sera une fonction d'ensemble qui jouit des propriétés suivantes :

1°. M étant un ensemble donné quelconque, $H(A)$ est une fonction numérique définie pour chaque partie de M;

2°. $-1 \leqslant H(A) \leqslant 1$;

3°. $H(O) = 0$;

4°. Si p est un atome, alors $H(p) = 1$ ou $H(p) = -1$;

5°. Si $A \subset M$, $B \subset M$, $A \cap B = O$, alors :

$$\min [H(A), H(B)] \leqslant H(A \cup B) \leqslant \max [H(A), H(B)].$$

Si $H(p) = 1$ nous dirons que l'atome p est marqué 1 (marqué -1 si $H(p) = -1$). Alors

6°. Si M est fini et possède m atomes marqués 1 et n atomes marqués -1, $H(M)$ est uniquement déterminée par la paire ordonnée (m, n).

La condition 6° revient à identifier les fonctions $H(M)$, pour M fini, avec les fonctions numériques $H(m, n)$ définies pour M fini, avec les fonctions numériques $H(m, n)$ définies pour tous les couples d'entiers $\geqslant 0$ et possédant les propriétés suivantes ;

$2^{\circ\prime}$. $-1 \leqslant H(m,n) \leqslant 1$;

$3^{\circ\prime}$. $H(0,0) = 0$;

$4^{\circ\prime}$. $H(1,0) = 1$; $H(0,1) = -1$;

$5^{\circ\prime}$. $\min[H(m,n), H(p,q)] \leqslant H(m+p, n+q) \leqslant \max[H(m,n), H(p,q)]$.

On voit aussitôt qu'on doit avoir $H(n,0) = 1$, $H(0,n) = -1$ si $n > 0$. Notre but est de démontrer que la classe d'indices définis sur un ensemble quelconque n'est pas vide.

2. Proposition I. *Soit* f (x) *une fonction définie pour* $0 \leqslant x \leqslant \infty$, *non-croissante et avec les propriétés suivantes*: f (0) = 1, f $(\infty) = -1$ (c'est-à-dire $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$). *Si l'on pose*:

$$H(m,n) = f(n/m), \quad \text{si} \quad m+n>0, \quad H(0,0) = 0,$$

on obtient un indice pour les ensembles finis. (Si $n > 0$ on pose $n/0 = \infty$).

Les conditions $2^{\circ\prime}$, $3^{\circ\prime}$, $4^{\circ\prime}$ sont trivialement vérifiées. Pour démontrer $5^{\circ\prime}$ il suffit de vérifier les cas suivants:

(a) $m = n = 0$; $5^{\circ\prime}$ s'écrit:

$$\min[0, H(p,q)] \leqslant H(p,q) \leqslant \max[0, H(p,q)]$$

et $5^{\circ\prime}$ est évidemment vérifiée;

(b) $m > 0$, $n = 0$; $5^{\circ\prime}$ s'écrit:

$$H(p,q) = \min[1, H(p,q)] \leqslant H(m+p, q) \leqslant \max[1, H(p,q)] = 1,$$

évidemment vérifiée si $H(p,q) = -1$; si $H(p,q) > -1$, on a $p > 0$ et $H(p,q) = f(q/p)$, $H(m+p,q) = f(q/(m+p))$ avec $q/p \geqslant q/(m+q)$, donc $f(q/p) \leqslant f(q/(m+p))$ et $5^{\circ\prime}$ est encore vérifiée;

(c) $m = 0$, $n > 0$, $H(m,n) = -1$ et $5^{\circ\prime}$ s'écrit:

$$-1 = \min[-1, H(p,q)] \leqslant H(p, q+n) \leqslant \max[-1, H(p,q)] = H(p,q)$$

et la démonstration s'achève comme dans le cas (b);

(d) $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $q > 0$; on peut supposer sans restreindre la généralité qu'on a $n/m \leqslant q/p$, donc $n/m \leqslant (n+q)/(m+p) \leqslant q/p$, d'où:

$$\min[H(m,n), H(p,q)] = H(p,q) \leqslant H(m+p, n+q) \leqslant H(m,n) = \\ = \max[H(m,n), H(p,q)].$$

Si l'on prend $f(x) = (1-x)/(1+x)$ on voit que $H(m,n) = (m-n)/(m+n)$. $m+n > 0$ est un indice pour les ensembles finis ($H(0,0) = 0$).

La construction de la fonction H pour un ensemble infini M s'appuie sur l'acceptation sans restriction de l'axiome du choix, qui permet de considérer tout ensemble infini M comme la réunion d'une famille de parties M_k avec les propriétés suivantes: $M_k \cap M_l = O$ si $k \neq l$, chaque M_k est infini; l'ensemble k des indices est bien ordonné.

Proposition II. *On peut définir un indice pour n'importe quel ensemble infini* M.

Soit $M = \bigcup M_k$, les M_k possédant les propriétés ci-dessus indiquées.

On choisit d'abord arbitrairement $H(p)$ pour les atomes de M et à l'aide d'une fonction $H(m,n)$ on définit $H(A)$ pour toutes les parties finies de M.

Si A est une partie infinie, on peut avoir deux cas :

(a) $A \cap M_k$ est finie (ou vide) pour chaque indice k;

(b) L'ensemble des indices k pour lesquels $A \cap M_k$ est infinie n'est pas vide.

Dans le cas (a) on pose $H(A) = 0$; dans le cas (b) on pose $H(A) = H(M_i)$ où i est le premier indice pour lequel $A \cap M_k$ est un ensemble infini. Enfin le choix des $H(M_k)$ est arbitraire, bien entendu la condition 2° étant respectée.

Démontrons que $H(A)$ est un indice; les conditions 1°...4° sont évidemment vérifiées. Pour démontrer 5°, en vertu du rôle symétrique de A et B, il suffit de considérer les six cas suivants.

(1) A et B parties finies. 5° est vérifiée à cause des propriétés de $H(m,n)$;

(2) A fini, B infini du type (a). $B \cup A$ est du type (a), donc $H(B) = H(A \cup B) = 0$ et 5° s'écrit $\min(H(A),0) \leqslant 0 \leqslant \max(H(A),0)$, trivialement vérifiée.

(3) A fini, B infini du type (b); si i est le premier indice pour lequel $B \cap M_i$ est infini, il est aussi le premier indice pour lequel $(A \cup B) \cap M_i$ est infini, donc $H(A \cup B) = H(B) = H(M_i)$ et 5° s'écrit : $\min[H(A), H(M_i)] \leqslant H(M_i) \leqslant \max[H(A), H(M_i)]$, trivialement vérifiée;

(4) A infini du type (a), B infini du type (a), donc $A \cup B$ infini du type (a) et $H(A) = H(B) = H(A \cup B) = 0$, donc 5° est vérifiée;

(5) A infini du type (a), B infini du type (b). Si i est le premier indice pour lequel $B \cap M_i$ est infini, il est aussi le premier indice pour lequel $(A \cup B) \cap M_i$ est infini, donc $H(A \cup B) = H(B) = H(M_i)$ et 5° s'écrit $\min[0, H(M_i)] \leqslant H(M_i) \leqslant \max[0, H(M_i)]$;

(6) A infini du type (b), B infini du type (b). Soit i le premier indice pour lequel $A \cap M_i$ est infini et j le premier indice pour lequel $B \cap M_j$ est infini. Sans diminuer la généralité on peut supposer $i \leqslant j$; alors i est le premier indice pour lequel $(A \cup B) \cap M_i$ est infini, donc $H(A) = H(A \cup B) = H(M_i), H(B) = H(M_j)$ et 5° s'écrit :

$$\min[H(M_i), H(M_j)] \leqslant H(M_i) \leqslant \max[H(M_i), H(M_j)],$$

trivialement vérifiée.

3. Observations. 1. Comme on vient de le voir, la classe des indices définissables pour un ensemble infini est déjà assez large et le procédé indiqué n'épuise évidemment pas toutes les possibilités de construction de la fonction H.

2. La classe des fonctions $H(m,n)$ paraît elle-même ne pas épuiser la classe des indices pour les ensembles finis.

3. Pour les ensembles dénombrables il est souhaitable de construire un indice en utilisant la bonne ordination du type ω.

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

ФУНКЦИЯ МНОЖЕСТВА

(Резюме)

Доказывается возможность построения функции множества удовлетворяющей условиям 1°...5° из § 1, как для конечных, так и для бесконечных множеств.

O FUNCŢIE DE MULŢIME

(Rezumat)

Se demonstrează că este posibil să se construiască o funcţie de mulţime satisfăcînd la condiţiile 1°...5° din § 1, atît pentru mulţimile finite cît şi pentru acelea infinite.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. K. 519.4

KOMPAKT ERZEUGTE VOLLSTÄNDIGE *l*-GRUPPEN

VON

FRANTIŠEK ŠIK

Untersuchungen der vorliegenden Arbeit stützen sich auf Resultaten der Disjunktivitätstheorie auf *l*-Gruppen, deren Grundriss in [1], [3] erbaut wurde. Der besseren Übersicht halber, zitieren wir notwendige Begriffe und Resultate.

G sei eine *l*-Gruppe. Ihre Gruppenoperation wird additiv geschrieben, die Verbandsoperationen werden mit $\vee$, $\wedge$ bezeichnet. Zu jedem Element $x \in G$ definieren wir seinen *positiven* bzw. *negativen Teil*, bzw. *absoluten Wert*: $x^+ = x \vee 0$, $x^- = x \wedge 0$ bzw. $|x| = x \vee -x$. Das Simbol A^+ bedeutet die Menge der positiven Teile aller Elemente der Menge $A \subseteq G$; ähnlich für A^-. Zwei Elemente $x, y \in G$ (zwei Untermengen A, $B \subseteq G$) heissen *disjunktiv*, in Zeichen $x \delta y$ ($A \delta B$), wenn $|x| \wedge |y| = 0$, ($a \in A$, $b \in B \rightarrow a \delta b$) gilt. Die Menge $A' = \{x \in G : x \delta A\}$ heisst *das disjunktive Komplement* (in G) der Menge A. Jede menge $K \subseteq G$, zu der eine Menge $A \subseteq G$ existiert, so dass $A' = K$ gilt, nennen wir *eine Komponente* der *l*-Gruppe G. Zwei Komponenten A', A'' heissen *komplementär* (wobei A'' statt $(A')'$ geschrieben wird). Die Menge aller Komponenten der *l*-Gruppe G ist durch die Inklusion teilweise geordnet und bezüglich dieser Anordnung bildet sie eine komplette Boolesche Algebra; das Infimum einer Komponentenmenge ist ihr Durchschnitt; das grösste und das kleinste Element der Algebra sind G und 0. Die Verbandsoperationen der Algebra werden so wie im Verbande G bezeichnet.

Jede Komponente ist eine konvexe und regelmässige Untergruppe in G. Dazu sei es bemerkt, dass eine Untergruppe $\mathfrak{J}$ *konvex* (in G) ist, wenn es gilt: $a, b \in \mathfrak{J}$, $x \in G$, $a \vee b \geqq x \geqq a \wedge b \rightarrow x \in \mathfrak{J}$; $\mathfrak{J}$ heisst *regelmässig*, wenn für eine beliebige Menge $A \subseteq \mathfrak{J}$, für die $\vee A$ in G existiert, $\vee A \in \mathfrak{J}$ gilt. Sind K, L konvexe Untergruppen in G, so ist $K \cap L = 0 \longleftrightarrow K \delta L$. Eine Komponente K heisst ein *direkter Faktor* (in G), wenn $K + K' = G$. Unter einer *direkten Summe* $\dot{\sum}_\alpha K_\alpha$ der *l*-Gruppen $\{K_\alpha\}$ verstehen wir die *l*-Gruppe aller auf der Menge der Indizen $\{\alpha\}$ definierten Funktionen f, wobei $f(\alpha) \in K_\alpha$, $f(\alpha) = 0$, für fast alle α ist. Die algebraischen Operationen werden koordinatenweise definiert; d.h. $(f \times g)(\alpha) = f(\alpha) \times g(\alpha)$ für jedes α, wobei das Symbol $\times$ irgendeine der Opera-

tionen $+$, $\vee$, $\wedge$ bedeutet. Eine l-Gruppe G ist der direkten Summe der l-Gruppen $\{K_\alpha\}$ dann und nur dann isomorph, wenn ein System je zwei disjunktiver Komponenten $\{L_\alpha\}$ in G existiert, so dass gilt: 1°. $L_\alpha \cong K_\alpha$ für jedes α; 2°. Sind Γ, Δ zwei nitchleere elementfremde Teile der Indizenmenge $\{\alpha\}$, so ist $\sum_{\alpha\in\Gamma} L_\alpha \cap \sum_{\alpha\in\Delta} L_\alpha = 0$; 3°. $\sum_\alpha L_\alpha = G$.

Eine l-Gruppe G heisst *kompakt erzeugt*, wenn zu jeder Menge $A \subseteq G$, für die $\bigvee A$ in G existiert, eine endliche Untermenge $B \subseteq A$ vorhanden ist, so dass $\bigvee B = \bigvee A$ gilt.

Hilfssatz 1. *Für eine konvexe Untergruppe* J *einer* l-*Gruppe* G *sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1°. J *ist ein direkter Faktor in* G.

2°. J *ist eine Komponente in* G.

3°. J *ist eine regelmässige Untergruppe in* G ([1], XIV, § 11, Th. 19).

Hilfssatz 2. *Die Vereinigung einer beliebigen Kette von Komponenten einer kompakt erzeugten vollständigen* l-*Gruppe ist ein direkter Faktor in* G.

Beweis. $\{K_\alpha\}$ sei eine Kette von Komponenten in G. Dann ist die Untergruppe $\bigcup K_\alpha = K$ konvex. Zu Beweis, dass K regelmässig ist, sei $M \subseteq K$ eine in G von oben beschränkte Menge. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Untermenge $N \subseteq M$ mit $\bigvee N = \bigvee M$. Die Menge N ist endlich, also ist sie in einer der Komponenten K_α enthalten; diese Komponente sei mit K_β bezeichnet. Also ist $\bigvee N \in K_\beta \subseteq K$, d.h. $\bigvee M \in K$. Die konvexe Untergruppe K ist also regelmässig und zufolge Hilfssatz 1 ein direkter Faktor in G.

Zwei folgende Sätze lösen das Problem, kompakt erzeugte vollständige l-Gruppen zu charakterisieren. Der erste ist eine Konsequenz des Satzes 2 [3], aus welchem wir einen notwendigen Teil der Behauptung zitieren:

Ist die Vereinigung einer beliebigen Kette von Komponenten einer l-Gruppe G ein direkter Faktor in G, so ist die l-Gruppe G der direkten Summe liniar geordneter Komponenten in G isomorph.

Satz 1. *Eine kompakt erzeugte vollständige* l-*Gruppe* $\neq 0$ *ist isomorph einer direkten Summe von Kopien der linear geordneten additiven Gruppe der ganzen Zahlen.*

Beweis. Auf Grund der oben genannten Behauptung bleibt es nur zu beweisen, dass jede linear geordnete Komponente $K \neq 0$ in G der linear geordneten additiven Gruppe der ganzen Zahlen isomorph ist. Es sei mit A die Menge aller von Null verschiedenen positiven Elemente aus K bezeichnet. Das Infimum $\bigwedge A$ existiert offensichtlich (und es ist gleich Null oder ist es das das Nullelement bedeckende Element). Da K eine regelmässige Untergruppe ist (Hilfssatz 1), so gilt $\bigwedge A = -\bigvee(-A) \in K$. Weiterhin existiert eine endliche Untermenge $B \subseteq A$ mit $\bigvee(-B) = \bigvee(-A)$, also ist $\bigwedge B = \bigwedge A$. Ersichtlich gilt $\bigwedge B \neq 0$, also deckt $\bigwedge A$ das Nullelement. Hieraus entnimmt man schon unmittelbar, dass K der linear geordneten additiven Gruppe der ganzen Zahlen isomorph ist (siehe z. B. [2]). Damit ist der Beweis zu Satz 1 vollendet.

Die besondere Beschaffenheit der Bedingungen unseres Satzes erlaubt eine neue und direkte Beweisführung, die nun durchgeführt wird.

Zuerst beweisen wir, dass *die Summe zweier disjunktiven Komponenten* M, N *in* G *wieder eine Komponente in* G *ist*. Jede Komponente einer vollständigen l-Gruppe ist selbst eine vollständige l-Gruppe (Hilfssatz 1), also ist auch die kleinste die Komponenten M, N umfassende Komponente L in G als eine l-Gruppe vollständig. M und N stellen offensichtlich komplementäre Komponenten der vollständigen l-Gruppe L dar und damit ist die Summe $M+N$ gleich L, also eine Komponente in G.

Weiterhin wird es bewiesen werden, dass *jede echte Komponente* K *in* G (d.h. $0 \neq K \neq G$) *eine linear geordnete Komponente* $\neq 0$ *der* l-*Gruppe* G *enthält*. Das disjunktive Komplement K' zu K ist eine echte Komponente. Also existiert ein Element $x > 0$, $x \in K'$. Die Menge aller das Element x nicht enthaltenden Komponenten in G ist durch die Inklusion teilweise geordnet und nach dem Zornschen Lemma (mit Rücksicht auf Hilfssatz 2) enthält sie ein maximales Element $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J} \supseteq K'$. Das disjunktive Komplement $\mathfrak{J}'$ zu $\mathfrak{J}$ ist linear geordnet (und ersichtlich gilt $0 \neq \mathfrak{J}' \subseteq K$). Im umgekehrten Fall existiert ein mit Null unvergleichbares Element $c \in \mathfrak{J}'$. Die Komponente $\mathfrak{J}$ ist vermöge $\{c^+\}'', \{c^-\}'' \subseteq \mathfrak{J}'$ disjunktiv mit beiden Komponenten $\{c^+\}''$ und $\{c^-\}''$. Die Mengen $\mathfrak{J} + \{c^+\}''$ und $\mathfrak{J} + \{c^-\}''$ sind Komponenten und das Element x liegt in beiden, wie es aus der Maximalität von $\mathfrak{J}$ folgt. Dann gilt $x = a + a' = b + b'$, wobei $a, b \in \mathfrak{J}$, $a' \in \{c^+\}''$, $b' \in \{c^-\}''$, $a, a', b, b' \geqq 0$ ist. Stat $a+a'$ lässt sich $a \vee a'$ schreiben, da $a \wedge a' = 0$ ist; analog für b, b'. Die Relationen $x = a \vee a' = b \vee b'$ liefern $(a \wedge b') \vee (a' \wedge b') = (a \vee a') \wedge b' = (b \vee b') \wedge b' = b'$, d. h. $b' = 0$ (infolge $a \wedge b' = 0 = a' \wedge b'$). Die Relation $x = b \in \mathfrak{J}$ ergibt einen Widerspruch mit der Voraussetzung und deshalb enthält K die linear geordnete Komponente $\mathfrak{J}'$.

Zwei verschiedene linear geordnete Komponenten K, L *sind disjunktiv*. Umgekehrt sei $K \cap L = M \neq 0$ vorausgesetzt. Ist z. B. $K \supseteq L$, so ist $M' \cap L \neq 0$. (Aus $M' \cap L = 0$ erhält man nämlich nacheinander: $M \supseteq L$, $M \supseteq L \supseteq M$, $M = L$, $K \supseteq L$). Deshalb existieren Elemente $a \in M (\subseteq L)$, $a > 0$, $b \in M' \cap L$, $b > 0$ mit $a \wedge b = 0$. Nun aber enthält die linear geordnete Komponente L unvergleichbare Elemente a, b. Der Wiederspruch zu welchem wir gelangt sind, bestätigt die Gültigkeit der Relation $K \cap L = 0$ und dadurch aus die Disjunktivität der Komponenten K, L.

Wir ordnen die Menge aller linear geordneten Komponenten in G in eine transfinite Folge $\{\mathfrak{J}_\alpha\}_{\alpha < \varrho}$ und setzen voraus, dass $C_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{J}_\beta$ für $\alpha < \gamma$ eine Komponente in G ist (Induktionsvoraussetzung). Ist γ isoliert, so ist $C_\gamma = \mathfrak{J}_{\gamma-1} + \sum_{\beta < \gamma-1} \mathfrak{J}_\beta = \mathfrak{J}_{\gamma-1} + C_{\gamma-1}$ eine Komponente. Die Komponenten $C_{\gamma-1}$, $\mathfrak{J}_{\gamma-1}$ sind nämlich disjunktiv: Für $\beta < \gamma - 1$ gilt $\mathfrak{J}_{\gamma-1} \cap \mathfrak{J}_\beta = 0$ und folglich $0 = \mathfrak{J}_{\gamma-1} \cap \bigvee_{\beta < \gamma-1} \mathfrak{J}_\beta \supseteq \mathfrak{J}_{\gamma-1} \cap \sum_{\beta < \gamma-1} \mathfrak{J}_\beta \supseteq 0$, d. h. $\mathfrak{J}_{\gamma-1} \cap C_{\gamma-1} = 0$, $\mathfrak{J}_{\gamma-1} \delta C_{\gamma-1}$. Ist γ eine Limeszahl, so ist die Menge $C_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} C_\alpha$ als die Vereinigung einer Komponentenkette eine Komponente (Hilfssatz 1 und 2).

Ist $C_\varrho \neq G$, so ist C'_ϱ eine echte Komponente und deshalb enthält sie eine linear geordnete Komponente $\neq 0$ der l-Gruppe G im Widerspruch der Voraussetzung. Somit ist $G = \sum_{\alpha<\varrho} \mathcal{J}_\alpha$. Man braucht noch zu beweisen, dass für zwei beliebige nichtleere Teile Γ, Δ der Indizenmenge $\{\alpha\}$, $\sum_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{J}_\alpha \cap \sum_{\alpha\in\Delta} \mathcal{J}_\alpha = 0$ gilt. Die Gleichheit folgt aber unmittelbar aus den Relationen:

$$0 = \bigvee_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{J}_\alpha \wedge \bigvee_{\alpha\in\Delta} \mathcal{J}_\beta \supseteq \sum_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{J}_\alpha \cap \sum_{\alpha\in\Delta} \mathcal{J}_\alpha \supseteq 0.$$

Demnach ist die l-Gruppe der direkten Summe $\dot{\sum} \mathcal{J}_\alpha$ isomorph.

Satz 2. *Eine direkte Summe von Kopien der linear geordneten additiven Gruppe der ganzen Zahlen ist eine kompakt erzeugte vollständige* l*-Gruppe.*

Beweis. Es sei $G = \dot{\sum} K_\alpha$, jedes K_α eine linear geordnete additive Gruppe der ganzen Zahlen, $\{f_\nu\} \subseteq G$, f, $g \in G$, $g \leqq f_\nu \leqq f$ für jedes ν. Evident existiert $\sup_\nu f_\nu(\alpha)$ für jedes α (denn es ist $\sup_\nu f_\nu(\alpha) = \max_\nu f_\nu(\alpha)$). Die durch die Vorschrift $h(\alpha) = \sup_\nu f_\nu(\alpha)$ definierte Funktion h gehört zu G, denn es ist für fast alle Indizen α, $0 = g(\alpha) \leqq h(\alpha) \leqq f(\alpha) = 0$. Weiter ist $h = \bigvee_\nu f_\nu$ in G. Die l-Gruppe G ist deswegen vollständig. G ist auch kompakt erzeugt. In der Tat sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alle Indizen mit $h(\alpha_i) \neq 0$, so existieren Indizen $\nu_1, \ldots, \nu_n$ mit $f_{\nu_i}(\alpha_i) = h(\alpha_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Daraus folgt $h = \bigvee_{i=1}^{n} f_{\nu_i}$ und der Satz ist bewiesen.

Eingegangen am 1 XII 1961

Universität, Brno,
Tchechoslowakische Sozialistische Republik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Birkhoff G., *Lattice Theory*, rev. ed., 1948, New York.
2. Loonstra F., Indag. Math., 1951, **13**, pp. 162—168.
3. Шик Ф., Чехосл. мат. журнал, 1956, **6** (**81**), стр. 1—25.

ПОЛНЫЕ l-ГРУППЫ КОМПАКТНО ОБРАЗОВАННЫЕ

(Резюме)

Указывается построение всех полных l-групп компактно образованных.

l-GRUPURI COMPLETE GENERATE COMPACT

(Rezumat)

S-a indicat construcţia tuturor l-grupurilor complete generate compact.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 517.948.34

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Д. МАНЖЕРОН и Л. Е. КРИВОШЕИН

Академику АН СССР
В. И. СМИРНОВУ
к 75-летию со дня рождения

1. В пятилетний период истекший со дня выхода в свет капитального 4-х томного труда в 5 книгах академика В. И. Смирнова [1], удостоенного Государственной премии СССР им. В. И. Ленина и посвященного изложению курса высшей математики, начал выкристаллизовываться ряд новых результатов относящихся к обширной главе граничных задач для интегро-дифференциальных уравнений (и.-д. у.) в частных производных.

Серия докладов заслушанных на недавно проведенном международном математическом конгрессе [2] в области граничных задач разлагается на повсемерно углубляющиеся отделы эллиптических (самосопряженных и несамосопряженных) или же неэллиптических граничных задач. Область граничных задач эллиптического типа различных порядков основанных на капитальных трудах последних лет председателя АН СССР акад. М. В. Келдыша [3], лауреатов премии Фильдса международных математических конгрессов 1958 и 1962 гг. Л. Хермандера [4] и Л. Гординга [5], широко известных исследователей К. Миранда [6], М. В. Вишика и Л. А. Люстерника [7], Л. Шварца [8] и др., была представлена на конгрессе 1962 г. С. Агмоном [9], в то время как граничные задачи неэллиптического типа были объектом сообщения представленного одним из авторов настоящей статьи [10], исходя из ранее им формулированных и уже частично решенных граничных задач вида:

$$[A(x)u' + B(x)u]' + \lambda[B(x)u' + C(x)u] = 0, \quad u' \equiv Du = \partial^m u/(\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m),$$

$$R \equiv \{x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad u\big|_{FR} = 0,$$

новшество которых состоит в том, что „прямоугольник" R — любого числа измерений, а символ $'$ представляет собой полную производную в смысле М. Пиконе [11], [12], и опираясь на ряд результатов, полученных обеими авторами [13]...[16] на основании богатой тематики разработанной вторым из авторов [17], [18] в рамках пишно расцветшей Киргизской школы по и.-д. у., руководимой акад. Я. В. Быковым [19], [20]. Отмечаем, что в настоящее время решение задач эллиптического или же неэллиптичес-

кого типа перенесено на обобщенные дифференциальные операторы и на абстрактные дифференциальные уравнения (см., напр., работы Ю. М. Березанского [21] и Л. Ниренберга [22]) в то время как начало проблемы исследования внутренней связи между задачами эллиптического и неэллиптического типов было положено в представленном первым из авторов докладе на IV съезде румынских математиков (27 мая...4 июня 1956 г.) [23], [24].

2. В ряде статей авторов [25]...[27] рассматривался вопрос о решении гомогенной задачи Гурса для линейных и -д. у. в частных производных специального вида. Решение строилось в виде некоторого интеграла, что позволяло в дальнейшем использовать хорошо разработанную теорию многомерных линейных интегральных уравнений к анализу разрешимости и выяснению структуры решения рассматриваемой задачи. В настоящей статье, опираясь на ряд новых результатов авторов изложенных в [28], решается негомогенная задача Гурса для нескольких типов и.-д. у. в частных производных.

Построим решение неоднородной задачи Гурса:

$$(1)\qquad [D^i u(x,y)]_{x=a} = \varphi_i(y), \quad [D^i u(x,y)]_{y=c} = \psi_i(x), \quad (i=0,1,\ldots,k-1),$$

для линейного и.-д. у.:

$$(2)\qquad \begin{aligned} D^k u(x,y) + \lambda \sum_0^{k-1} r_i(x,y) D^i u(x,y) = \\ = f(x,y) + \lambda \iint_P \sum_0^m E_i(x,y,\xi,\eta) D^i u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \end{aligned}$$

где: $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $r_i(x,y)$, $(i=0,1,\ldots,k-1)$, $f(x,y)$, $E_j(x,y,\xi,\eta)$ $(j=0,1,\ldots,m)$ — известные непрерывные в прямоугольнике $P=[a,b]\times[c,d]$ функции; λ — числовой параметр; $D^i u \equiv \partial^{2i} u/(\partial x^i\,\partial y^i)$ — полная производная в смысле М. Пиконе; k и m натуральные числа, причем $k \geqslant m$ [1]).

Решение задачи (1), (2) строим в форме:

$$(3)\qquad u(x,y) = \Phi(x,y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \int_a^x \int_c^y [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} v(t,\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau,$$

где $\Phi(x,y)$ — известная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1):

$$(4)\qquad [D^i \Phi]_{x=a} = \varphi_i(y); \quad [D^i \Phi]_{y=c} = \psi_i(x), \quad (i=0,1,\ldots,k-1),$$

и однородному уравнению:

$$(5)\qquad D^k \Phi(x,y) = 0;$$

$v(x,y)$ — новая неизвестная функция. В силу простоты задачи (4), (5) нахождение функции $\Phi(x,y)$ особых затруднений не составляет. Воздействуя оператором D^k на (3), получим:

[1]) Исследование, соответствующее случаю $r_i(x,y) \equiv 0$, $(i=0,1,\ldots,k-1;\ (x,y) \in P)$, с последующим обсуждением вопроса аппроксимирования решений поставленной в связи с (1) граничной задачи, будет изложено в одной из статей авторов помещенной в Bull. Sci. Math. pures et appl.

$$D^k u(x,y) \equiv D^k \Phi(x,y) +$$

$$+ D^k \left[\frac{1}{(k-1)!^2} \int_a^x \int_c^y [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} v(t,\tau)\, dt\, d\tau \right] \equiv v(x,y). \tag{6}$$

Таким образом, при наших предположениях о функции $\Phi(x,y)$ следует, что за новую неизвестную функцию $v(x,y)$ берется старшая производная и.-д. у.

Чтобы функция (3) была решением задачи (1), (2) необходимо выбрать функцию $v(x,y)$ так, чтобы правая часть (3) удовлетворяла уравнению (2). Это обстоятельство позволяет построить интегральное уравнение из которого должна определяться функция $v(x,y)$. Имеем:

$$D^k u(x,y) + \lambda \left[\sum_0^{k-1} r_i(x,y) D^i u(x,y) - \iint_P \sum_0^m E_i(x,y,\xi,\eta) D^i u(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \right] =$$

$$= v(x,y) + \lambda \left[\sum_0^{k-1} r_i(x,y) D^i \Phi(x,y) - \iint_P \sum_0^m E_i(x,y,\xi,\eta) D^i \Phi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \right] +$$

$$+ \lambda \left[\sum_0^{k-1} r_i(x,y) \frac{1}{(k-1-i)!^2} \int_a^x \int_c^y [(x-t)(y-\tau)]^{k-1-i} v(t,\tau)\, dt\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \iint_P \sum_0^m E_i(x,y,\xi,\eta) \frac{1}{(k-1-i)!^2} \int_a^\xi \int_c^\eta [(\xi-t)(\eta-\tau)]^{k-1-i} v(t,\tau)\, dt\, d\tau \right] d\xi\, d\eta \equiv$$

$$\equiv v(x,y) + \lambda K(x,y) - \lambda \left[\iint_Q M_1(x,y,\xi,\eta) v(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \iint_P M_2(x,y,\xi,\eta) v(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \right] = f(x,y),$$

или:

$$v(x,y) - \lambda \iint_P M(x,y,t,\tau) v(t,\tau)\, dt\, d\tau = F(x,y,\lambda), \tag{7}$$

где:

$$F(x,y,\lambda) \equiv f(x,y) - \lambda K(x,y);$$

$$M(x,y,t,\tau) \equiv \begin{cases} M_1(x,y,t,\tau) + M_2(x,y,t,\tau), & a \leqslant t \leqslant x, \quad c \leqslant \tau \leqslant y; \\ M_2(x,y,t,\tau), & x \leqslant t \leqslant b, \quad y \leqslant \tau \leqslant d; \end{cases}$$

$$K(x,y) \equiv \sum_0^{k-1} r_i(x,y) D^i \Phi(x,y) - \iint_P \sum_0^m E_i(x,y,\xi,\eta) D^i \Phi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta;$$

$$Q \equiv \{a \leqslant t \leqslant x; \quad c \leqslant \tau \leqslant y\}.$$

Поэтому, если λ не является собственным значением ядра $M(x, y, t, \tau)$, то решение задачи (1), (2) существует и его можно построить в форме:

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \iint_Q [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} \Big[F(\xi, \eta, \lambda) + \lambda \iint_P R(\xi, \eta, t, \tau, \lambda) F(t, \tau, \lambda)\, dt\, d\tau \Big] d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

где $R(...)$ — резольвента ядра $M(...)$.

Если λ — собственное значение ядра $M(x, y, \xi, \eta)$ ранга ν то задача (1), (2) будет иметь решение, обладающие непрерывными производными $D^i u(x, y)$, $(i = 0, 1, ..., k)$, лишь при условии, что функции $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $(i = 0, 1, ..., k-1)$, принадлежат особенному многообразию S [19]. В положительном случае находим:

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \iint_Q [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} \Big[z(\xi, \eta) + \sum_1^{\nu} q_i z_i(\xi, \eta) \Big] d\xi\, d\eta, \tag{9}$$

где: $z(x, y)$, $z_i(x, y)$, $(i = 1, 2, ..., \nu)$ — соответственно какое-либо частное решение уравнения (7) и собственные функции, отвечающие собственному значению λ ядра $M(x, y, t, \tau)$.

Теорема 1. *Если*: 1° λ *не является собственным значением ядра* $\mathrm{M(x, y, t, \tau)}$, *то задача* (1), (2) *всегда имеет* $2k$ *раз непрерывно дифференцируемое решение, представимое в форме* (8); 2° λ — *собственное значение ядра* $\mathrm{M(x, y, t, \tau)}$ *ранга* ν, *то решение задачи* (1), (2) *либо невозможно представить в форме* (3), *если правые части в* (1) *не принадлежат особенному многообразию* S, *либо существует бесчисленное множество решений задачи* (1), (2), *определяемых формулой* (9), *если правые части в* (1) *принадлежат особенному многообразию* S.

Пусть $P \equiv Q$. Тогда (2) примет вид:

$$D^k u(x, y) + \lambda \sum_0^{k-1} r_i(x, y) D^i u(x, y) = f(x, y) + \lambda \iint_Q \sum_0^m E_i(x, y, t, \tau) D^i u(t, \tau)\, dt\, d\tau. \tag{10}$$

Поэтому подстановка (3) в (10) приводит к интегральному уравнению, которое мы запишем в виде:

$$v(x, y) - \lambda \iint_Q M^*(x, y, t, \tau) v(t, \tau)\, dt\, d\tau = F(x, y, \lambda), \tag{11}$$

где $M^*(...)$ и $F(...)$ — известные функции. Из анализа уравнения (11)

следует, что задача Гурса (1) для и.-д. у. (10) всегда имеет решение. Действительно, из (11) находим

$$v(x, y) = F(x, y, \lambda) + \lambda \iint\limits_{Q} R_1(x, y, \xi, \eta, \lambda) F(\xi, \eta, \lambda)\, d\xi\, d\eta \equiv \varrho(x, y, \lambda),$$

где $R_1(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ — резольвента ядра $M^*(x, y, \xi, \eta)$ уравнения (11). Следовательно

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \iint\limits_{Q} [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} \varrho(t, \tau, \lambda)\, dt\, d\tau \tag{12}$$

— решение задачи (1), (10).

Несколько иначе будет, если рассматриваются задачи:

$$[D^i u(x, y)]_{x=a} = \varphi_i(y), \quad [D^i u(x, y)]_{y=\beta} = \mu_i(x), \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1); \tag{13}$$

$$[D^i u(x, y)]_{x=a} = \varrho_i(y), \quad [D^i u(x, y)]_{y=b} = \psi_i(x), \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1); \tag{14}$$

$$[D^i u(x, y)]_{x=a} = \varrho_i(y), \quad [D^i u(x, y)]_{y=\beta} = \mu_i(x), \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{15}$$

Пусть, например, решается задача (15) для и.-д. у. (10). В этом случае решение задачи (15), (10) строим в форме:

$$u(x, y) = \Phi_1(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \int_{a}^{x} \int_{\beta}^{y} [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{16}$$

где функция $\Phi_1(x, y)$ является решением задачи (15) для дифференциального уравнения (5), а $w(x, y)$ — новая неизвестная функция. Воздействуя интегро-дифференциальным оператором из (10) на (16) и производя необходимые преобразования, приходим к интегральному уравнению, содержащему постоянную область интегрирования T и переменную область интегрирования Q:

$$w(x, y) - \lambda \iint\limits_{Q} M^*(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \iint\limits_{T} N(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = F_1(x, y, \lambda), \tag{17}$$

где: $M^*(\ldots)$, $N(\ldots)$ и $F_1(\ldots)$ — известные функции.

Если $Q \in T$, то вводя объединяющее ядро:

$$M_3(x, y, \xi, \eta) \equiv \begin{cases} M^*(x, y, \xi, \eta) + N(x, y, \xi, \eta), & (x, y) \in Q, \\ N(x, y, \xi, \eta), & (x, y) \in T - Q, \end{cases}$$

приходим к интегральному уравнению вида (7):

$$w(x, y) - \lambda \iint\limits_{T} M_3(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = F_1(x, y, \lambda). \tag{18}$$

Таким образом, если λ не является собственным значением ядра $M_3(...)$, то решение задачи (15), (10) всегда существует и его можно представить в виде:

$$(19)\quad u(x,y)=\Phi_1(x,y)+\frac{1}{(k-1)!^2}\int_\alpha^x\int_\beta^y[(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1}\Delta(\xi,\eta,\lambda)\,d\xi\,d\eta,$$

где $\Delta(...)$ — решение уравнения (18).

Если λ — собственное значение ядра $M_3(x,y,\xi,\eta)$ ранга ν, то: а) решение задачи (15), (10) невозможно представить в форме (16), если функции $\varrho_i(y)$, $\mu_i(x)$, $(i=0,1,...,k-1)$, не принадлежат особенному многообразию S в котором интегральное уравнение (18) имеет решение; б) решение задачи (15), (10) можно представить в форме (16), если $\{\varrho_i(y),\ \mu_i(x)\}_0^{k-1}\in S$, но теперь оно определяется неединственным образом. Действительно, теперь:

$$(20)\qquad w(x,y)=w_0(x,y,\lambda)+\sum_1^\nu q_i w_i(x,y,\lambda),$$

где: $w_0(...)$ и $w_i(...)$, $(i=1,2,...,\nu)$ — какое-либо частное решение уравнения (18) и собственные функции ядра $M_3(x,y,\xi,\eta)$ соответственно; $q_1,...,q_\nu$ — произвольные постоянные. Учитывая (20), запишем решение задачи (10), (15) в виде:

$$(21)\qquad u(x,y)=\Phi_1(x,y)+$$

$$+\frac{1}{(k-1)!^2}\int_\alpha^x\int_\beta^y[(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1}\left[w_0(\xi,\eta,\lambda)+\sum_1^\nu q_i w_i(\xi,\eta,\lambda)\right]d\xi\,d\eta.$$

Сходные ситуации имеют место и при решении задачи (15) для и.-д. у. (2). Задачи (13), (14) для и.-д. у. (2) и (10) рассматриваются аналогично.

Теорема 2. *Краевая задача* (1), (10), *при любом конечном* λ *имеет единственное* $2k$ *раз непрерывно дифференцируемое решение, представимое в форме* (12). *Задачи* (13), (14), (15) *для и.-д. у.* (10) *имеют единственное* $2k$ *раз непрерывно дифференцируемое решение, представимое в форме* (19), *если* λ *не является собственным значением ядра интегрального уравнения* (17). *Если* λ — *собственное значение ядра уравнения* (17) *ранга* ν, *то либо рассматриваемые задачи не имеют решений представимых в форме* (16), *когда правые части в* (13)...(15) *не принадлежат многоодразию* S, *либо решения определяются неединственным образом, по формуле* (21), *когда правые части в* (13)...(15) *принадлежат особенному многообразию* S.

Пусть $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ причем $a<\alpha<b$, $c<\beta<d$. Тогда из (17) находим:

$$w(x, y) = F_1(x, y, \lambda) + \lambda \iint\limits_T N(x, y, \xi, \eta)\, w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$(22) \quad + \lambda \iint\limits_Q R_1(x, y, t, \tau, \lambda) \left[F_1(t, \tau, \lambda) + \lambda \iint\limits_T N(t, \tau, \xi, \eta)\, w(\xi, \eta) d\xi\, d\eta \right] dt\, d\tau \equiv$$

$$\equiv F_2(x, y, \lambda) + \lambda \iint\limits_T M_4(x, y, \xi, \eta, \lambda)\, w(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Следовательно, если уравнение (22) имеет решением функцию $\gamma(x, y, \lambda)$, то задача (15), (10) имеет решение, которое можно записать в виде:

$$(23) \quad u(x, y) = \Phi_1(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \int_\alpha^x \int_\beta^y [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} \gamma(\xi, \eta, \lambda)\, d\xi\, d\eta.$$

Если λ — собственное значение ядра $M_4(x, y, \xi, \eta)$ ранга ν, то задача (15), (10) имеет решение вида (16) тогда и только тогда, когда функции $\{\varrho_i(y), \mu_i(x)\}_0^{k-1}$ принадлежат особенному многообразию S обеспечивающему существование решения (22) в этом специальном случае.

Замечание. Пусть решается задача (1) и $E_i(x, y, \eta, \xi) \equiv 0$, $(i = 0, 1, ..., m)$, (x, y), $(\xi, \eta) \in P$. Тогда из (2) получаем линейное дифференциальное уравнение в полных производных М. Пиконе:

$$(24) \quad D^k u(x, y) + \lambda \sum_0^{k-1} r_i(x, y) D^i u(x, y) = f(x, y).$$

Воздействуя оператором $D^k + \lambda \sum_0^{k-1} r_i(x, y) D^i$ на (3) и учитывая (24), приходим к интегральному уравнению:

$$(25) \quad v(x, y) - \lambda \iint\limits_Q T(x, y, \xi, \eta)\, v(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f_3(x, y, \lambda),$$

где $T(...)$ и $f_3(...)$ — известные функции. Из (25) находим:

$$v(x, y) = f_3(x, y, \lambda) + \lambda \iint\limits_Q A(x, y, \xi, \eta, \lambda) f_3(\xi, \eta, \lambda)\, d\xi\, d\eta \equiv l(x, y, \lambda),$$

где $A(...)$ — резольвента ядра $T(...)$. Следовательно, в рассматриваемом случае задача (2), (24) всегда имеет решение, которое можно представить в виде:

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \iint\limits_Q [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} l(\xi, \eta, \lambda)\, d\xi\, d\eta.$$

Изложенным методом можно решать задачи (1), (13), (14) и (15) для линейных и.-д. у. вида:

$$D^k u(x, y) + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} r_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} =$$

$$= f(x, y) + \lambda \iint_P \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} E_{ij}(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial^{i+j} u(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \, d\xi \, d\eta, \quad p \leqslant k.$$

Действительно, пусть решается задача (1), (26). В этом случае из (3) находим:

$$\frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^{i+j} \Phi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} + \int_a^x \int_c^y \frac{(x-\xi)^{k-1-i} (y-\eta)^{k-1-j}}{(k-1-i)!\,(k-1-j)!} v(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

$$(0 \leqslant i, \; j \leqslant k-1).$$

Поэтому воздействуя на (5) интегро-дифференциальным оператором, содержащимся в (26), придем к интегральному уравнению вида (7):

$$(27) \qquad v(x, y) - \lambda \iint_P M_0(x, y, \xi, \eta) v(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = f(x, y, \lambda),$$

где $M_0(...)$ и $f(...)$ — известные функции. Теперь видно, что если λ не является собственным значением ядра $M_0(...)$, то задача (1), (26) имеет единственное решение, представимое в форме (3). Если λ — собственное значение ранга ν ядра $M_0(...)$, то имеет место следующая альтернатива: а) либо решение задачи (1), (26) невозможно представить в форме (3), б) либо решение нашей задачи, конструируемое по формуле (3) определяется неединственным образом и содержит произвольные постоянные.

Отметим, что при выполнении неравенства:

$$(*) \qquad |\lambda| < 1 : \sup_P \iint_P |M_0(x, y, \xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta$$

всегда существует единственное решение задачи (1), (26), которое можно построить в форме (3) методом последовательных приближений. Исходя из разрешающей системы интегральных уравнений (3), (27), получаем следующую априорную качественную характеристику решения задачи (1), (26):

$$(28) \qquad |u(x, y)| \leqslant |\Phi(x, y)| + [(x-a)(y-c)]^k d : (k!)^2, \quad \{(x, y), \lambda\} \in B,$$

где:

$$d \leqslant \sup_B |f(x, y, \lambda)| : \left[1 - \sup_B \iint_P |\lambda M_0(x, y, \xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta \right];$$

B — область в которой выполняется неравенство (*).

Этот же метод применим и к решению задач (1), (13)...(15) для и.-д. у. вида:

$$D^k u(x,y) + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} r_{ij}(x,y) \frac{\partial^{i+j} u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} = \tag{29}$$
$$= f(x,y) + \lambda \iint_Q \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} E_{ij}(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial^{i+j} u(\xi,\eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \, d\xi \, d\eta.$$

При этом всегда существует решение задачи (1), (29), представимое в форме (3). Если же рассматриваются задачи (13)...(15) для уравнения (29), то возможно, что: а) решения задач существуют и единственны; б) при некоторых λ решения задач либо не существуют, либо определяются неоднозначно.

Замечание. Если в (26) или (29) $E_{ij}(...) \equiv 0$, $(i, j = 0, 1, ..., p)$, то мы приходим к задаче Гурса для линейного дифференциального уравнения вида:

$$D^k u(x,y) + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} r_{ij}(x,y) \frac{\partial^{i+j} u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} = f(x,y). \tag{30}$$

Вставляя (3) в (30), приходим к интегральному уравнению:

$$v(x,y) - \lambda \int_\alpha^x \int_\beta^y N_1(x,y,\xi,\eta) v(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta = f_2(x,y,\lambda). \tag{31}$$

Так как в классе непрерывных функций уравнение (31) всегда имеет решение, которое мы обозначим $v(x,y) = V(x,y,\lambda)$, то задача (15), (30) всегда имеет решение представимое в виде:

$$u(x,y) = \Phi_1(x,y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \int_\alpha^x \int_\beta^y [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} V(\xi,\eta,\lambda) \, d\xi \, d\eta. \tag{32}$$

Поступила 22 VIII 1962 г.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Ясский политехнический институт
и
Киргизский государственный университет, Фрунзе, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, т. **1**, изд. 17, стр. 1—478; т. **2**, изд. 15, стр. 1—628; т. **3**, ч. **1**, изд. 7, стр. 1—328; т. **3**, ч. **2**, изд. 6, стр. 1—674; т. **4**, изд. 3, стр. 1—812; т. **5**, 1959, стр. 1—655, М., 1957.
2. * * * *International Congress of Mathematicians*, Programme, Stockholm, 1962.
3. Келдыш М. В., ДАН СССР, 1951, **77**, стр. 11—14.
4. Hörmander L., Math. Scand., 1958, **6**, pp. 213—225.
5. Gårding L., Math. Scand., 1953, **1**, pp. 55—72.
6. Miranda C., Ann. Mat. pura Appl., 1958, **46**, pp. 265—311.
7. Люстерник Л. А., Вишик М. И., ДАН СССР, 1957, **113**, стр. 962—965.

8. Schwartz L., *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques.* В сб. *Second Colloque sur les équations aux dérivées partielles,* CBRM, G. Thone, Liège; Masson, Paris, 1955, pp. 13—24.
9. Agmon S., В сб. указанном в п. 2, стр. 48.
10. Mangeron D., В сб. указанном в п. 2, стр. 62.
11. Picone M., Ann. Sci. Univ. Jassy, I-e sect., 1940, **XXVI**, *1*, pp. 183—232.
12. Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1949, **IV**, pp. 441—445.
13. Mangeron D., Krivošein L. E., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis mat. e. nat., (8), 1962, **XXXII**, *3*, pp. 306—312.
14. — Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., (8), 1961, **XXXI**, *1—2*, pp. 7—32.
15. — Bull. Acad. Polonaise des Sci., Série sci. math., astr., et phys., 1961, **XI**, *10*, pp. 707—712.
16. — C. r. Acad. Sci., Paris, 1962, **254**, *21*, pp. 3624—3626.
17. Кривошеин Л. Е., *Приближенное решение некоторых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений.* Автореферат диссер. к.ф.-м.н. Среднеазиатский Ун-т, Ташкент, 1958 г.
18. — *Некоторые задачи по интегро-дифференциальным уравнениям,* АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1961 г.
19. Быков Я. В., *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений,* Кирг. гос. у-т, Фрунзе, 1957, 327 стр.
20. — *О некоторых методах построения решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений,* АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1961 г., 110 стр.
21. Березанский Ю. М., ДАН СССР, 1958, **122**, *6*, стр. 959—962.
22. Nirenberg L., В сб. указанном в п. 2, стр. 32.
23. Манжерон Д., Кривошеин Л. Е., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **7 (11)**, *1—2*, pp. 25—34.
24. Mangeron D., *Sur les relations qui intercèdent entre les solutions de certains problèmes à la frontière à plusieurs dimensions.* В сб. *Travaux présentés au IV-e Congrès des Mathématiciens Roumains,* Acad. R.P.R., Bucarest, 1958.
25. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **4 (8)**, *1—2*, pp. 61—64.
26. Mangeron D., Krivochéine L. E., C. r Acad. Sci., Paris, 1961, **253**, *11*, pp. 1190—1192.
27. — Acta Mathematica Sinica, 1962, **12**, *2*, pp. 175—178.
28. — Rend. Acad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., (8), 1962, **XXXIII**, *1—2*, pp. 49—54.

QUELQUES MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES NON HOMOGÈNES DE GOURSAT RELATIFS À UNE CLASSE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

(Résumé)

Les Auteurs, tout en poursuivant leurs études concernant une classe vaste d'équations intégro-différentielles aux dérivées partielles d'ordre supérieur et des problèmes à la frontière qui s'y rattachent, exposent ci-dessus quelques méthodes de resolution des problèmes non homogènes de Goursat relatifs aux systèmes différentiels (1) et (2).

ASUPRA UNOR METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR NEOMOGENE DE TIP GOURSAT PENTRU O CLASĂ DE ECUAŢII LINIARE INTEGRO-DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR

(Rezumat)

Autorii, continuînd studiile lor care interesează şi practica ecuaţiilor integro-diferenţiale ce schematizează astăzi numeroase fenomene de seamă începînd cu cele de transfer a materiei sau unele fenomene termonucleare, relative la variate probleme de contur privitoare la unele clase de ecuaţii integro-diferenţiale liniare cu derivate parţiale de ordin superior, rezolvă, printr-un număr de metode, problema neomogenă a lui Goursat pentru sistemul diferenţial (1), (2).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. K. 517.512.2

QUADRIEREN UND MULTIPLIZIEREN VON FOURIERREIHEN

VON

W. MEYER ZUR CAPELLEN, O. DINGERKUS und W. RATH

1. Vorwort

Bei dynamischen Problemen in der Getriebetechnik ist es manchmal notwending, eine bekannte Fourierreihe zu quadrieren oder zwei bekannte Fourierreihen miteinander zu multiplizieren und das Ergebnis wieder als Fourierreihe darzustellen [1], [2]. Nur in besonderen Fällen lassen sich z. B. für die Quadrate unmittelbar einfache Ausdrücke für die Koeffizienten der neuen Reihe finden [3], [4]. Da die Ergebnisse auch in anderen Zusammenhängen nützlich sein könnten, seien diese hier kurz mitgeteilt.

2. Quadrieren

Die gegebene Reihe habe die Form:

$$x = \sum_{n=1,2,\ldots} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) = \sum_{n=1,2,\ldots} f_n , \tag{1}$$

wobei auch mit Hilfe der Eulerschen Formeln:

$$f_n = a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha = \bar{\mathfrak{z}}_n \, e^{in\alpha} + \mathfrak{z}_n \, e^{-in\alpha} \tag{2 a}$$

geschrieben werden kann, worin:

$$\mathfrak{z}_n = (a_n + ib_n)/2, \quad \bar{\mathfrak{z}}_n = (a_n - ib_n)/2 \tag{2 b}$$

ist.

Für die weitere Entwicklung benötigen wir noch:

$$\mathfrak{z}_n^2 = (a_n^2 - b_n^2 + 2i\,a_n\,b_n)/4, \tag{3 a}$$

$$\bar{\mathfrak{z}}_n^2 = (a_n^2 - b_n^2 - 2i\,a_n\,b_n)/4, \tag{3 b}$$

$$\mathfrak{z}_n \bar{\mathfrak{z}}_n = (a_n^2 + b_n^2)/4, \tag{3 c}$$

$$2\bar{\mathfrak{z}}_n \mathfrak{z}_m = (a_n\,a_m + b_n\,b_m)/2 + i(a_n b_m - b_n\,a_m)/2, \tag{3 d}$$

(3 e) $$2\mathfrak{z}_n\mathfrak{z}_m = (a_m a_n - b_m b_n)/2 + \mathrm{i}\,(a_m b_n + b_m a_n)/2,$$

(3 f) $$2\bar{\mathfrak{z}}_n\bar{\mathfrak{z}}_m = (a_m a_n - b_m b_n)/2 - \mathrm{i}\,(a_m b_n + b_m a_n)/2.$$

Beim Quadrieren der unendlichen Summe mussen Quadrate sämtlicher Summanden und sämtliche doppelte Produkte auftreten; man übersieht die Einzelheiten, indem f_n untereinanderschreibt:

$$f_1 = \bar{\mathfrak{z}}_1 e^{i\alpha} + \mathfrak{z}_1 e^{-i\alpha},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m = \bar{\mathfrak{z}}_m e^{im\alpha} + \mathfrak{z}_m e^{-im\alpha},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = \bar{\mathfrak{z}}_n e^{in\alpha} + \mathfrak{z}_n e^{-in\alpha},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Es wird dann:

(4) $$x^2 = \sum_{m=1,2,\ldots} f_m^2 + \sum_{m=1,2,\ldots} 2 f_m f_n, \quad (n = m + k,\ k = 1, 2,\ldots);$$

denn es darf n nicht kleiner oder gleich m sein. Ist z. B. $m = 1$, so durchläuft n die Werte $2, 3, 4,\ldots$; ist aber z. B. $m = 3$, so durchläuft n die Werte $4, 5,\ldots$, vgl. auch Gl. (6). Hierbei wird unter Beachtung von (3 a)...(3 c):

(5) $$f_m^2 = \bar{\mathfrak{z}}_m^2 e^{2im\alpha} + \mathfrak{z}_m^2 e^{-2im\alpha} + 2\mathfrak{z}_m\bar{\mathfrak{z}}_m =$$
$$= [(a_m^2 - b_m^2)\cos 2m\alpha]/2 + a_m b_m \sin 2m\alpha + (a_m^2 + b_m^2)/2.$$

Bildet man die doppelten Produkte, so können, wie die Tabelle zeigt, die Summanden in verschiedenen Spalten, oder aber in den gleichen Spalten miteinander multipliziert werden. Demnach erhält man:

a) die Produktensumme

$$T_{mn} = 2\bar{\mathfrak{z}}_n e^{in\alpha}\mathfrak{z}_m e^{-im\alpha} + 2\bar{\mathfrak{z}}_m e^{im\alpha}\mathfrak{z}_n e^{-in\alpha} = 2\bar{\mathfrak{z}}_n\mathfrak{z}_m e^{i(n-m)\alpha} + 2\bar{\mathfrak{z}}_m\mathfrak{z}_n e^{-i(n-m)\alpha},$$
$$(n = m + k,\ k = 1,\ 2,\ldots),$$

oder unter Beachtung von Gl. (3 d) auch

(6) $$T_{mn} = (a_m a_n + b_m b_n)\cos(m - n)\alpha + (a_m b_n - b_m b_n)\sin(n - m)\alpha;$$

b) die Produktensumme

$$U_{mn} = 2\bar{\mathfrak{z}}_n e^{in\alpha}\bar{\mathfrak{z}}_m e^{im\alpha} + 2\mathfrak{z}_n e^{-in\alpha}\mathfrak{z}_m e^{-im\alpha} = 2\bar{\mathfrak{z}}_n\bar{\mathfrak{z}}_m e^{i(n+m)\alpha} + 2\mathfrak{z}_n\mathfrak{z}_m e^{-i(n+m)\alpha},$$

oder unter Beachtung von Gl. (3 e), (3 f) auch

(7) $$U_{mn} = (a_m a_n - b_m b_n)\cos(n + m)\alpha + (a_m b_n + b_m a_n)\sin(n + m)\alpha,$$

wobei wieder $n = m + k$ oder $n - m = k$, $(k = 1,\ 2,\ldots)$, zu zählen ist.

Stellt man nunmehr die so gefundenen Ausdrücke für $m = 1, 2,\ldots$ zusammen, so erhält man für x^2 die folgende Entwicklung:

$$(8) \qquad x^2 = A_0 + \sum_{k=1,2,\ldots} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha).$$

Hierin sind die Koeffizienten wie folgt zu bilden:

$$(9\,a)\ A_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1,2,\ldots} (a_m^2 + b_m^2), \quad (9\,b)\ A_k = Z_k + \sum_{m=1,2,\ldots} P_{m,k} + \sum_{m=1}^{m=r} R_{m,k},$$

mit den Abkürzungen:

$Z_k = Z_{2s-1} = 0$ für ungerade k, d. h. $k = 2s - 1$, $s = 1, 2,\ldots$,

$Z_k = Z_{2s} = (a_s^2 - b_s^2)/2$ für gerade k, d. h. $k = 2s$, $s = 1, 2,\ldots$

mit $r = s - 1$ in beiden Fällen; ferner:

$$(9\,c) \qquad P_{m,k} = a_m a_{k+m} + b_m b_{k+m}, \quad (9\,d)\ R_{m,k} = a_m a_{k-m} - b_m b_{k-m}.$$

Danach ist z. B. $A_1 = \sum_{m=1,2,\ldots} P_{m,1}$, $A_2 = (a_1^2 - b_1^2)/2 + \sum_{m=1,2,\ldots} P_{m,2}$, da in beiden Fällen $r = s - 1 = 0$ wird.

Für die Koeffizienten der sinus-Glieder folgt entsprechend

$$(10\,a) \qquad B_k = X_k + \sum_{m=1,2,\ldots} Q_{m,k} + \sum_{m=1}^{m=r} S_{m,k}$$

mit den Abkürzungen:

$X_k = X_{2s-1} = 0$ für ungerade k, d. h. $k = 2s - 1$, $s = 1, 2,\ldots$,

$X_k = X_{2s} = a_s b_s$ für gerade k, d. h. $k = 2s = 1, 2,\ldots$,

und $r = s - 1$ in beiden Fällen; ferner:

$$(10\,b) \qquad Q_{m,k} = a_m b_{k+m} - b_m a_{k+m}, \quad (10\,c)\ S_{m,k} = a_m b_{k-m} + b_m a_{k-m}.$$

Hiernach wird z.B. wie bei den cosinus-Koeffizienten $B_1 = \sum_{m=1,2,\ldots} Q_{m,k}$ und $B_2 = a_1 b_1 + \sum_{m=1,2,\ldots} Q_{m,2}$, da in beiden Fällen $r = s - 1 = 0$ wird. Erst für $k \geqslant 3$ treten die Glieder $R_{m,k}$ und $S_{m,k}$ auf.

Bei der vorstehenden Entwicklung war vorausgesetzt, dass die gegebene Funktion kein konstantes Glied a_0 enthält. Verschwindet dieses jedoch nicht, d. h. ist $x = a_0 + \sum_{n=1,2,\ldots} f_n$, so sind zu den angegebenen Koeffizienten gewisse Korrekturen zu addieren. Es ist A_0 um a_0^2, A_k um $2a_0 a_k$, B_k um $2a_0 b_k$ zu vermehren.

Als Kontrollbeispiel wurde die Reihe für das Übersetzungsverhältnis $i = \lambda + \lambda \cos\alpha + \lambda^2 \cos 2\alpha + \cdots$ bei der zentrischen Kurbelschleife [5] gewählt, da eine unmittelbare Entwicklung bereits vorlag [3]. Es zeigte sich dann völlige Übereinstimmung.

3. Multiplikation zweier Fourierreihen

Gegeben sei die Reihe $x = \sum_{n=1,2,\ldots} f_n$ nach Gl. (1) und (2) sowie die Reihe:

$$y = \sum_{n=1,2,\ldots} (p_n \cos n\alpha + q_n \sin n\alpha) = \sum_{n=1,2,\ldots} h_n ; \tag{10}$$

gesucht sei die Fourierreihe für das Produkt $z = xy$.

Für f_n benutzt man wieder die Ansätze aus Gl. (2 a), (2 b) und schreibt entsprechend:

$$h_n = p_n \cos n\alpha + q_n \sin n\alpha = \overline{\mathfrak{w}}_n e^{in\alpha} + \mathfrak{w}_n e^{-in\alpha} \tag{11 a}$$

mit

$$\mathfrak{w}_n = (p_n + iq_n)/2, \quad \overline{\mathfrak{w}}_n = (p_n - iq_n)/2. \tag{11 b}$$

Bei der Ausmultiplikation werden dann noch die folgenden Produkte benötigt:

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{z}_m \mathfrak{w}_n \\ \overline{\mathfrak{z}}_m \overline{\mathfrak{w}}_n \end{matrix}\right\} = (a_m p_n - b_m q_n)/4 \pm i\,(b_m p_n + a_m q_n)/4 , \tag{12 a}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{z}_m \overline{\mathfrak{w}}_n \\ \overline{\mathfrak{z}}_m \mathfrak{w}_n \end{matrix}\right\} = (a_m p_n + b_m q_n)/4 \pm i\,(b_m p_n - a_m q_n)/4. \tag{12 b}$$

Hierbei ist, wie sich auch im Folgenden zeigt, $n \geqslant m$. Schreibt man nun wieder zur Übersicht die einzelnen Funktionen f_n und h_n nebeneinander, vgl. Tafel, so erhält man Produkte für $n = m$ und für $n > m$:

$$f_1 = \overline{\mathfrak{z}}_1 e^{i\alpha} + \mathfrak{z}_1 e^{-i\alpha}; \quad h_1 = \overline{\mathfrak{w}}_1 e^{i\alpha} + \mathfrak{w}_1 e^{-i\alpha},$$

. . . . . .

$$f_m = \overline{\mathfrak{z}}_m e^{im\alpha} + \mathfrak{z}_m e^{-im\alpha}; \quad h_m = \overline{\mathfrak{w}}_m e^{im\alpha} + \mathfrak{w}_m e^{-im\alpha},$$

. . . . . .

$$f_n = \overline{\mathfrak{z}}_n e^{in\alpha} + \mathfrak{z}_n e^{-in\alpha}; \quad h_n = \overline{\mathfrak{w}}_n e^{in\alpha} + \mathfrak{w}_n e^{-in\alpha}.$$

a) Produkte für $n = m$. Es folgt, wie leicht nachzuprüfen (vgl. Gl. (12 a), (12 b)):

$$\begin{aligned} f_n h_m = {} & [(a_m p_m - b_m q_m) \cos 2m\alpha]/2 + \\ & + [(b_m p_m + a_m q_m) \sin 2m\alpha]/2 + (a_m p_m + b_m q_m)/2. \end{aligned} \tag{13}$$

b) Produkte für $n > m$.

1°. Zunächst folgt:

$$f_m h_n = \overline{\mathfrak{z}}_m \overline{\mathfrak{w}}_n e^{i(n+m)\alpha} + \mathfrak{z}_m \mathfrak{w}_n e^{-i(n+m)\alpha} + \mathfrak{z}_m \overline{\mathfrak{w}}_n e^{i(n-m)\alpha} + \overline{\mathfrak{z}}_m \mathfrak{w}_n e^{-i(n-m)\alpha},$$

oder unter Beachtung der Gln. (12 a), (12 b) auch schliesslich:

$$\begin{aligned} f_m h_n = {} & (a_m p_n - b_m q_n) \cos (n+m)\alpha]/2 + [(b_m p_n + a_m q_n) \sin (n+m)\alpha]/2 + \\ & + [(a_m p_n + b_m q_n) \cos (n-m)\alpha]/2 - [(b_m p_n - a_m q_n) \sin (n-m)\alpha]/2. \end{aligned}$$

Hierin ist auch der Sonderfall $n = m$ enthalten, vgl. Gl. (13).

Soll $n > m$ sein, so kann auch $n = m + k$ oder $n - m = k$ angesetzt werden, $(k = 1, 2,...)$.

2° Das entsprechende Produkt $f_n h_m$ entspricht Gl. (14), nur sind die Indices m und n miteinander zu vertauschen, so dass dann die Summe $f_m h_n + f_n h_m$ hingeschrieben werden kann. Lässt man nun m alle Werte durchlaufen, $m = 1, 2,...$, und dabei jeweils n die Werte $m + 1$, $m + 2,...$, $m + k,...$, so ergibt sich schliesslich die folgende Darstellung:

$$xy = A_0 + \sum_{k=1,2,...} (A_k \cos ka + B_k \sin ka). \tag{15}$$

Darin ist

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1,2,...} (a_m p_m + b_m q_m), \tag{16}$$

und es haben die Koeffizienten der cosinus-Glieder die Form:

$$A_k = H_k + \sum_{m=1,2,...} E_{m,k} + \sum_{m=1}^{m=r} Y_{m,k}. \tag{17}$$

Dabei wird $H_k = 0$ für ungerade k, d. h. $k = 2s - 1$, $H_k = V_s$ für gerade k, d. h. $k = 2s$, und ist in beiden Fällen $r = s - 1$. Als Abkürzungen sind eingeführt:

$$V_s = (a_s p_s - b_s q_s)/2, \tag{18 a}$$

$$E_{m,k} = [(a_m p_{m+k} + b_m q_{m+k}) + (a_{m+k} p_m + b_{m+k} q_m)]/2, \tag{18 b}$$

$$Y_{m,k} = [(a_m p_{k-m} - b_m q_{k-m}) + (a_{k-m} p_m - b_{k-m} q_m)]/2. \tag{18 c}$$

Hiernach wird z. B.

$$A_1 = \sum_{m=1,2,...} E_{m,1}, \quad A_2 = V_1 + \sum_{m=1,2,...} E_{m,2},$$

da in beiden Fällen $r = s - 1 = 0$ ist.

In gleicher Weise bauen sich die Koeffizienten der sinus-Glieder auf:

$$B_k = K_k + \sum_{m=1,2,...} F_{m,k} + \sum_{m=1}^{m=r} T_{m,k}. \tag{19}$$

Dabei ist $K_k = 0$ für ungerade k, d. h. $k = 2s - 1$, $K_k = W_s$ für gerade k, d. h. $k = 2s$, und ist in beiden Fällen $r = s - 1$. Als Abkürzungen sind eingeführt:

$$W_s = (b_s p_s + a_s q_s)/2, \tag{20 a}$$

$$F_{m,k} = [(a_m q_{m+k} - b_m p_{m+k}) - (a_{m+k} q_m - b_{m+k} q_m)]/2, \tag{20 b}$$

$$T_{m,k} = [(a_m q_{k-m} + b_m p_{k-m}) - (a_{k-m} q_m + b_{k-m} p_n)]/2. \tag{20 c}$$

Hiernach wird z. B. wie oben $B_1 = \sum_{m=1,2,...} F_{m,1}$ und $B_2 = W_1 + \sum_{1,2,...} F_{m,2}$, da in beiden Fällen $r = s - 1 = 0$ ist. Die Summanden $T_{m,k}$ treten erst für $k \geqslant 3$ auf.

Enthalten die Reihen für x und y noch konstante Glieder, d. h. tritt in x noch das konstante Glied a_0 und in y das konstante Glied p_0 auf, so folgt: a) das konstante Glied A_0 ist um $a_0\, p_0$, b) die Koeffizienten A_k sind um $(p_0\, a_k + a_0 p_k)$ und c) die Koeffizienten B_k sind um $(p_0\, b_k + a_0\, q_k)$ zu vermehren.

Für $a_m = p_m$ und $b_m = q_m$, $(m = 1, 2,...)$, werden die Entwicklungen aus Abs. 1 erhalten.

Eingegangen am 22 VIII 1961

Technische Hochschule, Aachen, Deutsche Bundesrepublik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Dingerkus O., *Die Ungleichförmigkeit des Antriebes periodisch übersetzender Getriebe*, Dissertation, TH, Aachen, 1960.
2. Rath W., *Massenkräfte und Massenmomente bei sphärischen Kurbelgetrieben mit Berücksichtigung der harmonischen Analyse*, Dissertation, TH, Aachen, 1960.
3. Meyer zur Capellen W., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, V (IX), *1—2*, pp. 311—320.
4. — ZAMP, 1960, **11**, S. 207—218.
5. — ZAMM, 1956, **36**, S. 151.

ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТНУЮ СТЕПЕНЬ И УМНОЖЕНИЕ СЕРИЙ ФУРЬЕ

(Резюме)

В изучении задач по динамике в области теории машин и механизмов появляется иногда необходимость возведения в квадратную степень или же перемножения серий Фурье и получаемый результат представлять снова в форме серий Фурье.

Авторы, разрешают эту задачу применимую и в некоторых иных случаях.

RIDICAREA LA PĂTRAT ŞI ÎNMULŢIREA SERIILOR FOURIER

(Rezumat)

În studiul problemelor de dinamică interesînd teoria mecanismelor şi maşinilor este uneori nevoie de a se ridica la pătrat o serie Fourier dată sau de a se înmulţi două serii Fourier date, rezultatul obţinut punîndu-se iarăşi sub forma unei serii Fourier.

Autorii rezolvă această problemă, utilă şi în alte cazuri.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. D. 517.942.1 ; 512.97

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TRINÔMES

PAR

CLAIRE ZATULOVSKAYA

1. L'Auteur parvient à résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme suivante :

$$y^{(n)} = ay^{(n-m)} + by, \quad (m < n), \tag{1}$$

où y est une fonction hypercomplexe monogène au sens de Fedorov [1], [2] par rapport à une fonction donnée hypercomplexe (de la classe C^1), $t = \varphi(x_1,...,x_N)$, pour tous les points $(x_1,...,x_N)$ d'un domaine D d'un seul tenant et dans une algèbre A commutative, associative et ayant une unité 1, chaque élément de cette algèbre étant de la forme $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_M i_M$, où $i_1,...,i_M$ est base de A et a_k sont des nombres réels ou complexes ($M < N$ où $M \geqslant N$). Dans l'équation (1) $a, b = \text{const.} \in A$ et $y', ..., y^{(n-m)}, ..., y^{(n)}$ sont les dérivées successives de y (au sens de Fédorov [1], [2]).

On peut supposer que l'équation caractéristique :

$$r^n = ar^{n-m} + b$$

est impossible ou peut avoir une infinité de racines dans l'algèbre A. Pour obtenir la solution générale de l'équation (1) considérons un système de nombres hypercomplexes à n unités : $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ de la forme $a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1}$, les a_i étant des éléments quelconques de l'algèbre A, avec la loi de composition :

$$\varepsilon^p \varepsilon^q = \varepsilon^{p+q}, \ (p, q = 0, 1, ...,) \text{ et } \varepsilon^n = a\varepsilon^{n-m} + b. \tag{2}$$

Soit

$$\varphi(t) \equiv e^{\varepsilon t} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t)^j}{j!}. \tag{3}$$

Posons:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t)\,\varepsilon^k, \quad f_k(t) \in A, \quad (k = 0,\ldots, n-1). \tag{4}$$

On a

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi^{(\lambda)}(t) = \varepsilon^\lambda \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^{(\lambda)}(t)\,\varepsilon^k, \quad (\lambda = 1, 2,\ldots),$$
$$\varphi^{(\lambda)}(0) = \varepsilon^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^{(\lambda)}(0)\,\varepsilon^k, \tag{5}$$

d'où en vertu de (2):

$$\varphi^{(n)}(t) = a\varphi^{(n-m)}(t) + b\varphi(t)$$

et on obtient les relations suivantes:

$$f_k^{(n)}(t) = a f_k^{(n-m)}(t) + b f_k(t), \quad (k = 0,\ldots, n-1),$$
$$f_k^{(k)}(0) = 1, \quad f_k^{(i)}(0) = 0, \quad (i \neq k;\ i, k = 0,\ldots, n-1), \tag{6}$$
$$y = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)\, f_k(t),$$

pour chaque solution de l'équation (1). (Si l'on applique à cette équation la méthode des approximations successives on peut démontrer aisément que cette solution est unique pour les nombres $y^{(k)}(0)$ donnés, $(k = 0,\ldots, n-1)$)

2. Pour obtenir la fonction $f_0(t)$ posons $C_p^q \equiv p!/[q!\,(p-q!]$,

$$u_p \equiv \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p-1}^{p-1}\, a^k \frac{t^{pn+km}}{(pn+km)!}, \quad (p = 1, 2,\ldots), \quad u_0 = 1, \quad \psi(t) \equiv \sum_{p=0}^{\infty} b^p u_p,$$

ces séries étant absolument et uniformément convergentes dans chaque domaine fermé $D_0 \subset D$. On a:

$$u_p^{(n)} = \frac{t^{pn-n}}{(pn-n)!} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+p-1}^{p-1}\, a^k \frac{t^{pn+km-n}}{(pn+km-n)!},$$

$$a u_p^{(n-m)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+p-2}^{p-1}\, a^k \frac{t^{pn+km-n}}{(pn+km-n)!},$$

$$u_{p-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p-2}^{p-2}\, a^k \frac{t^{pn+km-n}}{(pn+km-n)!},$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} b^p u_p = \sum_{p=1}^{\infty} ab^p u_p^{(n-m)} + \sum_{p=1}^{\infty} b^p u_{p-1}$$

et par conséquent la fonction $\psi(t)$ possède les propriétés suivantes:

$$\psi^{(n)}(t) = a\psi^{(n-m)}(t) + b\psi(t),$$
$$\psi(0) = 1, \quad \psi^{(i)}(0) = 0, \quad (i = 1,\ldots, n-1),$$

c'est à dire:

$$f_0(t) \equiv \psi(t) = \sum_{p=0}^{\infty} b^p u_p = 1 + \sum_{p=0}^{\infty} b^p \sum_{k=p}^{\infty} C_{k+p-1}^{p-1} a^k \frac{t^{pn+km}}{(pn+km)!}.$$

Posons $f_0(t) = 1 + b\theta(t)$. On peut démontrer facilement que la fonction $\theta'(t)$ est une solution de l'équation (1) à valeurs initiales suivantes:

$$\theta^{(\lambda)}(0) = 0, \quad (\lambda = 1,\ldots, n-1), \quad \theta^{(n)}(0) = 1.$$

On conclut que

$$f_{n-1}(t) = \theta'(t) = \sum_{p=1}^{\infty} b^{p-1} \sum_{k=p}^{\infty} C_{k+p-1}^{p-1} a^k \frac{t^{pn+km-1}}{(pn+km-1)!}.$$

3. Pour obtenir les fonctions $f_1(t),\ldots, f_{n-2}(t)$ remarquons qu'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k'(t)\,\varepsilon^k = \sum_{k=1}^{n-1} f_{k-1}(t)\,\varepsilon^k + f_{n-1}(t)(a\varepsilon^{n-m} + b), \tag{7}$$

en vertu des équations (2) et (5) et considérons les cas suivants:

a) $$m = n-1, \quad \varepsilon^n = a\varepsilon + b.$$

Dans ce cas il résulte de (7) qu'on a:

$$f_j'(t) = f_{j-1}(t), \quad (j = 2,\ldots, n-2), \quad f_1'(t) = f_0(t) + af_{n-1}(t)$$

et on peut écrire:

$$f_1(t) = \int_0^t [f_0(\tau) + af_{n-1}(\tau)]\,d\tau,$$

$$f_j(t) = \int_0^t f_{j-1}(\tau)\,d\tau, \quad (j = 2,\ldots, n-2).$$

b) $1 < n - m,$

Dans ce cas on a, en vertu de (7):

$$f_{n-2}(t) = f'_{n-1}(t) = \theta''(t),\ f_{n-3}(t) = f'_{n-2}(t) = \theta'''(t),\ldots,\ f_{n-m+1}(t) = \theta^{(m-1)}(t);$$

$$f_j(t) = \int_0^t f_{j-1}(\tau)\,d\tau, \quad (j = 1,\ldots, n-m-1),$$

$$f_{n-m}(t) = \int_0^t [f_{n-m-1}(\tau) + a f_{n-1}(\tau)]\,d\tau,$$

$$f_k(t) = \int_0^t f_{k-1}(\tau)\,d\tau, \quad (k = n-m+1,\ldots, n-1);$$

c) $$m = 1, \quad \varepsilon^n = a\varepsilon^{n-1} + b.$$

Dans ce cas on a, en vertu de (7):

$$f_j(t) = \int_0^t f_{j-1}(\tau)\,d\tau, \quad (j = 1,\ldots, n-2).$$

4. Démontrons quelques formules sommatoires. Il est évident qu'on a pour la fonction (3), en vertu de (4):

$$\varphi(t+\tau) = \varphi(t)\,\varphi(\tau),$$

d'où

$$(8) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t+\tau)\,\varepsilon^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i+j=k} f_i(t)\,f_j(\tau)\right]\varepsilon^k + \sum_{r=0}^{n-2}\left[\sum_{i+j=n+r} f_i(t)\,f_j(\tau)\right]\varepsilon^r.$$

Étudions le cas $m = n-1$. Dans ce cas on a:

$$(9) \qquad \varepsilon^{n+r} = a\varepsilon^{r+1} + b\varepsilon^r, \quad (r = 0,\ 1,\ldots,).$$

Dès égalités (8) et (9) on déduit sans peine les identités suivantes:

$$f_k(t+\tau) = \sum_{i+j=k} f_i(t)\,f_j(\tau) + a\sum_{i+j=n+k-1} f_i(t)\,f_j(\tau) + b\sum_{i+j=n+k} f_i(t)\,f_j(\tau),$$

$$(k = 0,\ldots, n-2),$$

$$f_{n-1}(t+\tau) = \sum_{i+j=n-1} f_i(t)\,f_j(\tau) + a f_{n-1}(t)\,f_{n-1}(\tau).$$

Étudions le cas $m = 1$. Démontrons la formule:

$$\varepsilon^{n+r} = b \sum_{k=0}^{r} a^{r-k} \varepsilon^{k} + a^{r+1} \varepsilon^{n-1}, \quad (r = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

En effet, la formule (10) est évidente pour $r = 0$ et si elle est valable pour un r donné, alors on a:

$$\varepsilon^{n+r+1} = b \sum_{k=0}^{r} a^{r-k} \varepsilon^{k+1} + a^{r+1} \varepsilon^{n} = b \sum_{k=0}^{r} a^{r-k} \varepsilon^{k+1} + a^{r+1} (a\varepsilon^{n-1} + b)$$

ou

$$\varepsilon^{n+r+1} = \sum_{k=0}^{r} a^{r-k+1} \varepsilon^{k} + a^{r+2} \varepsilon^{n-1},$$

c'est-à-dire la formule (10) est valable pour $r + 1$. La formule (10) est ainsi démontrée.

Dès égalités (8) et (10) on déduit sans peine les identités suivantes:

$$f_k(t+\tau) = \sum_{i+j=k} f_i(t) f_j(\tau) + b \sum_{r=k}^{n-2} a^{r-k} \left[\sum_{i+j=n+r} f_i(t) f_j(\tau) \right],$$

$$(i, j = 0, \ldots, n-1; \quad k = 0, \ldots, n-2),$$

$$f_{n-1}(t+\tau) = \sum_{i+j=n-1} f_i(t) f_j(\tau) + \sum_{r=0}^{n-2} a^{r+1} \left[\sum_{i+j=n+r} f_i(t) f_j(\tau) \right].$$

Institut Énergétique, Ivanovo, URSS

BIBLIOGRAPHIE

1. Федоров В. С., Изв. высш. учебн. зав., Математика, 1958, *6* (7), стр. 257-265.
2. Moisil Gr. C., Bul. Şt. Acad. R. P. R., Seria A, 1949, **I**, *10*, p. 959.

О ТРЕХЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Резюме)

Автор строит общее решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения (1) с постоянными коэффициентами, не пользуясь корнями характеристического уравнения и применяя свой метод к тому общему случаю, когда искомая функция — гиперкомплексная, моногенная в смысле В. С. Федорова относительно данной гиперкомплексной функции многих действительных переменных (в частности, искомая функция — вещественная функция одной вещественной переменной). Фундаментальная система данного дифференциального уравнения находится с помощью одной алгебры, специально построенной для этого дифференциального уравнения. Выводятся формулы сложения для функций, образующих фундаментальную систему.

ASUPRA ECUAŢIILOR DIFFERENŢIALE TRINOME

(Rezumat)

Se construieşte soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare ordinare (1) cu coeficienţi constanţi nefolosind rădăcinile ecuaţiei caracteristice şi aplicînd o metodă proprie la acel caz general, cînd funcţia căutată este hipercomplexă, monogenă în sensul lui V. S. Feodorov în raport cu funcţia hipercomplexă dată, de mai multe variabile reale (în particular, funcţia căutată este o funcţie reală de o singură variabilă reală). Sistemul fundamental al ecuaţiei diferenţiale date se obţine cu ajutorul unei algebre, special construite pentru această ecuaţie diferenţială. Se deduc formulele de adunare pentru funcţiile care constituie sistemul fundamental.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1963

C. D. 513.74

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES MOUVEMENTS DANS LES ESPACES DE RIEMANN

par

S. GOLAB

Dans les espaces métriques généraux dans lesquels on a défini la distance $\varrho\,(p, q)$ de deux points p, q de l'espace, une transformation

$$p' = f(p) \tag{1}$$

s'appelle isométrie si la condition

$$\varrho\,[f(p), f(q)] = \varrho\,(p, q) \tag{2}$$

est satisfaite pour tous p, q d'un domaine de l'espace. Dans les espaces de Riemann on peut introduire la notion de „distance géodésique" entre deux points p, q, mais on peut l'introduire seulement localement (sous certaines hypothèses de régularité du champ des tenseurs métriques) et en outre nous ne disposons pas pour cette distance géodésique d'une formule utile aux calculs. Pour cette raison on définit l'isométrie dans les espaces riemanniens comme une transformation (1) telle qu'elle conserve la longueur des arcs, c'est-à-dire telle que la ligne C étant rectifiable et possédant la longueur l, l'image C' de cette ligne par l'intermédiaire de la transformation (1) soit également rectifiable et possède la longueur l. D'après cette définition de l'isométrie on en déduit facilement le théorème fondamental disant que la transformation (1) de la classe C^1 représente une isométrie allors et seulement allors lorsqu'elle conserve le tenseur métrique. Plus exactement, si la transformation (1) est donnée sous la forme analytique:

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{3}$$

et si nous désignons par $g_{ik}\,(x^1, \ldots, x^n)$ les composantes du tenseur métrique, alors les relations suivantes:

$$\sum_{i,j} g_{ij}\,[f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^n)] \frac{\partial f^i}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^s} \equiv \tag{4}$$

$$\equiv g_{rs}(x^1, \ldots, x^n), \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

doivent être satisfaites, où le signe d'identité $\equiv$ a lieu pour tous les $(x^1,...,x^n)$ appartenant au domaine de la transformation. Dans ce théorème on suppose implicitement que la transformation (3) est de la classe C^1, c'est-à-dire que les fonctions f^i possèdent les dérivées continues

$$f^i_r \overset{df}{=} \partial f^i / \partial x^r, \qquad (i, r = 1,...,n).$$

Le but de cette Note est de donner un théorème dont la thèse est justement la formule (4), c'est-à-dire la conservation du tenseur métrique par la transformation (3), et dont l'hypothèse, au lieu de supposer la loi de conservation des longueurs des arcs, exprime une relation entre les longueurs des vecteurs correspondants.

Comme il est bien connu, nous définissons la longueur du vecteur v, à composantes v^i, attaché au point $(x^1,...,x^n)$, par la formule algébrique:

$$|v| \overset{df}{=} \sqrt{|\sum_{i,k} g_{ik}(x^1,...,x^n)\, v^i v^k|}. \tag{5}$$

Posons

$$\tilde{v}^i \overset{df}{=}_{*} f^i(x^1 + v^1,..., x^n + v^n) - f^i(x^1,...,x^n)^1). \tag{6}$$

Bien que la definition (6) n'a pas un caractère intrinsèque ($\tilde{v}^i$ dépend de v et du système des coordonnées), la relation au moyen de la quelle nous exprimerons ci-dessous la définition de l'isométrie est invariante par rapport aux transformations des coordonnées.

Definition. La transformation (3) de l'espace de Riemann V_n est appelée une transformation isométrique si l'on a

$$|\tilde{v}| - |v| = o(|v|). \tag{7}$$

Théorème. *Si l'espace* V_n *est un espace riemannien ordinaire, c'est-à-dire le tenseur métrique* g_{ik} *est positivement défini, si la transformation* (3) *est de la classe* C^1 *et si elle est une transformation isométrique au sens de la definition ci-dessus, alors cette transformation conserve le tenseur métrique, c'est-à-dire les relations* (4) *sons satisfaites.*

Démonstration. Supposons (nous appliquons la méthode indirecte) pour un instant qu'il existe un point $\overset{\circ}{x}$ pour lequel les relations (4) ne sont pas satisfaites. Il existe donc un couple des indices (r_0, s_0) tel que

$$g_{r_0 s_0}(\overset{\circ}{x}) \neq g_{ij}[f(\overset{\circ}{x})]\, f^i_{r_0}(\overset{\circ}{x})\, f^j_{s_0}(\overset{\circ}{x}). \tag{8}$$

Prenons un vecteur v quelconque, non nul, attaché au point $\overset{\circ}{x}$, $|v| > 0$, et formons la différence:

---

[1]) Le signe $\overset{}{=}_{*}$ signifie que l'égalité a lieu seulement dans le système de coordonnées envisagé.

$$(9) \qquad |\tilde{v}| - |v| = (|\tilde{v}|^2 - |v|)^2 / (|\tilde{v}| + |v|).$$

Or, compte tenu de l'hypothèse que la transformation (3) est de la classe C^1, nous pouvons écrire:

$$\tilde{v} = f^i(x^1 + v^1, ..., x^n + v^n) - f^i(x^1, ..., x^n) =$$

$$= \sum_j v^j f^i_j(x^1 + v^1, ..., x^j + \theta^j_i v^j, ..., x^n + v^n) = v^j (f^i_j)_{\theta^j_i},$$

d'où il s'ensuit:

$$(10) \qquad |\tilde{v}|^2 = g_{ij}[f(\overset{\circ}{x})](f^i_p)_{\theta^p_i}(f^j_q)_{\theta^q_j} v^p v^q.$$

Posons pour abréger

$$(11) \qquad g_{rs} \overset{df}{=} g_{rs}(\overset{\circ}{x}), \quad G_{rs} = g_{ij}[f(\overset{\circ}{x})](f^i_r)_{\theta^r_i}(f^j_s)_{\theta^s_j}.$$

En substituant (10) et (11) dans (9) nous obtenons:

$$(12) \qquad |\tilde{v}| - |v| = [(G_{rs} - g_{rs}) v^r v^s] / (|\tilde{v}| + |v|).$$

De (7) il en résulte $|\tilde{v}| = |v| + o(|v|)$. On a, par conséquent:

$$(13) \qquad |\tilde{v}|^2 - |v|^2 = (|\tilde{v}| + |v|)(|\tilde{v}| - |v|) = [2|v| + o(|v|)]\, o(|v|),$$

donc, en vertu de (12):

$$(G_{rs} - g_{rs}) v^r v^s = [2|v| + o(|v|)]\, o(|v|).$$

Posons ensuite

$$(14) \qquad d_{rs} \overset{df}{=} G_{rs} - g_{rs}, \qquad \Omega \overset{df}{=} |o(|v|)| / |v|.$$

(13) nous donnera

$$(15) \qquad d_{rs} v^r v^s = \Omega |v| (2|v| + \Omega |v|) = \Omega |v|^2 (2 + \Omega).$$

Comme

$$(16) \qquad \lim_{|v| \to 0} \Omega = 0,$$

nous avons pour $|v|$ suffisamment petits $\Omega < 1$ et de (15) il en résulte l'inégalité:

$$(17) \qquad |d_{rs} v^r v^s| < 3\Omega |v|^2.$$

À cause de l'égalité $|v|^2 = g_{rs} v^r v^s$ nous obtenons de (17) l'inégalité:

$$(18) \qquad \Omega \geqslant \frac{1}{3} \left| \frac{d_{rs} v^r v^s}{g_{rs} v^r v^s} \right|, \quad |v| > 0,$$

pour $|v|$ suffisamment petits. Nous choisissons maintenant le vecteur $\overset{\circ}{v}$ afin que l'on ait

$$\overset{\circ}{v}^{r_0} = \alpha \neq 0, \quad \overset{\circ}{v}^{s_0} = \beta \neq 0. \tag{19}$$

Pour tous les autres composantes nous posons:

$$\overset{\circ}{v}^{r} = 0, \quad (r \neq r_0, s_0). \tag{20}$$

Le vecteur $\overset{\circ}{v}$ étant choisi d'une telle façon, nous avons:

$$d_{rs} \overset{\circ}{v}^r \overset{\circ}{v}^s = d_{r_0 r_0} \alpha^2 + 2 d_{r_0 s_0} \alpha\beta + d_{s_0 s_0} \beta^2,$$

$$g_{rs} \overset{\circ}{v}^r \overset{\circ}{v}^s = g_{r_0 r_0} \alpha^2 + 2 g_{r_0 s_0} \alpha\beta + g_{s_0 s_0} \beta^2.$$

Remarquons que les coefficients $d_{r_0 r_0}$, $d_{r_0 s_0}$, $d_{s_0 s_0}$ dépendent aussi de α et β, parce que dans G_{rs} interviennent les $(f^i_r)_0$, $(f^j_s)_0$ qui dépendent de v^k, alors de α et de β. Comme la transformation est de la classe C^1, les f^i_r sont continus et, par conséquent nous avons:

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0} (f^i_r)_0 = f^i_r(\overset{\circ}{x}), \quad (i, r = 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Posons ensuite:

$$\begin{cases} \lambda \overset{df}{=} g_{r_0 r_0} - g_{ij}\,[f(\overset{\circ}{x})]\, f^i_{r_0}(\overset{\circ}{x})\, f^j_{r_0}(\overset{\circ}{x}), \\ \mu \overset{df}{=} g_{r_0 s_0} - g_{ij}\,[f(\overset{\circ}{x})]\, f^i_{r_0}(\overset{\circ}{x})\, f^j_{s_0}(\overset{\circ}{x}), \\ \nu \overset{df}{=} g_{s_0 s_0} - g_{ij}\,[f(\overset{\circ}{x})]\, f^i_{s_0}(\overset{\circ}{x})\, f^j_{s_0}(\overset{\circ}{x}). \end{cases} \tag{22}$$

En vertu de la remarque ci-dessus nous pouvons écrire:

$$\lim_{\alpha,\beta\to 0} d_{r_0 r_0} = \lambda, \qquad \lim_{\alpha,\beta\to 0} d_{r_0 s_0} = \mu, \qquad \lim_{\alpha,\beta\to 0} d_{s_0 s_0} = \nu. \tag{23}$$

Envisageons maintenant la fonction

$$\Phi(\alpha, \beta) \overset{df}{=} (d_{r_0 r_0} \alpha^2 + 2 d_{r_0 s_0} \alpha\beta + d_{s_0 s_0} \beta^2) / (g_{r_0 r_0} \alpha^2 + 2 g_{r_0 s_0} \alpha\beta + g_{s_0 s_0} \beta^2).$$

La fonction Φ ne peut pas être envisagée comme quotient de deux formes quadratiques parce que seulement le dénominateur représente une forme quadratique; le numérateur peut-être appelé une quasi-forme quadratique car les coefficients $d_{r_0 r_0}$, $d_{r_0 s_0}$, $d_{s_0 s_0}$ sont fonctios des variables α, β.

Considérons la forme

$$Q(\alpha, \beta) \overset{df}{=} \lambda \alpha^2 + 2 \mu \alpha\beta + \nu\beta^2.$$

Comme $\mu \neq 0$ (voir (8) et (22)), la forme Q n'est pas nulle identiquement. Il existe donc un couple des valeurs (α_0, β_0) n'étant pas nuls simultanément, tel que $Q(\alpha_0, \beta_0) \neq 0$. Sans restreindre la généralité nous pouvons admettre que $\alpha_0 \neq 0$. Posons

$$\omega_0 \overset{df}{=} \beta_0 / \alpha_0$$

et calculons

$$\Psi(\alpha) \overset{df}{=} \Phi(\alpha, \omega_0 \alpha) = (d_{r_0 r_0} + 2 d_{r_0 s_0} \omega_0 + d_{s_0 s_0} \omega_0^2) / (g_{r_0 r_0} + 2 g_{r_0 s_0} \omega_0 + g_{s_0 s_0} \omega_0^2).$$

Le dénominateur est un nombre positif (c'est la valeur de la forme quadratique positivement définie dans un point différent de l'origine $(\alpha_0 \neq 0)$). Les coefficients de la quasi-forme du numérateur possèdent, comme le montrent les relations (23), des limites. Donc le numérateur a pour $\alpha \to 0$ la limite

$$\lambda + 2\mu\omega_0 + \nu\omega_0^2 = \lambda + 2\mu(\beta_0 / \alpha_0) + \nu(\beta_0 / \alpha_0)^2 = (\lambda\alpha_0^2 + 2\mu\alpha_0\beta_0 + \nu\beta_0^2)/\alpha_0^2 =$$

$$= Q(\alpha_0, \beta_0) / \alpha_0^2 \neq 0,$$

Nous pouvons donc écrire $\lim_{\alpha \to 0} \Psi(\alpha) = l \neq 0$, d'où il en résulte pour $v = \overset{\circ}{v}$:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta = \omega_0 \alpha}} \Omega \geqslant |l| / 3 > 0.$$

D'autre part nous avons en vertu de (16):

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} \Omega = 0.$$

Donc nous sommes abouti à la contradiction. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Réciproquement, de l'hypothèse de la conservation du tenseur métrique il en résulte facilement la condition (7).

Dans la démonstration nous avons profité de l'hypothèse que le tenseur métrique est positivement défini, d'une façon essentielle. Il nous semble que le théorème n'est pas vrai sans cette hypothèse.

Reçue le 15 I 1962

Académie des Sciences,
Cracovie, R. P. Pologne

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЙ В РИМАННОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Резюме)

Доказывается следующая

Теорема. *Если пространство* V_n *является простым риманновым пространством, т. е. содержит один положительный определенный метрический тензор* g_{ik}, *если преобразование* (3) *является класса* C^1 *и если оно одновременно является и изометрическим в смысле определения* (7), *то это преобразование сохраняет метрический тензор, т. е. отношения* (4) *удовлетворены.*

ASUPRA TEORIEI MIŞCĂRILOR ÎN SPAŢIILE RIEMANNIENE

(Rezumat)

În această Notă se demonstrează

T e o r e m a. *Dacă spaţiul* V_n *este un spaţiu riemannian ordinar, adică este dotat cu un tensor metric* g_{ik} *pozitiv definit, dacă transformarea* (3) *este de clasă* C^1 *şi dacă ea este totodată şi izometrică, în sensul definiţiei* (7), *atunci această transformare conservă tensorul metric, adică relaţiile* (4) *sînt îndeplinite.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 513.761

ASUPRA INTRODUCERII UNEI METRICI ÎN SPAŢIUL AFIN

DE

VIOREL MURGESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Fie A_{n+1}, $(n = 1, 2,...)$, spaţiul afin ordinar $(n+1)$-dimensional, adică spaţiul în care coordonatele x^k ale oricărui punct $P(x^k)$, $(k = 1, 2,..., n + 1)$, sînt supuse transformărilor grupului afin G_a. Este bine cunoscut faptul că problema introducerii unei metrici a lungimilor sau a unei metrici unghiulare în A_{n+1} poate fi rezolvată pe cale algebrică, definind o nouă operaţie binară — produsul scalar —, sau pe cale geometrică, prin introducerea unei indicatoare Finsler [1] care, fiind o varietate algebrică de gradul al doilea, cu centru, asigură independenţa măsurii unghiului a două direcţii oarecare de ordinea în care sînt considerate laturile [2].

În Nota de faţă ne propunem să dăm o demonstraţie privind latura geometrică a ultimei propoziţii, care ne pare cea mai naturală din punctul de vedere al geometriei afine. În § 2 se stabileşte o proprietate caracteristică varietăţilor algebrice de gradul al doilea, cu centru. În § 3 se arată modul în care, în virtutea proprietăţii amintite, se poate introduce metrica unghiulară şi metrica lungimilor în spaţiul afin şi se dă apoi o interpretare afină acestor invarianţi euclidieni.

2. O proprietate caracteristică varietăţilor algebrice de gradul al doilea

Să considerăm în A_{n+1} o varietate (S_n)

$$f(P) = 0, \tag{1}$$

unde *f este o funcţie analitică de punct, supusă condiţiilor:*

(2) $$f(P') = 0, \quad f(O) \neq 0,$$

în care $P(x^k)$, $P'(-x^k)$, $(k = 1, 2, ..., n+1)$, iar O este originea sistemului de referinţă, pe care-l considerăm ortogonal, în scopul tratării analitice a chestiunilor ce vor urma. Vom presupune în plus, fără a împieta asupra generalităţii raţionamentelor, că asupra coordonatelor x^k acţionează numai grupul centro-afin G_a.

Fie $P(x^k)$ un punct generic al varietăţii (S_n), iar $Q(\xi^k)$ un punct oarecare, dar fixat pe (S_n), astfel încît ambele puncte să fie situate pe aceeaşi porţiune simplu conexă din (S_n). Să notăm prin

(3) $$(x^k, p_k), \quad (\xi^k, \alpha_k)$$

elementele liniare corespunzătoare punctelor P şi Q respectiv, unde $p_k = \partial f/\partial x^k$, $\alpha_k = (\partial f/\partial x^k)_{\xi^k}$, $(k = 1, 2, ..., n+1)$.

Considerînd dreptele:

(4) $$(OP) \quad X^k = \lambda x^k; \quad (OQ) \quad X^k = \mu \xi^k, \quad (k = 1, 2, ..., n+1),$$

şi hiperplanele prin P şi Q, paralele respectiv hiperplanelor tangente la (S_n) în Q şi P[1]:

(5) $$(hP) \quad \alpha_k (X^k - x^k) = 0; \quad (hQ) \quad p_k (X^k - \xi^k) = 0,$$

rezultă că coordonatele punctelor $R = (OP) \cap (hQ)$ şi $S = (OQ) \cap (hP)$ au expresia:

(6) $$(R) \quad X^i = x^i (p_k \xi^k)/(p_l x^l); \quad (S) \quad X^i = \xi^i (\alpha_k x^k)/(\alpha_l \xi^l).$$

Să impunem acum condiţia ca dreptele (PQ) şi (RS) să fie paralele adică:

(7) $$\overline{OR}/\overline{OP} = \overline{OS}/\overline{OQ}.$$

Dat fiind că spaţiul este afin (rapoartele precedente sînt invariante prin proiecţii) şi ţinînd seama de relaţiile (6), egalitatea precedentă poate fi scrisă sub forma:

(8) $$(p_j \xi^j)/(p_k x^k) = (\alpha_l x^l)/(\alpha_m \xi^m).$$

Avînd în vedere construcţia geometrică efectuată sîntem constrînşi *să presupunem că orice hiperplan tangent varietăţii* (S_n) *nu trece prin origine*: $p_k x^k \neq 0$, $\forall P \in (S_n)$.

Să ne propunem atunci rezolvarea următoarei probleme, pe care o vom numi *„problema K"*:

Să se găsească toate varietăţile (S_n) *care satisfac condiţia* (7), *prezintă simetrie faţă de un punct fix* O, *nu trec prin* O *ca şi oricare hiperplan tangent la* (S_n) *şi în plus ecuaţiile lor reprezentative au membrii*

[1]) În continuare se va aplica convenţia de însumare a lui Einstein.

stîngi funcții analitice de punct în anumite regiuni ale spațiului, în care sînt definite.

Soluționarea acestei probleme revine în fond la integrarea ecuației liniare omogene cu derivate parțiale de ordinul întîi (8), pe care o scriem sub forma:

$$[x^j(\alpha_k x^k) - \beta \xi^j]\, p_j = 0, \tag{8'}$$

unde

$$\beta = \alpha_k \xi^k, \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{9}$$

și apoi la separarea acelor soluții ce satisfac încă celelalte condiții.

Scriind sistemul asociat corespunzător ecuației (8') și operînd anumite combinații integrabile, sîntem conduși la sistemul ordinar echivalent acestuia:

$$\begin{aligned} &2(\xi^{n+1}\,dx^1 - \xi^1\,dx^{n+1})/(\xi^{n+1}x^1 - \xi^1 x^{n+1}) = \ldots = \\ &= 2(\xi^{n+1}\,dx^n - \xi^n\,dx^{n+1})/(\xi^{n+1}x^n - \xi^n x^{n+1}) = \\ &= 2(\alpha_k x^k)(\alpha_h\,dx^h)/[(\alpha_l x^l)^2 - \beta^2]. \end{aligned} \tag{10}$$

De aici obținem n integrale prime distincte ale sistemului asociat ecuației (8'), pe care le punem sub forma:

$$I^p = |(\alpha_k x^k)^2 - \beta^2|/(\xi^{n+1}x^p - \xi^p x^{n+1})^2, \quad (p = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{11}$$

Rezultă atunci că soluția generală a ecuației (8') este:

$$f = f(I^1, I^2, \ldots, I^n), \tag{12}$$

unde f este o funcție arbitrară de argumentele (11), iar

$$f(I^1, I^2, \ldots, I^n) = 0 \tag{13}$$

furnizează toate integralele nesingulare ale ecuației cu derivate parțiale considerată.

Observații asupra integralelor prime (11). Ecuațiile (11) scrise sub forma desfășurate:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2(x^1)^2 + \alpha_2^2(x^2)^2 + \cdots + [\alpha_p^2 - I^p(\xi^{n+1})^2](x^p)^2 + \alpha_{p+1}^2(x^{p+1})^2 + \cdots + \\ &+ [\alpha_{n+1}^2 - I^p(\xi^p)^2](x^{n+1})^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x^1 x^2 + \cdots + 2(\alpha_p\alpha_{n+1} + I^p\xi^p\xi^{n+1})x^p x^{n+1} + \\ &+ \cdots + 2\alpha_n\alpha_{n+1}x^n x^{n+1} = \beta^2, \quad (p = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{14}$$

unde I^p sînt constante arbitrare, reprezintă — evident — hipersuprafețe algebrice de gradul al doilea în spațiul cu $n+1$ dimensiuni. Dacă notăm cu δ_p discriminantul formei pătratice ce definește hipersuprafața de indice p, se constată cu ușurință că, *oricare ar fi indicele* p, — *dacă* $n \geqslant 2$ —, *urmează* $\delta_p \equiv 0$ (identitățile fiind considerate în raport cu parametrii α_k). Deoarece și $\Delta_p \equiv 0$, ($\Delta_p = -\beta^2\delta_p$), rezultă că *varietățile* (11), *pentru* $n \geqslant 2$, *sînt degenerate, de gen parabolic.*

„Problema K" ce ne-a condus la soluţia (13) impune un studiu amănunţit al acesteia din urmă, pe care-l vom face mai întîi pentru spaţiile cu două şi trei dimensiuni, în scopul obţinerii unor rezultate necesare tratării unor chestiuni similare pentru cazul spaţiului $(n+1)$-dimensional.

a) *Cazul spaţiului afin bidimensional* [3]. Dacă $n=1$, sistemul (10) se reduce la o singură ecuaţie, a cărei soluţie (11), ce depinde de o constantă arbitrară I^1, poate fi scrisă sub forma:

$$(15)\quad [a_1^2 - I^1(\xi^2)^2](x^1)^2 + 2(a_1 a_2 + I^1 \xi^1 \xi^2) x^1 x^2 + [a_2^2 - I^1(\xi^1)^2](x^2)^2 - \beta^2 = 0.$$

Aceasta reprezintă, evident, ecuaţia unei familii de conice pentru care

$$(16)\qquad \delta = -I^1 \beta, \quad \Delta = I^1 \beta^3;$$

deci excluzînd, din motive uşor sesizabile, alternativele $\beta = 0$ sau $I^1 = 0$, corespunzătoare cazului parabolic degenerat, în virtutea condiţiilor impuse la început, ecuaţia (15) este aceea a unei familii de conice cu centru. Mai mult chiar, datorită parametrilor pe care-i conţine, prin particularizarea acestora se poate obţine orice conică cu centrul în O şi care trece prin punctul arbitrar ales $Q(\xi^k)$. Într-adevăr, dacă considerăm ecuaţia lor generală sub forma:

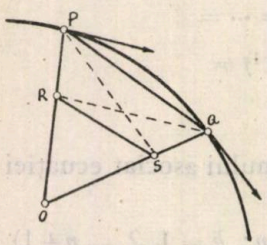


Fig. 1

$$(17)\qquad a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1 x^2 + a_{22}(x^2)^2 - 1 = 0,$$

pentru care

$$(18)\qquad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \neq 0, \quad a_{11}(\xi^1)^2 + 2a_{12}\xi^1\xi^2 + a_{22}(\xi^2)^2 = 1,$$

din identificarea ecuaţiilor (15) şi (17) rezultă că este posibil să determinăm totdeauna a_1, a_2 şi I^1, oricare ar fi a_{ij}, $(i,j=1,2)$, prin relaţiile:

$$(19)\quad a_1 = k(a_{11}\xi^1 + a_{12}\xi^2),\ a_2 = k(a_{12}\xi^1 + a_{22}\xi^2),\ I^1 = k^2(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}),\ \beta^2 = k^2,$$

astfel încît ecuaţia (15) să reprezinte o conică cu centrul în O, prescrisă.

Reciproc, dacă se consideră o conică oarecare, cu centrul în O, şi dacă efectuăm construcţia geometrică expusă la început, se constată că relaţia de paralelism (7) are loc şi prin urmare putem formula:

P r o p o z i ţ i a 1. *Dintre toate curbele plane, numai conicele cu centru se bucură de următoarea proprietate:* P *şi* Q *fiind două puncte oarecare ce aparţin aceluiaşi arc al unei conice cu centru,* OP *şi* OQ *razele corespunzătoare prin centrul* O, *iar* R *şi* S *fiind proiecţiile pe aceste raze ale punctelor* Q *şi* P *respectiv după direcţiile tangente în* P *şi* Q, *dreptele* PQ *şi* RS *sînt paralele* (fig. 1).

Această proprietate este fundamentală pentru a da un răspuns la problema propusă, în cazul spaţiilor cu mai multe dimensiuni, referitor la precizarea operatorului f astfel încît toate condiţiile geometrice impuse la început să fie satisfăcute.

b) *Cazul spaţiului afin tridimensional.* Dacă $n=2$, toate suprafeţele integrale ce sînt soluţii ale ecuaţiei (8') sînt date de funcţia arbitrară f, de argumentele:

$$I^1 = |(a_k x^k)^2 - \beta^2|/(\xi^3 x^1 - \xi^1 x^3)^2, \quad I^2 = |(a_k x^k)^2 - \beta^2|/(\xi^3 x^2 - \xi^2 x^3)^2, \quad (k = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Să observăm mai întîi că cuadricele reprezentate prin integralele prime (20) nu corespund condițiilor geometrice impuse, deoarece — după cum s-a arătat mai înainte — sînt degenerate, de tip parabolic. Apoi, argumentele (20), considerate sub forma lor fracționară, nu sînt definite în punctul $Q(\xi^k)$, ceea ce contravine ipotezei. Deci va trebui să admitem numai acele combinații integrale de argumentele I^1 și I^2 care furnizează soluții analitice peste tot (sau aproape peste tot). De altă parte, este fundamental faptul că intersecția oricărei suprafețe integrale (ce satisface condițiile geometrice impuse la început) cu orice plan ce trece prin origine trebuie să fie o conică cu centru, după cum rezultă din soluționarea problemei în cazul $n = 1$. Va rezulta atunci

Propoziția 2. *Singurele varietăți* (S_2), *soluții ale ecuației* (8'), *ce satisfac condițiile „problemei K" sînt cuadricele nedegenerate (de tip eliptic ori hiperbolic) cu centrul în* O.

Pentru a o demonstra, vom stabili mai întîi o teoremă ajutătoare, care, chiar dacă este bine cunoscută, prezintă avantajul unei demonstrații pe care o vom extinde în continuare pentru studiul problemei în A_{n+1}.

Lema 1. *Singurele varietăți* (S_2) *analitice, ale căror curbe de intersecție cu orice plan ce trece prin* O *sînt conice cu centru, sînt cuadricele cu centrul în* O.

Fie deci $f(x^k) = 0$ o integrală oarecare aparținînd familiei (13), unde f este o funcție analitică, definită într-o regiune a spațiului ce conține originea, și fie $Q(\xi^k)$ un punct oarecare, astfel încît $f(\xi^k) = 0$, $(k = 1, 2, 3)$. Dacă $\lambda_i x^i = 0$, $(\lambda_i \xi^i = 0)$, $(i = 1, 2, 3)$, reprezintă ecuația oricărui plan ce trece prin punctele O și Q, în virtutea ipotezei și ținînd seama de soluția problemei pentru $n = 1$, va rezulta că sistemul

$$\lambda_i x^i = 0, \quad f(x^k) = 0, \tag{21}$$

unde λ_i sînt supuși la singura restricție $\lambda_i \xi^i = 0$, trebuie să reprezinte în mod obligatoriu o conică cu centrul în origine, fiindcă acestea sînt singurele curbe ce satisfac condiția (7) și deci ecuația (8'). Rezultă atunci că ecuația cilindrului proiectant al conicei (21) după direcția Ox^3, poate fi scrisă sub forma:

$$f[x^1, x^2, (\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2)\,\xi^3/(\lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2)] = 0. \tag{22}$$

Fie atunci

$$f(x^i) = f(\xi^i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [(x^1 - \xi^1)(\partial/\partial x^1 + \mu_1 \partial/\partial x^3)_0 + (x^2 - \xi^2)(\partial/\partial x^2 + \mu_2 \partial/\partial x^3)_0]^{(k)} f \tag{22'}$$

dezvoltarea în serie de puteri în vecinătatea punctului $Q(\xi^k)$ a funcției din membrul stîng al ecuației (22), în care

$$\begin{cases} x^3 = (\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2)\,\xi^3/(\lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2), \quad \mu_1 = \lambda_1 \xi^3/(\lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2), \\ \mu_2 = \lambda_2 \xi^3/(\lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2). \end{cases} \tag{23}$$

În baza celor precizate mai înainte trebuie însă ca dezvoltarea precedentă să fie identică, pînă la o constantă multiplicativă și eventual alta aditivă, cu dezvoltarea unei forme pătratice în variabilele x^1 și x^2, pentru orice ternă de valori (x^k) aparținînd oricărei vecinătăți a punctului $Q(\xi^k)$, ceea ce revine la condiția ca, pentru $k \geqslant 3$, să aibă loc relațiile:

(24) $[(x^1-\xi^1)(\partial/\partial x^1+\mu_1\partial/\partial x^3)_0+(x^2-\xi^2)(\partial/\partial x^2+\mu_2\partial/\partial x^3)_0]^{(k)}f\equiv 0,\ (k=3,4,\ldots)$

care conduc la:

$$(25)\quad \begin{cases} \{\partial^3 f/\partial(x^1)^3+3\mu_1\partial^3 f/[\partial(x^1)^2\partial x^3]+3\mu_1^2\partial^3 f/[\partial x^1\partial(x^3)^2]+\mu_1^3\partial^3 f/\partial(x^3)^3\}_0=0, \\ \{\partial^3 f/[\partial(x^1)^2\partial x^2]+2\mu_1\partial^3 f/(\partial x^1\partial x^2\partial x^3)+\cdots+\mu_1^2\mu_2\partial^3 f/\partial(x^3)^3\}_0=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{\partial^3 f/\partial(x^2)^3+3\mu_2\partial^3 f/[\partial(x^2)^2\partial x^3]+3\mu_2^2\partial^3 f/[\partial x^2\partial(x^3)^2]+\mu_2^3\partial^3 f/\partial(x^3)^3\}_0=0. \end{cases}$$

Dar cum egalităţile (25) trebuie să fie satisfăcute oricare ar fi planul prin origine şi prin punctul $Q\in(S_2)$, adică oricare ar fi valorile parametrilor μ_1 şi μ_2, rezultă că ele trebuie să fie satisfăcute identic cu privire la aceste două variabile şi în consecinţă trebuie să aibă loc relaţiile:

26) $\{\partial^3 f/[\partial(x^1)^p\partial(x^2)^q\partial(x^3)^r]\}_{x^i=\xi^i}=0,\quad (p,q,r=0,1,2,3;\ p+q+r=3).$

Condiţiile (26) au în mod evident caracter local. Cum însă dezvoltarea (22′) trebuie să aibă loc, $\forall Q(\xi^k)\in(S_2)$ şi încă oricare ar fi planul prin acest punct şi prin O, urmează — fără vre-o ipoteză suplimentară — că derivatele de ordinul al treilea ale funcţiei f trebuie să fie identic nule, adică $\partial^3 f/[\partial(x^1)^p\partial(x^2)^q\partial(x^3)^r]\equiv 0$, $(p,q,r=0,1,2,3;\ p+q+r=3)$. De aici urmează că toate derivatele de ordin $k\geqslant 3$ trebuie să fie identic nule şi prin urmare funcţia f este algebrică de gradul al doilea în variabilele x^1, x^2, x^3. Ţinînd seama încă de ipotezele (2), rezultă că suprafeţele considerate nu pot fi decît cuadrice cu centrul în O.

Observaţie. Dacă am considera soluţii ale ecuaţiei (8′) în condiţii ceva mai largi, atunci ar putea fi înglobate şi suprafeţele cilindrice de gradul al doilea cu ax de simetrie prin O, printre cele ce satisfac enunţul lemei aproape peste tot.

Ţinînd acum seama de faptul că orice cuadrică cu centrul în O este soluţie a unei ecuaţii de forma (8′), ce poate fi obţinută din (8′) printr-o transformare afină nesingulară (ceea ce se arată foarte uşor), rezultă că invarianţii (20) pot furniza ca soluţii, pentru valori bine determinate ale parametrilor a_k, I^1 şi I^2, orice cuadrică cu centrul în origine şi trecînd prin $Q(\xi^k)$, care este un punct arbitrar ales. Cu această precizare propoziţia 2 este demonstrată.

c) *Cazul general.* Raţionamentul făcut în cazul $n=2$ poate fi extins pentru orice n şi prin urmare să stabilim:

Propoziţia 3. *Singurele varietăţi* (S_n) *din* A_{n+1} *ce satisfac condiţiile „problemei K" sînt hipercuadricele de gen eliptic san hiperbolic, nedegenerate, cu centrul în* O.

Într-adevăr, formînd toate combinaţiile algebrice de forma (13) cu invarianţii (11), combinaţii ce reprezintă ecuaţiile unor varietăţi algebrice de gradul al doilea şi ţinînd seama de mulţimea parametrilor ce intră în expresia lor, nu prezintă nici o dificultate faptul de a arăta că această mulţime este închisă în raport cu grupul transformărilor centro-afine nesingulare şi deci orice hipercuadrică (nedegenerată, căci numai acestea ne interesează) cu centrul în O, aparţine mulţimii soluţiilor (13). Mai mult, nu există şi alte soluţii din (13) care să satisfacă toate condiţiile „problemei K"; pentru a arăta aceasta vom generaliza lema 1 pentru cazul de faţă, procedînd prin inducţie.

Lema 2. *Hipercuadricele* (S_p) *din* A_{p+1} *sînt singurele varietăți analitice ce au proprietatea că orice subvarietate* $(S_{p-1}) \subset (S_p)$, *obținută prin intersecția cu orice hiperplan prin* O, *este o varietate algebrică de gradul al doilea într-un* $A_p \subset A_{p+1}$.

Teorema a fost demonstrată pentru $p = 2$. Să o presupunem adevărată pentru $p = n - 1$, adică să admitem că singurele varietăți $(S_{n-1}) \subset A_n$ ce se bucură de proprietatea enunțată sînt hipercuadricele cu centrul în O, de gen eliptic sau hiperbolic, a căror ecuație este

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n) = \sum_1^n a_{ij} x^i x^j - k^2 = 0, \tag{27}$$

unde $k^2 \neq 0$ și $\det \|a_{ij}\| \neq 0$. În spațiul A_{n+1} ecuația (27) reprezintă un hipercilindru cu generatoarele paralele cu Ox^{n+1}. Fie atunci

$$(S_n) \quad f(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}) = 0 \tag{28}$$

o varietate (S_n) din A_{n+1}, unde f este analitică, ce are proprietatea că intersecția cu orice hiperplan prin O și prin orice punct $Q(\xi^k) \in (S_n)$ de ecuație

$$\sum_1^{n+1} \lambda_k x^k = 0, \quad \left(\sum_1^{n+1} \lambda_k \xi^k = 0 \right), \tag{29}$$

este o varietate (S_{n-1}), de ecuație (27). Eliminînd atunci variabila x^{n+1} între ecuațiile (28) și (29), va rezulta că ecuațiile (27) și

$$f\left[x^1, x^2, \ldots, x^n, \left(\sum_1^n \lambda_k x^k \right) \xi^{n+1} / \left(\sum_1^n \lambda_k \xi^k \right) \right] = 0, \tag{30}$$

trebuie să reprezinte aceeași varietate (S_{n-1}). Dezvoltînd funcția f în serie de puteri în vecinătatea punctului $Q(\xi^k)$ și repetînd pas cu pas raționamentul făcut în cazul lemei 1, rezultă că trebuie să aibă loc identitățile:

$$\partial^m f / [\partial (x^1)^{\alpha_1} \partial (x^2)^{\alpha_2} \ldots \partial (x^{n+1})^{\alpha_k}] \equiv 0, \quad \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = 0, 1, 2, \ldots ; \sum_1^k \alpha_p = m \geqslant 3 \right),$$

ceea ce demonstrează că f trebuie să fie algebrică de gradul al doilea în variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$.

Ținînd seama de lema 2 și de celelalte deziderate enunțate în „problema K", rezultă că (S_n) sînt hipercuadrice nedegenerate, de gen eliptic sau hiperbolic, cu centrul în O; deci propoziția 3 este stabilită.

Din propozițiile 1, 2 și 3 reunite se poate trage următoarea concluzie:

Teoremă. *Fie* (S_n) *o varietate* n*-dimensională analitică, din spațiul afin* A_{n+1}, *iar* P *și* Q *două puncte oarecare ce aparțin aceleiași porțiuni simplu conexe din* (S_n). *Dacă* O *este un punct ce nu aparține varietății, fie* R *și* S *punctele de intersecție ale semidreptelor* OP *și* OQ *cu hiperplanele prin* Q, *respectiv* P, *paralele hiperplanelor tangente la* (S_n) *în* P *și* Q *respectiv. Dreptele* PQ *și* RS *sînt paralele, oricare ar fi perechea de puncte* $(P, Q) \in (S_n)$, *dacă și numai dacă* (S_n) *este o varietate algebrică de gradul al doilea, de tip eliptic sau hiperbolic, nedegenerată, cu centrul în* O.

Observații. 1. În propozițiile 1, 2 și 3 am accentuat doar asupra necesității condiției ca (S_n) să fie o hipercuadrică nedegenerată, de tip

eliptic sau hiperbolic, deoarece suficienţa rezultă fără nici o dificultate din construcţia analitică corespunzătoare.

2. Este interesant de studiat şi cazul în care varietatea (S_n) este un hipercilindru din A_{n+1}. În acest caz paralelismul dreptelor PQ şi RS are loc numai pe anumite subvarietăţi $(S_k) \subset (S_n)$, $(k < n)$, oricare ar fi perechea de puncte (P, Q) situată pe ele, dacă bine înţeles sînt satisfăcute condiţiile teoremei precedente într-un $A_{k+1} \subset A_{n+1}$.

3. Introducerea metricii unghiulare şi a lungimilor în A_{n+1}

Fie A_{n+1}, $(n = 1, 2, ...)$, spaţiul afin $(n+1)$-dimensional în care orice direcţie orientată este individualizată de o semidreaptă ce trece printr-un punct fix O. Un cuplu de direcţii orientate ce trec prin O defineşte un unghi. Măsura acestui unghi se defineşte ca o funcţie de cele două direcţii, astfel încît ea să fie independentă de ordinea în care acestea sînt considerate şi în plus să fie invariantă la orice transformare a grupului centro-afin G_a.

În scopul introducerii unei metrici unghiulare în A_{n+1} să considerăm o indicatoare Finsler (Σ), care este o hipersuprafaţă ce nu trece prin punctul fix O. Fie atunci (d_1) şi (d_2) două direcţii oarecare, iar Q, respectiv P, punctele de pe (Σ) ce le corespund. Proiectînd aceste puncte pe razele OP, respectiv OQ, după direcţiile hiperplanelor tangente la (Σ) în P şi Q respectiv, construim punctele R şi S în modul arătat în § 2.

Să luăm ca măsură a unghiului direcţiilor (d_1) şi (d_2) în raport cu (Σ), mărimea:

$$\text{măs} \sphericalangle (d_1, d_2) = \overline{OR}/\overline{OP}. \tag{31}$$

Pentru ca aceasta să fie independentă de ordinea laturilor unghiului, adică pentru ca $\text{măs} \sphericalangle (d_1, d_2) = \text{măs} \sphericalangle (d_2, d_1)$, trebuie ca condiţia (7) de paralelism să fie satisfăcută: $\overline{OR}/\overline{OP} = \overline{OS}/\overline{OQ}$.

În virtutea rezultatelor din primul paragraf, urmează că (Σ) trebuie să fie în mod obligatoriu o hipersuprafaţă algebrică de gradul al doilea, de tip eliptic sau hiperbolic, nedegenerată, a cărei ecuaţie o putem scrie sub forma:

$$g_{ij}\, x^i x^j = 1, \quad (i, j = 1, 2, ..., n+1), \tag{32}$$

unde $\det \|g_{ij}\| \neq 0$ şi $g_{ij} = g_{ji} = \text{const.}$

Dacă notăm atunci cu ξ^i şi η^i coordonatele punctelor Q şi P, va rezulta că avem satisfăcute egalităţile:

$$g_{ij}\, \xi^i \xi^j = 1, \quad g_{ij}\, \eta^i \eta^j = 1, \tag{33}$$

şi ţinînd seama de relaţiile (8) şi (31), rezultă:

$$\text{măs} \sphericalangle (d_1, d_2) = (p_i \eta^i)/(p_k \xi^k) = (g_{ij} \xi^j \eta^i)/(g_{kl} \xi^k \xi^l) = g_{ij} \xi^i \eta^j, \tag{34}$$

căci numitorul este egal cu 1, în virtutea relaţiilor (33).

Expresia $g_{ij}\,\xi^i\,\eta^j$ nu reprezintă altceva decît forma biliniară ataşată formei pătratice $g_{ij}\,x^i\,x^j$ şi se obţine deci prin polarizarea acesteia relativ la cele două direcţii $(d_1) \equiv \xi^i$ şi $(d_2) \equiv \eta^i$, $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Să considerăm acum un vector $\vec{u}$ cu punctul de aplicaţie în O şi cu extremitatea în punctul $A(u^i)$. Fie $Q(\xi^i)$ punctul de intersecţie al semidreptei OA cu indicatoarea (Σ). Să definim norma $|\vec{u}|$ a vectorului $\vec{u}$ prin raportul:

$$|\vec{u}| = \overline{OA}/\overline{OQ} = u^i/\xi^i, \tag{35}$$

indicele i arătînd că este vorba de raportul a două coordonate corespunzătoare. Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt doi vectori de direcţii ξ^i, respectiv η^i, în baza definiţiei precedente, rezultă $\xi^i = u^i/|\vec{u}|$, $\eta^i = v^i/|\vec{v}|$, şi deci relaţia (34) devine:

$$\text{măs} \sphericalangle (\vec{u}, \vec{v}) = (g_{ij}\,u^i\,v^j)/(|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|), \tag{36}$$

de unde

$$g_{ij}\,u^i\,v^j = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\,\text{măs} \sphericalangle (\vec{u}, \vec{v}). \tag{37}$$

Rezultă atunci că putem numi expresia (37) „produs scalar" al vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, iar măs $\sphericalangle (\vec{u}, \vec{v})$, dată prin relaţia (36), ca fiind cosinusul unghiului celor doi vectori.

Făcînd $\vec{u} \equiv \vec{v}$ în relaţia (37), rezultă în baza relaţiilor (33) că măs $\sphericalangle (\vec{u}, \vec{v}) = 1$, şi deci, din (37), $|\vec{u}|^2 = g_{ij}\,u^i\,u^j$, sau

$$|\vec{u}| = \sqrt{g_{ij}\,u^i\,u^j}. \tag{38}$$

Consideraţiile făcute pot constitui o schemă a modului de introducere a metricii unghiulare şi a celei a lungimilor sub formă de rapoarte, folosind bine înţeles noţiunea de indicatoare. Dar nu acesta a constituit scopul principal al Notei prezente, ci acela de a da o justificare geometrică faptului că numai forma biliniară simetrică, ataşată unei forme pătratice nedegenerate, este capabilă să furnizeze o măsură a unghiului independentă de ordinea laturilor. Mai mult, din cele stabilite în paragraful precedent rezultă că măsura astfel definită este aceeaşi în orice subspaţiu al spaţiului considerat, care conţine cele două direcţii ce definesc unghiul.

Putem face încă, în baza definiţiei (31), observaţia că

$$\text{măs} \sphericalangle (d_1, d_2) = (ORP)/[1 + (ORP)], \tag{39}$$

unde (ORP) este raportul simplu al celor trei puncte a căror semnificaţie a fost dată la început. Deci dacă notăm cu φ unghiul euclidian al celor două direcţii (d_1) şi (d_2), putem să-l exprimăm sub forma unui invariant afin:

(40) $$\varphi = \arccos \{(ORP)/[1 + (ORP)]\}.$$

În mod asemănător, dacă notăm cu A extremitatea unui vector $\vec{u}$ cu punctul de aplicaţie în origine, va rezulta:

(41) $$|\vec{u}| = 1 + 1/(OQA),$$

unde Q este punctul de intersecţie al semidreptei suport a vectorului $\vec{u}$ cu indicatoarea. Ultimele două relaţii constituie o interpretare afină a celor doi invarianţi metrici fundamentali.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de matematici I

BIBLIOGRAFIE

1. Finsler P., *Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen.* Inaugural Dissertation, Göttingen, 1918.
2. Schouten J. A., *Ricci-Calculus,* Springer, Berlin, 1954.
3. Murgescu V., G. M. F., ser. A, 1962, **XIV** (**LXVII**), *11—12,* pp. 581 — 587.

О ВВЕДЕНИИ МЕТРИКИ В АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

(Резюме)

Изучается задача независимости меры угла пары направляющих из аффинного пространства порядка этих направляющих. В связи с этим дается геометрическое объяснение того факта, что индикатриса Финслера необходимо должна является алгебраическим многообразием II-го порядка, должна быть невырождающаяся, а также эллиптического или гиперболического типа.

В § 2 указывается, что эти многообразия являются единственными для которых отношение (7) удовлетворено, т. е. оно их характеризует. Уравнения (13) позволяет иметь все возможные многообразия.

В § 3 указывается (основываясь на предыдущем результате) схема введения угловой метрики, а также и метрики длин в аффинное пространство. Затем, формулами (40) и (41) делается аффинная интерпретация инвариантов основных метрик.

SUR L'INTRODUCTION D'UNE MÉTRIQUE DANS L'ESPACE AFFIN

(Résumé)

On étudie le problème de l'indépendance de la mesure de l'angle d'une paire de directions de l'espace affin, de l'ordre de celles-ci, et à ce regard on donne une justification géométrique du fait que l'indicatrice de Finsler doit être nécessairement une variété algébrique du deuxiéme degré, non dégénérée, du type elliptique ou hyperbolique.

Dans le § 2 on montre que ces variétés sont les seules pour lesquelles la relation (7) est satisfaite, ce qui revient à dire que cette relation les caractérise. L'équation (13) nous fournit toutes les indicatrices possibles.

Dans le § 3 on indique — en s'appuyant sur le résultat précédent — une schéma d'introduction de la métrique angulaire et de la métrique des longueurs dans l'espace affin et puis on donne une interprétation affine des invariants métriques fondamentaux par les formules (40) et (41).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 512.94 ; 531.1

ASUPRA CARACTERULUI SPINORIAL AL UNOR MĂRIMI CE INTERVIN ÎN STUDIUL ROTAŢIILOR FINITE

DE

I. ENESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Obiectul acestei Note este de a arăta că mărimile complexe bidimensionale introduse în [1], în scopul descrierii rotaţiilor finite ale rigidului, sînt spinori în sensul studiului [2] al lui P. K. Raşevski.

2. Reamintim următoarele definiţii [2]:

a) Se numeşte spaţiu euclidian complex n-dimensional R_n^+, mulţimea formată din două entităţi, puncte şi vectori, cărora li se asociază aceleaşi proprietăţi ca şi în algebra vectorială obişnuită, cu deosebirea că nu se defineşte produsul vectorial şi, în plus, produsul scalar conduce la un număr complex.

b) Se numeşte multivector de valenţă k, (k-vector), un sistem de numere $a^{i_1 i_2 \cdots i_k}$, $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n)$ care se transformă după legea:

$$a^{i'_1 i'_2 \cdots i'_k} = A^{i'_1}_{i_1} A^{i'_2}_{i_2} \cdots A^{i'_k}_{i_k} \cdot a^{i_1 i_2 \cdots i_k} \tag{1}$$

şi sînt antisimetrice în toţi indicii. Multivectorul de valenţă zero este un scalar, cel de valenţă unu este un vector, cel de valenţă doi un bivector etc.

c) Se numeşte agregat în R_n^+, mulţimea formată dintr-un scalar, un vector, un bivector, ..., un n-vector, exprimaţi în aceeaşi bază:

$$a, a^{i_1}, a^{i_1 i_2}, \ldots, a^{i_1 i_2 \cdots i_n}. \tag{2}$$

Agregatele (2) se bucură de un număr de proprietăţi studiate în [2], datorită cărora pot fi considerate ca elemente ale unei algebre peste corpul numerelor complexe, constituind o algebră Clifford în R_n^+, notată prin C_n^+.

d) Orice agregat se poate descompune după relaţia:

$$A = a + \sum_{i_1} a^{i_1} e_{i_1} + \sum_{i_1<i_2} a^{i_1\, i_2} e_{i_1\, i_2} + \cdots + \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}} a^{i_1\, i_2 \cdots\, i_{n-1}} e_{i_1\, i_2 \cdots\, i_{n-1}} +$$

$$+ a^{12 \cdots\, n} e_{12 \cdots\, n}. \tag{3}$$

Se numeşte afinor, operatorul liniar $\hat{A}$, cu proprietăţile din [2], care asociază fiecărui vector ξ al unui spaţiu afin complex n-dimensional, un alt vector $\eta = \hat{A}(\xi)$ din acelaşi spaţiu.

Are loc următoarea teoremă: algebra Clifford C_n^+, $(n = 2^\nu)$, este izomorfă cu algebra afinorilor $\hat{M}_{2^\nu}$ din spaţiul S_n, ceea ce permite să se spună că s-a dat o reprezentare prin spinori a algebrei C_n^+.

e) Prin spinor (spin vector) se înţelege orice vector din spaţiul S_n.

3. În [1] s-a constatat că operatorul de rotaţie finită a unui rigid, poate fi pus sub forma:

$$s = \alpha + \mathrm{j}\beta, \tag{4}$$

unde α şi β sînt numere complexe (reprezentînd parametrii lui Cayley-Klein), iar $\mathrm{j}^2 = -1$. S-a ajuns astfel, să se considere numere hipercomplexe (bicomplexe) de forma:

$$S = u + \varepsilon v, \tag{5}$$

cu

$$\varepsilon^2 = -1 \text{ şi } \varepsilon w = w^* \varepsilon \tag{6}$$

unde u, v, w sînt numere complexe:

Dacă $u = x_4 + x_3\,\mathrm{i}$ şi $v = x_2 + x_1\,\mathrm{i}$, numărul (5) corespunde [1] cuaternionului real:

$$Q = x_1\,\mathrm{i} + x_2\,\mathrm{j} + x_3\,\mathrm{k} + x_4, \tag{7}$$

unde: $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = k^2 = -1$ şi $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$, numerele x_1, x_2, x_3, x_4 fiind reale.

Cuaternionul (7), caz particular de cuaternion complex, este un agregat în R_2^+ [2], (mulţimea cuaternionilor complecşi fiind algebra Clifford C_2^+).

În baza teoremei de la pct. **2**, mărimea (5), izomorfă cu cuaternionul (7), introdusă în scopul descrierii rotaţiilor finite ale rigidului, este spinor în sensul definiţiei generale a lui P. K. Raşevski. Aceasta justifică denumirea de spinor, folosită pentru (5) în [1].

4. În [1] s-a arătat că spinorului (5) şi deci cuaternionului (7), îi este asociată matricea:

$$\begin{Vmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

unităţilor imaginare i, j, k corespunzîndu-le respectiv matricile:

$$\begin{Vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ şi } \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Se poate stabili cu uşurinţă relaţia dintre aceste matrici şi acelea care reprezintă afinorii $\hat{E}_1$ şi $\hat{E}_2$ operînd în C_2^+, date în [2]. Pentru aceasta trebuie observat că unităţile imaginare i, j reprezintă produsul prin i, a respectiv doi vectori de bază unitate ai agregatelor din R_2^+ (de pildă e_1 şi e_2), iar k produsul celui de al treilea (e_{12}) prin -1. Deci matricile ce corespund vectorilor de bază sînt:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \text{ şi } \begin{Vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{Vmatrix}. \tag{9'}$$

Se constată că ele sînt conjugatele matricilor:

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad E_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix} \text{ şi } E_{12} = \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix} \tag{10}$$

ce reprezintă afinorii din C_2^+ (matricea E_{12} fiind asociata afinorului $E_{12} = E_1 . E_2$ ce corespunde bivectorului de bază $e_{12} = e_1 . e_2$).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de matematici II

BIBLIOGRAFIE

1. Enescu I., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, pp. 61—68.
2. Рашевский П. К., *Теория спиноров*, УМН, 1955, **X**, *2 (64)*.

О СПИНОРНОМ ХАРАКТЕРЕ ВЕЛИЧИН ВХОДЯЩИХ В ИЗУЧЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ВРАЩЕНИЙ

(Резюме)

Пользуя результаты [2] доказывается, что комплексные двухразмерные величины, будучи введены в [1] для описания конечных вращений твердого тела являются спинорами.

SUR LE CARACTÈRE SPINORIEL DES GRANDEURS INTERVENANT À L'ÉTUDE DES ROTATIONS FINIES

(Résumé)

En utilisant les résultats du travail [2], on démontre que les grandeurs complexes bidimensionnelles introduites dans [1], pour décrire les rotations finies d'un système invariable, sont des spineurs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. C. 539.413

BENDING OF AN INCOMPRESSIBLE CIRCULAR BLOCK

BY

G. LAKSHMINARAYANA

1. Introduction

In recent years the theory of finite deformation has been the subject matter of number of investigations. One of the major advances in the theory has been made by obtaining a number of exact solutions, specially for incompressible bodies, in terms of an arbitrary strain energy function. Extensive bibliographies are found in the surveys of recent developments by A. E. Green and W. Zerna [1], T. C. Doyle and J. L. Ericksen [2] and R. S. Rivlin [3]. R. S. Rivlin [4], A. E. Green and E. W. Wilks [5] and R. S. Rivlin and J. L. Ericksen [6] solved the problems of incompressible rectangular blocks bent into cylindrical shells. In this paper the problem of bending of an isotropic incompressible circular block into a part of a spherical shell has been formulated and an exact solution in terms of the strain energy function has been obtained when the ratio θ = the radius of the circular block in the deformed state to the radius of the spherical shell is so small that $\sin\theta$ can be replaced by θ.

2. Notation and formulae

Following the notation of Green and Zerna *(op. cit.)* let x_i be the initial and y_i the final and θ_i the curvilinear coordinates of the strained body, with g_{ij} and G_{ij} as metric tensors for the coordinate system θ_i in the unstrained and strained states respectively.

When the material in the unstrained state is homogeneous and isotropic, the strain energy function W, measured per unit volume of the unstrained body, is a function of strain invariants, so that

$$W = W\ (I, II, III), \tag{2.1}$$

where :

$$I = g^{ij} G_{ij}, \quad II = g_{ij} G^{ij}, \quad III = G/g, \quad G = |\, G_{ij} \,|, \quad g = |\, g_{ij} \,|. \tag{2.2}$$

The contravariant stress tensor referred to θ_i coordinates in the strained body is given by :

$$T^{ij} = g^{ij}\, \Phi + B^{ij}\, \Psi + G^{ij}\, p, \tag{2.3}$$

where :

$$\begin{cases} \sqrt{III}\,\Phi = 2\,\partial W / \partial I, \quad \sqrt{III}\,\Psi = 2\,\partial W / \partial II, \quad p = 2\sqrt{III}\,(\partial W/\partial III), \\ B^{ij} = g^{ij} I - g^{ir} g^{js} G_{rs} = e^{irm} e^{jsn} g_{rs} G_{mn} / g, \end{cases} \tag{2.4}$$

and as usual e is $+1$ or -1 according as i, r, m, is an even or odd permutation of $1, 2, 3$ and equal to zero otherwise. The physical components of stress σ_{ij} are given by:

$$\sigma_{ij} = \sqrt{G_{jj} / G^{ii}}\, T^{ij}. \tag{2.5}$$

When the material is incompressible, the equation $III = 1$ holds at all points of the body, and the strain energy function W is a function of I and II only, p being a scalar invariant function of θ_i.

3. Bending of the block

Suppose that in the undeformed state of the body it is a circular block bounded by the planes $x_3 = a_2$, and $x_3 = a_1$, $a_2 > a_1$, and the cylinder $x_1^2 + x_2^2 = a^2$. The block is then bent into a part of a spherical shell of outer radius r_2, inner radius r_1 and the edge $\theta = \alpha$. Let y_i-axes coincide with the x_i-axes and the curvilinear coordinates θ_i in the deformed state be a system of spherical polar coordinates (r, θ, φ) so that:

$$y_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \quad y_3 = r\cos\theta. \tag{3.1}$$

Since the deformation is symmetrical about the x_3-axis we see that: i) the planes $x_3 = \text{const.}$ in the undeformed state become the spherical surfaces $r = \text{const.}$ in the deformed state; ii) the circles $x_1^2 + x_2^2 = \text{const.}$ in the undeformed state become the small circles $\theta = \text{const.}$ in the deformed state; iii) $\tan^{-1}(x_2/x_1) = \varphi$. These imply that:

$$x_3 = f(r), \quad (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = F(\theta). \tag{3.2}$$

Therefore we get

$$x_1 = F(\theta)\cos\varphi, \quad x_2 = F(\theta)\sin\varphi, \quad x_3 = f(r). \tag{3.3}$$

The metric tensors for the strained and unstrained bodies are given by:

$$G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\theta) \end{bmatrix}, \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad G = r^4\sin^2\theta, \tag{3.4}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1/f'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/F'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/F^2 \end{bmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} f'^2 & 0 & 0 \\ 0 & F'^2 & 0 \\ 0 & 0 & F^2 \end{bmatrix}, \quad g = (FF'f')^2, \tag{3.5}$$

where $f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}r$, $F' = \mathrm{d}F/\mathrm{d}\theta$.

The condition of incompressibility $III = 1$ gives:

$$f'/r^2 = (\sin\theta)/(FF') = A, \tag{3.6}$$

where A is a constant.

Solving (3.6) we get:

$$x_3 = Ar^3/3 + A_1, \tag{3.7}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = F^2 = A_2 - (2\cos\theta)/A, \tag{3.8}$$

where A_1 and A_2 are constants.

If r_2 and r_1, $(r_2 > r_1)$, are the radii of the external and internal boundaries of the spherical shell which are initially the planes $x_3 = a_2$ and $x_3 = a_1$, (3.7) gives:

$$a_2 = Ar_2^3/3 + A_1, \tag{3.9}$$

$$a_1 = Ar_1^3/3 + A_1. \tag{3.10}$$

As the point circle $x_1^2 + x_2^2 = 0$ which lies in the x_3-axis in the undeformed state goes into the point on y_3-axis for which $\theta = 0$ in the deformed state, (3.8) gives:

$$0 = A_2 - 2/A. \tag{3.11}$$

The equations (3.9), (3.10) and (3.11) give:

$$A = 3(a_2 - a_1)/(r_2^3 - r_1^3), \quad A_1 = (a_1 r_2^3 - a_2 r_1^3)/(r_2^3 - r_1^3), \quad A_2 = 2/A. \tag{3.12}$$

From (3.5), (3.7) and (3.8) we get:

$$\left\{\begin{array}{l} g^{ij} = \begin{bmatrix} 1/(A^2 r^4) & 0 & 0 \\ 0 & 2A(1-\cos\theta)/\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & A/[2(1-\cos\theta)] \end{bmatrix}, \\ g_{ij} = \begin{bmatrix} A^2 r^4 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta/[2A(1-\cos\theta)] & 0 \\ 0 & 0 & A/[2(1-\cos\theta)] \end{bmatrix}. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

From (2.2), (2.4), (3.4) and (3.13) we get:

$$I = 1/(A^2 r^4) + (Q + 1/Q) A r^2, \tag{3.14}$$

$$II = A^2 r^4 + (Q + 1/Q)[1/(Ar^2)], \tag{3.15}$$

$$B^{ij} = \begin{bmatrix} (Q+1/Q)/(Ar^2) & 0 & 0 \\ 0 & A^2 r^2 + Q/(Ar^4) & 0 \\ 0 & 0 & A^2 r^2/\sin^2\theta + 1/[2A^4 r(1-\cos\theta)] \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

where:

$$Q = 2(1 - \cos\theta)/\sin^2\theta. \tag{3.17}$$

The stress-strain relations (3.3) give:

$$T^{11} = \Phi/(A^2 r^4) + (Q + 1/Q)[\Psi/(Ar^2)] + p, \tag{3.18}$$

$$T^{22} = \Phi A Q + [A^2 r^2 + Q/(Ar^4)]\Psi + p/r^2, \tag{3.19}$$

$$T^{33} = \Phi A/[2(1 - \cos\theta)] + \{A^2 r^2/\sin^2\theta + 1/[2Ar^4(1-\cos\theta)]\} + p/(r^2 \sin^2\theta), \tag{3.20}$$

$$T^{23} = T^{31} = T^{12} = 0. \tag{3.21}$$

The physical components of stress (2.5) give:

$$\sigma_{11} = \Phi/(A^2 r^4) + (Q + 1/Q)[\Psi/(Ar^2)] + p, \tag{3.22}$$

$$\sigma_{22} = \Phi A Q r^2 + [A^2 r^4 + Q/(Ar^2)]\Psi + p, \tag{3.23}$$

$$\sigma_{33} = \Phi A r^2/Q + [A^2 r^4 + 1/(AQr^2)]\Psi + p, \tag{3.24}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0. \tag{3.25}$$

In the absence of the body forces the equations of equilibrium to be satisfied are:

$$\partial\sigma_{11}/\partial r + (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})/r = 0, \tag{3.26}$$

$$\partial\sigma_{22}/\partial\theta + (\sigma_{22} - \sigma_{33})\cot\theta = 0, \tag{3.27}$$

$$\partial p/\partial\varphi = 0, \tag{3.28}$$

which reduce, after substitution from (3.22), (3.23) and (3.24), to:

(3.29) $$\partial\sigma_{11}/\partial r + [2/(A^2 r^5) - (Q + 1/Q)\, Ar]\, \Phi - [2A^2 r^3 - (Q + 1/Q)/(Ar^3)]\, \Psi = 0,$$

(3.30) $$\partial\sigma_{22}/\partial\theta + [\Phi Ar^2 + \Psi/(Ar^2)]\,(Q - 1/Q)\cot\theta = 0$$

and (3.28) shows that p is a function of r and θ only.

The equations (3.14) and (3.15) give:

(3.31) $$\partial I/\partial r = -2[2/(A^2 r^5) - (Q + 1/Q)\, Ar],$$

(3.32) $$\partial II/\partial r = 2[2A^2 r^3 - (Q + 1/Q)/(Ar^3)],$$

(3.33) $$\partial I/\partial\theta = Ar^2 (Q - 1/Q)(1 - \cos\theta)/\sin\theta,$$

(3.34) $$\partial II/\partial\theta = (Q - 1/Q)(1 - \cos\theta)/(Ar^2 \sin\theta).$$

The equations (3.29) and (3.30) now reduce to:

(3.35) $$\partial\sigma_{11}/\partial r = (\partial W/\partial I)(\partial I/\partial r) + (\partial W/\partial II)(\partial II/\partial r) = \partial W/\partial r,$$

(3.36) $$\partial\sigma_{22}/\partial\theta = [2\cos\theta/(\cos\theta - 1)]\,[(\partial W/\partial I)(\partial I/\partial\theta) + (\partial W/\partial II)(\partial II/\partial\theta)] = \\ = [2\cos\theta/(\cos\theta - 1)]\,(\partial W/\partial\theta),$$

which give:

(3.37) $$\sigma_{11} = W + K_1(\theta),$$

(3.38) $$\sigma_{22} = \int^{\theta} \frac{2\cos\theta}{\cos\theta - 1} \cdot \frac{\partial W}{\partial\theta}\, d\theta + K_2(r),$$

where $K_1(r)$ and $K_2(r)$ are arbitrary functions.

Substituting (3.37) and (3.38) in (3.22) and (3.23) we get two values for p:

(3.39) $$p = W + K_1(\theta) - \Phi/(A^2 r^4) - (Q + 1/Q)\,[\Psi/(Ar^2)],$$

(3.40) $$p = \int^{\theta} \frac{2\cos\theta}{\cos\theta - 1} \cdot \frac{\partial W}{\partial\theta}\, d\theta + K_2(r) - \Phi AQr^2 - [A^2 r^4 + Q/(Ar^2)]\,\Psi,$$

which are not consistent even for the simplest form for W given by (7):

(3.41) $$W = c_1 (I \quad 3).$$

A solution can, however, be obtained by assuming the maximum value of θ = radius of the circular block in the deformed state, the radius of the spherical shell, to be so small that $\sin\theta$ can be replaced by θ. Then from (3.17) Q can be replaced by unity, so that the equations (3.14), (3.15), (3.22)...(3.28) and (3.31), (3.32) reduce to:

(3.42) $$I = 1/(A^2 r^4) + 2Ar^2, \qquad (3.43) \qquad II = A^2 r^4 + 2/(Ar^2),$$

(3.44) $$\sigma_{11} = \Phi/(A^2 r^4) + 2\Psi/(Ar^2) + p,$$

(3.45) $$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \Phi Ar^2 + [A^2 r^4 + 1/(Ar^2)]\,\Psi + p, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0,$$

(3.46) $$d\sigma_{11}/dr + 2(\sigma_{11} - \sigma_{22})/r = 0, \quad (3.47) \qquad dp/d\theta = 0,$$

(3.48) $$dp/d\varphi = 0, \qquad (3.49) \qquad dI/dr = 4[Ar - 1/(A^2 r^5)],$$

(3.50) $$dII/dr = 4[A^2 r^3 - 1/(Ar^3)].$$

The equations (3.47) and (3.48) show that p is a function of r only. Substituting (3.44) and (3.45) in (3.46) and simplifying we get :

$$\sigma_{11} = W + K, \tag{3.51}$$

where K is an arbitrary constant.

Substituting (3.51) in (3.44) we get the value of p as :

$$p = W + K - \Phi/(A^2 r^4) - 2\Psi/(Ar^2). \tag{3.52}$$

Substituting (3.52) in (3.45) we get :

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = W + K + (r/2)\,(\mathrm{d}W/\mathrm{d}r). \tag{3.53}$$

If the inner surface of the shell ($r = r_1$) is free from tractions we must have :

$$\sigma_{11} = 0 \text{ when } r = r_1, \tag{3.54}$$

which on substitution in (3.51) gives :

$$\sigma_{11} = W(r) - W(r_1). \tag{3.55}$$

On the outer surface of the shell ($r = r_2$) we have to apply a radial force R_1 given by :

$$R_1 = \sigma_{11}(r_2) = W(r_2) - W(r_1). \tag{3.56}$$

The resultant force F_1 and the couple M_1 acting on the edge $\theta = \alpha$ per unit arc between φ and $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ are given by :

$$F_1 = \sin\alpha \int_{r1}^{r_2} \sigma_{22}\, r\,\mathrm{d}r, \tag{3.57}$$

$$M_1 = \sin\alpha \int_{r1}^{r_2} \sigma_{22}\, r^2\,\mathrm{d}r, \tag{3.58}$$

which give :

$$2F_1 = \sin\alpha\,[W(r_2) - W(r_1)]\, r_2^2, \tag{3.59}$$

$$2M_1 = \sin\alpha \left[W(r_2)\, r_2^3 - W(r_1)\,(2r_2^3 + r_1^3)/3 - \int_{r_1}^{r_2} r^2 W \mathrm{d}r \right]. \tag{3.60}$$

Thus to bend an isotropic incompressible circular block into a part of a spherical shell we require a resultant force F_1 and a couple of moment M_1 on the edge and a radial force R_1 on the outer surface of the spherical shell.

Received the 10 I 1962

Regional Engineering College,
Warangal, India

REFERENCES

1. Green A. E., Zerna W., *Theoretical Elasticity*, Oxford University Press, 1954.
2. Doyle T. C., Ericksen J. L., Advances in Appl. Mech., 1956, **IV**, pp. 53—115.
3. Rivlin R. S., *Rheology*, **I**, Academic Press, 1956, pp. 351—385.
4. — Proc. Roy. Soc., 1949, **A 195**, pp. 463—473.
5. Green A. E., Wilks E. W., J. Rat. Mech. a. Anal., 1954, **3**, pp. 713—723.
6. Rivlin R. S., Ericksen J. L., J. Rat. Mech. a. Anal., 1954, **3**, pp. 281—301.
7. Rivlin R. S., Phil. Trans. Roy. Soc., 1948, **A 240**, pp. 459–490.

ИЗГИБ КРУГОВОГО НЕСЖИМАЕМОГО БЛОКА

(Резюме)

В данной работе исследуется задача изгиба изотропного кругового несжимаемого блока превращенного под влиянием изгиба в одной его части в тонкий сферический слой. Предполагается, что отношение между радиусом блока и радиусом сферического тонкого слоя выражено малой величиной. Точное решение задачи было получено, в данном случае, взяв как основу функцию энергии деформации.

ÎNCOVOIEREA UNUI BLOC CIRCULAR INCOMPRESIBIL

(Rezumat)

În această lucrare se studiază problema încovoierii unui bloc izotrop circular incompresibil transformat prin încovoiere într-o porţiune de strat sferică. Se presupune că raportul dintre raza blocului circular şi raza stratului sferic este un număr mic. Soluţia exactă a problemei s-a obţinut în cazul considerat luînd ca bază funcţia de energie de deformaţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. C. 539.412

TORSION OF A CIRCULAR CYLINDER REINFORCED BY A SQUARE ROD WITH ROUNDED CORNERS

BY

U. A. SASTRY

Paper presented at the Sixth Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Delhi, India, December 1960

1. Introduction

Torsion of a circular cylinder reinforced with a circular rod has been solved by A. K. Rukhadze and I. N. Vekua (1933). Torsion of a circular cylinder reinforced with an elliptical rod has been fully investigated by D. I. Sherman (1955). In this paper the problem of torsion of a circular cylinder reinforced with a square rod with rounded corners has been investigated.

Let us suppose that the elastic isotropic beam is composed of a homogeneous circular cylinder weakened by a square cavity and a rod made of different material soldered with the cylinder along the common lateral surface. The cross section S of the cylinder consists of the domain S_1 and S_2, where S_1 is the cross section of the inner square rod and S_2 the region between the outer circular rod and inner square rod. Let us take for the plane XOY the plane of the cross section and OZ directed parallel to the axis of the cylinder.

Writing

$$u = -\tau yz, \quad v = \tau zx, \quad w = \tau\varphi(x, y), \tag{1}$$

where τ is a constant (degree of twisting) and $\varphi(x, y)$ is the torsion function, continuous in the domain S. All the stress components vanish except X_z and Y_z and they bare given by:

$$X_z = \tau\mu_j(\partial\varphi_j / \partial x - y), \quad Y_z = \tau\mu_j(\partial\varphi_j / \partial y + x), \tag{2}$$

in the domain S_j, $(j = 1, 2)$, where μ_j denotes the shear modulus corresponding to the region S_j. From the equations of elastic equilibrium it follows that the torsion function $\varphi(x, y)$ is harmonic in the region S_j. The values of the function in the domains S_1 and S_2 are denoted by φ_1 and φ_2.

The function $F(z) = -i F^*(z)$, where $F^*(z)$ is the usual complex torsion function and $z = x + iy$, has to satisfy the following boundary conditions.

Since the displacements and tractions are continuous across the boundary L_1 we obtain:

$$F_1(z) - \overline{F_1(z)} = F_2(z) - \overline{F_2(z)}, \tag{3}$$

$$\mu_1[F_1(z) + \overline{F_1(z)}] - \mu_2[F_2(z) + \overline{F_2(z)}] = (\mu_1 - \mu_2)\, z\bar{z}. \tag{4}$$

The external surface of the bar, free from external forces, is expressed by the equation:

$$F_2(z) + \overline{F_2(z)} = z\bar{z} + \text{const. on } L_2. \tag{5}$$

2. Conformal Transformation

The mapping function

$$z = w(\zeta) = R(\zeta + m/\zeta^3), \quad R > 0, \quad 0 < m \leqslant 1/3, \tag{6}$$

maps the region between S_1 and S_2 conformally on to the region between two concentric circles of radii $r_1 = 1$ and $r_2 = e$ in the ζ-plane, whose circumferences are denoted by C_1 and C_2.

Let

$$F^*(z) = f(\zeta) \tag{7}$$

and the value of the function $f(\zeta)$ with in the circle C_1 be denoted by

$$f_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n' \zeta^n, \tag{8}$$

and the value of the function $f(\zeta)$ between C_1 and C_2 be denoted by

$$f_2(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n'' \zeta^n, \tag{9}$$

where $A_n = a_n + ib_n$ etc. Writing $\zeta = r \exp(i\theta)$ and using the equations (8) and (9) in the boundary conditions (3), (4), (5) we obtain:

$$a_k'' = a_{-k}'' = 0, \quad a_0' = a_0'' = 0, \quad r_2^8 b_4'' + b_{-4}'' = mR^2 r_2^2, \quad b_0'' = R^2(r_2^2 + m^2 r_2^{-6})/2 + \text{const.}, \tag{10}$$

$$b_k' = b_k'' - r_1^{-2k} b_{-k}'', \tag{10 a}$$

$$\mu_2 b_0'' - \mu_1 b_0' = (\mu_2 - \mu_1) R^2 (r_1^2 + m^2 r_1^{-6})/2 + \text{const}, \tag{10 b}$$

$$\mu_2 (r_1^4 b_4'' + r_1^{-4} b_{-4}'') - \mu_1 b_4' r_1^4 = (\mu_1 - \mu_2) mR^2 r_1^{-2}. \tag{10 c}$$

From the above equations (10), (10 a), (10 b), (10 c) we easily find:

$$b_4' = mR^2 [(\lambda r_1^2 - r_2^2)/(\lambda r_1^8 - r_2^8) - r_1^{-8} (r_1^{-6} - r_2^{-6})/(\lambda^{-1} r^{-8} - r_2^{-8})], \tag{11}$$

$$b_4'' = mR^2 (\lambda r_1^2 - r_2^2)/(\lambda r_1^8 - r_2^8), \quad b_{-4}'' = mR^2 (r_1^{-6} - r_2^{-6})/(\lambda^{-1} r_1^{-8} - r_2^{-8}), \tag{11 a}$$

where:

$$\lambda = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1).$$

The stress components can be calculated from the formula:

$$T_{jr} - i\, T_{j\theta} = \mu_j \tau\zeta [f_j'(\zeta) - i\, \overline{w(\zeta)}\, w'(\zeta)]/[r \mid w'(\zeta) \mid], \quad (j = 1, 2). \tag{12}$$

For the present problem we obtain:

$$\begin{cases} T_{1r} = 4\mu_1 \tau \sin 4\theta\, (mR^2 r^{-2} - b_4' r^4)/D(r_1), \\ T_{1\theta} = \mu_1 \tau [R^2 (r^2 - 2mr^{-2} \cos 4\theta - 3m^2 r^{-6}) - 4 b_4' r^4 \cos 4\theta]/D(r_1), \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} T_{2r} = 4\mu_2 \tau [mR^2 r^{-2} \sin 4\theta - (b_4'' r^4 + b_{-4}'' r^{-4}) \sin 4\theta]/D(r_2), \\ T_{2\theta} = \mu_2 \tau [R^2 (r^2 - 2m r^{-2} \cos 4\theta - 3m^2 r^{-6}) - 4 (b_4'' r^4 - b_{-4}'' r^{-4}) \cos 4\theta]/D(r_2), \end{cases} \tag{14}$$

where

$$D(r) = (r^2 - 6m r^{-2} \cos 4\theta + 9r^{-6} m^2)^{1/2}.$$

To determine the torsional rigidity we use the formula;

$$D^* = \sum_{j=1}^{2} \mu_j \iint_{S_j} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) dx\, dy, \tag{15}$$

where $\varphi_j(x, y)$ is the usual real torsion function for the medium S_j. The equation (15) can be written in the form:

$$D^* = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \int_{C_1} \varphi_1 \, d(r_0^2) - \frac{\mu_2}{2} \int_{C_2} \varphi_2 \, d(r_0^2) + \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2, \tag{15 a}$$

where $r_0^2 = x^2 + y^2$ and I_1 and I_2 are the M. I. of S_1 and S_2 with respect to the origin of coordinates. The above equation may be written in the form:

$$D^* = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \int_{C_1} \varphi_1 \, d\left(w(\zeta)\, \overline{w(\zeta)} \right) - \frac{\mu_2}{2} \int_{C_2} \varphi_2 \, d\left(w(\zeta)\, \overline{w(\zeta)} \right) + \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2. \tag{16}$$

After a little calculation we obtain the expression for the torsional rigidity in the form:

$$D^* = 4\pi m R^2 \left[(\mu_2 - \mu_1) b_4' r_1^2 - \mu_2 (r_2^2 b_4'' - r_2^{-6} b_{-4}'') \right] + \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2. \tag{17}$$

3. Numerical example

Writing $m = 2/15$, $\mu_2 = 20\,\mu_1$, or $\lambda = 19/21$, $r_1 = 1$, and $r_2 = e$, we obtain the torsional rigidity of the composite prismatical rod in the form:

$$D^* = \mu_1 (I_1 + 20\, I_2 - 1.446\, \pi R^4). \tag{18}$$

Stress distribution for $r = r_2$ and $r = r_1$ are given in tables 1 and 2 for different values of m.

Table 1

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$m = 2/15,\ \lambda = 19/21$							
$\frac{T_{1\theta}}{\mu_1 \tau R^2}$	1.93	1.41	0.96	0.53	0.96	1.41	1.93
$\frac{T_{1\tau}}{\mu_1 \tau R^2}$	0	1.17	1.01	0	−1.01	−1.17	0
$m = 1/9,\ \lambda = 19/21$							
$\frac{T_{1\theta}}{\mu_1 \tau R^2}$	1.85	1.25	0.70	0.53	0.70	1.25	1.85
$\frac{T_{1\theta}}{\mu_1 \tau R^2}$	0	0.92	0.67	0	−0.67	−0.92	0

Table 2

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$m = 2/15,\ \lambda = 19/21$							
$\frac{T_{2\theta}}{\mu_2 \tau R^2}$	2.55	2.66	2.81	2.90	2.81	2.66	2.55
$m = 1/3,\ \lambda = 19/21$							
$\frac{T_{2\theta}}{\mu_2 \tau R^2}$	2.60	2.67	2.79	2.85	2.79	2.67	2.60

Received the 16 VIII 1961

Regional Engineering College, Warangal, India

REFERENCES

1. Мусхелишвили Н. И., *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, изд. IV, Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Рухадзе А. К., Векуа И. Н., ИАН, 1933, *3*, стр. 373—386.
3. Шерман Д. И., Инж. сб., 1955, стр. 21.
4. Seika M., J. Appl. Mech., 1958, pp. 571—574.

КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА УКРЕПЛЕННОГО КВАДРАТНОЙ БАЛКОЙ С ЗАКРУГЛЕННЫМИ УГЛАМИ

(Резюме)

Автор, следуя работам [1] и [2], изучает задачу указанную в заголовке. Жесткость кручения выражается формулой (17). Приводится пример.

TORSIONAREA UNUI CILINDRU CIRCULAR ÎNTĂRIT PRINTR-O BARĂ PĂTRATĂ CU COLŢURI ROTUNJITE

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei a problemelor de studiu a torsiunii unui cilindru circular întărit printr-o bară circulară sau eliptică, studiate respectiv de A. K. Ruhadze şi I. N. Vekua [1] şi de D. I. Şerman [2], dezvoltă calculele corespunzătoare problemei de studiu a torsiunii unui cilindru circular întărit printr-o bară pătrată cu colţuri rotunjite. Expresia rigidităţii torsiunii se obţine sub forma (17). Articolul se termină cu un exemplu numeric.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. K. 519.272

EIN χ^2-TEST FÜR DIE WIDERSPRÜCHE BEI WIEDERHOLUNGSMESSUNGEN

VON
K. ARNOLD

1. Es sei x_i eine zufällige Variable und der Vektor X

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

bilde einen sogenannten zufälligen Vektor, dessen Komponenten zufällige Variable sind. x_i sei entsprechend einer Normalverteilung verteilt.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte von x_i sei $f(x_i)$. Der Erwartungswert von x_i sei $E(x_i) = a_i$ und damit wie folgt definiert:

$$E(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i)\, dx_i .$$

a_i ist also gewissermassen der sogenannte „wahre Wert" von x_i wie er sich z. B. bei unendlicher Ausdehnung des arithmetischen Mittels unter bestimmten Voraussetzungen ergibt.

Das Quadrat des mittleren Fehlers σ^2 ist bekanntlich der Erwartungswert von $(x_i - a_i)^2$:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a_i)^2 f(x_i)\, dx_i .$$

Die im folgenden immer vorauszusetzende Normalverteilung $N(a_i, \sigma^2)$ für die zufällige Variable x_i hat dann die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(x_i) = [1/(\sigma \sqrt{2\pi})] \exp [-(x_i - a_i)^2/(2\sigma^2)]. \tag{1}$$

Es sei

$$P = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

der Spaltenvektor der Erwartungswerte von X.

Wenden wir uns nun der Verteilungsfunktion mehrdimensionaler zufälliger Variabler zu.

Setzen wir zur Abkürzung: $x_i - a_i = t_i$, $X - P = T$, so seien die einzelnen t_i normal verteilt und die mehrdimensionale Normalverteilung der t_i habe eine Wahrscheinlichkeitsdichte von der folgenden Form:

$$\{\sqrt{|G|}/[\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n]\} \exp[-T'GT/(2\sigma^2)], \tag{2}$$

wobei

$$T'GT = \sum_i \sum_k g_{ik} t_i t_k \tag{3}$$

eine quadratische Form und G eine quadratische Matrix sei; $|G|$ ist die Determinante von G. (2) ist die Wahrscheinlichkeitsdichte normalverteilter korrelierter Beobachtungen. Aus (2) und (3) ergibt sich der mittlere Fehler von x_i, also das quadratische Moment von t_i, folgendermassen:

$$E(t_i^2) = \{\sqrt{|G|}/[\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n]\} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} t_i^2 \exp[-T'GT/(2\sigma^2)]\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n. \tag{4}$$

Wenn eine gegenseitige Korrelation der Beobachtungen vorliegt, dann interessieren die „gemischten" Koeffizienten und sie werden nach folgender Formel erhalten:

$$E[t_i, t_k] = \{\sqrt{|G|}/[\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n]\} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} t_i t_k \exp[-T'GT/(2\sigma^2)]\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n. \tag{5}$$

Die Gleichungen (4) und (5) drücken die „Kovarianzen" $E(t_i, t_k)$ durch die Elemente der g_{ik} der Matrix G aus. Man findet leicht

$$E(t_i, t_k) = \sigma^2 |G^{ik}|/|G| = \sigma^2 g_{ik}^{(-1)}, \tag{6}$$

wobei $|G^{ik}|$ das algebraische Komplement von g_{ik} ist die zu G inverse Matrix G^{-1}.

Setzen wir:

$$E(t_i, t_k) = \sigma_{ik}, \tag{7}$$

so ist wegen (7):

$$H = (\sigma_{ik})_{1n}^{1n} = \sigma^2 G^{-1} \tag{8}$$

die Kovarianzmatrix.

Ist H gegeben, so erhält man mit Gleichung (8) die Matrix G und ist G gegeben, so ergibt sich umgekehrt die Matrix H eindeutig.

2. Die Grössen x_i mögen sich durch solche Beobachtungen ermitteln lassen, die zufällige Variable entsprechend der Gauss-schen Normalverteilung sind. Sie mögen sich bei einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen als die sogenannten Unbekannten dieser Ausgleichung ergeben haben. Die Normalgleichungen seien:

$$AX - L = 0. \tag{9}$$

Die Quadrate der mittleren Fehler der Unbekannten x_i nach der Ausgleichung sind bekanntlich entsprechend den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate die quadratischen Koeffizienten der Kehrmatrix $A^{-1} = B = \| Q_{i,i} \|$, nachdem man diese mit dem Quadrat des mittleren Fehlers σ^2 multipliziert hat, $m_{x_i}^2 = \sigma^2 Q_{ii}$.

Analog ergeben sich bekanntlich die Kovarianzen der x_i nach der Ausgleichung aus den gemischten (nicht quadratischen) Koeffizienten der Kehrmatrix der Normalgleichungen A^{-1}. $\sigma^2 A^{-1}$ ist also die Kovarianzenmatrix der x_i. Daraus folgt bekanntlich die Normalverteilung für die x_i. Wenn aber $\sigma^2 A^{-1}$ die Kovarianzmatrix der x_i ist, dann ist nach (2), (6), (8) der folgende Ausdruck:

$$\{\sqrt{|A|}/[\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n]\} \exp\,[-(X-P)'\,A\,(X-P)/(2\sigma^2)], \tag{10}$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte der n-dimensionalen normalverteilten Grösse X. Wie in der mathematischen Statistik gelehrt wird, ist unter diesen Voraussetzungen die zufällige Variable

$$(X-P)'\,A\,(X-P)/\sigma^2 \tag{11}$$

nach einer Helmert — Pearson-schen χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden verteilt. In (11) sind X und A als bekannt anzusehen. Doch scheint es so, als ob man mit der nach (11) gegebenen zufälligen Variablen nicht viel anfangen kann, weil P unbekannt ist.

Nun sei das durch (9) bestimmte System der x_i zu einem zweiten Mal beobachtet worden und das neue Normalgleichungssystem laute:

$$AY - M = 0. \tag{12}$$

Der Vektor $X - Y$ ist dann durch folgendes System von Normalgleichungen bestimmt:

$$A\,(X-Y) - (L-M) = 0. \tag{13}$$

Die x_i und y_i waren als normal verteilte Grössen angenommen, dann unterliegt auch $x_i - y_i$ einer Gauss-schen Normalverteilung.

Die Kovarianzmatrix von $X-Y$ ergibt sich aus folgenden Momenten:

$$E[(x_i - y_i)^2] = E[(x_i - a_i)^2] + E[(y_i - a_i)^2]; \tag{14}$$

denn $E[(x_i - a_i)\,(y_k - a_k)] = 0$ und

$$E[(x_i - y_i)\,(x_k - y_k)] = E[(x_i - a_i)\,(x_k - a_k)] + E[(y_i - a_i)\,(y_k - a_k)]. \tag{15}$$

Weil X und Y die gleiche Normalgleichungsmatrix haben, folgt mit (7)

$$E[(x_i - y_i)(x_k - y_k)] = 2\sigma^2 A^{-1}. \tag{16}$$

Von der Wahrscheinlichkeitsdichte der zufälligen Variablen $X - P$ kommt man also zu der der $X - Y$, wenn man statt σ^2 setzt $2\sigma^2 = s^2$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der $X - Y$ ist also

$$\{\sqrt{|A|}/[s^n(\sqrt{2\pi})^n]\} \exp[-(X-Y)' A (X-Y)/(2s^2)]. \tag{17}$$

(17) ist die Wahrscheinlichkeitsdichte einer n-dimensionalen normal verteilten Variablen. Daraus folgt nun dieses Ergebnis:

Erhält man durch die Ausgleichung eines Systems von zufälligen der Gauss-schen Normalverteilung gehorchenden Beobachtungen durch die Auflösungen der Normalgleichungsmatrix A *das System der Unbekannten* X *und bei Wiederholungsmessungen das der* Y, *so ist die zufällige Variable*

$$(X-Y)' A (X-Y)/s^2 \tag{18}$$

nach einer Helmert — Pearson-schen χ^2*-Verteilung mit* n *Freiheitsgraden verteilt.*

Dabei sind die Grössen $X - Y$ und A bekannt; denn sie folgen aus den Beobachtungen und deren Ausgleichung.

A ist allein von der „Geometrie" des Beobachtungssystems abhängig.

Mittels der χ^2-Verteilung für die nach (18) definierte zufällige Variable erhält man einen stochastischen Test, ob die X, Y, L, M einer Normalverteilung gehorchen. Dadurch wird ferner geprüft ob die für s^2 gewählte Hypothese annehmbar ist.

Eingegangen am 13 XII 1961

Geodätisches Institut,
Potsdam, Deutsche Demokratische Republik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Schmetterer L., *Einführung in die mathematische Statistik*, Wien, Springer, 1956.
2. Cramér H., *Mathematical methods of statistics*, Almgvist, Uppsala, 1944.

ТЕСТ χ^2 ДЛЯ РАЗНОГЛАСИЯ В СЛУЧАЕ ПОВТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

(Резюме)

Доказывается, в условиях данных автором, что случайная переменная (18) является распределенной по χ^2-распределению Гельмерта — Пирсона, с n степенью свободы.

UN TEST χ^2 PENTRU CONTRADICŢII ÎN CAZUL MĂSURĂTORILOR REPETATE

(Rezumat)

Se demonstrează, în condiţiile indicate în textul original, că variabila aleatorie (18 este distribuită după o distribuţie χ^2 a lui Helmert — Pearson, cu n grade de libertate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 515.19

ASUPRA BAZELOR UNEI GEOMETRII REPREZENTATIVE PLAN-AXIALE

DE

N. IRIMICIUC, I. RUSU şi C. HUIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Studiul geometriilor reprezentative, stabilind corespondenţe biunivoce între punctele din spaţiul tridimensional şi punctele unui plan de reprezentare, a căpătat astăzi o deosebită pondere în programele de învăţământ tehnic superior, pondere justificată în primul rînd prin importanţa acordată proiectării ştiinţifice în stadiul înalt de dezvoltare a tehnicii actuale.

Dintre diferitele geometrii reprezentative elaborate pînă în prezent cea care şi-a cucerit o întîietate universal recunoscută este geometria descriptivă a lui Monge. Această geometrie prezintă avantaje de necontestat scoase în evidenţă chiar de creatorul ei şi anume: a) reprezentarea relativ simplă a corpurilor spaţiale într-un plan de reprezentare; b) obţinerea de imagini ale corpurilor care permit să se recunoască cu destulă uşurinţă caracteristicile lor geometrice.

Acestei geometrii reprezentative i se pot totuşi aduce următoarele obiecţii: a) construcţiile geometrice necesită trasarea unui număr destul de mare de linii, datorită proiectării obiectivului respectiv pe două şi uneori chiar pe trei plane de proiecţie; b) utilizează diferite metode de rezolvare a problemelor (metoda rabaterii, metoda rotaţiei, metoda schimbării planelor de proiecţie), ceea ce provoacă, mai ales începătorilor, dificultăţi în alegerea metodei celei mai potrivite.

Lucrarea de faţă reprezintă o încercare de a elabora bazele unei geometrii reprezentative care bucurîndu-se de aceleaşi avantaje ca şi geometria descriptivă, să nu prezinte totuşi, în măsura în care este posibil, lipsurile semnalate mai sus.

Ideea care stă la baza acestei geometrii reprezentative constă în înlocuirea proiecţiei cilindrice dublu ortogonale din geometria lui Monge cu o proiecţie cilindrică ortogonală pe *planul reprezentării* π şi o proiecţie ortogonală pe *axa reprezentării* OZ, normală pe planul π şi rabătută pe acesta în jurul axei OX (fig. 1).

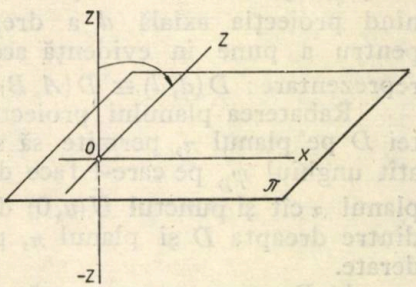


Fig. 1

2. Elementele geometriei reprezentative plan-axiale

1. Punctul

Poziţia unui punct arbitrar A din spaţiu va fi determinată în epură prin proiecţia lui ortogonală (a) pe planul reprezentării şi prin proiecţia lui $(\bar{a})$ pe axa reprezentării (fig. 2), numindu-se aceste proiecţii, *proiecţiile plan-axiale* ale punctului A şi notate $A(a, \bar{a})$. Determinarea acestor proiecţii poate fi făcută fie cu ajutorul coordonatelor carteziene:

$$A\{a(x_A, y_A);\ \bar{a}(z_A)\},$$

fie cu ajutorul coordonatelor cilindrice:

$$A\{a(\varrho_A, \theta_A);\ \bar{a}(z_A)\}.$$

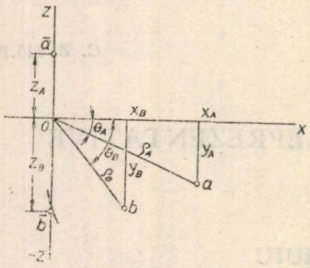


Fig. 2

Dacă punctul se găseşte deasupra planului reprezentării $(z > 0)$, proiecţia lui axială se va găsi deasupra axei OX (de exemplu: punctul A cu $z_A > 0$), iar dacă punctul se găseşte sub planul reprezentării $(z < 0)$ proiecţia lui axială se va găsi sub axa OX (de exemplu: punctul B cu $z_B < 0$).

Pentru poziţii particulare ale proiecţiilor a şi $\bar{a}$ pe planul, respectiv pe axa reprezentării, vor corespunde poziţii particulare în raport cu sistemul de referinţă ales ale punctelor din spaţiu.

2. Dreapta

Celor două posibilităţi de determinare a unei drepte în spaţiu — prin două puncte sau printr-un punct şi prin direcţia ei — le corespund două moduri de reprezentare în geometria reprezentativă plan-axială:

a) Dreapta reprezentată prin două puncte, $A(a, \bar{a})$ şi $B(b, \bar{b})$, proiecţiile pe planul π ale punctelor determinînd proiecţia d pe planul π a dreptei (fig. 3), iar proiecţiile axiale ale punctelor determinînd proiecţia axială $\bar{d}$ a dreptei, scriind pentru a pune în evidenţă acest mod de reprezentare: $D(d, \bar{d}) \equiv D(A, B)$.

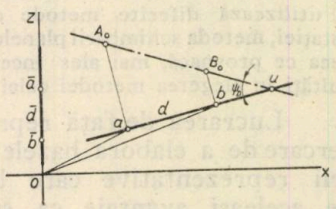


Fig. 3

Rabaterea planului proiectant al dreptei D pe planul π, permite să se determine atît unghiul ψ_D pe care-l face dreapta D cu planul π cît şi punctul $U(u, 0)$ de intersecţie dintre dreapta D şi planul π, punct ce reprezintă urma dreptei considerate.

b) Dreapta reprezentată prin proiecţia ei d pe planul π, proiecţie determinată dacă se cunoaşte un punct $A(a, \bar{a})$ al dreptei şi unghiul θ_D format de ea cu axa OX, precum şi prin dreapta D_0, reprezentînd dreapta D rabătută în planul π (fig. 4). Această dreaptă rabătută va fi determinată dacă se cunoaşte unghiul φ_D format de dreaptă cu normala

în A la planul π — rabătută şi ea în planul π — respectiv unghiul ψ_D format de dreaptă cu planul π, care este complementul unghiului φ_D.

Unghiul θ_D are domeniul de variaţie : $0 \leqslant \theta_D \leqslant \pi/2$, şi poate fi pozitiv sau negativ după cum este măsurat de la axa OX, în sens direct sau invers (în fig. 4 $\theta_D > 0$).

Unghiul φ_D are acelaşi domeniu de variaţie ca si unghiul θ_D.

Pentru a pune în evidenţă acest mod de reprezentare a dreptei se va scrie: $D(d, D_0) \equiv D(A, \theta_D, \psi_D)$.

Cota unui punct arbitrar, M, al dreptei va fi dată în această reprezentare de lungimea segmentului mM_0, determinat pe perpendiculara la d în m, de dreptele d şi D_0.

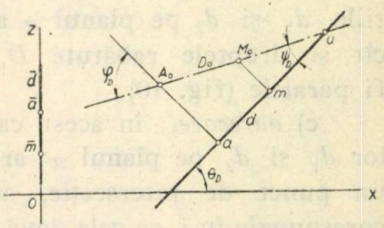


Fig. 4

În fig. 5...8 sînt date reprezentările unor poziţii particulare ale dreptelor, mai frecvent întîlnite. Astfel în fig. 5 este reprezentată o dreaptă paralelă cu planul π, caracterizată prin $\psi_D = 0$.

Fig. 6 reprezintă o dreaptă paralelă la axa OX caracterizată prin $\theta_D = 0, \psi_D = 0$.

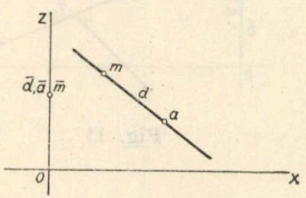


Fig. 5

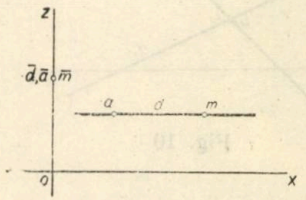


Fig. 6

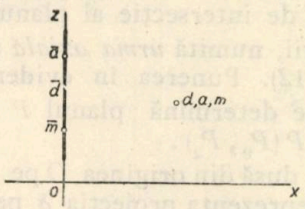


Fig. 7

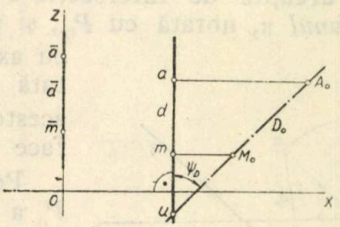


Fig. 8

Fig. 7 reprezintă o dreaptă perpendiculară pe planul π, fiind caracterizată prin $\psi_D = \pi/2$ şi θ_D nedeterminat.

Fig. 8 reprezintă o dreaptă situată într-un plan perpendicular pe axa OX, caracterizată prin $\theta_D = \pi/2$.

În ceea ce priveşte poziţiile relative a două drepte în spaţiu, $D_1(d_1, \bar{d}_1)$ şi $D_2(d_2, \bar{d}_2)$, ele pot fi:

a) *concurente*, în care caz punctele I_1 respectiv I_2 de pe cele două drepte D_1 şi D_2, corespunzătoare intersecţiei proiecţiilor d_1 şi d_2, vor avea aceeaşi proiecţie axială (fig. 9), adică i_1 coincide şi cu i_2;

b) *paralele*, în care caz atît proiecţiile d_1 şi d_2 pe planul π ale dreptelor cît şi dreptele rabătute D_{10} şi D_{20} vor fi paralele (fig. 10);

c) *oarecare*, în acest caz proiecţiile lor d_1 şi d_2 pe planul π ar putea avea un punct de intersecţie, acestui punct corespunzîndu-i pe cele două drepte punctele I_1 respectiv I_2, cu proiecţii axiale distincte (fig. 11).

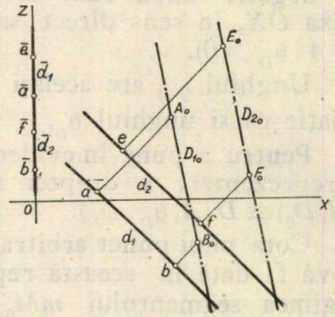


Fig. 9

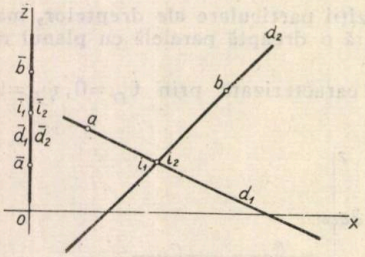


Fig. 10

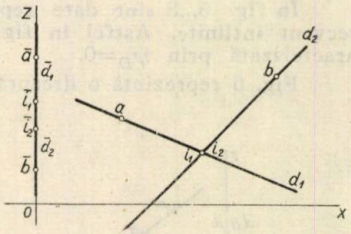


Fig. 11

3. Planul

În geometria reprezentativă plan-axială un plan P va fi determinat prin dreapta de intersecţie a lui cu planul π, numită *urma planului* P *pe planul* π, notată cu P_0, şi prin punctul de intersecţie al planului P cu axa reprezentării, numită *urma axială* şi notată cu P_z (fig. 12). Punerea în evidenţă a acestor elemente ce determină planul P se va face scriindu-se $P(P_0, P_z)$.

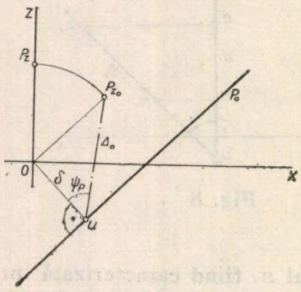


Fig. 12

Perpendiculara dusă din originea O pe urma P_0 a planului va reprezenta proiecţia δ pe planul π a liniei de cea mai mare pantă a planului P, corespunzătoare urmei axiale P_z.

Ducînd în O o perpendiculară pe δ şi luînd pe ea $\overline{OP_{z_0}} = \overline{OP_z}$ se obţine, unind urma $U(u, 0)$ cu punctul P_z, dreapta Δ_0, reprezentînd linia de cea mai mare pantă a planului P, corespunzătoare urmei axiale P_z, rabătută pe planul π în jurul proiecţiei δ.

Unghiul ψ_P format de δ cu Δ_0 va reprezenta totodată şi unghiul format de planul P cu planul π.

a) *Construcţia urmelor unui plan determinat prin două drepte concurente.*

Urma P_0 a planului trebuind să conţină urmele $U_1(u_1, 0)$ şi $U_2(u_2, 0)$ ale dreptelor $D_1(A, I)$ şi $D_2(B, I)$, va fi obţinută unind cele două urme u_1 şi u_2 determinate prin rabaterea dreptelor D_1 şi D_2 (fig. 13).

Pentru determinarea urmei axiale P_z a planului se va determina în prealabil, construind linia de cea mai mare pantă corespunzătoare punctului I, unghiul ψ_P format de planul P cu planul π. Construcţia liniei de cea mai mare pantă corespunzătoare urmei axiale P_z a planului, rabătută în planul π, va permite să se determine cota OP_z deci şi urma axială P_z.

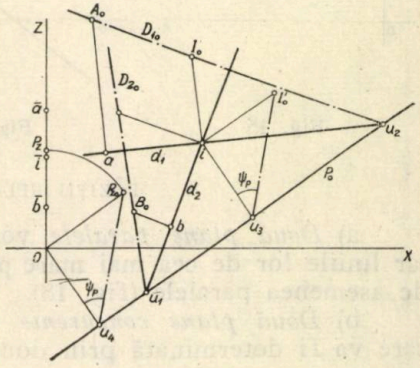


Fig. 13

b) *Consrucţia urmelor unui plan determinat prin două drepte paralele.*

Urma pe planul π a planului P, determinat de dreptele $D_1(d_1, D_{10})$ şi $D_2(d_2, D_{20})$, va fi dreapta care uneşte urmele $U_1(u_1, 0)$ şi $U_2(u_2, 0)$ ale celor două drepte. Pentru determinarea urmei axiale a planului P se va construi linia de cea mare pantă, corespunzătoare unui punct arbitrar M al uneia din drepte, de exemplu D_2, obţinîndu-se astfel unghiul ψ_P format de planul P cu planul π. O dată cunoscut acest unghi, construcţia liniei de cea mai mare pantă corespunzătoare urmei axiale va permite determinarea cotei OP_z, deci şi a urmei axiale P_z a planului P (fig. 14).

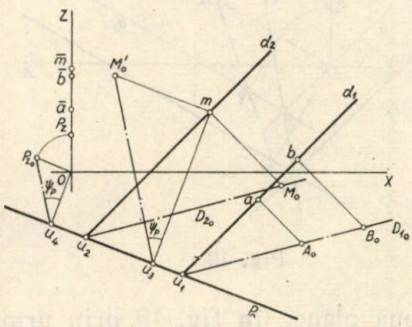


Fig. 14

c) *Construcţia urmelor planului determinat de o dreaptă şi un punct exterior ei.*

Ducînd prin punctul $A(a, \bar{a})$ exterior dreptei $D(d, D_0)$ o dreaptă $D_1(d_1, D_{10})$ paralelă la D sau concurentă cu aceasta, problema construcţiei urmelor planului determinat de dreapta D şi punctul A se reduce la problema construcţiei urmelor planului determinat de două drepte paralele sau respectiv concurente.

În fig. 15...17 sînt reprezentate un număr de plane de poziţii particulare mai des întîlnite în aplicaţii. Astfel, în fig. 15 este reprezentat un plan paralel cu planul π. În fig. 16 este reprezentat un plan perpendicular pe planul π. De asemenea, în fig. 17 este reprezentat un plan paralel cu axa OX.

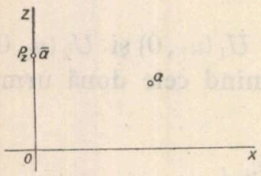


Fig. 15

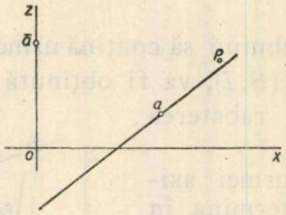


Fig. 16

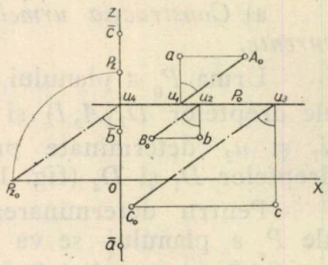


Fig. 17

POZIŢII RELATIVE A DOUĂ PLANE

a) *Două plane paralele* vor avea urmele lor pe planul π paralele iar liniile lor de cea mai mare pantă corespunzătoare urmelor lor axiale de asemenea paralele (fig. 18).

b) *Două plane concurente* vor admite o dreaptă de intersecţie D care va fi determinată prin două puncte, unul din ele fiind intersecţia $U(u,0)$ a urmelor planelor, iar celălalt punct $I(i,\bar{i})$ fiind punctul comun planelor $P(P_0, P_z)$ şi $Q(Q_0, Q_z)$, situat într-un plan de nivel trecînd

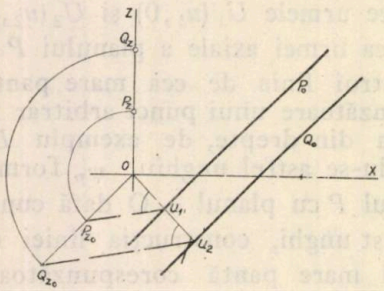


Fig. 18

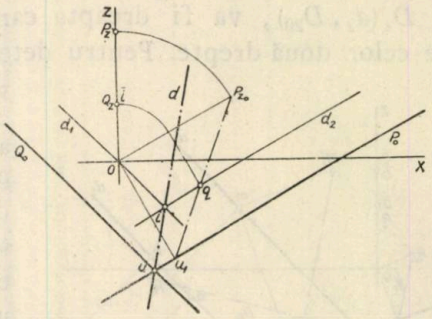


Fig. 19

prin una din urmele axiale ale celor două plane, (în fig. 19 prin urma Q_z). Poziţia pe planul π a punctului I este determinată de intersecţiile proiecţiilor d_1 şi d_2 ale orizontalelor D_1 şi D_2.

POZIŢIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAŢĂ DE UN PLAN

a) *Dreapta conţinută într-un plan* P va fi determinată de două puncte distincte ale ei, care vor trebui să fie conţinute în planul dat. Unul din aceste puncte va putea fi urma $U(u,0)$ a dreptei D care va trebui să se găsească pe urma P_0 a planului P (fig. 20). Condiţia ca şi un alt punct arbitrar A al dreptei să fie conţinut tot în planul P, presupune paralelismul liniilor de cea mai mare pantă corespunzătoare punctelor P_z şi A.

b) *Dreapta paralelă cu un plan* P şi trecînd printr-un punct A va fi situată într-un plan $Q(Q_0, Q_z)$, paralel cu planul $P(P_0, P_z)$ şi conţinînd punctul dat $A(a, \bar{a})$.

Dreapta D va avea deci urma $U_2(u_2, 0)$ pe urma Q_0 a planului

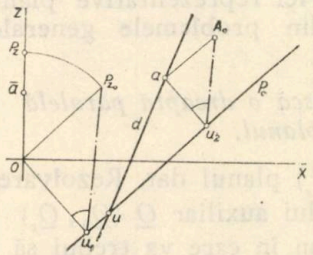


Fig. 20

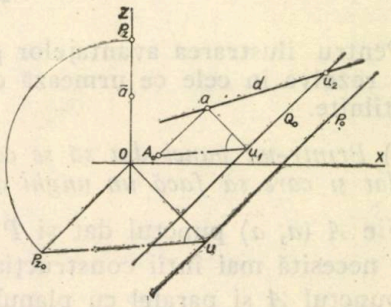


Fig. 21

auxiliar Q, urmă paralelă cu P_0 şi determinată punînd condiţia ca liniile de cea mai mare pantă corespunzătoare punctului Q_z în planul P şi punctului A în planul Q, să fie paralele (fig. 21).

c) *Dreaptă concurentă cu un plan* P. Punctul de intersecţie dintre dreapta D şi planul P va fi dat de intersecţia dintre dreapta dată şi dreapta de intersecţie a planului dat cu planul proiectant al dreptei D faţă de planul π.

În fig. 22 dreapta de intersecţie D_1 (d_1, D_{10}) dintre planul proiectant Q al dreptei D şi planul $P(P_0, P_z)$ va fi determinată de urma $U(u, 0)$ a ei, situată pe urma P_0 a planului dat şi de un punct $B(b, \bar{b})$ avînd proiecţia b pe d şi căruia i se va impune condiţia de a fi situat în planul π (liniile de cea mai mare pantă corespunzătoare punctelor P_z şi B trebuie să fie paralele). Rabătînd punctul B în jurul proiecţiei d în poziţia B_0 se obţine, unind u_1 cu B_0, dreapta D_{10} rabătută, care va intersecta pe D_0 în punctul I_0, şi care, proiectat pe d, va permite să se determine punctul de intersecţie $I(i, \bar{i})$ al dreptei $D(d, D_0)$ cu planul $P(P_0, P_z)$.

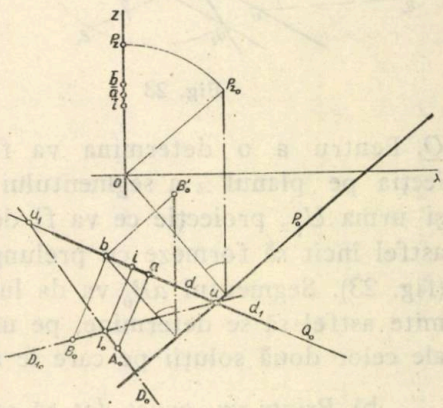


Fig. 22

În cazul particular cînd dreapta D este perpendiculată pe planul P dreptele D şi D_1 sînt perpendiculare. În epură dreptele D_0 şi D_{10},

rabătute în jurul urmei Q_0 a planului Q vor fi de asemenea perpendiculare. În acest caz construcţia se simplifică ne mai fiiind necesară folosirea punctului auxiliar B.

3. Aplicaţii

Pentru ilustrarea avantajelor geometriei reprezentative plan-axiale se vor rezolva în cele ce urmează cîteva din problemele generale mai des întîlnite.

a) *Printr-un punct dat să se construiască o dreaptă paralelă la un plan dat şi care să facă un unghi dat cu planul.*

Fie A $(a, \bar{a})$ punctul dat şi P (P_0, P_z) planul dat. Rezolvarea problemei necesită mai întîi construcţia planului auxiliar Q (Q_0, Q_z) conţinînd punctul A şi paralel cu planul P, plan în care va trebui să se găsească şi dreapta căutată. Urma Q_0 a acestui plan va fi construită observîndu-se, pe de o parte, că ea va trebui să fie paralelă cu P_0, şi pe de altă parte, că va trebui să treacă şi prin urma $U_1(u_1, 0)$ a liniei de cea mai mare pantă corespunzătoare punctului A din planul Q, linie paralelă cu linia de cea mai mare pantă a urmei axiale P_z a planului P. Urma dreptei paralele căutate va trebui să se găsească pe urma Q_0 a planului Q. Pentru a o determina va fi suficient deci să se găsească proiecţia pe planul π a segmentului de dreaptă cuprins între punctul A şi urma U_1, proiecţie ce va fi determinată, ducînd din A_0 dreapta A_0B_0 astfel încît să formeze cu prelungirea segmentului au_1 unghiul dat ψ (fig. 23). Segmentul aB_0 va da lungimea proiecţiei căutate, care va permite astfel să se determine, pe urma Q_0, urmele $U_2(u_2, 0)$ şi $U_2'(u_2', 0)$ ale celor două soluţii pe care le admite problema.

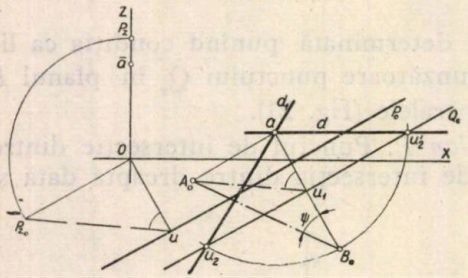


Fig. 23

b) *Printr-un punct dat să se ducă un plan paralel cu o dreaptă dată şi care să facă cu un plan dat un unghi dat.*

Fie D (d, D_0) dreapta dată şi C $(c, \bar{c})$ un punct exterior ei, care va trebui să fie conţinut în planul P paralel la D şi formînd unghiul ψ cu planul π. Planul căutat va trebui să conţină paralela D_1 dusă prin C la dreapta D; deci urma sa P_0 va trebui să treacă prin urma $U_1(u_1', 0)$ a acestei paralele. Pentru determinarea direcţiei urmei P_0 se va observa că planul căutat va trebui să fie tangent la un con circular drept cu axa

perpendiculară pe planul π, avînd ca înălţime cota punctului C şi a cărui generatoare trebuie să formeze cu planul π unghiul ψ dat; urma P_0 a acestui plan va trebui deci să fie tangentă la cercul din planul π, cu centrul în c şi cu raza egală cu segmentul cK_0 determinat pe d_1 de dreapta C_0K_0, formînd cu d_1 unghiul dat ψ. Unind punctul de contact K cu urma U_1 se obţine urma P_0 a planului P paralel cu D. Urma axială a acestui plan se obţine construind linia de cea mai mare pantă corespunzătoare, rabătută în planul π, cunoscîndu-i-se proiecţia Ou_2 pe planul π şi unghiul ψ de înclinare faţă de planul π.

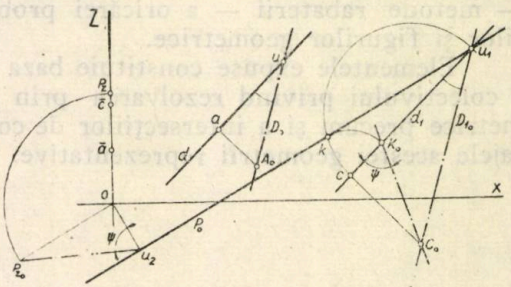


Fig. 24

c) *Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă perpendiculară pe o dreaptă oarecare dată.*

Fie D (d, D_0) dreapta dată şi M $(m, \bar{m})$ punctul dat. Prin punctul M se duce planul P perpendicular pe dreapta dată D. Urma P_0 va fi perpendiculară pe d, iar linia de cea mai mare pantă a planului P, corespunzătoare punctului M, va trebui să fie şi ea perpendiculară pe dreapta D. În epură linia de cea mai mare pantă corespunzătoare punctului M, rabătută în planul π în jurul proiecţiei ei, va fi perpendiculară pe dreapta D rabătută în planul π în jurul proiecţiei d. Se găseşte astfel urma U_1 $(u_1, 0)$ a liniei de cea mai mare pantă prin care se duce urma P_0 perpendiculară pe d. Urma axială P_z a planului P va fi determinată prin rabatarea liniei de cea mai mare pantă corespunzătoare ei, cunoscîndu-i-se unghiul ψ de înclinare faţă de planul π precum şi urma ei U_2 $(u_2, 0)$.

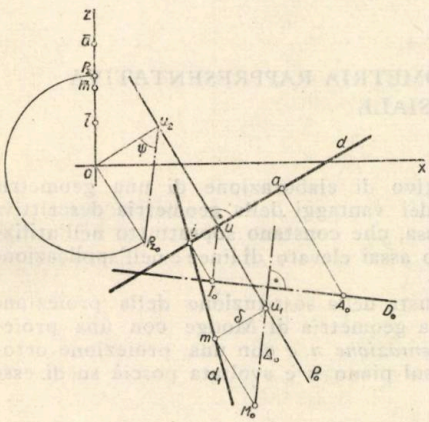


Fig. 25

Dreapta căutată D_1 este determinată de punctul dat M şi de punctul de intersecţie dintre dreapta dată D şi planul P. Pentru determinarea punctului de intersecţie I $(i, \bar{i})$ dintre dreapta D şi planul P este suficient să se ducă din punctul u perpendiculara uI_0 pe D_0, şi apoi perpendiculara I_0i pe d. Unind m cu i se obţine proiecţia d_1 a perpendicularei căutate (fig. 25).

4. Concluzii

Expunerea bazelor geometriei reprezentative plan-axiale permite să se întrevadă posibilitatea rezolvării prin construcţii geometrice foarte simple şi uşor de înţeles, precum şi prin utilizarea unei singure metode — metode rabaterii — a oricărei probleme de reprezentare a corpurilor şi figurilor geometrice.

Elementele expuse constituie baza unor noi obiective de cercetare a colectivului privind rezolvarea prin metoda propusă a problemelor metrice precum şi a intersecţiilor de corpuri, din care vor rezulta avantajele acestei geometrii reprezentative.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanică
şi
Catedra de desen şi geometrie descriptivă

К РАЗРАБОТКЕ ОСНОВАНИЙ ИЗОБРАЗИТЕЛЬНОЙ ПЛОСКО-АКСИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Резюме)

Авторы заменяя двойную цилиндрическую ортогональную проекцию используемую в начертательной геометрии цилиндрической ортогональной проекцией на *плоскость изображения* π и ортогональной проэкцией на *ось изображения* OZ, перпендикулярной к плоскости π и наложенной затем на эту плоскость вращением вокруг оси OX (рис. 1).

SULL'ELABORAZIONE DI UNA GEOMETRIA RAPPRESENTATIVA PLANARE-ASSIALE

(Sunto)

Il presente lavoro rappresenta un tentativo di elaborazione di una geometria rappresentativa la quale, mentre ne gioisce dei vantaggi della geometria descrittiva classica, riesce di diminuirne gli svantaggi di essa, che constano soprattutto nell'utilizzazione nei disegni corrispondenti di un numero assai elevato di linee e nell'applicazione di metodi alquanto svariati.

L'idea centrale del metodo escogitato consta nella sostituzione della proiezione cilindrica doppiamente ortogonale sfruttata nella geometria di Monge con una proiezione cilindrica ortogonale sull *piano di rappresentazione* π e con una proiezione ortogonale sull'*asse di rappresentazione* OZ normale sul piano π e svoltata poscià su di esso piano intorno all'asse OX (fig. 1).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 535.243 ; 539.16.08

ANALIZA SPECTROGRAFICĂ A UNOR MINEREURI RADIOACTIVE

DE

C. RUSCIOR, N. CALINICENCO, GH. TACU şi MARCEL MOISE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

În lucrarea de faţă se prezintă rezultatele analizei spectrale efectuate asupra unor minereuri radioactive din ţara noastră. Scopul lucrării este să se identifice elementele care provoacă radioactivitatea acestor minereuri şi apoi să se determine cantitativ aceste elemente. Prin urmare s-a efectuat în primul rînd o analiză spectrală calitativă, cu care ocazie s-a stabilit că în cazul minereurilor analizate radioactivitatea se datoreşte uraniului. Dacă principial o analiză spectrală calitativă nu prezintă nici o dificultate, analiza spectrală cantitativă presupune elaborarea unei metode de lucru adecvate substanţei de analizat.

Determinarea cantităţilor mici de uraniu în minereuri se loveşte de dificultatea că sensibilitatea de observare a acestui element în spectru este mică, datorită temperaturii sale mari de vaporizare (temperatura de fierbere a uraniului este 3 900°C). Din această cauză numărul lucrărilor dedicate acestei probleme este relativ mic.

Prima lucrare în acest domeniu citată în literatură [1], [2] datează din 1926, cînd C. Porlezza şi A. Donatti [3] au determinat uraniul în antimit. Sensibilitatea atinsă era de 0,1%. În 1946 K. B. Mather [4] a mărit sensibilitatea de determinare a uraniului pînă la 0,05%, utilizînd domeniul arcului din vecinătatea catodului. O lucrare de mai mare amploare, citată de mai mulţi autori, este cea a lui A. Strassheim [5], din 1950, care a propus trei metode de determinare a uraniului în funcţie de concentraţia lui în minereu. Pentru mărirea sensibilităţii Strassheim a utilizat unele substanţe activatoare ($PbCl_2$, RbCl), care introduse în probă ar mări intensitatea liniilor uraniului, permiţînd să se determine concentraţii pînă la 6.10^{-3}%. Acţiunea agenţilor activatori nu s-a verificat în experienţele efectuate de A. N. Zaidel [6].

Metoda propusă de Bogdanova, Moroşkina şi Prokofiev [7] permite determinarea concentraţiilor pînă la 10^{-4}%, însă în acest caz este necesară o prelucrare prealabilă a minereului pe cale chimică, care duce la îmbogăţirea conţinutului de uraniu.

Dintre lucrările de dată mai recentă (1957) este de citat cea realizată de N. G. Morozova [8], care prin arderea probelor între electrozi de cupru determină concentraţii pînă la 5.10^{-3}% (fără prelucrare chimică). În sfîrşit în acelaşi an s-a publicat şi lucrarea colectivului constituit din T. M. Moroşkina, V. K. Prokofiev şi M. I. Smirnova [9] care a mărit sensibilitatea determinării uraniului în minereuri pînă la 10^{-4}%. La acest rezultat se ajunge dacă se topeşte în prealabil proba într-un cuptor electric special, iar apoi descărcarea se face între electrozi de cupru.

În ce priveşte precizia cu care se poate determina conţinutul de uraniu într-un minereu, ea este în general cuprinsă între 5 şi 50% (valoarea din urmă la concentraţii

foarte mici, în funcţie de metodă). Precizia poate fi mărită dacă se utilizează drept standard intern un izotop al uraniului. Astfel în lucrările lui N. P. Ivanov [10] (citate de A. P. Vinogradov la Conferinţa internaţională asupra utilizării energiei atomice în scopuri paşnice din 1955 de la Geneva [11]) se utilizează drept standard intern izotopul U — 235, care permite o precizie a determinării de 1...5%.

2. Analiza calitativă a minereurilor

S-a folosit drept aparat spectral un spectrograf FD-S cu 3 prizme de sticlă care dă pe o placă fotografică de 24 cm spectrul cuprins între 3850 şi 5900 Å, cu o dispersie variind între 3,5 Å/mm la 3870 Å şi 20,4 Å/mm la 5700 Å.

Drept sursă s-a folosit arcul de curent continuu între electrozi de cărbune şi electrozi de cupru. Aceştia din urmă au fost utilizaţi mai ales pentru studiul liniilor în domeniul benzilor cianului, care în spectrul arcului cu cărbune face dificilă identificarea liniilor spectrale emise de probă. Liniile spectrale au fost măsurate cu un spectroproiector Zeiss prin interpolare liniară, avînd spectrul fierului drept spectru de comparaţie. Precizia atinsă era de 0,1 Å în domeniul lungimilor de undă mici şi scădea pînă la 0,5 Å în domeniul undelor lungi. Pentru cazurile unde era necesară o precizie superioară, liniile s-au măsurat la un comparator de spectre IZA-2, folosindu-se formula de interpolare a lui Hartmann.

Pentru identificarea liniilor s-a folosit atlasul liniilor spectrale pentru spectrograful de sticlă, al lui Kalinin, Naimark, Marzuvanov şi Ismagulova [12] şi de asemenea tabelele spectrale ale lui Saidel, Prokofiev şi Raiski [13] sau cele ale lui Harrison [14].

Elementele ce intră în compoziţia a două din minereurile studiate precum şi numărul liniilor identificate la fiecare element sînt date în tabelul 1. Din acest tabel se observă că prezenţa uraniului în probele analizate se manifestă prin existenţa a două, respectiv trei linii spectrale. Acestea sînt liniile U II — 4241,6, U II — 4244,3 şi U II — 4341,6, primele două făcînd parte din liniile senzitive ale uraniului în domeniul vizibil. Linia de sensibilitate maximă a uraniului în spectrul vizibil este, după Kalinin [13], linia U II — 4090,1 însă ea nu a putut fi observată, deoarece cade în domeniul benzilor cianului.

Faptul că uraniul are drept linii senzitive pe cele ale ionului şi nu pe cele ale atomului neutru, se explică prin potenţialul său de ionizare redus (de ordinul a 4 eV). La temperatura înaltă de volatilizare atomii uraniului sînt în cea mai mare parte ionizaţi (de exemplu la 4000° C gradul de ionizare este de 75%).

Tabe

Elementul / Proba	Al	Ba	Ca	Co	Cr	Cu	Fe	Ga	K
1	2	1	1	—	9	—	409	1	2
2	2	2	2	1	12	1	428	—	2

3. Determinarea concentraţiei uraniului în minereuri

La determinările cantitative ale conţinutului de uraniu în minereuri s-au folosit numai electrozi de cărbune, întrucît arcul între electrozi de cărbune asigură o temperatură suficient de ridicată, necesară evaporării uraniului. Arcul între electrozi de cupru furnizează o temperatură prea mică din care cauză liniile uraniului la minereurile analizate de noi nu se observă. Electrozii de cărbune aveau diametrul de 5 mm, cu anodul găurit pe o adîncime de 5 mm, diametrul găurii fiind de 3 mm. Distanţa între electrozi era de 4 mm, iar curentul de descărcare de 5 A. Nu am folosit cărbuni spectrali, ci cărbuni de arc obişnuiţi, curăţaţi în prealabil prin ardere în flacăra unui arc cu cărbune timp de 20 sec, la un curent de 10 A. După cum arată Rusanov [15] încălzirea cărbunilor la o temperatură mai ridicată decît 3000° C duce la volatilizarea majorităţii impurităţilor conţinute, în timp de 10...20 sec.

Fanta spectrografului era de 10 μ şi iluminarea ei se realiza prin sistemul obişnuit de trei lentile cu imagine intermediară a sursei, ceea ce asigura o iluminare uniformă a fantei şi permitea ecranarea electrozilor. Lărgimea fantei intermediare utilizate a fost de 3,2 mm. Timpul de expunere era de 3 min, cu 30 sec timp de preardere. Cantitatea de substanţă introdusă în anodul arcului era de 50 mg, sub formă de pulbere.

Au fost folosite plăci spectrale Agfa Rot-Rapid. Pentru trasarea curbei caracteristice a plăcilor s-a folosit un atenuator cu 9 trepte de la un spectrograf ISP-51, întrucît spectrograful FD-S nu are în dotaţie această piesă. Atenuatorul a fost montat pe prima lentilă de lîngă sursă obţinîndu-se astfel pe fanta spectrografului imaginea sa puţin mărită, iar pe placa fotografică treptele de înnegrire suficient de bine focalizate.

Drept linie de analiză s-a ales linia U II — 4 241,6 care are potenţialul de excitaţie de 3,49 eV, iar drept standard-intern a fost luată linia Fe I — 4 247,4, avînd potenţialul de excitaţie 6,29 eV.

În cazul minereurilor studiate de noi, linia de analiză U — 4 241,6 se suprapune peste o linie a zirconiului şi anume Zr — 4 241,6, de intensitate relativă mult mai mare ca cea a uraniului (100 faţă de 40, după Harrison). Această interferenţă de linii a fost utilizată de noi pentru mărirea sensibilităţii metodei elaborate de determinare a uraniului în minereu. Într-adevăr, această interferenţă face ca intensităţi ce în mod obişnuit sînt prea slabe pentru a produce o înnegrire apreciabilă a plăcii fotografice, să determine totuşi o înnegrire măsurabilă prin deplasarea lor din domeniul subexpunerilor în domeniul expunerilor normale. Or, aceasta se realizează tocmai prin faptul că pe fondul liniei zirconiului se suprapune linia slabă de analiză a uraniului. Desigur că pentru a se

lul 1

La	Mg	Mn	Mo	Si	Sc	Sr	Ti	U	V	Zr	Yt
1	2	15	1	1	1	4	88	3	18	6	10
1	2	13	4	1	2	2	108	2	46	5	—

putea utiliza această circumstanţă pentru o determinare cantitativă, este necesar să se cunoască intensitatea liniei ce foloseşte drept substrat, anume intensitatea liniei zirconiului. Acest lucru este posibil datorită prezenţei în domeniul spectral analizat a unei alte linii a zirconiului şi anume Zr — 4 241,2 care are — după tabelele spectrale — aceeaşi intensitate ca şi linia substrat (Zr — 4241,6) şi anume 100. Întrucît intensităţile liniilor spectrale date în tabele reprezintă numai cifre orientative, obţinute în anumite condiţii de descărcare, noi am determinat separat raportul intensităţilor celor două linii ale zirconiului în condiţiile de descărcare utilizate de noi. În acest scop s-a introdus în anodul arcului cu cărbune un amestec de pulbere de fier şi clorură de zirconil, în diverse concentraţii. S-a constatat că intensitatea liniei substrat este la concentraţii medii cu puţin inferioară liniei de comparaţie, astfel că raportul lor este I Zr—4 241,6/I Zr — 4 241,2 = 0,95. Deoarece intensitatea liniei Zr—4 241,2 se putea determina direct în cazul probelor de uraniu analizate, am putut astfel stabili intensitatea liniei substrat.

Din lucrarea lui Strassheim [5] rezultă — după cum arată Ahrens [1] — că linia U—4 241,6 interferează şi cu o linie a fierului care ar apare chiar la concentraţii relativ reduse ale acestuia în minereuri şi care nu este catalogată în tabelele spectrale ale lui Harrison. Dacă ar fi aşa, determinarea cantitativă a uraniului pe baza liniei analitice alese de noi ar fi fost imposibilă din cauză că minereurile analizate conţin şi fier (probabil sub formă de oxizi). Or, în spectrul fierului, obţinut de noi în repetate rînduri, nu am găsit nici o linie care ar putea să se suprapună peste U — 4 241,6. De altfel o astfel de linie nu este menţionată de nici una din tabelele sau atlasele utilizate [1], [12], [13], [14], [17]. Este sigur că Strassheim a atribuit linia întîlnită, în mod greşit, fierului.

Drept metodă pentru determinarea cantitativă a uraniului s-a folosit metoda amestecurilor [16]. Avantajul acestei metode constă în faptul că folosind drept bază pentru etaloane însuşi minereul de studiat, se înlătură influenţa elementelor străine asupra intensităţii liniei de analizat.

În esenţă această metodă utilizează drept legătură între intensitatea liniei spectrale şi concentraţia elementului în minereu ecuaţia Scheibe-Lomakin: $I / I_0 = aC^b$, în care: I — intensitatea liniei analitice, I_0 — intensitatea liniei standard, C — concentraţia elementului necunoscut în minereu, iar a şi b — mărimi ce depind de însuşirile sursei şi a liniei analitice. Mărimea b depinde de absorbţia radiaţiei în sursă, după cum a arătat Mandelstam. Ea nu trebuie considerată în general ca o constantă; totuşi într-un interval mic de concentraţii se constată că valoarea sa nu variază sensibil. Pentru concentraţii mici autoabsorbţia liniei nu se produce şi atunci se consideră $b = 1$, iar intensitatea este legată de concentraţie printr-o relaţia liniară. Or, această situaţie se prezintă în cazul minereurilor analizate de noi, întrucît din analiza calitativă s-a văzut că am întîlnit pentru uraniu numai liniile sale ultime. De altfel concentraţia mică a uraniului în minereu s-a verificat şi direct, prin adăugarea în probe a unor mici cantităţi de uraniu sub formă de azotat de uranil în concentraţii cuprinse între 10^{-4}% şi 1%. S-a constatat o creştere a intensităţii liniei analitice U—4 241,6 începînd de la concentraţii de 10^{-2}%.

În aceste condiţii, dacă x este concentraţia reală a uraniului în mi-

nereu, probele în care s-a introdus azotatul de uranil cu concentraţiile de uraniu $m\%$, $n\%$, $p\%$,..., vor avea concentraţiile reale $(m+x)\%$, $(n+x)\%$, $(p+x)\%$,..., iar ecuaţia Scheibe-Lomakin va deveni de forma : $I/I_0 = a(C+x)$.

Diagrama de etalonare, construită în coordonatele I/I_0 şi C, va fi rectilinie, iar intersecţia ei cu abscisa dă, în valoare absolută, mărimea concentraţiei necunoscute (pentru $I = 0$ avem $C = -x$).

În felul acesta procedeul utilizat de noi pentru determinarea uraniului în minereuri a fost următorul:

S-au preparat trei probe din minereul de analizat la care concentraţia uraniului adăugat sub formă de azotat de uranil era de 0,012% ; 0,03% şi 0,06% (concentraţie calculată faţă de uraniu). S-au fotografiat spectrele acestor probe şi a minereului cercetat cu concentraţia necunoscută x, luîndu-se cîte trei spectre din fiecare probă. Pe aceeaşi placă se înregistra şi spectrul fierului împreună cu spectrul minereului sau al fierului obţinut prin atenuatorul în trepte.

Fotometrarea plăcii spectrale s-a efectuat cu ajutorul microfotometrului MF-2. Cu ajutorul acestuia se trasează întîi curba de calibrare a plăcii, luîndu-se pe abscisă logaritmul transmisiei treptelor atenuatorului iar pe ordonată densitatea optică S sau transformata în W (care s-a utilizat în special pentru determinarea intensităţilor în domeniul subexpunerilor). Apoi se determină la microfotometru densitatea optică a liniilor de studiat, care include şi fondul spectrului în locul respectiv. Fie S_{L+F} densitatea optică astfel aflată. (Ea s-a stabilit pentru linia de analizat U — 4 241,6 suprapusă peste linia Zr — 4 241,6 apoi pentru linia standard-intern Fe—4247,4 şi pentru linia suplimentară Zr—4 241,2).

De asemenea se determină la microfotometru şi fondul spectrului în regiunea liniilor fotometrate. În acest scop se măsoară fondul la stînga şi la dreapta fiecărei linii, determinîndu-se media aritmetică a lui. Fie S_F valoarea densităţii optice a fondului.

Mai departe, cu ajutorul curbei de calibrare se află logaritmul intensităţilor linii plus fond ($\log I_{L+F}$), respectiv logaritmul intensităţilor fondului ($\log I_F$). Se calculează apoi intensităţile corespunzătoare I_{L+F} şi I_F. Prin scădere se află intensitatea liniilor de studiu : $I_{L+F} - I_F = I_L$. Se determină apoi intensitatea a liniei substrat Zr — 4 241,6, cunoscîndu-se intensitatea liniei auxiliare Zr — 4 241,2 : I Zr—4 241,6 = 0,95I Zr—4 241,6. Intensitatea liniei analitice se află scăzînd din intensitatea liniilor suprapuse I_L(U—4 241,6 şi Zr—4 241,6) pe cea a liniei Zr — 4 241,6 : IU — 4 241,6 = $= I_L - I$ Zr — 4 241,6.

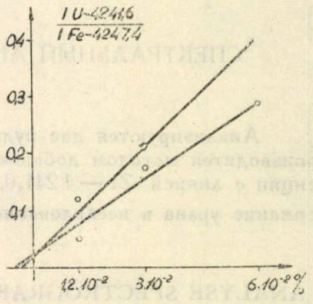


Fig. 1

Diagramele de etalonare în coordonatele IU—4 241,6/I Fe—4 247,4, C sînt reprezentate în fig. 1, pentru probele *1* şi *2*. În limita erorilor experimentale ele reprezintă drepte, iar intersecţia lor cu abscisa dau în valoare absolută mărimile concentraţiilor necunoscute ale uraniului în minereuri. Valorile aflate sînt: 6.10^{-3}% şi 4.10^{-3} %.

Valori apropiate au fost obţinute utilizînd linia Fe — 4 238 drept standard-intern.

Eroarea măsurătorilor întreprinse trebuie apreciată, pe baza abaterilor, la circa 20%. Ea provine în primul rînd din fluctuaţiile relativ mari ale intensităţii liniei analitice în arc şi în al doilea rînd din faptul că compoziţia chimică a adausului $UO_2(NO_3)_2$ nu este identică cu cea a probei, unde uraniul se găseşte în mod obişnuit sub formă de oxid.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Ahrens L. H., Taylor S. R., *Spectrochemical analysis,* London, 1961.
2. * * * *Аналитическая химия урана,* Изд. АН СССР, М., 1962, стр. 248.
3. Porlezza C., Donatti A., Ann. Chim. Appl., 1926, **16**, p. 622.
4. Mather K. B., Proc. Roy. Soc. New South Wales, Part. III, 1946, **80**, p. 187.
5. Strassheim A., Spectr. Acta, 1950, **4**, p. 200.
6. Зайдель А. Н., Калитеевский Н. И., Липис А. В., Чайка М. П., *Эмиссионный спектральный анализ атомных материалов,* Изд. физ. мат. лит., М.-Л., 1960.
7. * * * *Сборник по радиохимии,* ЛГУ, 1955.
8. Морозова Н. Г., ЖАХ, 1957, **12**, стр. 185.
9. Морошкина Т. М., Прокофьев В. К., Смирнова М. Н., Зав. лаб., 1957, **23**, стр. 1324.
10. Иванов Н. П., *Тр. 10-го всесоюзн. совещания по спектроскопии,* т. **2**, Изд. Львовского ГУ, 1958.
11. Vinogradov A. P., *Actes de la conférence internationale sur l'utilisatian de l'énergie atomique à des fins pacifiques,* Genève, 1955, vol. **VIII**, p. 239.
12. Калинин С. К., Наймарк Л. Е., Марзуванов В. Л., Измагулова К. И., *Атлас спектральных линий для стеклянного спектрографа,* М., 1956.
13. Saidel A. N., Prokofiev W. K., Raiski S. M., *Spektraltabellen,* Verlag Technik, Berlin, 1955, (Übersetzung aus dem Russischen).
14. Harrison G. R.. *M. I. T. Wavelenght Tables,* John Wiley, N. Y.
15. Русанов А. К., *Спектральный анализ руд и минералов,* Госгеолиздат, М., 1948.
16. Prokofiev V. K., *Metode fotografice de analiză spectrală cantitativă a metalelor şi aliajelor,* vol. **II**, IDT, Buc., 1951, p. 176, (trad. din l. rusă)
17. Brode W. R., *Chemical Spectroscopy,* John Wiley, N. Y.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ РАДИОАКТИВНЫХ РУД

(Резюме)

Анализируются две руды со слабым содержанием урана. Количественный анализ производится методом добавок, используя аналитическую линию U—4 241,6 в интерференции с линией Zr — 4 241,6, а как внутренний стандарт — линию Fe — 4 247,4. Содержание урана в исследованных рудах составляет 6.10^{-3}% и 4.10^{-3}%.

ANALYSE SPECTROGRAPHIQUE DE QUELQUES MINÉRAIS RADIOACTIFS

(Résumé)

On a analysé deux minerais à faible teneur en uranium. L'analyse quantitative a été faite par la méthode de l'addition, en utilisant comme raie analytique la raie U—4 241,6, en interférence avec Zr—4 241,6, et comme standard interne, la raie Fe—4 247,4 La concentration en uranium des minérais étudiés est 6.10^{-3}% et 4.10^{-3}%.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. C. 537.29

THE MOTION OF CHARGED PARTICLES IN A MODEL DISCONTINUOUS MAGNETIC FIELD

BY

S. CHAPMAN and P. C. KENDALL

1. Introduction

The motion of charged particles in magnetic fields, long ago studied by Poincaré (1896) [7] and Störmer (1955) [10] has in recent years acquired new importance in connection with nuclear energy machines (c. f. Grad (1961) [5]) and also in connection with the Van Allen radiation belts (1959) that encircle the earth, and are of great interest relative to the aurora polaris and magnetic storms.

Alfvén (1950) [3] showed how Störmer's exact treatment of orbits in the field of a dipole could be illuminated by use of the conception of the guiding centre; he inferred the (approximate) invariance of the magnetic moment of the spiralling motion, so long as the spiral radius is small compared with the scale length of the field. Subsequently Bogoliubov and Zubarev (1955) [4], Northrop and Teller (1960) [6], Rosenbluth and Longmuir (1957) [8] and others have inferred the existence of other invariants of the motion.

Singer (1957) [9] and Akasofu and Chapman (1961) [1], [2] have made speculative additions to auroral theory, which depend on the breakdown of the above condition of invariance. The breakdown may arise because the spiral radius becomes large in a region of low field intensity, while the field scale length remains finite; an example is the passage of a particle near a magnetic neutral point or line. Alternatively the field scale length may become very small, or even zero, as at a surface of discontinuity of the field. Here we consider the latter case in connection with a model field of a type to some extent resembling the neutral line field considered by Akasofu and Chapman.

Vector or Cartesian notation, as in :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{1}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \tag{2}$$

is used to specify the position and velocity of a particle at time t. It is convenient to call the directions of the right-handed triad of orthogonal unit vectors **i**, **j**, **k** respectively westward, southward, and upward. The particle, of mass m and charge e (in e. m. u.), moves in the field F produced by uniform electric current flow in the planes $y = \pm z$, eastward in $y = z$, westward in $y = -z$. These planes divide space into four regions, denoted by Y, Z, $-Y$, $-Z$ (Fig. 1). They are separated by the half planes p_{++}, p_{-+}, p_{--}, p_{+-}; for each, the first subscript is the sign of y, and the second that of z over the half plane. In each region the magnetic intensity **H** given by

$$\mathbf{H} = H\mathbf{h}, \tag{3}$$

is uniform; the strength H is the same everywhere. Fig. 1 shows the direction of **h** in each region. The equation of motion:

$$m\dot{\mathbf{V}} = e\mathbf{V} \times \mathbf{H} \quad \text{or} \quad \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{p} \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{p} = p\mathbf{h}, \quad p = eH/m, \tag{4}$$

indicates that the speed V is constant, and that **V** rotates with uniform angular velocity p about **h**. By taking $m/(|e|H)$ as the unit of time, and then suitably choosing the unit of length, we have:

$$p = -e/|e| = 1/p, \quad p^2 = 1, \quad V = 1. \tag{5}$$

Let θ denote the angle between **V** and **h**, and φ the azimuth of **V** relative to the half-plane p_0 bounded by **h** and facing westward (positive

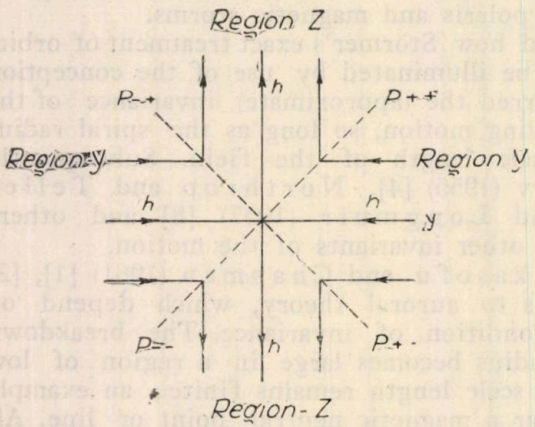


Fig. 1. — A model of the magnetic ield configuration near a neutral line.

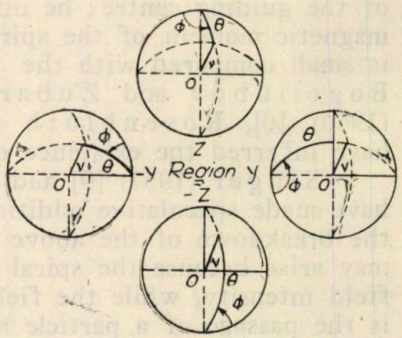


Fig. 2. — The pitch and phase angles θ, φ for the four regions shown in Fig. 1.

normal **i**). As the particle moves in each region (Fig. 2), the *pitch angle* θ is constant, and the *phase angle* φ is given by:

$$\dot{\varphi} = p, \quad \varphi = \varphi_0 + p(t - t_0). \tag{6}$$

As here, subscripts and primes added to the time symbol t will be added to the corresponding symbols for variables or velocity. We also write:

(7) $s = \sin\theta,\ c = \cos\theta,\ S = \sin\varphi,\ C = \cos\varphi,\ \varkappa = \cos pt,\ \sigma = \sin pt.$

Table 1 below lists **h** for each region, and also indicates which part of the whole plane with positive normal **i** is the part p_0. In each region $u = sS,\ x = x_0 - ps\,(C - C_0)$.

Table 1 also gives $v,\ w,\ y,\ z$ for each region.

Table 1

Region	Y	Z	$-Y$	$-Z$
	$y \geqslant \lvert z \rvert \geqslant 0$	$z \geqslant \lvert y \rvert \geqslant 0$	$-y \geqslant \lvert z \rvert \geqslant 0$	$-z \geqslant \lvert y \rvert \geqslant 0$
h	**−j**	**k**	**j**	**− k**
Part p_0	lower	northern	upper	southern
$v\,(=\dot{y})$	$-c$	$-sC$	c	sC
$W\,(=\dot{z})$	$-sC$	c	sC	$-c$
$y-y_0$	$-c\,(t-t_0)$	$-ps\,(S-S_0)$	$c\,(t-t_0)$	$ps\,(S-S_0)$
$z-z_0$	$-ps\,(S-S_0)$	$c\,(t-t_0)$	$ps\,(S-S_0)$	$-c\,(t-t_0)$

We justify taking a discontinuous field with constant magnetic intensity as a model of a field containing a neutral line by giving an example of a field which may vanish, and yet in which the pitch of a spiralling charged particle remains constant. The required field is

(8) $$\mathbf{H} = H\mathbf{k},$$

where H is any function of time and space variables. This field may vanish, and contains neutral points or lines, as required. For motion in this field:

(9) $$\dot{u} = (eH/m)\,v,\quad \dot{v} = -(eH/m)\,u,\quad \dot{w} = 0.$$

An easy integral of this equation is:

(10) $$u^2 + v^2 = \text{const.}$$

The transverse velocity $\sqrt{u^2+v^2}$ of the particle remains constant, and so the pitch of the orbit remains constant. It appears that a neutral point or line might alter the pitch of an incident charged particle but only because the radius of curvature of the lines of force near the region of weak field becomes small compared with the spiral radius of the particle.

3. Motion of particles injected with zero pitch

Consider positive particles ($p>0$) projected from region Y with $z>0$ and zero pitch, towards the z axis. Suppose that $z=z_0$ initially. Provided z_0 is large enough, the particle will enter region Z, describe a complete semicircle without entering region $-Y$ and re-enter region Y. We shall describe such orbits as being of type (Y, Y).

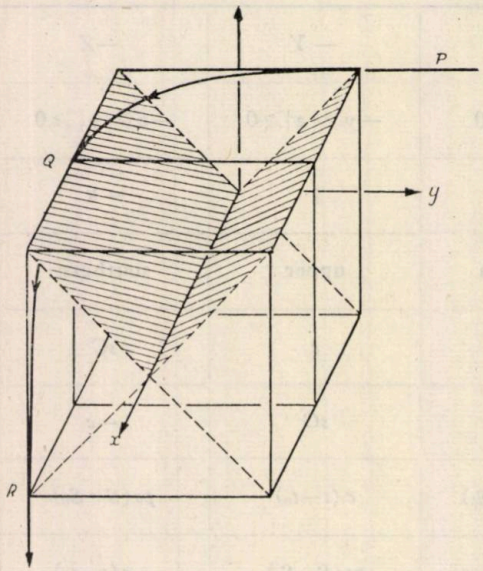


Fig. 3.—A critical orbit in the model field

At a certain critical value of z_0 the particles will enter region $-Y$. Since the speed of the particle is always unity, the critical value of z_0 is clearly $z_0=1/2$. Fig. 3 shows the orbit of a particle for a value of z_0 slightly less than 1/2. For this critical orbit the particle enters region Z at the point P and describes a complete quadrant of a circle until it reaches the point Q. At Q the particle enters region $-Y$ and by symmetry describes another complete quadrant of a circle. At R the particle enters region $-Z$ with zero pitch, and continues to move in a straight line with uniform velocity parallel to the z axis. The direction of motion of the particle has thus turned through 90°. We shall refer to this as a $(Y, -Z)$ type of orbit.

As z_0 decreases further, the particle continues to make a 90° turn, while $(Y, -Z)$ type orbits passing through region $-Y$ will have larger and larger velocities anti-parallel with the y axis. This is because in region Z less than a quadrant of a circle will be described; in fact as z_0 decreases the arc described in region Z decreases.

If the angle turned through in region Z is less than a certain critical value, the character of the orbit again changes, this time into what we shall call a $(Y, -Y)$ type orbit. It will be shown later (section 4) that the corresponding critical value of z_0 is approximately 0.474. For $z_0<0.474$ the particle describes a $(Y, -Y)$ type orbit always. The behaviour of particles injected into region Z along the lines of force from region Y, with zero pitch and $z=z_0$ initially may thus be described as follows.

Depending on the value of z_0, the orbit will be one of three types, (Y, Y) $(Y, -Z)$, $(Y, -Y)$. For (Y, Y) type orbits $z_0 > 0.5$, for $(Y, -Z)$ type orbits $0.474 < z_0 < 0.5$ and for $(Y, -Y)$ type orbits, $0 < z < 0.474$.

4. Particles injected with small non-zero pitch

For non-zero pitch angles the initial phase φ_0 of the particle becomes important. We wish to find the pitch and phase of the particle as it emerges as one of the three types of orbit described in section **2.** This will be a function of θ_0, the small initial pitch, and φ_0, the initial phase. Throughout, we shall neglect squares and higher powers of θ_0 and sin θ_0. Thus:

$$\theta_0 \ll 1, \quad \sin\theta_0 \ll 1. \tag{11}$$

Suppose that the total times spent in regions $Y, Z, -Z$ for any particle are $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$, where:

$$\mathbf{t}_1 = t_1 + \mathrm{d}t_1, \ \mathbf{t}_2 = t_2 + \mathrm{d}t_2, \ \mathbf{t}_3 = t_3 + \mathrm{d}t_3, \tag{12}$$

and t_1, t_2, t_3 are the corresponding times for zero initial pitch. We shall, in addition to the notation (7), use the convention that symbols in heavy type denote functions of $t + \mathrm{d}t$, while ordinary symbols denote functions of t. The notation is clear, as there are no vectors in the sections which follow.

a) *Motion across region* Y

We shall assume that initially the particle spirals around the line of force $z = z_0$. Table 1 shows that the initial value of z is given by $z = z_0'$, where:

$$z_0' = z_0 - ps_0 S_0 . \tag{13}$$

The particle crosses the plane p_{++} at time $\mathbf{t}_1$ given by:

$$y_0 - c_0 \mathbf{t}_1 = z_0 - ps_0 S_1 , \tag{14}$$

giving:

$$t_1 = y_0 - z_0, \quad \mathrm{d}t_1 = ps_0 S_1 , \tag{15}$$

where, to the first order $c_0 \approx 1$. The phase is then:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + p\mathbf{t}_1 . \tag{16}$$

At the plane p_{++} the pitch $\bar{\theta}_0$ and phase $\bar{\varphi}_1$ change discontinuously to new values $\bar{\theta}_1$ and $\bar{\varphi}_1'$ given by equating the velocity components:

$$\mathbf{s}_1 \mathbf{S}_1' = \mathbf{s}_0 \mathbf{S}_1, \quad \mathbf{s}_1 \mathbf{C}_1' = \mathbf{c}_0, \quad \mathbf{c}_1 = -\mathbf{s}_0 \mathbf{C}_1 , \tag{17}$$

(See table 1). To the first order, these equations give:

(18) $$\mathbf{S}'_1 = s_0 S_1, \quad \mathbf{C}'_1 = 1, \quad \mathbf{s}_1 = 1, \quad \mathbf{c}_1 = -s_0 C_1,$$

(19) $$\bar{\theta}_1 = \pi/2 + s_0 C_1, \quad \bar{\varphi}'_1 = s_0 S_1 .$$

b) *Motion across region Z*

The particle may not cross into region $-Y$ (see section **2**). If, however, the particle crosses the plane p_{-+}, the time of crossing $\mathbf{t}_2$ (starting from p_{++}) is given by the equation:

(20) $$y_0 - \mathbf{c}_0 \mathbf{t}_1 - p\mathbf{s}_1 (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}'_1) = -(y_0 - \mathbf{c}_0 \mathbf{t}_1 + \mathbf{c}_1 \mathbf{t}_2).$$

Since $y_0 - t_1 = z_0$, and $\mathbf{c}_0 = 1$ to the first order, we obtain:

(21) $$p\sigma_2 = 2z_0$$

and

$$-p(p\,\mathrm{d}t_2 \varkappa_2 + s_0 S_1 \varkappa_2 - s_0 S_1) = 2\,\mathrm{d}t_1 + s_0 C_1 t_2,$$

giving:

(22) $$\varkappa_2 \,\mathrm{d}t_2 = -ps_0 (f + S_1 \varkappa_2),$$

where:

(23) $$f = S_1 + pC_1 t_2 .$$

At the plane p_{-+} the pitch $\bar{\theta}_1$ and phase $\bar{\varphi}_2$ change discontinuously to values $\bar{\theta}_2$ and $\bar{\varphi}'_2$ given by equating the velocity components:

(24) $$\mathbf{s}_2 \mathbf{C}'_2 = \mathbf{c}_1, \quad -\mathbf{c}_2 = \mathbf{s}_1 \mathbf{C}_2, \quad \mathbf{s}_2 \mathbf{S}'_2 = \mathbf{s}_1 \mathbf{S}_2,$$

(See table 1). To the first order, using equations (18) and (19), we obtain:

(25) $$\mathbf{S}'_2 = 1, \quad \sigma_2 \mathbf{C}'_2 = -s_0 C_1, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{c}_2 = -\mathbf{C}_2,$$

(26) $$\bar{\theta}_2 = \pi - p\mathbf{t}_2 - s_0 S_1, \quad (27) \quad \bar{\varphi}'_2 = \pi/2 + s_0 C_1/\sigma_2 .$$

c) *Motion across region* —Y

As before, the particle may not cross into region $-Z$. If it does so, the time of crossing p_{--}, $\mathbf{t}_3$, (starting from p_{-+}) is given by:

(28) $$y_0 - \mathbf{c}_0 \mathbf{t}_1 - p\mathbf{s}_1 (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}'_1) + \mathbf{c}_2 \mathbf{t}_3 = y_0 - \mathbf{c}_0 \mathbf{t}_1 + \mathbf{c}_1 \mathbf{t}_2 + p\mathbf{s}_2 (\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}'_2).$$

We note that on expansion using equations (25) and (26):

(29) $$\mathbf{s}_2 = \sigma_2 + p\varkappa_2 \,\mathrm{d}t_2 + s_0 S \varkappa_2, \quad (30) \quad \mathbf{c}_2 = -\varkappa_2 + p\sigma_2 \,\mathrm{d}t_2 + s_0 S_1 \sigma_2,$$

(31) $$\mathbf{S}_3 = \varkappa_3 - p\sigma_3 \,\mathrm{d}t_3 - s_0 C_1 \sigma_3/\sigma_2, \quad (32) \quad \mathbf{C}_3 = -\sigma_3 - p\varkappa_3 \,\mathrm{d}t_3 - s_0 C_1 \varkappa_3/\sigma_2.$$

To the first order t_3 is given by the transcendental equation:

(33) $$\varkappa_2 t_3 + p\sigma_2 \varkappa_3 = 0$$

and after some reduction we find that:

(34) $$dt_3 = ps_0 g,$$

where:

(35) $$(\varkappa_2 - \sigma_2 \sigma_3)\, g = f(1 + \varkappa_3/\varkappa_2^2) + \sigma_3 C.$$

At the plane p_{--} the pitch $\bar{\theta}_2$ and phase $\bar{\varphi}_3$ change discontinuously to values $\bar{\theta}_3$ and $\bar{\varphi}_3'$ given by equating the velocity components:

(36) $$\mathbf{c}_3 = \mathbf{s}_2 \mathbf{C}_3, \quad \mathbf{s}_3 \mathbf{C}_3' = -\mathbf{c}_2, \quad \mathbf{s}_3 \mathbf{S}_3' = \mathbf{s}_2 \mathbf{S}_3 .$$

4. Parameters for zero initial pitch

The equations which describe the intersections of an orbit of initially zero pitch with the planes p_{-+} and p_{--} are (21) and (33) which may be written:

(37) $$\sin t_2 = 2z_0, \qquad (38) \qquad t_3 + \tan t_2 \cos t_3 = 0.$$

Clearly, no intersection occurs for $z_0 > 0.5$. These orbits have been described above as (Y, Y) type orbits. For $z_0 = 0.5 - \varepsilon$, where ε is small the orbits are of type $(Y, -Z)$ and the direction of motion is turned through a right angle. Equation (38) has no positive roots if $\tan t_2$ falls below a certain critical value. This may be seen by comparing the graphs of the functions $t_3 \cot t_3$ and $-\cos t_3$. The critical value of t_2 (obtained from the condition $1 - \tan t_2 \sin t_3 = 0$ for a double root of (38)) is $t_2 = 71°24'$. Then $t_3 = 160°21'$ and $z_0 = 0.474$. The $(Y, -Y)$ type orbits which only enter region $-Y$ and never cross p_{--} occur when $0.474 > z_0 > 0$.

5. Emergent pitch and phase

For $(Y, -Y)$ type orbits the emergent pitch and phase are given by equations (26). The initial pitch θ_0 is small, so that we may replace s_0 by θ_0, giving:

(39) $$\bar{\theta}_2 = \theta_2 + \theta_0 \Theta_2, \quad \bar{\varphi}_2' = \varphi_2' + \theta_0 \Phi_2 ,$$

where

(40) $$\theta_2' = \pi - pt_2, \quad \Theta_2 = f \sec t_2, \quad \varphi_2' = \pi/2, \quad \Phi_2 = \cos(\varphi_0 + pt_1) \sec t_2 .$$

In full, equation (23) for f becomes:

(41) $$f = \sin(\varphi_0 + pt_1) + pt_2 \cos(\varphi_0 + pt_1).$$

For $(Y, -Z)$ type orbits the emergent pitch and phase are given by solving equations (36). Thus,

(42) $$\bar{\theta}_3 = \theta_3 + \theta_0 \Theta_3, \quad \bar{\varphi}_3' = \varphi_3' + \theta_0 \Phi_3 ,$$

where:

(43) $$\cos \theta_3 = -\sin t_2 \sin t_3, \quad \cos \varphi_3' = \cos t_2 / \sin \theta_3' .$$

Expanding equations (36) by means of equations (29) to (32) we obtain:

$$\Theta_3 \sin\theta_3 = g \sin t_2 \cos t_3 - f \sin t_3 + \cos t_3 \cos(\varphi_0 + pt_1) \tag{44}$$

and

$$\Phi_3 \sin\theta_3 \cos\varphi_3' = -\Theta_3 \cos\theta_3 \sin\Phi_3' - g \sin t_2 \sin t_3 - f \cos t_3 - \\ - \sin t_3 \cos(\varphi_0 + pt_1), \tag{45}$$

where:

$$g = [f(1 + \cos t_3 \sec^2 t_2) + \sin t_3 \cos(\varphi_0 + pt_1)] / (\cos t_2 - \sin t_2 \sin t_3). \tag{46}$$

6. The solid angle ratio

Consider θ_0 to be a small fixed angle. As the phase φ_0 varies from 0° to 360°, the emergent pitch $\bar{\theta}$ and phase $\bar{\varphi}'$ considered as a point in some coordinate system $(\bar{\theta}, \bar{\varphi}')$, will describe a closed contour. Allowing θ_0 to vary from zero to some small value, the above varying contour will sweep out an area in the $(\bar{\theta}, \bar{\varphi}')$ plane. This area is of interest in connection with the scattering process envisaged by Akasofu and Chapman (*op. cit.*). The areas swept out on the unit velocity sphere, considering θ_0, $\bar{\theta}'$ as colatitudes, φ_0, $\bar{\varphi}'$ as angles of azimuth, are a direct measure of the input and output solid angles filled by the incident and emergent particle beams in velocity space. The solid angle ratio is:

$$\mathfrak{R} = \int \sin\bar{\theta}\, d\bar{\theta}\, d\bar{\varphi}' \Big/ \int \sin\theta_0\, d\theta_0\, d\varphi_0 . \tag{47}$$

Denoting by $\mathcal{J}$ the Jacobian

$$\mathcal{J} = \partial(\bar{\theta}, \bar{\varphi}')/\partial(\theta_0, \varphi_0), \tag{48}$$

to the first order in θ_0,

$$\mathfrak{R} = (\pi\theta_0^2)^{-1} \left| \int \mathcal{J} \sin\bar{\theta}\, d\theta_0\, d\varphi_0 \right| . \tag{49}$$

Value of $\mathfrak{R}$ *for type* (Y, — Y) *orbits*

Replacing $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}'$ in (48) by $\bar{\theta}_2$, $\bar{\varphi}_2'$, and denoting $df/d\varphi$ by f' we obtain:

$$\mathcal{J} = -\theta_0 \sec t_2 [f \sin(\varphi_0 + pt_1) + f' \cos(\varphi_0 + pt_1)]. \tag{50}$$

Thus

$$\mathfrak{R}_2 = (2\pi)^{-1} \sec t_2 \int_0^{2\pi} [f \sin(\varphi_0 + pt_1) + f' \cos(\varphi_0 + pt_1)]\, d\varphi_0,$$

giving

$$\mathfrak{R}_2 = \sec t_2, \tag{51}$$

where $\mathfrak{R}_2$ denotes the solid angle ratio for $(Y, -Y)$ type orbits.

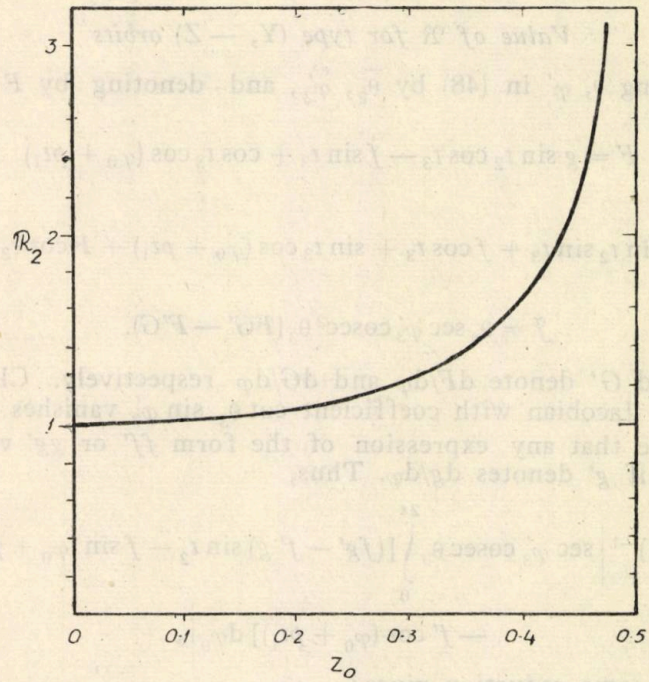


Fig. 4. — The solid angle ratio $\mathfrak{R}_2$ as a function of z_0.

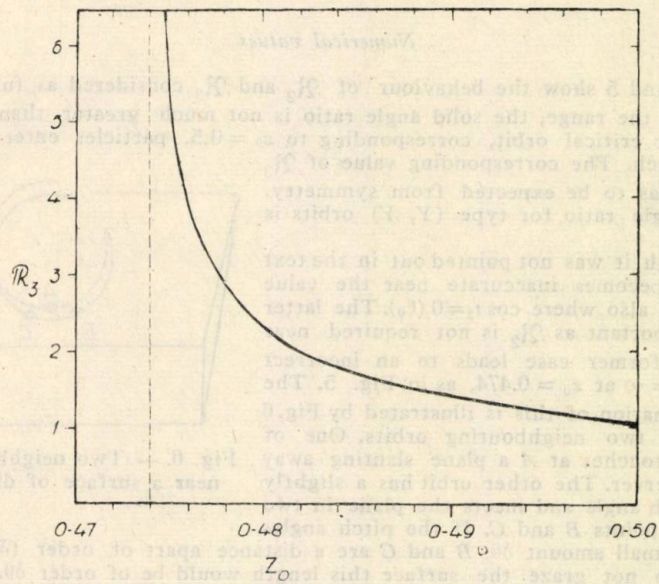


Fig. 5. — The solid angle ratio $\mathfrak{R}_3$ as a function of z_0.

Value of $\mathfrak{R}$ *for type* (Y, —Z) *orbits*

Replacing $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}'$ in (48) by $\bar{\theta}_2$, $\bar{\varphi}'_2$, and denoting by F and G the functions:

$$F = g \sin t_2 \cos t_3 - f \sin t_3 + \cos t_3 \cos(\varphi_0 + pt_1) \tag{52}$$

and

$$G = g \sin t_2 \sin t_3 + f \cos t_3 + \sin t_3 \cos(\varphi_0 + pt_1) + F \cot \theta_3 \sin \varphi'_2, \tag{53}$$

we obtain:

$$\mathcal{J} = \theta_0 \sec \varphi'_3 \operatorname{cosec}^2 \theta_3 (FG' - F'G). \tag{54}$$

Here, F' and G' denote $dF/d\varphi$ and $dG/d\varphi$ respectively. Clearly, that part of the Jacobian with coefficient $\cot \theta_3 \sin \varphi'_3$ vanishes identically. We also note that any expression of the form ff' or gg' vanishes on integration, if g' denotes $dg/d\varphi$. Thus,

$$\mathfrak{R}_3 = (2\pi)^{-1} \left| \sec \varphi'_3 \operatorname{cosec} \theta_3 \int_0^{2\pi} [(fg' - f'g) \sin t_2 - f \sin(\varphi_0 + pt_1) - \right.$$

$$\left. - f' \cos(\varphi_0 + pt_1)] \, d\varphi_0 \right|,$$

which after some reduction gives:

$$\mathfrak{R}_3 = \left| (\cos t_2 - \sin t_2 \sin t_3) \right|^{-1}, \tag{55}$$

where $\mathfrak{R}_3$ denotes the solid angle ratio for $(Y, -Z)$ type orbits.

Numerical values

Fig. 4 and 5 show the behaviour of $\mathfrak{R}_2$ and $\mathfrak{R}_3$ considered as functions of z_0. Over most of the range, the solid angle ratio is not much greater than unity. Near the symmetric critical orbit, corresponding to $z_0 = 0.5$, particles enter and emerge with small pitch. The corresponding value of $\mathfrak{R}_3$ is unity, as was to be expected from symmetry. The solid angle ratio for type (Y, Y) orbits is clearly unity.

Although it was not pointed out in the text the analysis becomes inaccurate near the value $z_0 = 0.474$, and also where $\cos t_2 = 0$ (θ_0). The latter case is unimportant as $\mathfrak{R}_2$ is not required near $z_0 = 0.5$. The former case leads to an incorrect value of $\mathfrak{R}_3 = \infty$ at $z_0 = 0.474$, as in Fig. 5. The physical explanation of this is illustrated by Fig. 6 which shows two neighbouring orbits. One of these orbits touches at A a plane slanting away from the observer. The other orbit has a slightly different pitch angle and meets the plane in two neighbouring points B and C. If the pitch angles differ by a small amount $\delta\theta$, B and C are a distance apart of order $(\delta\theta)^{1/2}$. For orbits which do not graze the surface this length would be of order $\delta\theta$. The effect of this is that more phase angles are spanned and the solid angle ratio is greatly increased.

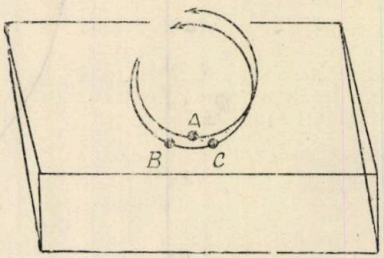


Fig. 6. — Two neighbouring orbits near a surface of discontinuity.

7. Conclusions

The fact that the solid angle ratio $\mathfrak{R}$ is greater than or equal to unity indicates a high degree of efficiency for the scattering process. Akasofu and Chapman (*op. cit.*) have conjectured that the small atmospheric loss cone could be quickly filled by energetic particles from a belt of spiralling particles similar to the Van Allen radiation belts. Our results show that there will be a small focussing effect, i. e. the flux of emergent particles is likely to be greater than the flux of incident particles for small pitch angle cones. It should be pointed out that this is a first approach only to a much more difficult problem. We have considered only those particles which enter the field configuration at some point away from the poles of the unit velocity sphere within a small solid angle $d\Omega$, and which become scattered into a small solid angle near the poles of the unit velocity sphere. It would be interesting to consider where the particles within $d\Omega$ might have come from, and also to consider further passages of the particles across the field configuration, after an artificial reflection, simulating reflection at the mirror points in the stronger magnetic field away from the neutral line.

Numerical calculations based upon a continuous magnetic field of the type found near a neutral line in a potential field bear out the results obtained above with regard to the three types of orbit. They also introduce new features of the problem, which will be presented elsewhere. The results obtained from the uniform field model strongly support the contention of Akasofu and Chapman that a neutral line is a good scatterer of the pitch of incident charged particles, and that the scattering process is efficient.

There is no possibility of obtaining trapped particles in the case of a uniform field model. We note, however, that near the critical orbit $z_0 = 0.5$ there is symmetry, and that particles enter and emerge with small pitch. Scattering then takes place from small pitch angles to small pitch angles. Where this type of scattering occurs in a magnetic mirror machine there is no possibility of particles emerging from the apparatus.

Acknowledgements. This work was begun at the High Altitude Observatory, Boulder, Colorado, and one of the author's (P. C. Kendall) wishes to thank the High Altitude Observatory for supporting his visit there.

Received the 19 V 1962

University of Alaska, USA,
and
University of London, England

REFERENCES

1. Akasofu, Chapman S., Phil. Trans., 1961, **A 253**, p. 359.
2. — Geophys. Inst. Univ. Alaska, 1961, Sci. Rep. 7.
3. Alfvén H., *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, 1950.
4. Боголюбов Н., Зубарев Д., Укр. Мат. Ж., 1955, **7**, стр. 5.
5. Grad H., *Nuclear Energy*, Series *II*, Pergamon Press, 1961.
6. Northrop T. G., Teller E., Phys. Rev., 1960, **117**, p. 215.

7. Poincaré H., C. R. Acad. Sci. Paris, 1896, **123**, p. 930.
8. Rosenbluth M. N., Longmuir C. L., Ann. Phys., 1957, **1**, p. 120.
9. Singer S. F., Trans. Amer. Geophys. Un., 1957, **38**, p. 175.
10. Störmer C., *The Polar Aurora*, Oxford University Press, 1955.
11. Van Allen J. A., Frank L. A., Nature, 1959, **183**, p. 430.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПРЕРЫВНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Резюме)

Заряженная частица в общем магнитном роле ассоциирована с некоторыми инвариянтами постольку поскольку радиус спирального движения достаточно мал по сравнению с маштабом длин поля. Если поле имеет прерывности, движение также прерывается так как маштаб длин превращается в нуль. Следовательно, представляет интерес рассмотреть влияние прерывностей на само движение. В настоящей статье это исследование проведено в связи с рассмотрением некоторого специально выбранного простого магнитного прерывного поля. В этом поле — три главных типа орбит берущие свое начало в непосредственной близости поля и имеющих направления образующие маленькие пространственные углы входа. В одном из типов орбит начальное систематическое движение остается неизменным; во втором типе оно становится обратным; а в третьем, оно изгибается на угол в 90°. Определяется отношение между маленькими пространственными углами входа и маленькими пространственными углами выхода для всех трех типов орбит. Полученные результаты представляют интерес в связи с нейтральными точками и линиями получаемыми в лаборатории, а также в связи с регистрацией данных земной магнитной сферы и солнечной атмосферы.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Предьтавление конфигурации в магнитном поле в окрестности нейтральной линии.

Рис. 2. — Углы наклона и фазы θ, φ соответствующие всем четырем областям рис. 1.

Рис. 3. — Критическая орбита в поле представления.

Рис. 4. — Пространственный угол $\Re_2$ как функция от z_0.

Рис. 5. — Пространственный угол $\Re_3$ как функция от z_0.

Рис. 6. — Окрестные орбиты в вблизи поверхности прерывности.

MIŞCAREA PARTICULELOR ÎNCĂRCATE ÎNTR-UN CÎMP MAGNETIC DISCONTINUU

(Rezumat)

Se obţin o serie de rezultate relative la punctele şi liniile neutre observate în laborator, în sfera magnetică a pămîntului şi în atmosfera solară.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Reprezentarea configuraţiei din cîmpul magnetic, în vecinătatea liniei neutre.

Fig. 2. — Unghiurile de înclinaţie şi de fază θ, φ pentru cele patru regiuni reprezentate în fig. 1.

Fig. 3. — Orbită critică în cîmpul de reprezentare.

Fig. 4. — Unghiul solid $\Re_2$ ca funcţie de z_0.

Fig. 5. — Unghiul solid $\Re_3$ ca funcţie de z_0.

Fig. 6. — Orbitele vecine în apropiere de suprafaţa de discontinuitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. C. 536.27

HEAT TRANSFER SODIUM CIRCUIT AND OPERATIONAL EXPERIENCES

BY

MIROSLAV PAŠEK

1. Introduction

A heat transfer circuit has been built in the Nuclear Research Institute in the year 1959, containing about 13 kg of sodium coolant. The facility was designed partly for the experimental investigation of heat transfer in sodium flowing in tubes and partly for obtaining data on design elements and operational problems of heat transfer sodium circuits. In this paper the latter subject is treated i. e. basic circuit elements and the results and experiences of a one year operation. A special attention has been given to the difficulties of the operational circuit. The results may be used in the design and operation of sodium loops.

Sodium is distinguished with regard to classic coolants with some peculiaritics which must not be overlooked in the design, operation and attendance of Na heat transfer circuits. The main specific features of the sodium circuit are characterized besides others with the operation under an inert atmosphere, sodium solidifying in the circuit at room temperatures, a special heating and filling system and finally with continuous sodium cleaning in the filter loop.

The work on the solution of problems relating to sodium coolant began in the year 1957 in the Nuclear Research Institute. In this paper some problems are treated associated with the use of sodium as reactor coolant. The paper refers to the results which were obtained with the first sodium circuit S I which was operated as an isothermal one during the years 1957 to 1958. These results and experiences enabled to design and build a now and substantially larger sodium circuit S II in the year 1959. The circuit S II differed from the circuit S I by allowing experiments with sodium in a larger scale and it contained new and improved design elements and measuring techniques. There was also a fundamental difference in operational conditions as well as in better experimental possibilities of the circuit S II.

During the test operation of the circuit S II and during the one year normal operation a lot of new problems occured which must be resolved and the defects of some elements must be removed.

2. Characteristics of the heat transfer sodium circuit

Sodium circulated in the circuit which was heated electrically through a heater, a countercurrent heat exchanger, a cooler, and heat exchange occured with circulating Na in these elements. Sodium flowed from the heater into the inner tube of the countercurrent heat exchanger, where it transferred a part of heat to the sodium flowing in countercurrent, another heat part was transferred in the cooler and finally sodium returned back into the heater through the outer tube of the heat exchanger,

where it was reheated to the original temperature. The differences between the highest and lowest sodium temperatures in the circuit varied in the circuit in the range of 8° to 60°C. The necessary sodium circulation was done by means of an electromagnetic pump placed in the colder part of the circuit. The sodium flow could be controlled from 0 to maximum by the direct variation of the voltage of the pump supply current. The circuit heat control was enabled partly by the continuous control of the heater output and partly by the cooling water flow change in the petroleum-sodium cooler. The petroleum temperature in a special cooling circuit could be set in a wide range by the cooling water flow variation. Two exchangeable test elements were used for the experimental investigation of the heat transfer coefficient in the tube and in the annulus. The first consisted of a countercurrent heat exchanger and the second one consisted of the electrical heater, the function of wich was mentionned above.

The sodium flow in the circuit was measured with an electromagnetic flowmeter and the mean values varied in the range from 200 l/hr to 2 000 l/hr. The measured value of 9,75 mV was associated with the sodium mean flow rate of 1 m/sec. The circulating sodium temperature in the circuit varied from sodium melting point to 350°C and was measured by means of Ni—NiCr thermocouples. When the measurement was ended the sodium was allowed to solidify in the tubing. It was let out from the circuit into a reservoir only in case if some part of the circuit was dismounted.

Sodium was continuously filtered in a special filter loop which was connected to the main tubing in a bypass form to remove oxides from circulating sodium if necessary and to attain and keep it clean.

Technically purified argon was used as an inert gas for the circuit. The circuit was controlled remotely and the control was concentrated on a special panel outside the shielding cabin in which the sodium cooled circuit was placed. The measuring instruments were also placed outside the cabin.

3. Fundamental circuit elements and the measuring techniques

The heat transfer circuit is shown in principle on fig. 1 where: *1* — expansion tank ; *2* — cooler sodium-petroleum ; *3* — heat exchanger ; *4* — electric heater ; *5* — electromagnetic pump ; *6* — electromagnetic flowmeter ; *7* — electromagnetic flowmeter ; *8* — electromagnetic pump in the filter loop ; *9* — sampler and extraction aparatus ; *10* — cooler ; *11* — natural circulation of tetralin ; *12* — cold trap ; *13* — reservoirs ; *14* — argon cleaning device ; *15* — vacuum pump ; *16* — argon ; *17* — level indicator ; *18* — argon ; *19*—cooling water ; *20*—petroleum circuit ; *21*—pump ; *22* — cooler petroleum — water ; *23* — loop insulation ; *24* — loop heating ; *25* — thermocouple Ni-NiCr ; *26* — thermocouple Ni-NiCr ; *27* — controlthermocouple ; *28* — circuit panel ; *29* — a specially designed plug mechanism. As it may be seen on it, it consists of several assemblies, which will be dealt with especially from the functional point of view. The fundamental assembly is the circuit itself, where sodium circulated with an associated compensating vessel mounted on its highest place and with two filling reservoirs mounted on the lowest place. Other assemblies are the argon supply system with cleaning facility, electric heating, auxiliary cooling circuit (water — petroleum — sodium) filter loop and finally a shielding facility.

The actual heat transfer circuit is made of AKVN stainless steel tubes of a diameter 19.6/22 mm and the length of about 10 m was used. Flange connections were used for tubing, which were successfully used in the isothermal circuit S I. All tubings and circuit elements were mounted on a support with regard to the shift possibility by thermal expansion. The height difference between the compensating and filling vessels was 650 mm and this resulted in a tubing slope of about 4 % enabling to fill the circuit with sodium as well the operation without any air cushions. The slope was also successful in driving sodium from the circuit back into the filling reservoir.

Two filling reservoirs interconnected with tubings, closing valve and bellows were in the lower circuit part (Fig. 2). Each reservoir may contain more than 15 kg of sodium and was fitted with electric heating and thermal insulation. Maximum and minimum level heights in the reservoirs were controlled with built — in level indicators working on contact principle. The indicators with light signalisation were connected to the circuit control panel.

The filling reservoirs worked on the pressure filling principle. Sodium was driven by argon from the first reservoir through a filter from sintered metal powder

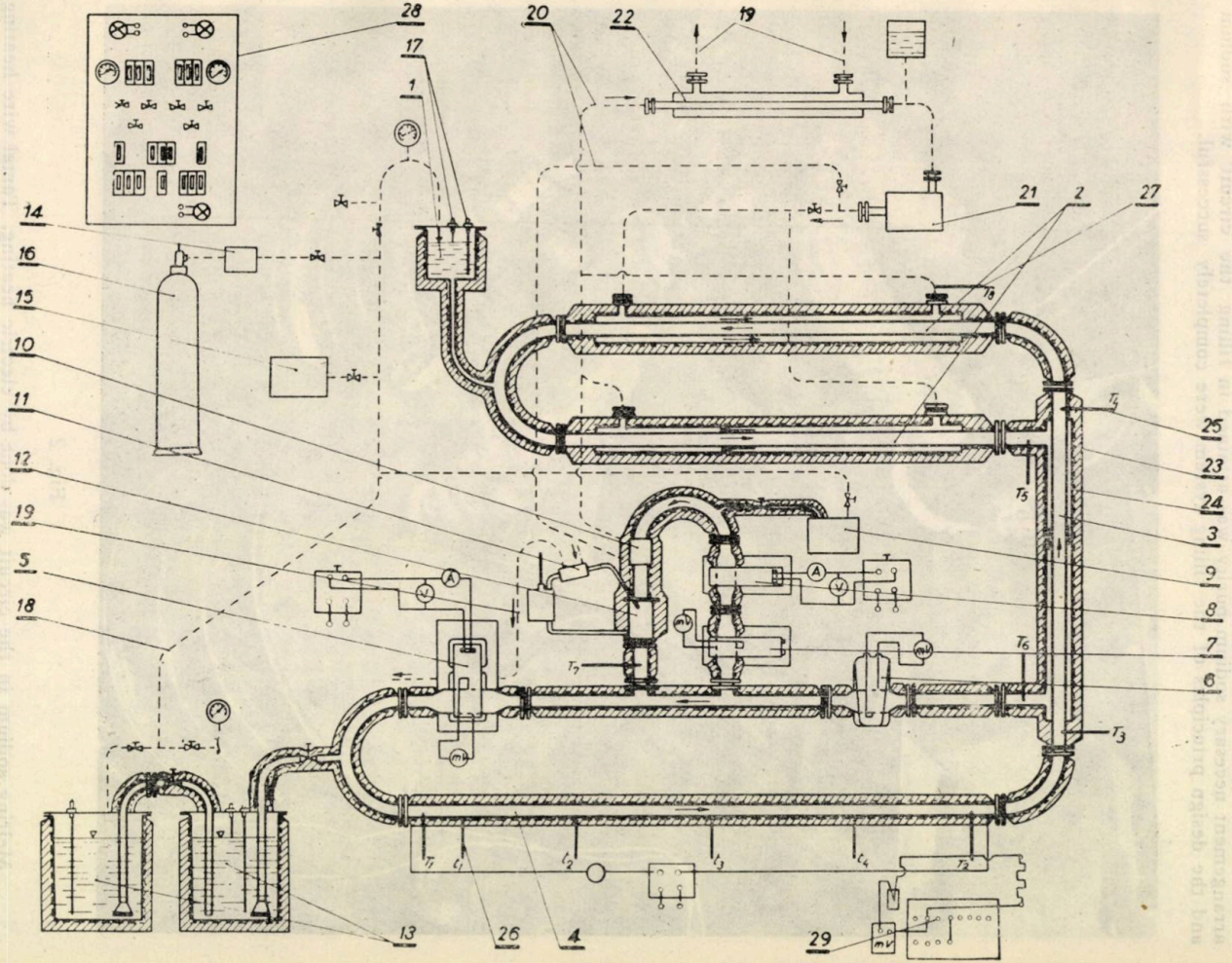

28
20
22
19
17
1
21
2
27
14
16
15
10
11
12
19
5
18
25
23
24
3
9
8
7
6
13
26
4
29

Fig. 1

into the second reservoir and in the same way from there into the circuit. In this arrangement necesary sodium purity was attained in filling the circuit with sodium and the design principles of the filling system were completely successful.

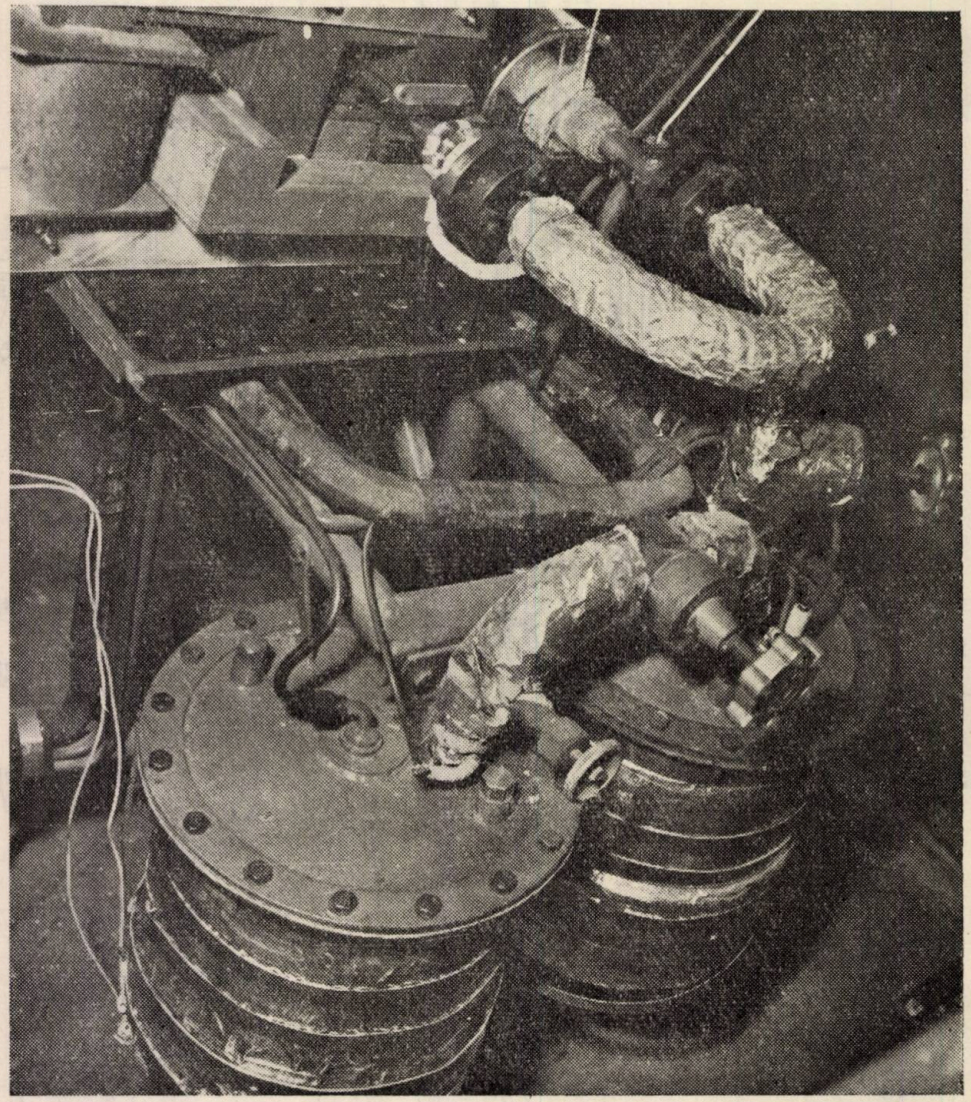


Fig. 2

Melting sodium in the circuit was done by electric heating. Tantal wire heating spirals having the diameter of 0.8 mm were placed in ceramic material and wound on tubes. Thermal insulation was performed in the form of an asbestos packing covered with an aluminium foil. The circuit heating was divided into six particular sections with a total input of 6 kW. Besides it special electric current lead is provided to the main heater, the 7 kW input of which may be controlled by autotransformers. Switching of sections of the electric heating circuit was concentrated on the control panel,

It may be seen in Fig. 1 that argon is fed from the steel bottle through a cleaning column to the circuit panel, where the closing valves of the supply tubings for argon are situated. The inert gas was fed partly into both filling reservoirs and partly into the compensating vessel and to the filter loop. The argon pressure was indicated by two pressure gauges mounted on the panel. The cleaning facility for argon consisted of a silicagel inset for gas removing and of a column filled with molten sodium for removing residual oxygen. The sodium temperature in the column was held in the range from 150° to 170°C, the bubbling argon pressure about 2 atm. Sodium temperature control in the column was enabled by the variation of the electric heating input.

A vacuum pump connected as is shown on Fig. 1 was used for air evacuation from the reservoirs and from the circuit.

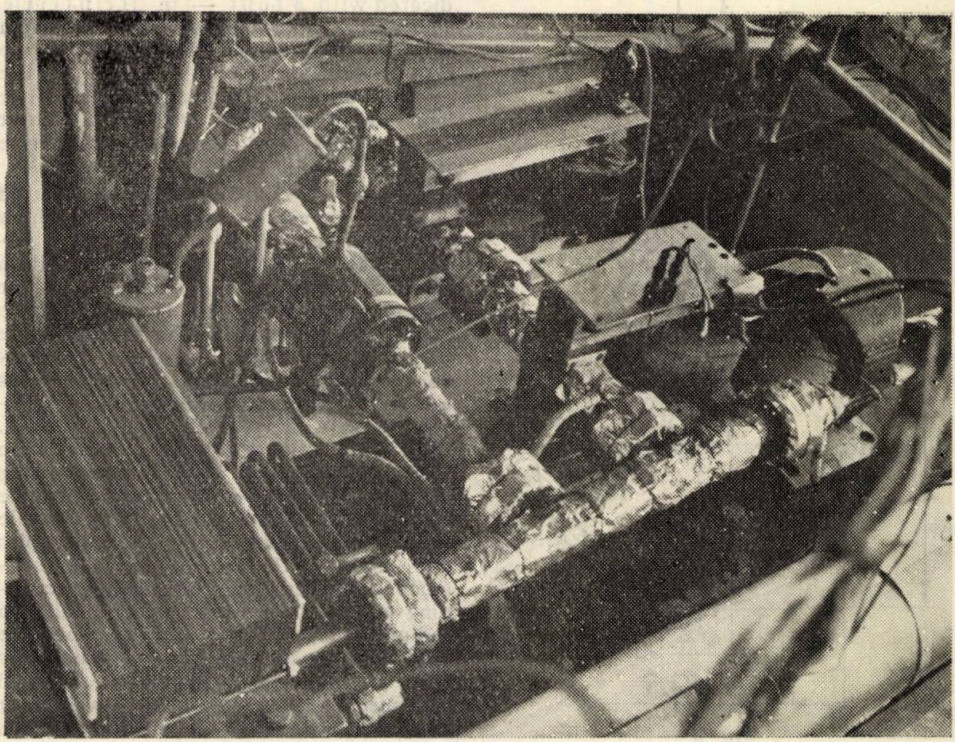


Fig. 3

The added cooling circuit with petroleum was chosen from the safety point of view to avoid an accident in the case of a failure of the sodium cooler. Petroleum is inert to sodium, and this was its advantage, nevertheless the petroleum circuit has a considerable disadvantage owing to the fact that it evaporates intensively at higher temperatures and petroleum vapors must be evacuated. During the operation of the sodium circuit the maximal cooling petroleum temperature attained 170°C, but usually the range of 110° to 150°C was satisfactory. The petroleum temperature control was done by variation of cooling water quantity flowing into the water—petroleum-cooler. Inlet temperatures of cooling petroleum were continuously controlled. The aim of this control was to avoid sodium solidifying in the petroleum sodium cooler at lower temperatures of circulating sodium.

The filter loop of the sodium circuit (Fig. 3) consisted of an electromagnetic pump, an electomagnetic flowmeter and a cold trap. The electromagnetic pump of the con-

duction type supplied with a. c. was used to drive sodium through the cold trap—the flow could be continuously controlled in the necessary range by means of the pump output. The cold trap was made in principle from a cylinder filled with pressed stainless steel turnings and the cover of the filter cylinder was cooled with tetralin. The tetralin cooling provided the sodium filter temperature of 150°C and the tetralin vapors which were produced condensated in the added water cooler and returned back into the filter cylinder cover. Presetting sodium temperature in the tubings before the cold pit was enabled by the cooler with forced petroleum circulation. Sodium filter flow rate was measured with the electromagnetic flowmeter mentionned above, sodium temperature in the cold pit outlet was indicated with a built — in thermocouple. The whole filter loop was provided with electric heating as was describe above to melt sodium in the filter loop at the moment of the circuit start. The filter loop was fitted also with two outlet valves for sodium sampling to analyse its purity.

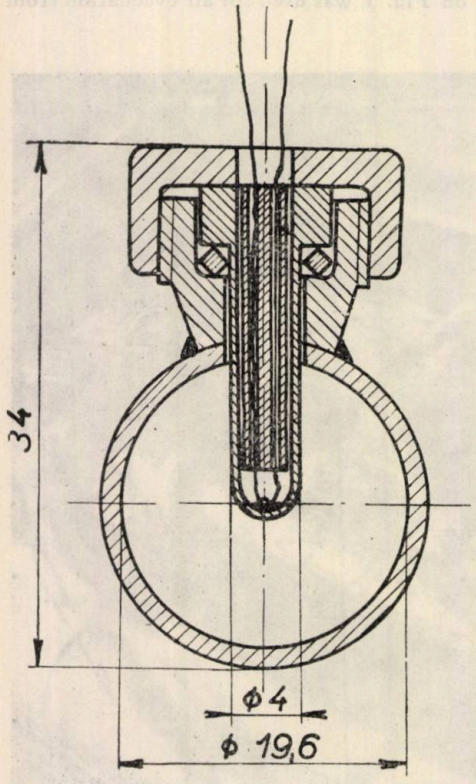


Fig. 4

The heat transfer circuit was fitted with two measuring instruments, which were mentionned above. It must be added that the EMF of the 10 built-in thermocouples was indicated on a mirror galvanometer RFT with the range up to 1,5 mV. With regard to the thermocouple position in special pits these thermocouples were calibrated to temperatures up to 400°C the calibration being performed in a many-channel electric oven. The special pits for thermocouples were made of thinwalled stainless tubes having the diameter of into which thermocouple Ni-NiCr wires were mounted in a ceramic double slot capillary. The thermocouples were soldet to the pit bottom. The thermocouple mounting into the tubing according to Fig. 4 was fully successful and no sodium leakage occured. The thermocouple switching for galvanometer reading was made by means of a specially designed plug mechanism to attain stable values at frequent switching. A turnable switch which was used at first was not successful owing to varying contact resistance.

Electromagnetic pump voltage and supply current intensity were indicated with conventional instruments. The electromagnetic flowmeter reading was indicated on millivoltmeters with a 60 mV range and a 150-part scale. The circuit heating input was controled by means of control pressure gauges and voltmeters.

The circuit S II was placed in a shielded cabin during the operation, which occupied a room of 4×3×3 m and was provided with ventilation. The circuit operation could be observed on instruments mounted outside the cabin as is shown on Fig. 5. Large plexiglass windows in the front and side walls of the cabin enabled a view on the whole facility inside the cabin. The whole circuit was fitted with safety means and the workers were equipped with personal protection means. After the construction to the end 1959 the circuit was commissioned as a risical working place.

4. Experiences and operation of the heat transfer circuit S II

The operation of the circuit S II has brought some problems which were watched during the testing period as well as in the next one year operation and the main results and experiences are summarized in this and in following chapters.

a) *Preparation of the circuit and filling with sodium*

The principal elements and the whole circuit were tested at first for leakage with pressurized argon. The main attention was paid to welds, flange connections and armatures. Leakages were sought by the emulsion method. As it appeared during the

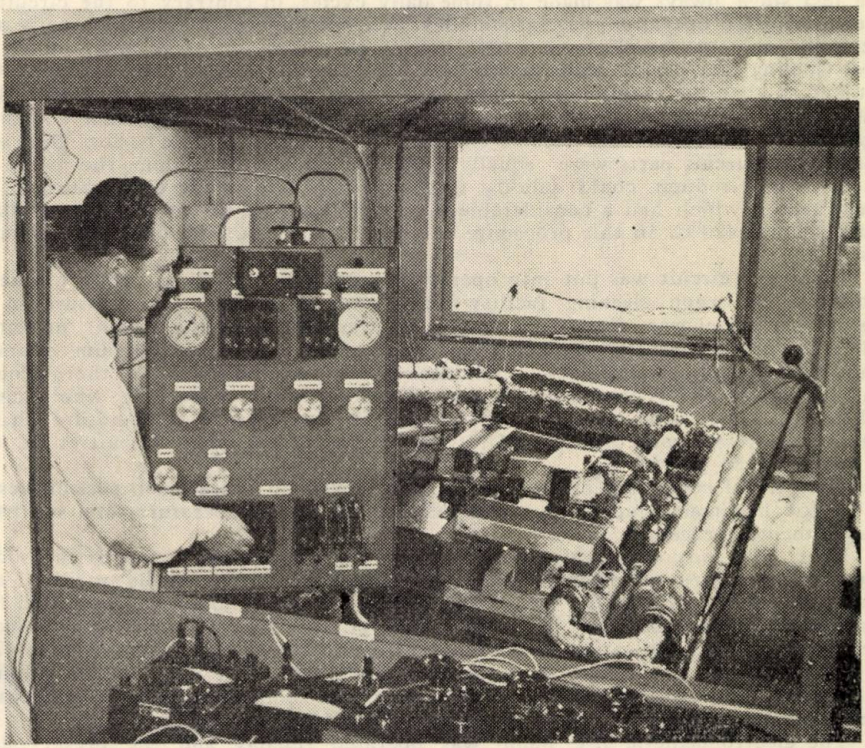


Fig. 5

circuit operation, this testing gave good results and no sodium leakage was observed during the operation. Before filling with sodium the circuit was cleaned. The circuit tubing was washed with methylalcohol and steam to remove impurities and grease stains. After washing the whole circuit was heated several hours in a vacuum. The filling reservoirs were filled with argon atmosphere and when sodium bricks were cleaned from surface impurities, they were put into the first reservoir. Here sodium was heated for two days to a temperature somewhat lower than 150°C and was driven with pressurized argon throught the metallic filter into the second reservoir. By sodium filtering at the temperature lower than that 150°C as mentionned above good oxide capturing on the filter was provided. The maximum height of the sodium level in the reservoirs could be observed on the light signal of the level indicator.

Before sodium filling from the second reservoir air was evacuated and the circuit was filled with argon. The argon vacuum cycle was repeated several times to attain an inert atmosphere without any residual air. The circuit tubing was heated to 150°C, i. e such a temperature, which would prevent sodium from solidifying on the tubing

walles. The circuit was filled with sodium again by means of pressurized argon by filtering it at the same time. The level indicator of the compensating vessel showed the end of filling. After the circuit filling with sodium the electromagnetic pump was switched on to provide sodium circulation in the circuit. This procedure of filling the circuit S II was repeated several times during one year operation of the circuit and appeared successful.

b) *Operational conditions*

With regard to the time necessary for the preparation and start up of the circuit a test stage always was made in some daily cycles, in contrary to the circuit S I, where intermitted operation was satisfactory. When stopping the circuit usually after a week—the input of the electromagnetic pump was set to one third and sodium was cooled. Cooling petroleum temperature was kept on the value of 100° to 110°C. Care was taken so that the mentionned temperature could not drop under this limit. If so, sodium would prematurely solidify on the walls of the sodium—petroleum cooler and the possibility of sodium free volume expansion in the circuit would be lost. Only when the individual circuit parts were equally cooled by circulating sodium, the pump was shut down and sodium could solidify in the circuit. The tubing temperature of the electric heater, which had a considerable heat inertia, must be controlled so that it did not surpass 120°C. In this procedure the circuit was shut down successfully many times.

When the circuit was put into operation, usually the whole assembly was tested preliminary, the argon cleaning facility was switched on and the pressure in the compensating vessel was set to 0,2 atm. Sodium was melted in the circuit principally in parts beginning with the compensating reservoir to enable the sodium dilatation during melting. Sodium melting in individual parts was indicated by thermocouples in the tubing. At the beginning before this experience was made, the whole circuit was heated at the same time, which resulted in considerable temperature changes and thermal stresses coused defects. Uniform heating of the whole circuit at the same time could not be provided.

Operational conditions of the circuit were given by operational possibilities, as e. g. by the maximal pump output or cooling petroleum temperature, etc. and partly by experimental procedure.

Heat input and cooling water quantity were controlled with regard to the sodium measured temperature in the cooler outlet. The thermal conditions usually stabilized after an hour a operation and the measured values were read-usually we proceeded from lower values of sodium flow to higher ones at the constant input of the electric heater. The lowest temperature of coolling petroleum was 90°C and the highest 170°C and both must be controlled. At a lower temperature than 90°C sodium solidified on the tubing, walls and flow pulsations appeared in the sodium circuit. At a temperature higher than was mentionned above petroleum evaporated intensively.

The electromagnetic a. c. pump was operated reliably and the preset output was uniform without any fluctuations at various circuit conditions. During the operation no special cleaning of the electromagnetic pump channels was necessary the maximal output values did not vary in time. Especially the possibility of a simple and entirely cotinuous control of the pump output was appreciated.

The electromagnetic flowmeter and other measuring instruments, fitted with the circuit, were successful during the operation various conditions and run correctly and reliably.

c) *Sodium outlet and circuit cleaning*

Several times sodium outlet from the circuit into the filling reservoir was checked by means of pressurized argon. Before sodium outlet the filling reservoir heating was switched on and sodium was kept at a temperature of about 150°C, the bellow valve and the tubing connecting the circuit with the filling reservoir being also heated. Sodium did not flow out from the circuit by its own weight with regard to the resistance of the filling filter. During the sodium driving from the tubing by pressurized argon (the pressure was controlled in the range from 0,2 to 0,5 atm. as it was needed) a low argon pressure (0,1 atm.) was let in the filling reservoir. When sodium was driven out of the tubing, the circuit could be dismounted and cleaned.

Dismounting and refilling the circuit with sodium was usually performed after removing residual sodium from inner surface tubing. For removing these rests substances were used which react chemically with sodium, such as water vapour and methylalkohol. With regard to the exothermic reaction and developing gaseous hydrogen care was taken so that nowhere considerable sodium amounts could remain. Continuous tubing slape in the circuit to the filling reservoir was successful for this aim. The circuit was filled always with argon before washing began. After testing both substances it appeared that washing with water vapour was more avdantageous especially with regard to the facility size and manipulation. On the beginning of the cleaning procedure a small amount of water vapour was admitted into argon and this amount increased gradually. After cleaning the whole circuit was dried at vacuum and prepared for a new filling with sodium.

This relatively complicated procedure of outlet and cleaning was substituted in same cases of smaller arrangements of the circuit by a simpler procedure. Dismounting of a detail (e. g. electromagnetic flowmeter) was made after cooling the circuit when oxide cladding was removed from both tubing ends wich had packings against air penetrating into the tubing. At small arrangements on the circuit this procedure accelerated the work with a good result.

5. The analyse of operational disturbances

In the test operation after some cycles including start, operation and shutting down no sodium flow appeared in the circuit as usually. It was fround the electromagnetic pump could supply — the reasons remained unknown — only one third of the original sodium supply. No failure was found by measuring and checking the electromagnetic pump and an external examination on other elements of the cooling circuit was resultless. The temperature of circulating sodium was satisfactory (200°C) in all points of the circuit so that the possibility of a local „freezing" was excluded. The purity of circulating sodium in the circuit also excluded the possibility of oxide coagulation in the channel of the electromagnetic pump. No other solution remained than to shut down the circuit and let out sodium from the whole circuit and dismount individual elements and test then. After dismounting the countercurrent sodium — sodium heat exchanger, which is illustrated in Fig. 6, a considerable deformation of the inner copper tube was found. The deformed tube was shown on Fig. 7.

The subsequent analyse showed local deformations of the tube, which could occur according to the characteristic cross section shape only by a uniform pressure, i. e. by the pressure of molten sodium in the annular space in the heat exchanger. The deformed cross section suggested that an inner strengthening of the copper tube occured. So that the pressure which caused the deformation of the copper tube could be determined this case was treated as a lifting bend of the tubing with a circular cross section due to an external pressure. The critical pressure is given by the equation:

$$p_{kr} = (s/r)\left\{\sigma_s^t/\left[1+\left(\sigma_s^t/E\right)\left(2r/s\right)^2\right]\right\}, \quad [\mathrm{kg/cm^2}] \ ,$$

where S is the thickness of the wal tube, σ_s^t is the yield strength of the material at working temperature and E is the Young modulus for the elastic deformation range at the working temperature. The equation holds supposing the load is higher than the proportional elastic limit and in the case that the tube is longer than eight inner diameters r.

The critical pressure was determined by calculations for temperatures: 100°C, 200°C and 300°C, and was given by the values of: 102 kg/cm², 83 kg/cm² and 56,1 kg/cm².

The load σ_{kr} associated with the critical pressure at the operational temperature of 200°C, was determined by value of 455 kg/cm².

Very different tabulated values depending from the kind, purity and heat treating of copper are given for determination of constants necessary to calculate p_{kr} for copper. With regard to the fact that these parameters could not be defined precisely for the copper tube of the heat exchanger, the calculated values were checked experimentally.

A sample of the copper tube of the heat exchanger at the length of 135 mm was welded in a thick wall steel tube so that the calculation could be satisfied, (Fig.8). The inner

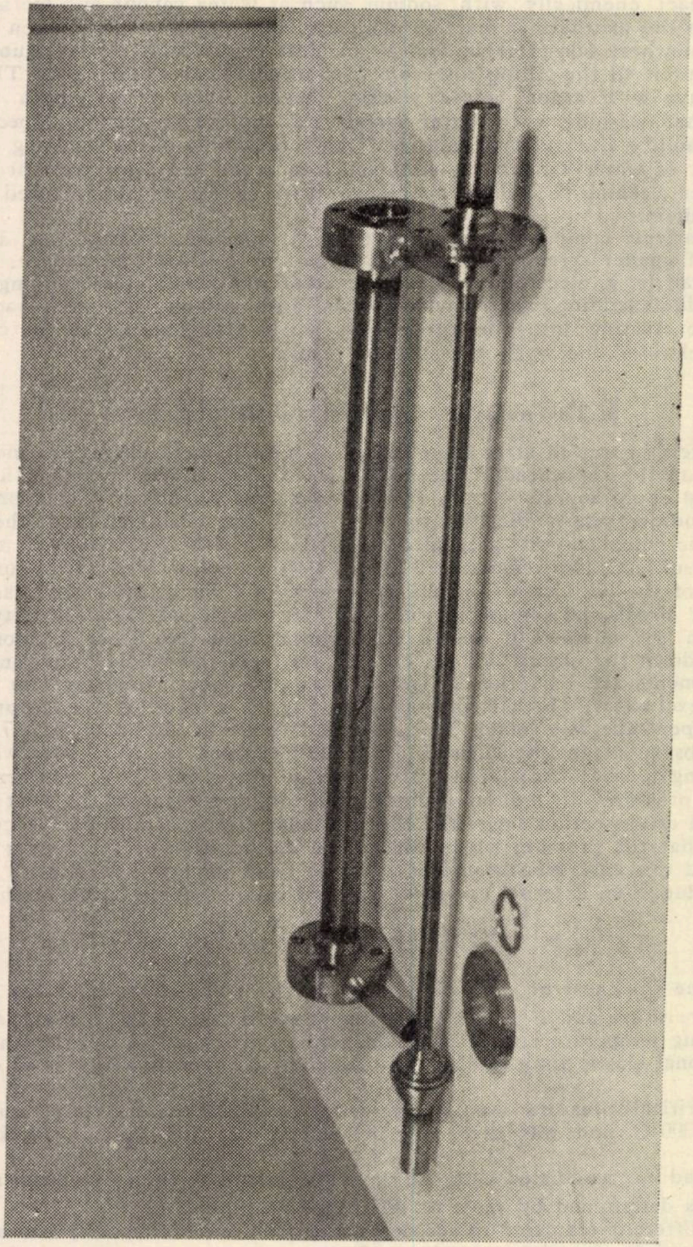


Fig. 6

space of the examinated element was filled with oil and the whole element was plunged into an oil bath of the thermostat. The experiment was performed at the temperature of 150°C, which was controlled inside the teste of the copper tube. A measurable deformation of the copper tube was observed at the pressure of 97 atm. and the tube broke down suddenly at the pressure about 101 atm. After the break down the oil pressure dropped to 70 atm. The deformation of the examinated tube was examined by means of the oil column which was driven into a glass tube, and the moment in which the tube stability was last could be clearly visible by a sudden rise of the oil level of about 30 mm.

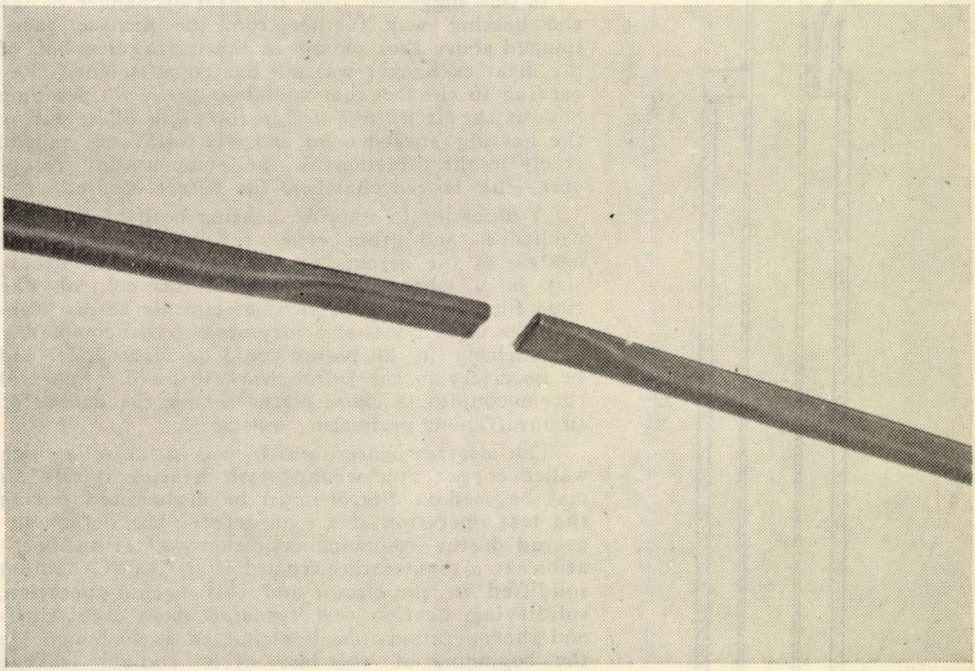


Fig. 7

It appeared on a sample section that the shape of the deformed circular cross section of the sample began to change from the typically ellipsoidal shape into the form of a higher order. Control measurements were done before the experiment which would eliminate a severe geometrical imperfection of the tube. It was checked by the performed experiment that the calculated values are satisfactory as was shown by the extrapolation for the temperature of 150°C.

We were lead by further considerations to the examination of the sodium stopper (column) volume which caused the tube deformation by its expansion and to the examination of the estimation of the operational temperature at which the deformation occured. The estimate for the temperature of 150° to 200°C was based on the following considerations:

Sodium solidifies in the tubing of the cooling circuit at 97,8°C and in the course of further cooling its volume decreases more than is due to the decrease of the inner space of the tubing. Small luncres of a flat shape are produced on inner walls of the tubing which are refilled again when sodium melts. It was suggested that the evaluation of the sodium volume variation with temperature might be based on the sodium melting point. The original Na volume in the annular space of the coun-

tercurent heat exchanger which expanded by about 300 mm³ (as determined by measuring the deformation) with regard to the thermal expansion of the heat exchanger tubes was considered for the calculation and this caused the deformation of the inner tube. Basing on these considerations the corresponding temperature increase by 50° ... 60°C was calculated so that the temperature at which the defect could occur was given by the value of about 150°C.

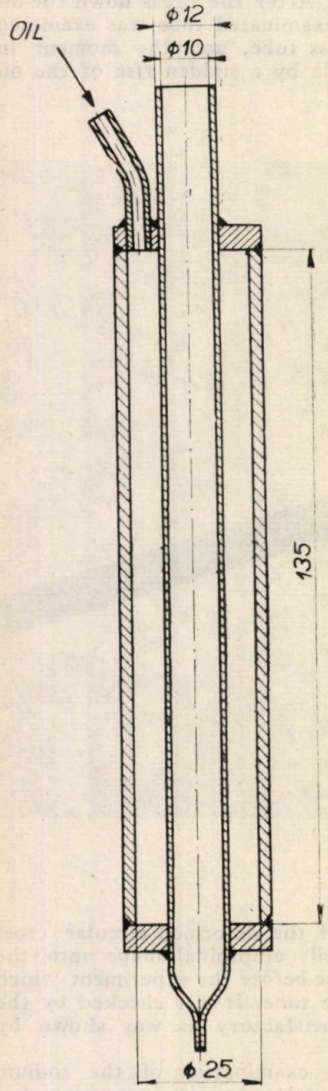


Fig. 8

The upper limit of the temperature, estimated at 200°C, was determined from measurement records of the switching circuit.

It was suggested from the heat exchanger design and heating way further from the analyse mentionned above that sodium in the mixing chamber of the heat exchanger was not heated sufficiently. Regarding to the fact that sodium in the lower pumping loop of the circuit was still in the solide phase during the heating advancement and Na could not expand freely in the direction to the compensating reservoir (the frozen chamber) the defect occured.

A necessity to improve heating both of the heat exchanger and other elements resulted from the analyse of the defects as well as from the necessity of a more efficient temperature control. The time for preheating particular elements before starting the circuit was also increased so that completely Na melting in all points could be secured. It will be necessary in the future work to build in control thermocouples in those places where the danger of an unsufficient preheating exists.

The electric heater, which was made of a thick walled copper tube wound with heating spirals, as may be seen on Fig. 9, must be dismounted during the test operation due to a defect. The defect appeared during following conditions. After an operation at a temperature from 150° to 300° C sodium solidified in the circuit and this cycled operation, solidifying, heating was repeated about eight times and the operation time is estimated at 40 hours. On the beginning of the last cycle sodium leakage into the enviroument from both ends of the copper heater appeared at the start of the circuit. The copper tube was ended with the plugs of stainless steel mentionned above on both ends. These plugs formed the flange connection.

On both defect places tube samples were cut out and sent for a metallographic analyse to the State Research Institute for Material Protection in Prague. We desired to known by meant of the metallographic analyse, if the corrosion effect of sodium cooperated in causing the defect in the copper tube. It resulted from the metallographic analyse that sodium leaking was enabled through microcracks in the walls of the copper tube especially under the layer of the hard solder, where the flange was connected.

The microcracks are illustrated on Fig. 10 and Fig. 11. The oxide globes are not uniformly distributed but preferentially on grain boundaries and form a discontinuous mesh. Besides it we have stated on the sample No. 2 that the structure is formed of coarse grains here which were generated evidently by strong overheating at about 800°C during the production process. The cracks which were observed on this sample are shown on Fig. 12.

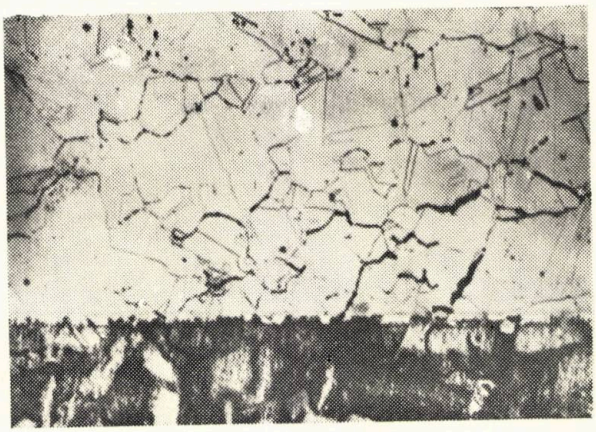


Fig. 10

Fig. 11

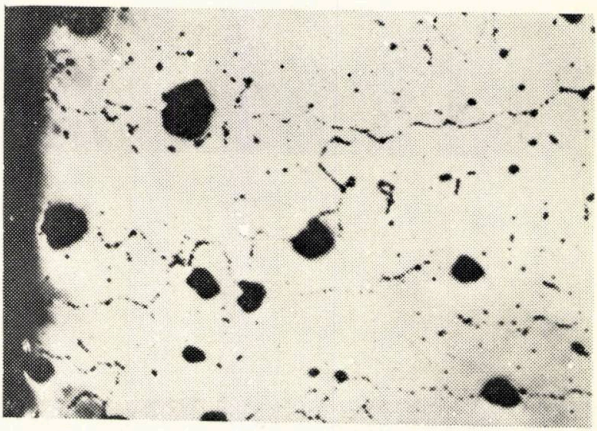


Fig. 12

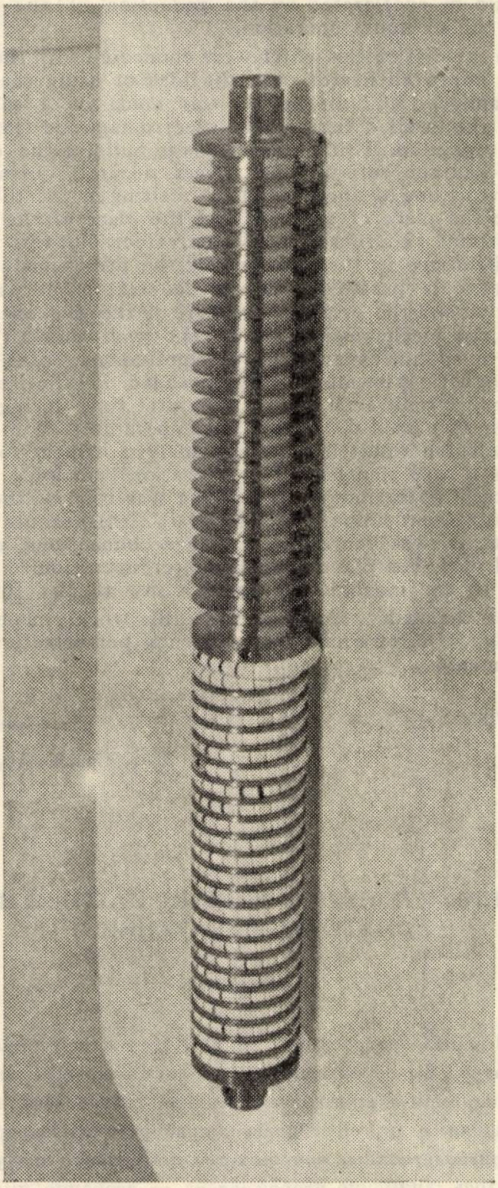


Fig. 9

It was not succeeded in proving by the metallographic analyse that the major cause of cracks was not the intercrystal copper corrosion with sodium. It was, therefore, a defect which was caused substantially by mechanical load due to unequal thermal expansion of the copper tube and the solded flange of AKVN-steel. The crack formation could be accelerated by the reduction of the present copper oxide with sodium during the 40 hours operation.

With regard to the difficulties which were connected with the design and production solution of the new improved heater type the idea of using the goon copper thermal conductivity was abandoned and the heater was made of a tube from AKVN-steel.

The flattened thin walled tube of the electromagnetic flowmeter was also sent for metallographic inspection. This flowmeter was built in the circuit and this tube of AKVN steel suffered the defect. The defect occured during the test operation during heating the circuit due to unequal sodium melting in the tubing. A metallographic section was made in the place of cracking and the place of the original circular tube cross section to determine en eventual corrosion effect. But this metallographic section did not show any difference in the structure or the presence of any wall microcracks. The macroscopic crack is parallel with the connection and passes on the interface between the connection and the original structure in the weakened place and the defect may be due only to the mechanical strain in the wall due to hight pressure. The pressure was caused by sodium expanding in the limited space of the flowmeter tube.

This electromagnetic flowmeter was arranged in the foregoing measurement stage in the isothermal circuit S II so that the total time during which the tin walled tube vas in operation surpassed 600 hours at temperatures up to 300°C.

The main conclusion resulted from the analyse, namely to melt sodium in the tubing in sections as it was mentionned in operation principles.

During the test operation whole heating was rebuilt, the heating spirals were wound uniformly, the heat imput for 1 m of ∅ 22/19.6 tubing length attained about 800 W/1 m. The heating was increased at flange connections, armatures, etc. and no difficulties appeared with heating during the later operation.

In conclusion I am indebted to express my thanks to the coworkers who participated in filling the tasks associated with this work, namely to M. Řezníček for the circuit design, O. Španinger for its performation and J. Rosa for his help at measurements.

Received the 16 XI 1961

Academy of Sciences,
Řež, Czechoslovak Socialist Republic

ТЕПЛООБМЕННЫЙ КОНТУР С ЖИДКИМ НАТРИЕМ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЕГО ЭКСПЛУАТАЦИИ

(Резюме)

В течение 1959 г. был построен в ИЯИ ЧСАН теплообменный натриевый контур. Испытательная апаратура была реализована для двух основных задач. С одной стороны она служила для экеспериментального исследования теплоотдачи при течении натрия в трубе и кольцевой щели, с другой стороны к приобретению информаций о конструктивных элементах и производственных вопросах теплообменного контура с жидким натрием. В этой работе уделялось внимание второй задаче — особенно имея в виду специфические черты, которые требует конструкция и эксплуатация контуров с натрием. В ИЯИ в 1955 г. начаты работы по решению проблематики использования расплавленых металлов в качестве холодильных агентов реакторов и предъявленная работа основывается на раньше достигнутые результатах.

Была описана работа и принципы конструкции теплообменного натриевого контура S II. Для транспорта натрия в контуре служил электромагнитный насос на переменном токе, поток натрия измерялся при помощи электромагнитного расходомера. Кроме собственного теплообменного контура, образованного, главным образом, при помощи электрической грелки, противопоточного обменника и охладителя, аппаратура была оборудована колонной для чистки с распылением аргона, электрическим нагревом, вспомогательным охлаждающим контуром вода — керосин — натрий, фильтровальной ветвью и защитной системой.

Испытательное производство и годовая эксплуатация контура S II в течение 1960 г. принесли с собой ряд вопросов, которым уделялось внимание. Особенно был рассмотрен вопрос о процессе подготовки и заполнения контура натрием, о пуске в ход и о поддерживании нужной чистоты натрия в течение долговременного производства. Функция и надежность конструктивных элементов и измерительных приборов были испробованы при разных производственных условиях. Были определены процессы выпуска натрия из контура и его эффективная очистка. Были расширены экспериментальные опыты с натрием.

Уделялось также внимание анализу и устранению производственных повреждений которые появлялись в течение испытательной эксплуатации. Дело касалось дефектов на противопоточном обменнике, главной грелке и трубке электромагнитного расходомера.

Результаты работы можно практически использовать при проектировании, конструкции и эксплуатации больших контуров с натриевым холодильным агентом.

CIRCUIT DE TRANSFER DE CĂLDURĂ CU SODIU LICHID ŞI REZULTATELE EXPLOATĂRII SALE

(Rezumat)

În cursul anului 1959 a fost construit la Institutul de cercetări nucleare al Academiei de Ştiinţe Cehoslovace un circuit de transfer de căldură cu sodiu. Aparatura pentru procesul experimental a fost realizată avînd în vedere un dublu scop. Pe de-o parte ea a servit pentru cercetarea experimentală a cedării de căldură la curgerea sodiului printr-o ţeavă de deschidere circulară, pe de altă parte a fost utilă acumularea informaţiilor referitoare la elementele constructive şi problemele de exploatare ale circuitului de transfer de căldură cu sodiu lichid. În prezenta lucrare s-a acordat o atenţie specială celei de a doua probleme, avînd în vedere particularităţile impuse de construcţia şi exploatarea circuitelor cu sodiu.

La Institutul de cercetări nucleare, în anul 1955 au fost începute lucrările pentru rezolvarea problemelor privind utilizarea metalelor topite drept agenţi de răcire în reactori şi prezenta lucrarea se bazează pe rezultatele obţinute anterior. A fost descrisă funcţionarea şi principiile constructive ale circuitului de transfer de căldură cu sodiu S II. Pentru transportul sodiului prin circuit a fost folosită o pompă electromagnetică de curent alternativ, fluxul de sodiu fiind măsurat cu un contor electromagnetic. În afară de circuitul de transport de căldură propriu-zis, format în special dintr-un încălzitor electric, un schimbător de căldură în contracurent şi un refrigerent, aparatura mai conţine o coloană pentru purificare prin difuzia argonului, un dispozitiv de încălzire electric şi un circuit auxiliar de răcire apă—petrol—sodiu, prevăzut cu ramură de filtrare şi sistem de protecţie.

Funcţionarea experimentală şi exploatarea anuală a circuitului S II în decursul anului 1960 au ridicat o serie de probleme care au fost luate în consideraţie.

Au fost cercetate în mod special următoarele probleme : pregătirea şi umplerea circuitului de sodiu, pornirea şi menţinerea purităţii necesare a sodiului în perioada funcţionării îndelungate, procesul de expulzare a sodiului din circuit şi evitarea sa.

Funcţionarea şi siguranţa elementelor constructive şi ale dispozitivelor de măsurare au fost încercate în diferite condiţii de exploatare. Au fost studiate procesele de expulzare a sodiului din circuit precum şi purificarea sa efectivă. S-au extins încercările experimentale cu sodiu. S-a acordat de asemenea o deosebită atenţie analizei şi evitării defecţiunilor apărute în exploatare. Aceste defecţiuni apăreau în schimbătorul de căldură în contracurent, în încălzitorul principal şi în tubul contorului electromagnetic.

Rezultatele lucrării pot fi utilizate practic la proiectarea, construirea şi exploatarea circuitelor avînd sodiu drept agent de răcire.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 3—4, 1962

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 542.936 ; 661.856

CONSIDERAŢII ASUPRA MECANISMULUI DESHIDRATĂRII $CuCl_2.2H_2O$

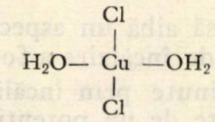
DE

TIBERIU GOLGOŢIU, IANCU HÎNCU, I. ANTONESCU, I. ROŞCA, JULIETA LINDE şi ANGELA LUCA

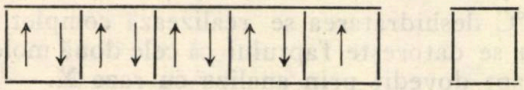
Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului Politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

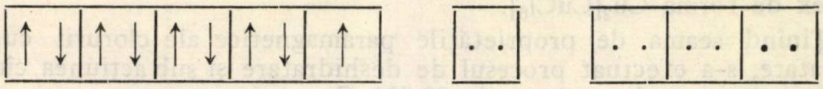
Studiile întreprinse cu ajutorul razelor X asupra structurii cristalelor de clorură cuprică hidratată ($CuCl_2.2H_2O$), au arătat că aceasta se prezintă sub forma unui complex cu existenţă proprie [1], cu structură plană pătrată (forma trans) [2], [3]:



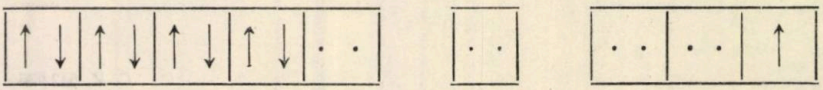
Ţinînd seama de structura electronică a ionului cupric, care este de forma:



schema structurală a complecşilor tetracoordonaţi ar trebui să fie sp^3 a structurii tetraedrice:



Or, s-a constatat că aceşti complecşi au o structură plană pătrată, care corespunde schemei dsp^2, admiţînd că al 9-lea electron d a sărit pe subnivelul $4p$ pentru a elibera o orbită d, ceea ce se explică prin faptul că legăturile pătrate dsp^2 sînt mai stabile (forţa de legătură 2,69) decît legăturile tetraedrice (forţa de legătură 2,0) [4].



Pornind de la această ideie, în lucrarea de faţă ne propunem să stabilim mecanismul deshidratării acestei sări, în sensul dacă cele două molecule de apă se pierd dintr-o dată sau se trece prin faza de monohidrat, cu atît mai mult cu cît existenţa clorurii cuprice monohidratate, cercetată prin metode chimice, este pusă la îndoială [5]...[8].

Pentru lămurirea acestei probleme s-a studiat mecanismul deshidratării clorurii cuprice prin analiză termică simplă şi diferenţială, deoarece cercetarea prin echilibrul solid—vapori este dificilă din mai multe puncte de vedere.

La determinări s-a utilizat $CuCl_2.2H_2O$ purificată prin recristalizări repetate şi al cărei conţinut de apă a fost verificat.

2. Modul de lucru

Deshidratarea clorurii cuprice s-a realizat cu ajutorul unei instalaţii de analiză termică simplă şi diferenţială.

Cantitatea de substanţă luată în lucru a fost variată în diferite încercări, însă alura curbei cît şi temperaturile de transformare au fost totdeauna aceleaşi.

Pentru ca aceste curbe să aibă un aspect net şi să nu dea naştere la interpretări eronate, viteza de încălzire a fost redusă, de circa 80°C/h.

Variaţiile de curent obţinute prin încălzirea termocuplului cupru-constantan au fost înregistrate de un potenţiometru E.P.B. — 0,9.

Substanţa a fost încălzită pînă la temperatura de 175°C.

Curba obţinută (fig. 1) prezintă două inflexiuni: prima apare între temperatura de 90° şi 118°C şi a doua de la 150°C.

La temperatura de 118°C deshidratarea se realizează complet, pînă la sarea anhidră. Acest lucru se datoreşte faptului că cele două molecule de apă sînt legate identic, fapt dovedit prin analiza cu raze X.

Trecerea la sarea anhidră nu se realizează prin faza de monohidrat, după cum arată curba termografică. De altfel însăşi existenţa monohidratului este pusă la îndoială [7], [8].

A doua inflexiune a curbei explică trecerea sării anhidre într-un complex de forma $Cu_2[CuCl_6]$.

Ţinînd seama de proprietăţile paramagnetice ale clorurii cuprice bihidratate, s-a efectuat procesul de deshidratare şi sub acţiunea cîmpului magnetic, cu o intensitate de 20 000 Gs.

Din identitatea curbelor obţinute cu şi fără cîmp, se poate afirma că acţiunea cîmpului magnetic nu exercită nici o influenţă asupra procesului de deshidratare a clorurii cuprice.

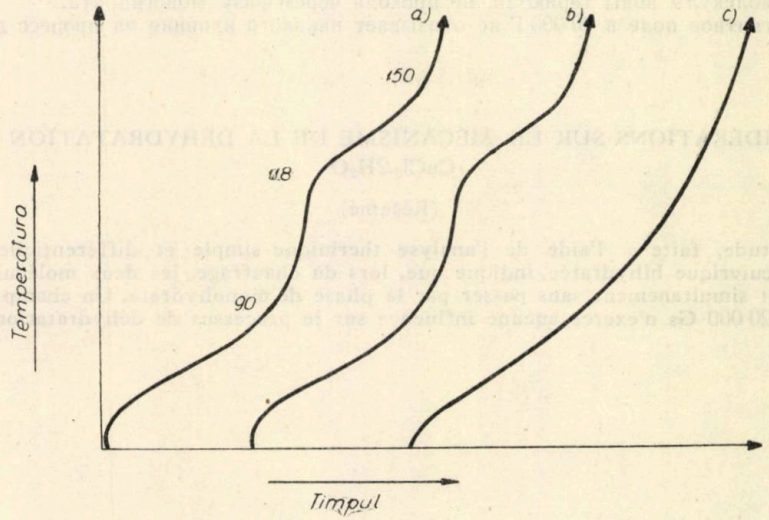


Fig. 1. — a) fără cîmp ; b) cu cîmp ; c) fără substanţă.

3. Concluzii

a) S-a studiat deshidratarea termică a $CuCl_2.2H_2O$.

b) S-a arătat că pierderea celor două molecule de apă are loc la aceeaşi temperatură, fără a trece prin faza de monohidrat.

c) Peste temperatura de 150°C clorura cuprică anhidră trece într-un autocomplex de forma $Cu_2[CuCl_6]$.

d) Procesul de deshidratare nu este influenţat de acţiunea cîmpului magnetic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Bancroft, Rogers, J. phys. Chem., 1933, **37**, S. 1061.
2. Harker, Z. Krist., 1936, **93**, S. 136.
3. Mac Gillavry, Bijvoet, Z. Krist., 1936, **94**, S. 231.
4. Gallais F., *Chimie minérale théorique et expérimentale,* Masson, Paris, 1957, pp. 768 — 771.
5. Ditte, Ann. Chim. phys., (5), 1881, **22**, p. 561.
6. Lescoeur, Ann. Chim. phys., (6), 1890, **19**, p. 533.
7. Sabatier, C. R. Ac. Sci. Paris, 1888, **106**, p. 1724.
8. Benrath, Z. anorg. Chem., 1933, **216**, S. 207.

О МЕХАНИЗМЕ ДЕГИДРАТАЦИИ $CuCl_2.2H_2O$

(Резюме)

Расследованием, произведенным простым термическим и дифференциальным анализом над двугидратированным хлоридом меди [2], установлено, что при нагревании две молекулы воды теряются, не проходя через фазу моногидрата.

Магнитное поле в 20 000 Г не оказывает никакого влияния на процесс дегидратации.

CONSIDÉRATIONS SUR LE MÉCANISME DE LA DÉHYDRATATION DU $CuCl_2.2H_2O$

(Résumé)

L'étude, faite à l'aide de l'analyse thermique simple et différentielle, sur la chlorure cuivrique bihydratée, indique que, lors du chauffage, les deux molécules d'eau se perdent simultanément sans passer par la phase de monohydrate. Un champ magnétique de 20 000 Gs n'exerce aucune influence sur le processus de déhydratation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 541.135.3 ; 669.268

STUDIUL DEPOZITELOR DE CROM OBŢINUTE DIN SOLUŢIILE DE POLICROMAT [1])

DE

ŞT. IVĂŞCANU

1. Introducere

Studiul condiţiilor de obţinere a depozitelor de crom a constat dintr-un şir de cromări efectuate într-un dispozitiv de electroliză de formă dreptunghiulară. Anozii, în număr de doi, au fost confecţionaţi din plăcuţe de plumb aliat cu 8 % stibiu. Piesele supuse cromării au fost confecţionate din tablă de fier laminată, cu suprafaţa de 4 cm^2. Pregătirea lor pentru cromare a fost efectuată mai întîi printr-o polizare fină, apoi pe discuri de pîslă, cu pastă de oxid de fier şi oxid de crom. In continuare piesele au fost apoi degresate, decapate, uscate şi final cîntărite. Cromarea s-a realizat direct pe catodul de fier, fără alte straturi intermediare, timp de 15 min.

Compoziţia soluţiilor de policromat folosită în experienţe şi preparate în condiţiile arătate în [1] este redată în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. sol.	Conc. în CrO_3 g/l	Conc. în sodiu g/l	Proporţia de separare a sodiului %
1	67,5	109	56
2	111,6	102	59,4
3	145,1	98	61,7
4	207,0	80,9	68,3
5	236,0	73	72
6	308,0	67	79
7	348,0	62	82,1
8	403,0	55	85

2. Randamentul de curent

S-a studiat influenţa următorilor parametri asupra randa-

[1]) Extras din disertaţia intitulată *Contribuţii la obţinerea electrolitică a policromaţilor folosiţi în procesele de cromare*, susţinută la Institutul politehnic din Iaşi, în ziua de 20 iunie 1962, în vederea obţinerii titlului de candidat în ştiinţe tehnice.

mentului de curent: a) compoziţia electrolitului de cromare, redată în tabelul 1; b) densitatea de curent; 3) temperatura; d) conţinutul electrolitului in acid sulfuric; e) conţinutul electrolitului în zahăr.

Influenţa compoziţiei electrolitului asupra randamentului de curent este redată în curbele din fig. 1 şi 2.

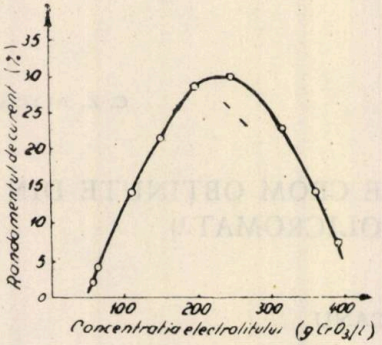


Fig. 1.— Variaţia randamentului de curent funcţie de concentraţia policromatului în CrO_3; D_c=50 A/dm^2, CrO_3/SO_4^{2-} = 100, t=20°C.

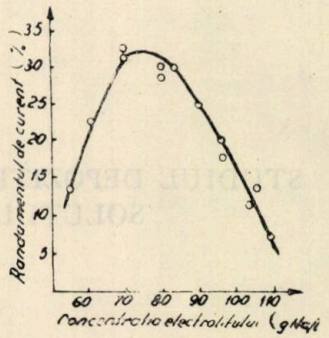


Fig. 2.— Variaţia randamentului de curent funcţie de conţinutul în sodiu al policromatului; D_c=50 A/dm^2, CrO_3/SO_4^{2-}=100, t=20°C.

Analiza acestora arată că pentru soluţia cu o concentraţie sub 100 g CrO_3/l, respectiv o concentraţie ridicată în sodiu (peste 100 g Na/l), randamentul de curent este mic, depunerile de crom sînt neuniforme iar efectele marginale sînt pronunţate. Prin modificarea compoziţiei soluţiei de policromat, în sensul creşterii concentraţiei în CrO_3, respectiv scăderii concentraţiei în sodiu, randamentul de curent creşte atingînd, pentru soluţia cu 200 ... 300 g CrO_3/l, valori maxime, de peste 30%. În mod corespunzător se schimbă şi aspectul cromului depus; depunerile devin din ce în ce mai uniforme, de culoare cenuşie, iar efectele marginale dispar cu totul.

Influenţa densităţii de curent, redată în fig. 3, a fost cercetată în intervalul de la 10 la 100 A/dm^2, cu soluţia de policromat de concentraţia următoare: CrO_3 — 300 g/l, CrO_3/SO_4^{2-} = 100, Na — 64 g/l, t = 20°C.

După cum rezultă din fig. 3, randamentul de curent creşte o dată cu densitatea de curent. Cele mai bune depuneri de crom se obţin la densităţi de curent cuprinse între 40 şi 80 A/dm^2.

Influenţa temperaturii asupra randamentului de curent a fost cercetată în intervalul 10°...40°C, iar soluţia de policromat folosită a avut aceaşi compoziţie ca şi la studiul densităţii de curent. Rezultatele experimentale obţinute sînt redate în fig. 4. Se poate observa din această curbă că randamentul de curent cel mai ridicat se obţine la temperaturi cuprinse între 10° şi 20°C.

Creşterea temperaturii influenţează negativ atît randamentul de curent cît şi calitatea depunerilor de crom.

Influența cantității de acid sulfuric asupra randamentului de curent este redată în fig. 5.

O mică cantitate de acid sulfuric, cuprinsă între 0,5 ... 4 g/l, permite obținerea randamentului maxim de curent. Compoziția electrolitului folosit a fost aceeași ca și în cazul studiului densității de curent și a temperaturii de cromare.

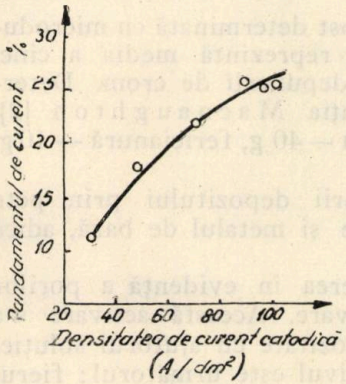


Fig. 3.— Variația randamentului de curent funcție de creșterea densității curentului.

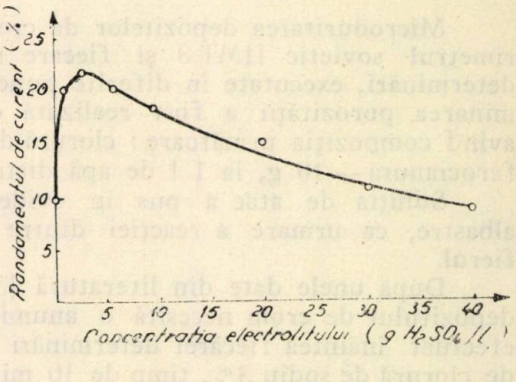


Fig. 5. — Variația randamentului de curent funcție de creșterea cantității de H_2SO_4 în electrolit.

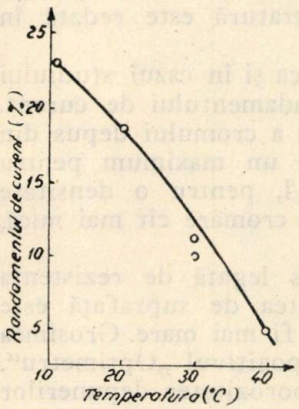


Fig. 4. – Variația randamentului de curent funcție de creșterea temperaturii de cromare.

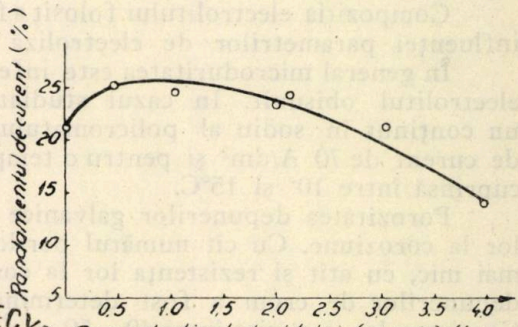


Fig. 6. — Variația randamentului de curent funcție de creșterea cantității de zahăr în electrolit.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

În sfîrșit, influența cantității de zahăr din electrolit asupra randamentului de curent a fost cercetată în intervalul 0 ... 4 g/l. Compoziția electrolitului folosit a fost aceeași ca și în cazurile precedente. Datele experimentale obținute sînt reprezentate în fig. 6.

O cantitate mică de zahăr în electrolit (1 g/l) are ca efect o creștere de aproximativ 5% a randamentului de curent. Creșterea în continu-

are a cantităţilor de zahăr în electrolit, micşorează însă atît randamentul de curent, cu aproximativ 5...10%, cît şi calităţile depunerilor de crom.

3. Proprietăţile depunerilor de crom obţinute din soluţiile de policromat: microduritatea şi porozitatea

Microduritatea depozitelor de crom a fost determinată cu microdurimetrul sovietic ПМТ 3 şi fiecare valoare reprezintă media a cinci determinări, executate în diferite puncte ale depunerii de crom. Determinarea porozităţii a fost realizată cu soluţia Macnaughton [2], avînd compoziţia următoare: clorură de sodiu — 40 g, fericianură — 10 g, ferocianură — 10 g, la 1 l de apă distilată.

Soluţia de atac a pus în evidenţă porii depozitului prin pete albastre, ca urmare a reacţiei dintre soluţie şi metalul de bază, adică fierul.

După unele date din literatură [3] punerea în evidenţă a porilor depozitului de crom necesită o anumită activare. Această activare s-a efectuat înaintea fiecărei determinări de porozitate cu ajutorul soluţiei de clorură de sodiu 3%, timp de 10 min. Motivul este următorul: fierul devine pasiv în anhidrida cromică. În această stare el nu formează cu cromul cuplul galvanic sub acţiunea căruia ionii de fier trec în soluţie. Acest fapt împiedică formarea punctelor albastre.

Variaţia microdurităţii depunerilor de crom funcţie de compoziţia electrolitului, densitatea de curent şi de temperatură este redată în fig. 7, 8, 9.

Compoziţia electrolitului folosit a fost aceeaşi ca şi în cazul studiului influenţei parametrilor de electroliză asupra randamentului de curent.

În general microduritatea este inferioară celei a cromului depus din electrolitul obişnuit. În cazul studiat ea atinge un maximum pentru un conţinut în sodiu al policromatului de 90 g/l, pentru o densitate de curent de 70 A/dm^2 şi pentru o temperatură de cromare cît mai mică, cuprinsă între 10° şi 15°C.

Porozitatea depunerilor galvanice este strîns legată de rezistenţa lor la coroziune. Cu cît numărul porilor pe unitatea de suprafaţă este mai mic, cu atît şi rezistenţa lor la coroziune va fi mai mare. Grosimea depunerilor de crom a fost determinată cu dispozitivul „Optimetru". Grosimea lor a variat între 40...50 μ. În general porozitatea depunerilor de crom obţinute din electrolitul policromat este practic egală cu aceea a depunerilor de crom numite „lăptoase" şi obţinute din electrolitul obişnuit. Variaţia porozităţii depunerilor de crom funcţie de compoziţia electrolitului, densitatea de curent şi temperatură este redată în fig. 10, 11 şi 12.

Compoziţia electrolitului policromat folosit în studiul porozităţii a fost aceeaşi ca şi cea utilizată la studiul microdurităţii.

Pe măsura creşterii cantităţii de sodiu în electrolit, creşte şi numărul de pori. De asemenea, numărul lor pe unitatea de suprafaţă creşte odată cu densitatea de curent şi temperatura ajungînd pentru 20°C la un număr de 23 pori/cm^2.

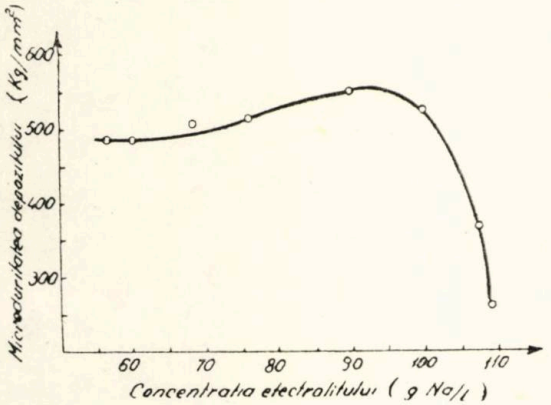


Fig. 7. — Variaţia microdurităţii depunerilor de crom funcţie de concentraţia în sodiu a electrolitului policromat.

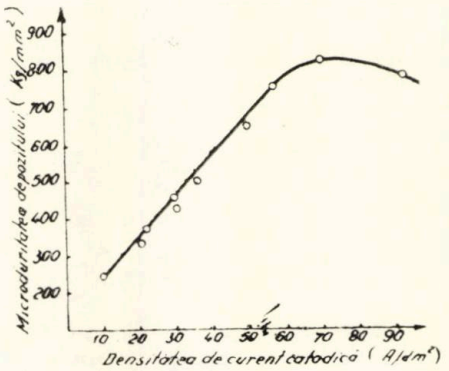


Fig. 8. — Variaţia microdurităţii depunerilor de crom funcţie de creşterea densităţii de curent.

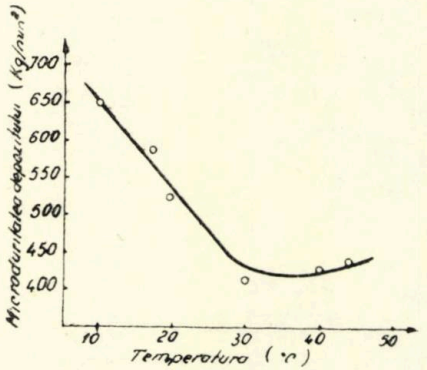


Fig. 9. — Variaţia microdurităţii depunerilor de crom funcţie de creşterea temperaturii de cromare.

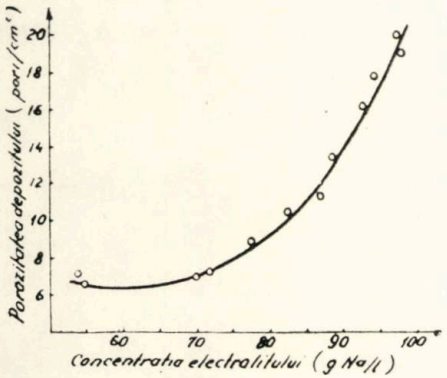


Fig. 10. — Variaţia porozităţii depunerilor de crom funcţie de concentraţia în sodiu a electrolitului policromat.

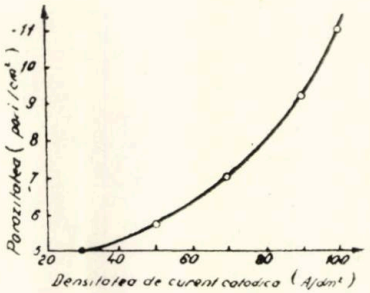


Fig. 11. — Variaţia porozităţii depunerilor de crom funcţie de creşterea densităţii curentului.

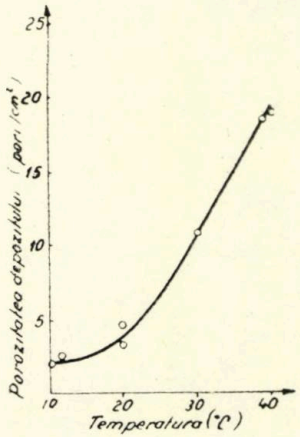
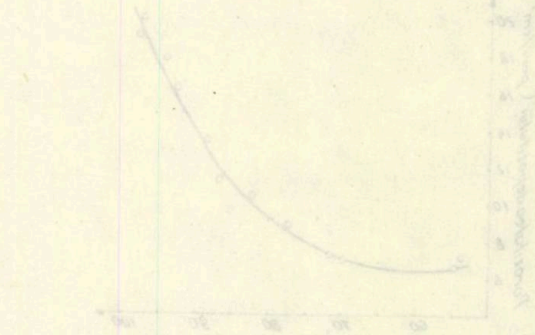


Fig. 12. — Variaţia porozităţii depunerilor de crom funcţie de creşterea temperaturii de cromare.



4. Capacitatea de dispersie a electrolitului policromat, obținut prin electroliza cromatului de sodiu

Capacitatea de dispersie a unui electrolit este un factor foarte important în realizarea depunerii galvanice. Ea depinde de o serie de factori ce intervin în procesul de elect oliză (densitatea de curent, compoziția electrolitului, poziția catodului, distanța anod-catod etc.) [4]. Capacitatea de dispersie se definește de către Haring și Blum [5] ca raportul dintre distribuția primară (K) și distribuția reală a curentului electric (K'). Deci capacitatea de dispersie va fi egală cu:

$$\text{C. D.}\% = [(K - K')/K]\,100.$$

Practic, valoarea capacității de dispersie se poate determina fie cu formula de mai sus, în care: K' — raportul dintre cantitățile de metal depuse în două puncte ale catodului, la distanțe diferite de anod, iar K — raportul distanței dintre anod și cele două puncte considerate, fie pe baza măsurătorilor de potențial catodic în cele două puncte considerate (apropiat și depărtat), anume:

$$\text{C. D.}\% = 100\left\{1 - (\eta_a/\eta_d)\left[1 - (e_d - e_a)/E_d\right]\right\},$$

în care: η_a și η_d — randamentele de curent în punctele apropiat și depărtat, iar E_d — căderea de tensiune între anod și punctul îndepărtat.

Pentru soluția de policromat folosită în cromare (de aceeași compoziție ca și la studiul microdurității și porozității) a fost studiată variația capacității de dispersie pentru valori ale densității de curent cuprinse între 30 și 100 A/dm².

Datele experimentale sînt trecute în fig. 13.

Din această figură rezultă că capacitatea de dispersie crește o dată cu densitatea de curent și atinge valoarea cea mai ridicată (de 15%) pentru densități de curent cuprinse între 85 și 100 A/dm².

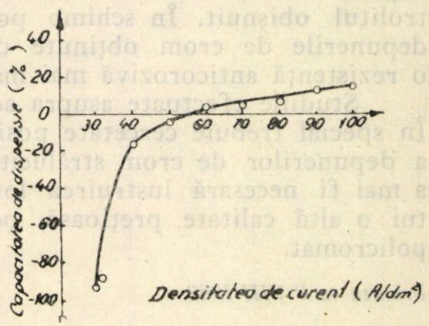


Fig. 13. — Variația capacității de dispersie a electrolitului policromat funcție de creșterea densității curentului.

5. Concluzii

Prezenta lucrare aduce o contribuție referitoare la posibilitățile de preparare și utilizare a unui nou electrolit pentru cromare — electrolitul policromat — obținut prin electroliza cromatului de sodiu.

Importanța acestui studiu rezultă, în mod special, din faptul că electrolitul policromat permite obținerea unor randamente de curent mult mai ridicate comparativ cu ceilalți electroliți folosiți în cromarea electrolitică.

Din datele experimentale obținute reiese că acest electrolit poate fi aplicat în practica industrială.

Din cercetările întreprinse cu privire la obţinerea şi utilizarea electrolitului policromat s-au făcut precizări cu privire la:

a) Fenomenele anodice şi catodice care au loc atît la electroliza cromatului cît şi a bicromatului de sodiu, care sînt în esenţă aceleaşi. Astfel, la anod, prin descompunerea apei are loc degajarea oxigenului şi simultan transformarea ionilor cromici în bi-, tri- sau tetracromici prin reacţia de polimerizare. La catod are loc, ca proces predominant, separarea sodiului cu formarea amalgamului.

b) Condiţiile optime de formare a soluţiilor de policromat prin cercetarea influenţei următorilor parametri: densitatea de curent, concentraţia soluţiei în cromat de sodiu, temperatura, timpul de electroliză.

c) Stabilirea condiţiilor optime de folosire a soluţiilor de policromat respective, în procesele de cromare, prin cercetarea influenţei cîtorva parametri asupra randamentului de curent şi asupra unor proprietăţi ale depozitelor de crom şi anume: concentraţia policromatului în anhidridă cromică, respectiv în sodiu, temperatura de cromare, densitatea de curent, conţinutul policromatului în acid sulfuric, conţinutul policromatului în zahăr.

Despre proprietăţile depozitului de crom obţinute din electrolitul policromat şi anume, microduritatea şi porozitatea, se pot spune următoarele: microduritatea arată valori mai mici, în medie cu 200 ... 300 kg/mm^2, faţă de valorile microdurităţilor depozitelor de crom obţinute din electrolitul obişnuit. În schimb porozitatea este mai mică, comparativ cu depunerile de crom obţinute din acelaşi electrolit, ceea ce le conferă o rezistenţă anticorozivă mai mare.

Studiile efectuate asupra acestui electrolit nu epuizează problema. În special trebuie cercetate posibilităţile de obţinere, din acest electrolit, a depunerilor de crom strălucitoare, direct din baia de electroliză, fără a mai fi necesară lustruirea lor ulterioară. Aceasta, desigur ar constitui o altă calitate preţioasă, pe lîngă celelalte calităţi ale electrolitului policromat.

Primită la 8 VIII 1962

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Ivăşcanu Şt., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII** (**XII**), *1—2*, pp. 129—140.
2. Macnaugthon P., Trans. Farad. Soc., 1930, **26**, p. 465.
3. Петрова О. А., *Теория и практика электролитического хромирования*, Изд. АН, М., СССР, 1957.
4. *** Galvano, 1959, *273*, p. 459.
5. Haring H. E., Blum W. N., Trans. Am. El. Soc., 1923, **44**, p. 313.

ИЗУЧЕНИЕ ХРОМОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПОЛИХРОМАТНЫХ РАСТВОРОВ

(Резюме)

Изучается влияние отдельных параметров — состав электролита, плотность тока, температура и др. — на выход тока в процессе электролитического хромирования, используя в качестве электролита растворы полихромата (полученные путем электролиза

хромата натрия) различного состава. Изучаются также свойства хромовых отложений в отношении пористости. Этим электролитом получаются завышенные значения выхода тока (35%) по сравнению с другими электролитами. Твердость хромовых отложений оказалась ниже, в среднем, на 200...300 кг/мм², а пористость меньше по сравнению с хромовыми отложениями, полученными обычными электролитами хроматирование ($CrO_3+H_2SO_4$).

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Изменение выхода тока в зависимости от концентрации полихромата в перерасчете CrO_3; $D_c = 50$ А/дм², $CrO_3 / SO_4^{2-} = 100$, $t = 20°C$.

Рис. 2. — Изменение выхода тока в зависимости от содержания натрия полихромата; $D_c = 50$ А/дм², $CrO_3 / SO_4^{2-} = 100$, $t = 20°$ С.

Рис. 3. — Изменение выхода тока в зависимости от увеличения плотности тока.

Рис. 4. — Изменение плотности тока в зависимости от увеличения температуры хромирования.

Рис. 5. — Изменение выхода тока в зависимости от увеличения количества H_2SO_4 в электролите.

Рис. 6. — Изменение выхода тока в зависимости от увеличения количества сахара в электролите.

Рис. 7. — Изменение микротвердости хромовых отложений в зависимости от концентрации натрия в полихроматном электролите.

Рис. 8. — Изменение микротвердости хромовых отложений в зависимости от повышения плотности тока.

Рис. 9. — Изменение микродвердости хромовых отложений в зависимости от температуры хромирования.

Рис. 10. — Изменение пористости отложений хрома в зависимости от концентрации натрия в полихроматном электролите.

Рис. 11. — Изменение пористости хромовых отложений в зависимости от повышения плотности тока.

Рис. 12. — Изменение пористости хромовых отложений в зависимости от температуры хромирования.

Рис. 13. — Изменение дисперсной способности полихроматного электролита в зависимости от плотности тока.

ÉTUDE DES DÉPÔTS DE CHROME OBTENUS PAR L'UTILISATION DES SOLUTIONS DE POLYCHROMATE

(Résumé)

On étudie l'influence des certains paramètres, à savoir : la composition de l'électrolyte, la densité de courant, la température etc., dans le processus du chromage électrolytique, en utilisant les solutions de polychromate, de composition variable. On recherche les propriétés des dépôts de chrome quant à la microdureté et la porosité.

Les avantages obtenus en utilisant ces électrolytes sont : des rendements en courant élevés, une dureté convenable et une porosité réduite.

Explication des figures

Fig. 1. — Variation du rendement en courant par rapport à la concentration du polychromate CrO_3; $D_c = 50$ A/dm², $CrO_3/SO_4^{2-} = 100$, $t = 20°$ C.

Fig. 2. — Variation du rendement en courant par rapport à la concentration du polychromate en natrium; $D_c = 50$ A/dm², $CrO_3/SO_4^{2-} = 100$, $t = 20°C$.

Fig. 3. — Variation du rendement en courant par rapport à la densité de courant.

Fig. 4. — Variation du rendement en courant par rapport à la température de chromage.

Fig. 5. — Variation du rendement en courant par rapport à la quantité de H_2SO_4 en électrolyte.

Fig. 6. — Variation du rendement en courant par rapport à la quantité de sucre en électrolyte.

Fig. 7. — Variation de la microdureté des dépôts de chrome par rapport à la concentration du polychromate en natrium.

Fig. 8. — Variation de la microdureté das dépôts de chrome par rapport à la densité de courant.

Fig. 9. — Variation de la microdureté des dépôts de chrome par rapport à la température de chromage.

Fig. 10. — Variation de la porosité des dépôts de chrome par rapport à la concentration du polychromate en natrium.

Fig. 11. — Variation de la porosité des dépôts de chrome par rapport à la densité de courant.

Fig. 12. — Variation de la porosité des dépôts de chrome par rapport à la température de chromage.

Fig. 13. — Variation de la capacité de pénétration de l'électrolyte polychromate par rapport à la densité de courant.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 661.321.3

CONTRIBUŢII LA PROBLEMA VALORIFICĂRII SOLUŢIILOR REZIDUALE DE LA FABRICILE DE SODĂ CALCINATĂ

DE

CORNELIA LEONTE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

La fabricarea sodei amoniacale, în condiţiile tehnologice actuale, rezultă o soluţie reziduală care conţine 30% din sodiul existent în materia primă şi întreaga cantitate de clor sub formă de cloruri de calciu şi sodiu. Pentru fiecare tonă de sodă rezultă circa 10 m^3 soluţie reziduală cu o concentraţie de 8%...12% $CaCl_2$. Datorită acestei situaţii valorificarea soluţiei reziduale constituie una din cele mai grele probleme în fabricarea sodei amoniacale [1]...[4], mai ales ţinînd seama de faptul că producţia uzinelor mari actuale este de aproximativ 2 000 t sodă/24 ore. Soluţiile posibile ale acestei probleme au făcut obiectul a numeroase discuţii în literatura de specialitate fără ca totuşi pînă în prezent să se ajungă la o soluţie unică, acceptabilă în condiţiile fabricării sodei calcinate, cînd utilizîndu-se materii prime de bază ieftine trebuie să se obţină un produs de consum în masă la un preţ scăzut de desfacere.

Soluţiile enunţate pentru această problemă se pot grupa în două mari categorii:

a) O primă categorie de soluţii, care sînt din ce în ce mai frecvent luate în discuţia specialiştilor, o constituie deschiderea liniei tehnologice a amoniacului şi îmbinarea fabricării sodei cu industria azotului, avînd ca producţie principală fabricarea îngrăşămintelor [5]. Această soluţie ar permite rezolvarea aproape absolută a problemei. O variantă a acestei soluţii au adoptat-o unele uzine din bazinul Donului care prelucrează complex materia primă şi livrează clorură de calciu şi clorură de amoniu pentru îngrăşăminte [4].

Aşa cum rezultă, aceste soluţii impun o modificare esenţială de structură a două mari tipuri de combinate şi anume combinatul de sodă şi combinatul de azot. Adaptarea unei asemenea soluţii impune un volum însemnat de cercetări tehnologice care nu sînt în întregime efectuate, urmate de un studiu economic riguros. Situaţia este îngreuiată şi de faptul că clorura de amoniu are, în prezent, o utilizare redusă ca îngrăşămînt. Din această cauză, pe linia indicată, problema a căpătat numai rezolvări locale.

b) A doua categorie reprezintă soluţii relative, care aduc modificări neesenţiale procedeului clasic şi care permit valorificarea mai rentabilă a soluţiei reziduale. Aici problema capătă următorul aspect:

În prezent clorura de calciu are un domeniu relativ restrîns de întrebuinţare. În perioada 1956...1960 volumul întregului consum de clorură de calciu a reprezentat numai 10%...15% din producţia posibilă [5]. Introducerea folosirii clorurii de calciu în diverse ramuri ale economiei este condiţionată de preţul scăzut al acesteia. Ca urmare

apare evidentă necesitatea măririi rentabilităţii operaţiilor de prelucrare a soluţiilor de clorură de calciu la produsul finit.

Căile preconizate în momentul de faţă pentru creşterea rentabilităţii procesului de obţinere a clorurii de calciu sînt : obţinerea concomitentă a unei cloruri de sodiu foarte pure care să poată fi utilizată la electroliza prin metoda cu catodă de mercur şi obţinerea în însăşi procesul de fabricaţie a sodei amoniacale a soluţiilor mai concentrate în clorură de calciu.

Obţinerea soluţiilor mai concentrate în clorură de calciu se poate realiza prin prepararea laptelui de var la stingerea varului cu soluţie reziduală sau prin înlocuirea laptelui de var cu var nestins.

În ceea ce priveşte stingerea varului cu soluţie reziduală există în literatură numai unele indicaţii. Astfel M. E. Pozin, în 1935, cercetînd viteza de stingere a varului în apă şi în soluţii de clorură de calciu, ajunge la concluzia că viteza de stingere se măreşte în cazul stingerii varului cu soluţii de clorură de calciu [6]. În 1959, E. Pischinger, utilizînd metoda termometrică folosită şi de M. E. Pozin, studiază viteza de stingere a varului în soluţii de: 1% ; 2% ; 5% şi 10% $CaCl_2$ şi separat, în soluţii de : 1% ; 2% ; 5% şi 10% NaCl. El stabileşte că în ambele cazuri, viteza procesului de stingere creşte şi că această creştere este mai mare în cazul utilizării soluţiilor de clorură de calciu [6].

Problema înlocuirii laptelui de var cu var (incontestabil mai eficientă) a comportat discuţii mai ample. G. I. Mikulin şi E. A. Poliakov arată că varul nestins reacţionează mult mai încet cu lichidul schimbătorului de căldură decît laptele de var sau varul stins [7]. V. P. Taraşkievici şi R. I. Baranova pun în evidenţă faptul ca prin înlocuirea laptelui de var cu var nestins se constată o accelerare a reacţiei dintre $Ca(OH)_2$ şi NH_4Cl [8]. S. Kaminski şi E. Pischinger arată că dacă se foloseşte var brut, cantitatea de amoniac degajată în amestecător creşte cu 20% [8].

În vederea elucidării problemelor menţionate, în lucrarea de faţă se studiază : a) viteza de stingere a varului, direct cu soluţie reziduală ; b) viteza reacţiei de eliberare a amoniacului la folosirea laptelui de var preparat cu soluţie reziduală şi la folosirea varului nestins.

2. Partea experimentală

În experimentare s-a folosit piatra de var din cariera Aleşd a fabricii de sodă Ocna-Mureş, care s-a ars în bulgări cu dimensiuni analoge unei sfere cu diametrul de 25...30 mm timp de 3 ore, la temperatura de 900°C. Varul ars s-a măcinat şi cernut prin sita cu 400 ochiuri/cm^2.

Pentru determinarea comparativă a vitezei de stingere a varului s-a folosit metoda termometrică. S-a efectuat stingerea în apă, în soluţie reziduală de compoziţie 7,8% $CaCl_2$ şi 4,17% NaCl şi în soluţii cu aceeaşi concentraţie în NaCl şi concentraţii crescînde în $CaCl_2$ şi anume : 10% ; 11,35% ; 12,52% ; 17,40% şi 27,6%. Pentru determinarea vitezei procesului de eliberare a amoniacului la fabricarea laptelui de var obţinut prin stingerea cu apă, stingerea cu soluţie reziduală cît şi a varului nestins, s-a adoptat instalaţia folosită de noi într-o lucrare anterioară [9]. Reacţia se realizează într-un balon cu trei gîturi prevăzut cu termometru, agitator şi refrigerent ascendent. Balonul se introduce într-un termostat care permite menţinerea constantă a temperaturii de lucru, cu o precizie de $\pm$ 0,5°C. Se lucrează cu 300 ml soluţie avînd compoziţia : 136,8 g/l NH_4Cl şi 76,8 g/l NaCl. Varul s-a adăugat sub forma laptelui de var cu o concentraţie ce varia în jur de 240 g/l, într-o

serie de experienţe, şi sub forma varului măcinat, în altă serie de experienţe.

Pentru determinarea conţinutului în oxid de calciu din var s-a utilizat o metodă analogă metodei de determinare a oxidului de calciu caustificabil, folosită în lucrările precedente [9], [10]. Determinarea se efectuează în aceeaşi instalaţie, cu aceeaşi cantitate de soluţie de o aceeaşi compoziţie, cantitatea de var adăugată reprezentînd numai 25%...30% din cantitatea stoichiometrică. În felul acesta se crează condiţiile pentru consumul cît mai complet al oxidului de calciu. Probele de soluţie pentru analiză se iau împreună cu precipitatul, se filtrează printr-un filtru de sticlă timp de 1 min şi se analizează. Se determină conţinutul în amoniac legat prin metoda cu formaldehidă şi conţinutul în clor total prin metoda Mohr (în proba în prealabil neutralizată).

Se consideră CaO reactiv pentru procesul de eliberare a amoniacului, oxidul de calciu corespunzător clorurii de amoniu consumate în timp de o oră:

$$\% \text{ CaO reactiv} = 28(a - bx)\,100/C,$$

unde: a — echivalenţi amoniac iniţial, b — echivalenţi clor iniţial, x — raportul dintre cantitatea de NH_3 legat şi cantitatea de clor totală în momentul considerat. C — grame var luate în lucru.

În probele propriu-zise cantitatea de var s-a calculat pe baza conţinutului în oxid de calciu reactiv, considerînd că reacţionează întreaga cantitate de clorură de amoniu.

Cu aceleaşi metode analitice s-a determinat şi gradul de transformare al clorurii de amoniu.

3. Rezultatele experimentale

a) *Stingerea varului.* Rezultatele obţinute la stingerea varului cu apă şi soluţii reziduale de diverse compoziţii sînt redate în fig. 1. În ordonată este indicată creşterea temperaturii faţă de cea iniţială, păstrată constantă în toate determinările, iar în abscisă timpul.

Din această figură se observă o creştere apreciabilă a vitezei de stingere a varului în cazul utilizării, pentru stingere, a soluţiilor reziduale de diferite concentraţii în clorură de calciu, faţă de viteza stingerii în apă, deoarece scade durata de atingere a temperaturii maxime.

Deşi concentraţia în clorură de calciu creşte relativ uniform, durata de atingere a temperaturii maxime scade apreciabil pentru soluţiile de 10% şi 11,35% $CaCl_2$, scade foarte puţin pentru soluţia de 12,5% $CaCl_2$ şi creşte pentru soluţiile cu concentraţii cuprinse între 15% şi 27,6% $CaCl_2$.

Pentru a evidenţia acest fapt s-a trasat în fig. 2 curba care pune în evidenţă dependenţa între durata de atingere a temperaturii maxime şi concentraţia în clorură de calciu.

Viteza de stingere fiind invers proporţională cu durata de atingere a temperaturii maxime, rezultă că la stingerea varului cu soluţii reziduale viteza procesului creşte, atingînd un maxim, apoi scade. Vitezele mari de stingere vor fi corespunzătoare maximului, respectiv concentraţiilor cuprinse între 11%...14% $CaCl_2$. Viteza de stingere în soluţia

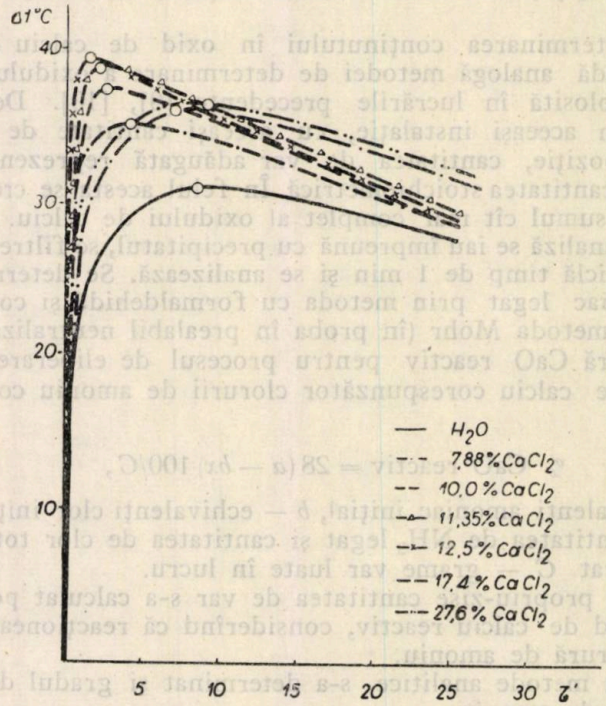


Fig. 1. — Viteza comparativă de stingere a varului în apă şi soluţii reziduale de diverse compoziţii.

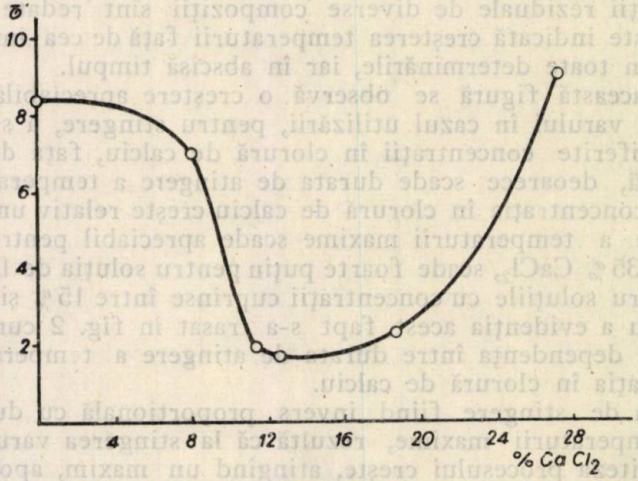


Fig. 2. — Dependenţa dintre durata de atingere a temperaturii maxime şi concentraţia în clorură de calciu.

saturată 4,17% NaCl și 27,6% $CaCl_2$, deși mai mică, este de același ordin cu viteza stingerii în apă.

Aceste rezultate sînt în perfectă concordanță cu datele obținute de Pischinger [7], care determină viteza de stingere a varului în soluții de clorură de calciu și separat în soluții de NaCl.

Din cele de mai sus rezultă că utilizarea soluției reziduale la fabricarea laptelui de var determină o creștere apreciabilă a vitezei acestui proces.

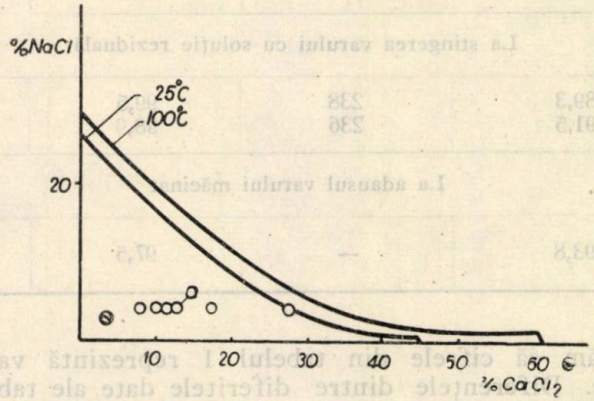


Fig. 3. — Diagrama de echilibru a sistemului $NaCl-CaCl_2-H_2O$.

Întocmindu-se bilanțul de materiale al distilatorului se observă că la stingerea cu soluție reziduală concentrația soluției finale în clorură de calciu nu crește considerabil și anume, în exemplul considerat de noi, de la 12% la 13%.

Reprezentînd punctul figurativ al acestei soluții (*a*) pe diagrama sistemului ternar $NaCl-CaCl_2-H_2O$, se constată că sistemul, chiar după stingere cu soluție reziduală, se află în domeniul de separare al clorurii de sodiu și destul de departe de curba de echilibru (fig. 3).

Deci dacă în procesul industrial se efectuează stingerea varului cu soluție reziduală, fără nici o altă modificare a schemei actuale, se obține o creștere importantă a capacității de producție a tobei de stingere a varului. În afară de aceasta, se obține și o creștere a concentrației clorurii de calciu în soluția reziduală.

b) *Viteza procesului de eliberare a amoniacului.* Cu ajutorul metodei menționate s-a studiat viteza de transformare a clorurii de amoniu pentru temperaturile de 90°C și 40°C. Valorile obținute sînt indicate în tabelul 1.

Se constată că în condițiile adăugării CaO reactiv întreaga cantitate de clorură de amoniu reacționează cu oxidul de calciu. Calculul cantității de var după conținutul în oxid de calciu reactiv, arată că se înlătură în mare măsură, influența calității varului asupra cineticii procesului

Tabelul 1

t °C	CaO reactiv %	g CaO/l	Gradul de transformare a NH_4Cl	
			3′	7′
La stingerea varului cu apă				
90	89,3	238	98,8	99,6
40	91,5	233	100,1	99,6
La stingerea varului cu soluţie reziduală				
90	89,3	238	99,5	99,7
40	91,5	236	98,9	99,3
La adausul varului măcinat				
90	93,8	—	97,5	98,6

Menţionăm că cifrele din tabelul 1 reprezintă valorile medii a cîtorva probe. Diferenţele dintre diferitele date ale tabelului sînt de ordinul diferenţelor dintre probele paralele, deci de ordinul erorilor de analiză.

Datele din tabel arată că în cazul stingerii cu apă, al stingerii cu soluţii reziduale şi chiar în cazul adausului de var măcinat, transformarea clorurii de amoniu se realizează, în aproximativ 3 min. Aceste date confirmă datele publicate de V. P. Taraşkievici, R. I. Baranova şi S. Kaminski şi E. Pischinger [8] infirmînd, în acelaşi timp, părerea expusă de G. I. Mikulin şi E. A. Poliakov [7].

Rezultă că se pot obţine concentraţii mult mai ridicate în clorură de calciu direct în procesul sodei amoniacale, numai dacă se introduce var măcinat în amestecător. Cercetările ulterioare vor trebui să se îndrepte pe linia concepţiei construcţiei economice a aparatului necesar.

4. Concluzii

a) S-a cercetat comparativ viteza de stingere a varului în apă şi în soluţii reziduale, cu concentraţii crescînde în $CaCl_2$. S-a arătat că viteza de stingere a varului în soluţia reziduală este mai mare decît în apă, la creşterea conţinutului în $CaCl_2$ din soluţia reziduală viteza de stingere creşte, trecînd printr-un maxim pentru valoarea de 11%...14% $CaCl_2$.

b) S-a cercetat viteza procesului de eliberare a amoniacului la folosirea laptelui de var stins cu apă, cu soluţie reziduală şi la adausul varului măcinat. S-a constatat că viteza procesului de eliberare a amoniacului nu scade în cazul parametrilor analizaţi.

c) Din datele existente în literatură și din cele obținute rezultă că folosirea soluției reziduale pentru stingerea varului mărește mult capacitatea de producție a aparatului, fără să mărească esențial concentrația în $CaCl_2$.

Pentru mărirea concentrației $CaCl_2$ din soluția reziduală singura soluție actuală este introducerea varului măcinat în amestecător.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de industrii anorganice,
Laboratorul de tehnologia substanțelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Те-Пан-Хо, *Производство соды*, Госхимиздат, М., 1949.
2. Чернов В. Ф., *Производство калцинированной соды*, Госхимиздат, М., 1956.
3. Максиута В. И., Ж. всесоюз. хим. общ. им. „Д. И. Менделеева", 1961, **6**, *5*, стр. 517—523.
4. Bukovski A. M., Chemik, 1961, **14**, *3*, pp. pp. 92—95.
5. Михайлов К. Ф., Хим. пром., 1956, *7*, стр. 391.
6. Pischinger E., Kaminski S., Przemysl Chemiczny, 1959, **38**, *2*, p. 97.
7. Mikulin G. I., Poleakov E. A., *Distilarea in industria sodei*, I.D.T., Buc. 1958, (trad. din l. rusă).
8. Kaminski S., Pischinger E., Przemysl Chemiczny, 1960, **39**, *12*, p. 759.
9. Calistru C., Leonte C., Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI** (**X**), *3—4*, p. 106.
10. — Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII** (**XI**), *1—2*, p. 117.

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОСТАТОЧНЫХ РАСТВОРОВ АММИАЧНО-СОДОВЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

(Резюме)

Изучена скорость гашения извести в остаточных растворах полученных в аммиачно-содовых промышленных предприятиях, а также и скорость выделения аммиака в том же процессе.

Установлено, что скорость гашения извести в остаточных растворах большая чем в воде и, что в растворах с увеличенной концентрацией хлорида кальция скорость достигает максимум при концентрации в 11%...14%.

Автор приходит к выводу, что использование остаточных растворов для гашения извести намного увеличивает производительность установки, без заметного повышения концентрации $CaCl_2$.

Единственной современной возможностью повысить концентрацию $CaCl_2$ является введение измельченной негашеной извести с смеситель.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Сравнительная скорость гашения извести водой и остаточными растворами различного состава.

Рис. 2. — Зависимость длительности достижения максимальной температуры от концентрации хлорида кальция.

Рис. 3. — Диаграмма равновесия в системе $CaCl_2$—NaCl—H_2O.

CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE LA VALORIFICATION DES SOLUTIONS RÉSIDUELLES OBTENUES AUX FABRIQUES DE SOUDE AMMONIACALE

(Résumé)

On a étudié : a) la vitesse d'éteindre la chaux dans les solutions résiduelles des fabriques de soude ammoniacale et b) la vitesse d'éliberation de l'ammoniaque dans le même processus.

On a constaté que la vitesse d'éteindre la chaux dans les solutions résiduelles est plus grande que dans l'eau et que dans les solutions de concentrations croissantes en $CaCl_2$ la vitesse passe par un maximum pour une concentration de 11%...14% $CaCl_2$.

On aboutit à la conclusion que l'utilisation des solutions résiduelles pour éteindre la chaux augmente beaucoup la capacité de production de l'appareil considéré, sans augmenter esentiellement la concentration en $CaCl_2$.

Explication des figures

Fig. 1. — La vitesse comparative d'éteindre la chaux dans l'eau et dans des solutions résiduelles de diverses compositions.

Fig 2. — Dépendance de la durée d'atteindre la température maximum en fonction de la concentration en chlorure de calcium.

Fig. 3. — Le diagramme d'équilibre $CaCl_2$—NaCl—H_2O.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 66.013.5

ANALIZA INTENSIFICĂRII PROCESELOR DE TRANSFER ÎN CURGEREA PELICULARĂ, CU AJUTORUL RUGOZITĂŢII

DE

TH. SĂVEANU, I. IBĂNESCU şi MARIANA VASILIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9–11 noiembrie 1962

1. Introducere

În unele studii anterioare [1], [2] am pus în evidenţă influenţa rugozităţii create artificial, asupra absorbţiei unui gaz uşor solubil în curgerea peliculară şi prin umplutură.

Am găsit că rugozitatea are ca efect creşterea substanţială a transferului de masă, cu o mărire neesenţială a consumului de energie.

În continuare ne ocupăm în această lucrare de studiul posibilităţii intensificării proceselor de transfer, folosind în acest scop acţiunea rugozităţii în absorbţia unui gaz greu solubil şi în schimbul de căldură. Spre deosebire de absorbţia gazelor uşor solubile, la absorbţia gazelor greu solubile rezistenţa la transferul de masă se manifestă în cea mai mare măsură în faza lichidă. Acest fapt permite să se tragă concluzii mai complete asupra influenţei rugozităţii în absorbţie, deoarece rugozitatea acţionează în acest caz direct în faza lichidă.

Rugozitatea acţionează în următoarele moduri: a) măreşte grosimea peliculei de lichid, a) creează turbulenţă în interiorul lichidului, c) măreşte suprafaţa interfeţei ca urmare a creşterii grosimii filmului şi a schimbării caracteristicii valorilor, d) influenţează direct faza gazoasă prin crearea de turbulenţă în stratul de gaz de la interfaţă.

În cele ce urmează vom studia influenţa acestor factori.

2. Partea teoretică

a) *Creşterea grosimii filmului de lichid*

Viteza de curgere a unui film de lichid pe un perete vertical este influenţată de forţa de adeziune solid-lichid şi de frecarea lichid-gaz. Frecarea lichid-gaz devine importantă atunci cînd gazul circulă pe suprafaţa lichidului cu viteze mari.

Studii experimentale [3] au arătat că amplitudinea minimă a valurilor rămîne constantă, iar amplitudinea maximă a lor creşte, dar că totuşi grosimea medie δ a peliculei de lichid se poate admite că rămîne constantă pe înălţimea tubului.

În aceste condiţii viteza peliculei de lichid în curgerea izotermă pe un perete vertical (tub) nu depinde practic de înălţimea peretelui vertical.

Introducerea rugozităţii are ca efect micşorarea vitezei lichidului şi respectiv creşterea grosimii peliculei la acelaşi debit de lichid. În acest caz este menţionat faptul că valoarea numărului $\mathcal{R}e$ rămîne aceeaşi, deşi prezenţa rugozităţii modifică unele caracteristici ale curgerii, care favorizează sensibil transferul de căldură şi de masă.

În condiţiile uzuale de lucru se poate aplica cu suficientă precizie ecuaţia continuităţii pentru pelicula de lichid, sub forma:

$$G_s = \pi d \delta_1 v_1 \gamma_1 = \pi d \delta_2 v_2 \gamma_2,$$

în care: G_s — debitul de lichid (kg/s), iar δ_1, v_1 şi δ_2, v_2 — grosimea şi respectiv viteza la curgerea pe un perete neted şi cu rugozitate.

Înlocuind produsele $v_1 \gamma_1$ şi $v_2 \gamma_2$ din relaţia de mai sus în expresia de calcul a numărului $\mathcal{R}e$, în care se admite de obicei pentru pelicula de lichid $d_{ech} = 4\delta$, se obţine:

$$\mathcal{R}e_l = 4\delta_1 G_s/(\mu g \pi d \delta_1) = 4\delta_2 G_s/(\mu g \pi d \delta_2) = 4G_s/(\mu g \pi d) = 4W/(\mu g) = \text{const.},$$

în care W este dat în kg/m s.

Prin urmare valoarea numărului $\mathcal{R}e$ nu poate exprima în cazurile de mai sus variaţia caracteristicilor curgerii, care influenţează procesele de transfer.

Legea de creştere a grosimii peliculei de lichid datorită rugozităţii va fi dată în partea experimentală a lucrării.

b) *Rugozitatea creează turbulenţă în interiorul lichidului*

Prezenţa rugozităţii are ca efect deformarea liniilor de curent înainte şi după obstacol, deformare care conduce la variaţia vitezei lichidului şi la crearea de turbulenţă a cărei intensitate depinde de condiţiile de curgere.

Aprecierea cantitativă a creării de turbulenţă datorită rugozităţii poate fi făcută în mod indirect prin transferul de căldură între peretele solid pe care s-a realizat rugozitatea şi pelicula de lichid în curgere. Se consideră că se compensează efectul negativ asupra transferului datorit creşterii grosimii peliculei de lichid, cu efectul pozitiv cauzat de mărirea duratei de contact a fazelor.

Se neglijează aici efectul transferului de căldură între lichid şi faza gazoasă (în acest caz aer). Transferul de căldură lichid-aer se limitează prin evitarea evaporării introducînd sistemul într-un tub închis [4] şi lucrînd la temperaturi apropiate de temperatura camerii [5].

c) *Mărirea suprafeţei libere a lichidului datorită rugozităţii*

Ca urmare a îngroşării filmului creşte suprafaţa liberă a lichidului şi totodată se modifică forma geometrică a valurilor.

Faţă de forma geometrică a valurilor la curgerea peliculară a unui lichid pe un perete neted, studiată calitativ şi cantitativ de H. Brauer [3] şi Tailby şi Portalski [6], rugozitatea în curgerea peliculară introduce o mărire a suprafeţei datorită faptului că forma valurilor se apropie mai mult de o mişcare sinusoidală.

Punerea în evidenţă a măririi suprafeţei lichidului se poate face cu aproximaţie din grafic şi fotografii, şi mai exact prin încercări de absorbţie a unui gaz greu solubil (de exemplu CO_2), metodă propusă de noi şi folosită în această lucrare.

d) *Influenţa indirectă a rugozităţii asupra fazei gazoase*

Influenţa reciprocă a două faze în mişcare asupra transferului de masă a fost concretizată în ultimul timp în lucrările lui V. V. Kafarov [7], [8], care reprezintă influenţa reciprocă a fazelor sub forma factorului dinamic de stare a suprafeţei:

$$f = \psi\,[(L/G)^{2-m}\,(\gamma_g/\gamma_l)\,(\mu_l/\mu_g)^m].$$

Pe lîngă mărimile care determină valoarea factorului f, rugozitatea introdusă în pelicula de lichid exercită o mare influenţă asupra transferului de masă din faza gazoasă. Într-o lucrare anterioară [1] am arătat că în cazul absorbţiei unui gaz uşor solubil (amoniac în apă), la care rezistenţa principală la transferul de masă se află în faza gazoasă, introducerea rugozităţii în pelicula de lichid conduce la creşteri importante ale coeficientului de transfer de masă. Turbulenţa creată de rugozitate în interiorul peliculei de lichid are o influenţă neesenţială la absorbţia gazelor uşor solubile din cauză că rezistenţa la transferul de masă în faza lichidă este în acest caz neglijabilă.

Cauza creşterii coeficientului de transfer de masă o constituie în mai mică măsură mărirea suprafeţei de contact între faze şi în principal creşterea turbulenţei în filmul gazos de la interfaţă, prin schimbarea caracteristicilor valurilor.

Pentru studiul complet al influenţei indirecte a rugozităţii introduse în pelicula de lichid, asupra transferului de masă, la care rezistenţa principală este în faza gazoasă, sînt necesare încercări comparative cu gaze uşor şi greu solubile, pure şi în amestec cu aerul, la diferite valori ale numărului Re_g.

3. Partea experimentală

a) *Influenţa rugozităţii asupra creşterii grosimii peliculei de lichid*

La braţul unei balanţe tehnice s-a suspendat un tub de sticlă, închis la ambele capete, cu $d = 9{,}72$ mm şi $l = 790$ mm, respectiv cu o suprafaţă $S = 0{,}0241$ m². S-a determinat cantitatea de lichid reţinută pe tubul neted şi cu rugozitate, la diverse densităţi de stropire, prin cîntărire în timpul curgerii. Rugozitatea s-a creat prin înfăşurarea unui fir metalic în formă de spirală cu pasul egal cu lungimea de undă a lichidului [1], [2]. Rezultatele obţinute sînt redate în fig. 1 şi sînt descrise de ecuaţia:

$$W = 0{,}20 + 0{,}287d + W_h(1{,}9 + 5{,}5d)\,10^{-4}, \quad [\mathrm{kg/m^2}].$$

Eroarea este de 3%.

Pentru verificarea preciziei determinărilor s-au comparat valorile grosimii peliculei calculate din date experimentale şi cu ajutorul relaţiei:

$$\delta = \sqrt[3]{3\,W_s\,\mu_l/(\gamma^2 \sin\alpha)},$$

în cazul tubului neînfăşurat. S-a găsit o bună concordanţă între ambele valori.

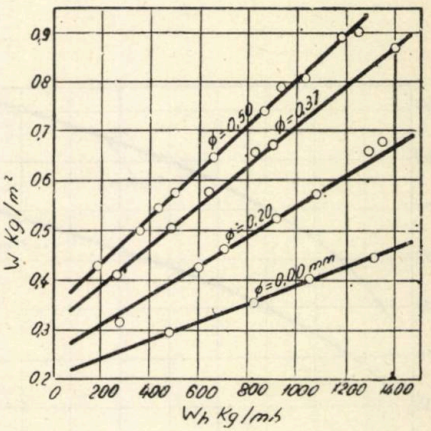


Fig. 1. — Cantitatea de apă reţinută W (kg/m²) în funcţie de W_h (kg/m h).

În fig. 2 sînt date valorile grosimii δ a peliculei de lichid funcţie de Re_l la fire avînd $d_{fir} = 0{,}2$; 0,37; 0,5 mm şi la tub neted (neînfăşurat).

Dreptele din fig. 2 sînt redate cu o eroare de 2,5% de ecuaţia:

$$\delta = 0{,}2 + 0{,}27d + Re_l(1{,}8 + 5{,}0d)\,10^{-4}.$$

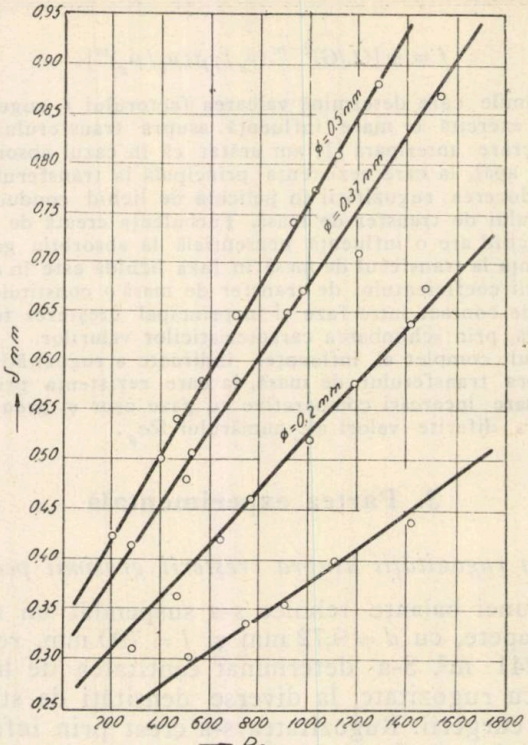


Fig. 2. — Variația grosimii δ a peliculei, în funcție de Re_l.

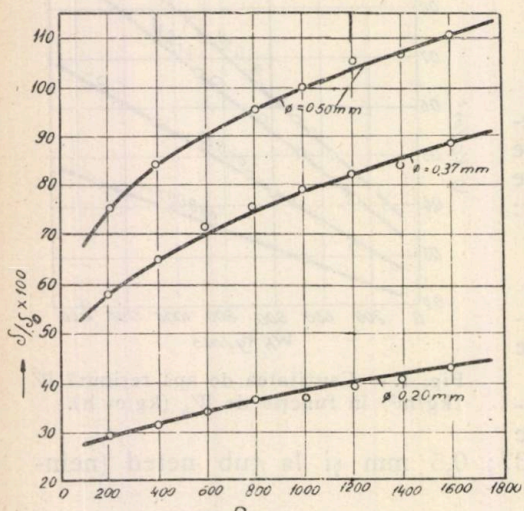


Fig. 3. — Variația procentuală $(\delta/\delta_0) \cdot 100$ a grosimii filmului, în funcție de Re_l.

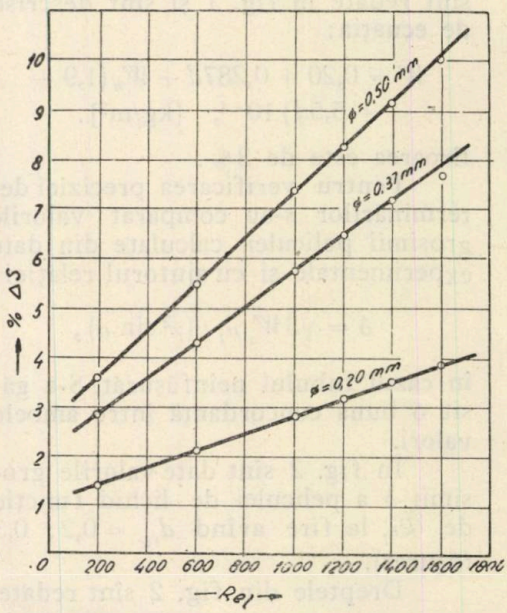


Fig. 4. — Variația procentuală ΔS a suprafeței lichidului, în funcție de R_{el}.

Din fig. 1 şi 2 rezultă că apa reţinută şi respectiv grosimea filmului se poate admite că variază liniar cu debitul de lichid, respectiv cu $\mathcal{R}e_l$, la o aceeaşi rugozitate, în limitele de experimentare.

Variaţia (în procente) a grosimii δ a peliculei de lichid în prezenţa rugozităţii, faţă de grosimea δ_0 a peliculei care curge pe perete neted, este redată în fig. 3.

Din fig. 2 şi 3 rezultă că grosimea peliculei de lichid creşte mult în prezenţa rugozităţii. Creşterile sînt cu atît mai mari cu cît diametrul firului care produce rugozitatea este mai mare. Valoarea maximă măsurată de noi este de 110% pentru $d_{fir} = 0{,}5$ mm.

Ar fi de aşteptat ca intensificarea transferului de căldură şi de masă să fie micşorată o dată cu mărirea grosimii filmului. Practic se constată că intensificarea creşte. Acest fapt se explică prin crearea de turbulenţă locală datorită rugozităţii şi prin mărirea duratei şi suprafeţei de contact între faze.

În fig. 4 este redată variaţia procentuală ΔS a suprafeţei libere a lichidului, datorită îngroşării filmului în prezenţa rugozităţii. Valoarea maximă a creşterii suprafeţei este de 10%.

Ecuaţia variaţiei procentuale ΔS a suprafeţei datorită îngroşării filmului de lichid este:

$$\Delta S = d\,(5{,}43 + 0{,}0093\,\mathcal{R}e_l),$$

cu o eroare maximă de 5%.

Îngroşarea peliculei datorită prezenţei în lichid a firului ce formează rugozitatea se neglijează, fiind cel mult de ordinul 1,5%...2%.

b) *Determinarea turbulenţei produsă de rugozitate în pelicula de lichid*

Se ştie că în curgerea peliculară, în zona valurilor se produce o amestecare datorită caracterului pulsatoriu al formării valurilor. H. Glaser [9] arată că W. Wilke a reuşit să pună în evidenţă amestecarea intensă din zona valurilor. Acesta a măsurat printr-un procedeu ingenios temperatura lichidului la diverse distanţe de peretele solid în experienţe cu transfer de căldură solid-lichid. A găsit că în zona valurilor temperatura este practic constantă.

Prezenţa rugozităţii în peliculă este de presupus că măreşte mai mult gradul de amestecare, prin crearea de turbulenţă şi în zona unde acţiunea valurilor este mică.

Pentru punerea în evidenţă a turbulenţei create de rugozitate în pelicula de lichid am efectuat încercări comparative de transfer de căldură între un perete neted şi rugos şi o peliculă de apă în curgere de sus în jos pe suprafaţa exterioară a unui tub de cupru. Căldura necesară pentru transfer era adusă de un curent de apă caldă care curgea în interiorul tubului, de jos în sus. Încercările s-au întreprins la diverse debite de lichid. Instalaţia pe care s-a experimentat este redată în fig. 5. Temperaturile celor două curente de apă la intrare au fost de 33,0° C şi respectiv 20,0° C.

Limitarea efectului de evaporare a apei de la suprafaţa peliculei s-a realizat prin introducerea tubului de cupru într-un tub de sticlă. Tubul de cupru avea $d_e = 10{,}0$ mm, $d_i = 8{,}0$ mm şi $l = 1\,000$ mm.

Aprecierea turbulenţei create de rugozitate s-a făcut prin calcularea coeficientului k de transfer de căldură din datele experimentale şi apoi stabilirea procentului de creştere a lui k în cazul prezenţei rugozităţii, faţă de pelicula de lichid fără rugozitate. În fig. 6 este redată creşterea procentuală Δk funcţie de $\mathcal{R}e_l$ la tub cu rugozitate dată de fire cu $d_{fir} = 0{,}1$; 0,2 şi 0,37 mm, în comparaţie cu valorile lui k pentru tub neted.

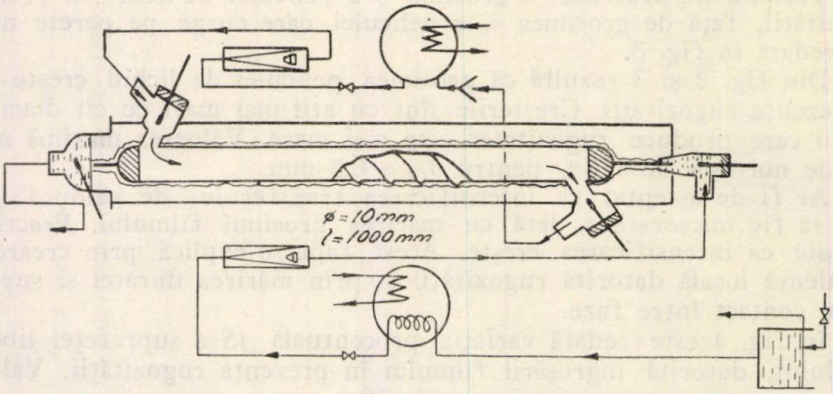


Fig. 5. — Schema instalaţiei de transfer de căldură.

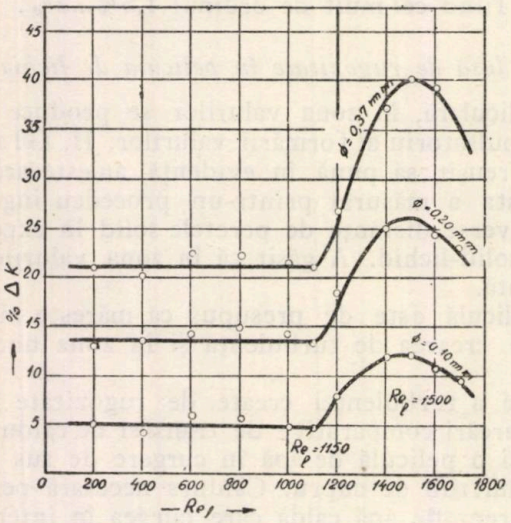


Fig. 6. — Variaţia procentuală Δk a coeficientului de transfer de căldură în funcţie de $\mathcal{R}e_l$.

Din fig. 6 rezultă că se poate admite că variaţia Δk este liniară pînă la $\mathcal{R}e_l \approx 1\,150$, după care creşterea are loc după o curbă care prezintă un maximum la $\mathcal{R}e_l = 1\,500$. Scăderea efectului de creştere a lui k la $\mathcal{R}e_l > 1\,500$ se explică prin apariţia turbulenţei la tubul neted şi prin aruncarea lichidului de pe tubul cu rugozitate datorită forţei centrifuge.

Aruncarea lichidului de pe tubul cu rugozitate este mult limitată la circulaţia unui gaz în contracurent.

Din fig. 6 rezultă că se obţine o creştere maximă $\Delta k = 40\,\%$ la un fir cu diametrul de 0,37 mm.

c) *Mărirea suprafeţei libere a lichidului datorită rugozităţii*

În cazul curgerii peliculare pe un perete vertical neted s-au întreprins încercări experimentale de verificare a relaţiilor stabilite pentru calculul măririi suprafeţei libere datorită valurilor. Rezultatele verifică-

rilor experimentale privind creşterea suprafeţei datorită valurilor sînt contradictorii [6]. Brauer indică o mărire a suprafeţei între 0,3% (la $\mathcal{R}e_l = 100$) şi 3% (la $\mathcal{R}e_l = 6700$), pe cînd Tailby şi Portalski dau măriri pînă la 150%.

Pentru determinarea măririi suprafeţei lichidului s-au utilizat metode prin măsurare de fotografii şi conductometrice.

Pentru stabilirea măririi suprafeţei peliculei de lichid datorită rugozităţii, în lucrarea de faţă am utilizat o metodă indirectă.

Principiul metodei folosite este următorul. S-a determinat coeficientul de transfer de masă k_{tr} prin absorbţie de CO_2 pur în apă care curgea ca peliculă pe un tub vertical. Apa avea temperatura de 20° C. Coeficientul k_{tr} s-a determinat pentru un tub neted şi pentru un tub cu rugozitate. Curentul de CO_2 se mişca cu o viteză mică ($\mathcal{R}e_g \cong 200$) pentru a elimina influenţa curgerii fazei gazoase asupra celei lichide.

Din valorile creşterii procentuale a coeficientului de transfer de masă Δk_{tr} s-au scăzut valorile corespunzătoare ale creşterii procentuale a coeficientului Δk de schimb de căldură între peretele solid şi pelicula de lichid. Diferenţele obţinute reprezintă mărirea suprafeţei peliculei de lichid, deoarece fenomenul de transfer de masă, în cazul absorbţiei de CO_2 (gaz greu solubil), exercită o influenţă neesenţială asupra cîmpului de forţe moleculare al apei în grosimea filmului. În cazul transferului de căldură starea de agitaţie moleculară se poate considera local constantă, deoarece temperatura variază local foarte puţin. Aşa cum s-a menţionat anterior, s-a limitat evaporarea apei de pe suprafaţa peliculei, respectiv schimbul de căldură lichid-gaz.

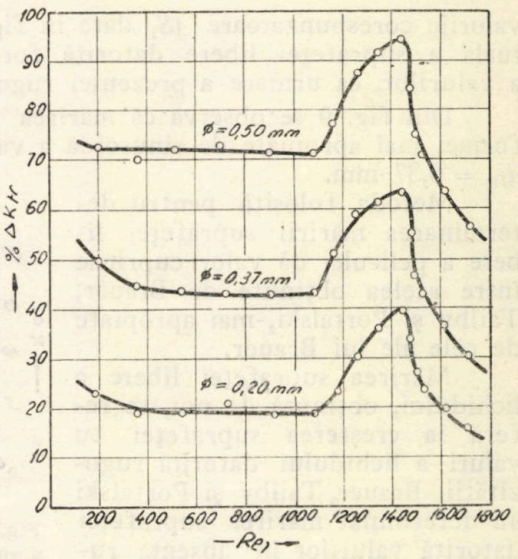


Fig. 7. — Variaţia procentuală Δk_{tr} a coeficientului de transfer de masă, în funcţie de $\mathcal{R}e_l$.

La mărirea coeficientului de transfer de masă k_{tr} a contribuit atît turbulenţa cît şi mărirea suprafeţei libere a peliculei de lichid, pe cînd la mărirea coeficientului k de transfer de căldură a contribuit numai turbulenţa creată de rugozitate, în timp ce suprafaţa peretelui tubului prin care s-a făcut schimbul de căldură a rămas constantă.

Ţinînd seama de cele expuse mai sus, diferenţa variaţiilor procentuale Δk_{tr} şi Δk reprezintă fidel mărirea suprafeţei libere a peliculei de lichid, datorită rugozităţii.

Schema instalaţiei folosite pentru determinarea coeficientului de transfer de masă a fost similară cu aceea dată într-o lucrare anterioară [1]. S-a folosit un tub de sticlă cu $d_e = 9{,}72$ mm şi $l = 790$ mm.

În fig. 7 este reprezentată variaţia procentuală Δk_{tr} a coeficientului de transfer de masă, funcţie de $\mathcal{R}e_l$, la diametre ale firului de: 0,2; 0,37 şi 0,5 mm.

Fig. 6 şi 7 confirmă [10] cu datele obţinute de la transferul de căldură şi de masă faptul că apariţia turbulenţei în faza lichidă, în prezenţa rugozităţii, are loc la $\mathcal{R}e \cong 1\,150$.

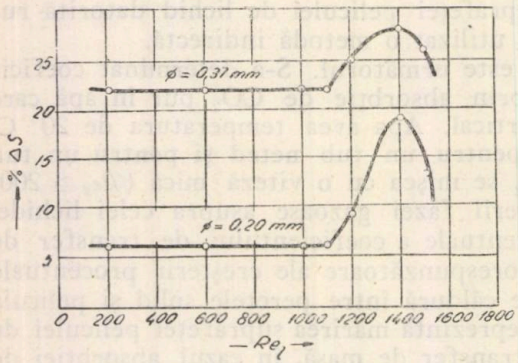


Fig. 8. — Variaţia procentuală $\Delta S' = \Delta k_{tr} - \Delta k$ în funcţie de $\mathcal{R}e_l$.

În fig. 8 sînt redate diferenţele procentuale dintre Δk_{tr} şi Δk în funcţie de $\mathcal{R}e_l$ şi $d_{fir} = 0{,}2$; 0,37 mm.

Aşa cum s-a arătat, aceste diferenţe reprezintă mărirea suprafeţei libere a peliculei de lichid $\Delta S' = \Delta k_{tr} - \Delta k$. Această mărire atinge valori maxime de 28% pentru $d_{fir} = 0{,}37$ mm.

În lucrare s-a stabilit creşterea procentuală $\Delta S'$ a suprafeţei libere a lichidului datorită îngroşării filmului în prezenţa rugozităţii. Scăzînd din valorile $\Delta S'$, date în în fig. 8, valorile corespunzatoare ΔS, date în fig. 4, se obţine creşterea procentuală a suprafeţei libere datorită formei mai apropiate de sinusoidă a valurilor, ca urmare a prezenţei rugozităţii (fig. 9).

Din fig. 9 se observă că mărirea procentuală a suprafeţei datorită formei mai apropiate de sinusoidă a valurilor este pînă la 20%, pentru $d_{fir} = 0{,}37$ mm.

Metoda folosită pentru determinarea măririi suprafeţei libere a peliculei dă valori cuprinse între acelea obţinute de Brauer, Tailby şi Portalski, mai apropiate de cele ale lui Brauer.

Mărirea suprafeţei libere a lichidului, obţinută de noi, se referă la creşterea suprafeţei cu valuri a lichidului datorită rugozităţii. Brauer, Tailby şi Portalski au determinat mărirea suprafeţei datorită valurilor în absenţa rugozităţii. Valorile obţinute de noi pot constitui o confirmare a rezultatelor obţinute de Brauer. În adevăr se poate demonstra printr-o construcţie geometrică, că nu se pot obţine valori ale creşterii suprafeţei lichidului mai mari ca 10%, în absenţa rugozităţii.

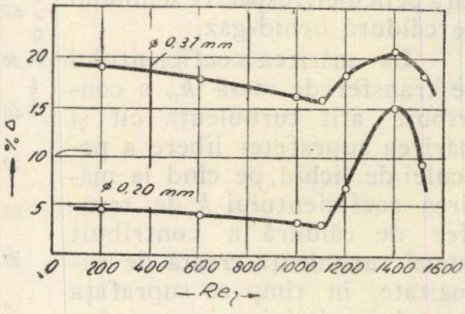


Fig. 9. — Variaţia procentuală $\Delta = \Delta S' - \Delta S$ a suprafeţei lichidului datorită formei mai apropiate de sinusoidă a valurilor, în prezenţa rugozităţii.

Scăderea creşterii procentuale Δ a suprafeţei libere a lichidului datorită formei mai apropiate de sinusoidă a valurilor, cu creşterea nu-

mărului Re pînă la 1 150, se explică prin faptul că valurile, la valori Re mici, reprezintă deformări neînsemnate ale suprafeţei lichidului la fiecare lungime de undă [5]. În aceste condiţii rugozitatea aşezată la lungimea de undă măreşte mult suprafaţa liberă a lichidului la valori mici ale numărului Re. Pe măsură ce numărul Re creşte, la curgerea pe perete neted suprafaţa liberă se măreşte datorită amplitudinii mai mari a valurilor. Introducerea rugozităţii are un efect relativ mai redus de mărire a suprafeţei lichidului.

La numere $Re > 1\,150$, Δ creşte ca urmare a schimbării caracterului curgerii (apariţia turbulenţei).

Comparînd variaţia procentuală globală a coeficientului de transfer de masă, pentru $d_{fir} = 0{,}37$ mm, cu suma variaţiilor procentuale parţiale cauzată de: mărirea suprafeţei datorită îngroşării filmului (fig. 4), forma mai apropiată de sinusoidă a valurilor datorită rugozităţii (fig. 9) şi mărirea gradului de turbulenţă datorită rugozităţii (fig. 6), se constată că rezultatele sînt foarte apropiate.

În acest mod au fost confirmate consideraţiile teoretice şi justeţea metodei de lucru folosite la stabilirea microcineticii fenomenului de transfer, precum şi a participării fiecăruia dintre factorii care influenţează acest fenomen.

În fig. 10 sînt reprezentate comparativ valorile variaţiilor procentuale globale şi parţiale în funcţie de Re_l.

Din fig. 10 se observă concordanţa bună care există între valorile curbei experimentale şi cele ale curbei calculate. Din această figură apare evident faptul că factorul care influenţează cel mai mult procesele de transfer îl constituie creşterea gradului de turbulenţă, după care urmează, în ordinea importanţei, suprafaţa liberă a lichidului şi în fine ceilalţi factori. Rezultă că rugozitatea, mărind gradul de turbulenţă şi suprafaţa de contact în curgerea peliculară, poate constitui un mijloc important de intensificare a proceselor de transfer în curgerea peliculară, care apare atît în coloanele cu pereţi udaţi cît şi în coloanele cu umplutură.

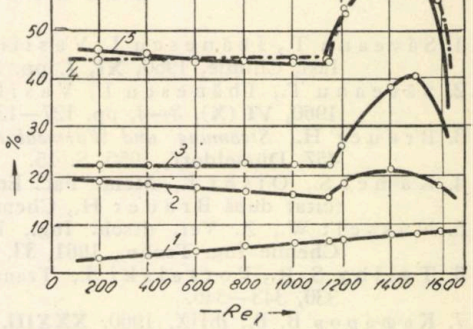


Fig. 10. — Variaţia procentuală individuală şi variaţia procentuală totală în funcţie de Re_l în procesele de transfer.

1—influenţa îngroşării filmului; *2*—influenţa creşterii suprafeţei libere prin formare de valuri de forme mai apropiate de sinusoidă; *3* — influenţa gradului de turbulenţă; *4* — curba rezultantă teoretică a curbelor *1*, *2*, *3*; *5* — curba rezultantă experimentală.

4. Concluzii

În lucrare s-au pus bazele unei metode de intensificare a fenomenelor de transfer de căldură şi de masă prin acţionarea în faza lichidă cu ajutorul rugozităţii artificiale.

S-au stabilit factorii principali (grosimea peliculei de lichid, turbulenţa în interiorul lichidului, suprafaţa liberă a lichidului, interacţiunea fazei lichide cu faza gazoasă) care contribuie la intensificarea proceselor de transfer ca rezultat al acţiunii rugozităţii.

Utilizînd transferul de căldură şi de masă s-a propus o metodă de analiză cantitativă a influenţei exercitate de fiecare factor care participă la intensificarea proceselor de transfer.

Influenţa totală şi individuală, a fiecărui factor, este ilustrată cantitativ în fig. 10 (pentru o rugozitate de 0,37 mm) din care rezultă că la maximum turbulenţa intensifică transferul de masă cu 61%, creşterea suprafeţei libere datorită formei mai apropiate de sinusoidă a valurilor cu 30% şi creşterea suprafeţei datorită îngroşării filmului cu 9%.

Cu ajutorul rugozităţii artificiale s-au obţinut intensificări de 95% la transferul de masă (fig. 7) şi de 40% la transferul de căldură (fig. 6).

Se confirmă faptul că prezenţa rugozităţiii în pelicula de lichid reduce de la 1 500 la 1 150 valoarea numărului Reynolds critic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică anorganică,
Laboratorul de operaţii şi aparate

BIBLIOGRAFIE

1. Săveanu T., Ibănescu I., Vasiliu M., St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Chimie, 1960, **XI**, *1*, pp. 149—157.
2. Săveanu T., Ibănescu I., Vasiliu M., Tudose R., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, pp. 127—132.
3. Brauer H., *Strömung und Wärmeübergang bei Rieselfilmen*, VDI-Forschungsheft *457*, Düsseldorf, 1956, S. 15.
4. Kamei S., Oishi J., Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., 1955, **17**, pp. 277—289, (citat după Brauer H., Chemie Ing. Techn., 1958, **30**, *2*, S. 80).
5. Nusselt W., Z. Ver. dtsch. Ing., 1923, **67**, S. 206, (citat după Glaser H., Chemie Ing. Techn., 1961, **33**, *3*, S. 146—155).
6. Tailby S. R., Portalski S., Trans. Inst. Chem. Engrs., 1960, **38**, *6*, pp. 324—330, 343—346.
7. Кафаров В. В., ЖПХ, 1960, **XXXIII**, *7*, стр. 1495—1499.
8. — ЖПХ, 1961, **XXXIV**, *5*, стр. 1061—1065.
9. Glaser H., Chemie Ing. Techn., 1961, **33**, *3*, S. 146—155.
10. Săveanu T., Ibănescu I., Vasiliu M., *Asupra numărului Reynolds critic în curgerea peliculară* (sub tipar).

АНАЛИЗ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕДАЧИ В ПЛЕНОЧНОМ ТЕЧЕНИИ ПРИ ПОМОЩИ ШЕРОХОВАТОСТИ

(Резюме)

В работе положено начало методики интенсификации явлений тепло- и массопередачи под воздействием искусственой шероховатости в жидкой среде. Установлены главные факторы (толщина пленки, жидкости, турбулентность внутри жидкости, свободная поверхность жидкости, взаимодействие между жидкой и газовой фазами), ведущие к интенсификации процессов передачи в результате шероховатости. Используя тепло- и массопередачи, установлен количественный метод оценки влияния каждого отдельного фактора, взаимодействующего на интенсификацию процессов передачи.

Общее влияние факторов, а также каждого в отдельности, представлено количественно на рис. 10 (в случае шероховатости в 33 мм) из которого следует, что максимум турбулентности повышает интенсивность массопередачи на 61%, увеличивает на 30% свободную поверхность благодаря синусоидальной форме волн жидкости и на 9% толщину слоя.

При помощи искусственно шероховатости получена интенсификация массопередачи на 95% (рис. 7) и теплопередачи на 40% (рис. 6). Подтверждают, что наличие шероховатости в пленочной жидкости вызывает падение значений Рейнольдс числа с 1 500 на 1 150.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Количество воды W (кг/м^2), в зависимость от W_h (кг/м час).

Рис. 2. — Изменение толщины δ пленки, в зависимости от Re_l.

Рис. 3. — Процентное изменение $(\delta/\delta_0).100$ толщины пленки, в зависимости от Re_l.

Рис. 4. — Процентное изменение ΔS поверхности жидкости, в зависимости от Re_l.

Рис. 5. — Схема установки теплопередачи.

Рис. 6. — Процентное изменение Δk коэффициента массопередачи, в зависимости от Re_l.

Рис. 7. — Процентное изменение Δk_{tr}, в зависимости от Re_l.

Рис. 8. — Процентное изменение $\Delta S' = \Delta k_{tr} - \Delta k$, в зависимости от Re_l.

Рис. 9. — Процентное изменение $\Delta' = \Delta S' - \Delta S$ поверхности жидкости благодаря форме, близкой к синусоидальной, волн в присутствие шероховатости.

Рис. 10. — Процентное изменение факторов, каждого в отдельности и в зависимости от Re_l в процессе передачи: *1* — влияние толщины пленки; *2* — влияние роста свободной поверхности при образовании объема близкого к синусоидальному; *3* — влияние степени турбулентности; *4* — равнодействующая теоретическая кривая для частных кривых *1, 2, 3*; *5* — экспериментальная равнодействующая кривая.

ANALYSIS OF INTENSIFICATION OF TRANSFER PROCESSES IN COUNTERCURRENT GAS-LIQUID FILM, BY MEANS OF ROUGHNESS

(Summary)

In the present paper were laid the bases of an intensification method of heat and mass transfer phenomena by means of artificial roughness action in the liquid phase.

Main factors were established (liquid film thickness, turbulence inside the liquid free surface of liquid, gas-liquid phases interaction), contributing to intensification of transfer processes, as a result of roughness action.

In using the heat and mass transfer, a method of quantitative analysis was obtained, for the influence of each of the factors contributing to the intensification of transfer processes.

Total and individual influence of each factor is illustrated in fig. 10 (for a 0.37 mm roughness) where results show that for a maximum, turbuleuce intensifies mass transfer by 61%, free surface increase by 30%, owing to a closer approximation of wave shape to a sinusoid, and surface increase due to thickening of film by 9%.

By means of artificial roughness, intensifications of 95% for mass transfer (fig. 7) and 40% for heat transfer (fig. 6) were obtained.

The investigation confirmed decrease of critical Reynolds number from 1 500 to 1 150, due to presence of roughness in liquid film.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Amount of holdup water W (Kg/m^2), function of W_h (Kg/m h).

Fig. 2. — Variation of film thickness (δ), function of Re_l.

Fig. 3. — Percentage variation $(\delta/\delta_0).100$ of film thickness, function of Re_l.

Fig. 4. — Percentage variation ΔS of liquid surface, function of Re_l.

Fig. 5. — Heat transfer apparatus schematic diagram.

Fig. 6. — Percentage variation Δk of heat transfer coefficient, function of Re_l.

Fig. 7. — Percentage variation Δk_{tr} of heat transfer coefficient, function of Re_l.

Fig. 8. — Percentage variation $\Delta S' = \Delta k_{tr} - \Delta k$, function of Re_l.

Fig. 9 — Percentage variation $\Delta' = \Delta S - \Delta S$ of liquid surface owing to closer approximation to sinusoidal of wave shape in presence of roughness.

Fig. 10. — Individual and total percentage variation, function of Re_l, in transfer processes : *1* — film thickening influence ; *2* — influence of free surface increase by development of waves closer to sinusoidal-shape ; *3* — influence of turbulence degree ; *4* — resulting theoretical curve of curves *1*, *2* and *3* ; *5* — experimental resulting curve.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 661.721

К ВОПРОСУ О РЕАКЦИОННОЙ СПОСОБНОСТИ СВОБОДНЫХ ГИДРОКСИЛЬНЫХ РАДИКАЛОВ В РЕАКЦИИ С АЛИФАТИЧЕСКИМИ СЛОЖНЫМИ ЭФИРАМИ В РАСТВОРЕ

Г. А. РАЗУВАЕВ и Л. С. БОГУСЛАВСКАЯ

Исследуя количественно реакцию сложных эфиров с реактивом Фентона ($Fe^{2+} + H_2O_2 \rightarrow Fe^{3+} + {}^{-}OH + {}^{\cdot}OH$), мы получили экспериментальные данные, которые позволили приближенно оценить реакционную способность гидроксильных радикалов, генерируемых реактивом Фентона, к атаке С—Н связей молекул эфиров.

Мы изучали реакцию на примерах метиловых эфиров карбоновых кислот и алкилацетатов.

Как нами было показано ранее, [1], [2] при взаимодействии мономерных эфиров с реактивом Фентона образуются ди- и олигомерные эфиры и продукты окислительного распада мономеров.

Общую схему процесса можно изобразить следующим рядом реакций:

1. $RH + {}^{\cdot}OH \rightarrow R^{\cdot} + H_2O$;
2. $2R^{\cdot} \rightarrow R{-}R$ (дегидродимеры);
3. а) $R^IR^{II}CHCOOCH_3 + {}^{\cdot}OH \begin{array}{l} \rightarrow R^IR^{II}\dot{C}COOCH_3 + H_2O, \\ \rightarrow R^IR^{II}CHCOO\dot{C}H_2 + H_2O, \end{array}$

   б) $CH_3COOCHR^{III}R^{IV} + {}^{\cdot}OH \rightarrow CH_3COO\dot{C}R^{III}R^{IV} + H_2O$;

4. а) $R^IR^{II}\dot{C}COOCH_3 + {}^{\cdot}OH \xrightarrow[[H_2O_2]]{} R^IR^{II}C(OH)COOCH_3 \rightarrow R^IR^{II}C{=}O +$
$+ HCOOCH_3$ (продукты окисления);

   $R^IR^{II}CHCOO\dot{C}H_2 + {}^{\cdot}OH \xrightarrow[[H_2O_2]]{} R^IR^{II}CHCOOCH_2OH \rightarrow R^IR^{II}CHCOOH +$
$+ H_2C{=}O$ (продукты окисления),

   б) $CH_3\dot{C}OOCR^{III}R^{IV} + {}^{\cdot}OH \xrightarrow[[H_2O_2]]{} CH_3COOC(OH)R^{III}R^{IV} \rightarrow CH_3COOH +$
$+ R^{III}R^{IV}C{=}O$ (продукты окисления);

   R^I, R^{II}, R^{III}, $R^{IV} = H$, CH_3, C_2H_5.

В таблице 1 приведены количественные данные по расходу мономера и гидроксильного радикала на продукты реакции; в таблице 2 представлены идентифицированные продукты дегидродимеризации и

Таблица 1

Мономеры (общий расход) моль/моль H_2O_2	Продукты реакции	Количество моль/моль H_2O_2	Расход мономера моль/моль H_2O_2	Расход OH— радикалов на отрыв водорода радикал/моль H_2O_2	Положение атаки
Метилизобутират	Димеры	0,150	0,300 } 0,587	0,30 } 0,71	α, β *)
	Тример	0,045	0,135	0,18	
	Тетрамер	0,038	0,152	0,23	
	Ацетон	0,016	0,016	0,016	α *)
	Изомасляная кислота	0,200	0,200		
Метилбутират	Димеры	0,130	0,260 } 0,371	0,260 } 0,42	α, β, γ *)
	Тример	0,017	0,051	0,07	
	Тетрамер	0,015	0,060	0,09	
	Пропионовой альдегид	0,007	0,007	0,007	α *)
	н-масляная кислота	0,250	0,250		
Изопропилацетат (0,79)	Димеры	0,058	0,115 } 0,175	0,115 } 0,20	β ***)
	Тример	0,010	0,030	0,040	
	Тетрамер	0,0075	0,030	0,045	
	Продукты окисления ****)		0,235	0,235	
	Потери *)		0,380		α ***)
			0,790		
н-пропилацетат (0,77)	Димеры	0,110	0,220 } 0,340	0,22 } 0,39	Преимущественно β ***)
	Тример	0,020	0,060	0,08	
	Тетрамер	0,015	0,060	0,09	
	Продукты окисления ****)		0,150	0,15	
	Потери **)		0,280		α ***)
			0,770		

*) α, β, γ к карбометокси-группе.

**) Потери на растворимость определялись из холостого опыта в отсутствие перекиси водорода.

***) α, β к эфирному кислороду.

****) Вычислено по разности общего расхода мономера и расхода мономера на образование ди- и олигомеров.

Например: 0,77 — (0,34 + 0,28) = 0,15.

окисления соответствующих мономеров. Как видно из таблицы 2 при реакции метилизобутирата с реактивом Фентона образуются диметиловые эфиры всех трех теоретически возможных дикарбоновых кислот. На основании приведенных в таблицах 1 и 2 количественных данных можно сделать вывод об относительной реакционной способности α и β C—H связей в кислотной части молекулы $CH_3CH(CH_3)COOCH_3$

Таблица 2

Мономеры	Продукты: дегидродимеризации (содержания в % к сумме димеров)	Продукты: окисления
$CH_3CH(CH_3)COOCH_3$	$CH_2CH(CH_3)COOCH_3$ | $CH_2CH(CH_3)COOCH_3$ (43) $CH_2CH(CH_3)COOCH_3$ | $C(CH_3)_2COOCH_3$ (50) $(CH_3)_2C—COOCH_3$ | $(CH_3)_2C—COOCH_3$ (7)	$CH_3—\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{C}—CH_3$
$CH_3CH_2CH_2COOCH_3$	$CH(CH_3)CH_2COOCH_3$ | $CH(CH_3)CH_2COOCH_3$ $CH(CH_3)CH_2COOCH_3$ | $CH_2CH_2CH_2COOCH_3$ $CH_2CH_2CH_2COOCH_3$ | $CH_2CH_2CH_2COOCH_3$ (> 75)	$CH_3CH_2C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{matrix}$
$CH_3COOCH(CH_3)_2$	$CH_3COOCH(CH_3)CH_2$ | $CH_3COOCH(CH_3)CH_2$ (> 90)	$CH_3—\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{C}—CH_3$
$CH_3COOCH_2CH_2CH_3$	$CH_3COOCH_2CH(CH_3)$ | $CH_3COOCH_2CH(CH_3)$ (> 70)	$CH_3CH_2C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{matrix}$

к атаке свободных гидроксильных радикалов. Некоторое осложнение состоит в том, что около 50% высококипящего продукта реакции составляют олигомеры, изучение строения которых представляет значительные трудности.

Если бы C—H связи в кислотной части молекулы метилизобутирата обладали равной реакционной способностью к атаке гидро-

ксила, то молярное отношение радикалов $\dot{C}H_2CH(CH_3)COOCH_3$ [I] и $(CH_3)_2\dot{C}COOCH_3$ (II) равнялось бы 6 : 1. Найденное экспериментально отношение радикалов I и II в дегидродимерах (с учетом радикалов II, превращенных в ацетон) равно 2 : 1. Если допустить, что олигомеры полностью состоят из радикалов I (что маловероятно), то даже в этом случае отношение радикалов I : II равнялось бы 5 : 1. Отсюда следует, что α С—Н связи в метилизобутирате обладают большей реакционной способностью к атаке гидроксила, чем β С—Н связи.

Из этих несложных рассуждений ясно, что предположение Д. Д. Коффмана и сотрудников [3] о том, что гидроксильный радикал и атом хлора обладают сходной реакционной способностью к отрыву водорода недостаточно обосновано. Как известно, при свободнорадикальном хлорировании изомасляной кислоты в подавляющем количестве образуется β-хлоризомасляная кислота [9], [10].

Коффман и сотрудники, исследуя реакцию пропионовой кислоты с реактивом Фентона выделили адипиновую кислоту как основной продукт реакции и небольшое количество диметилянтарной кислоты. Повидимому, этим авторам не удалось выделить несимметричный дегидродимер — β-метилглутаровую кислоту. При реакции изомасляной кислоты с реактивом Фентона, Коффман и сотрудники выделили лишь α, α'-диметиладипиновую кислоту. Кроме того, эти авторы не исследовали продукты окисления, и поэтому не могли учесть расход α-радикалов на образование соответствующих карбонильных соединений.

При реакции метилбутирата с реактивом Фентона выделены диметиловые эфиры β-метилпимелиновой, β, β'-диметиладипиновых и суберинової кислот, общее количество которых более 75% всех димеров (табл. 2). Очевидно, что β и γ С—Н связи в молекуле метилбутирата более реакционноспособны к атаке гидроксильных радикалов, чем α С—Н связи.

Дегидродимеры, образующиеся при взаимодействии алкилацетатов с реактивом Фентона, преимущественно представляют собой продукты димеризации β-радикалов — диацетаты симметрично дизамещенных бутандиолов — 1,4. Количественное выделение продуктов окисления алкилацетатов — альдегидов и кетонов — затруднено, так как последние в процессе реакции подвергаются дальнейшим превращениям: образуют с перекисью водорода оксиперекиси [4] и продукты их распада, альдегиды окисляются в соответствующие кислоты. Тем не менее, количество окисляющегося мономерного алкилацетата может быть вычислено косвенно — по разности количества мономера, вошедшего в реакцию и мономера, затраченного на образование ди- и олигомеров (табл. 1).

Если бы С—Н связи в спиртовой части молекулы изопропилацетата CH_3—$CH(CH_3)OCOCH_3$ обладали одинаковой реакционной способностью к атаке гидроксильных радикалов, то отношение радикалов $\dot{C}H_2CH(CH_3)OCOCH_3$ (III) и $(CH_3)_2\dot{C}OCOCH_3$ (IV) составило бы величину 6 : 1.

Экспериментально найденное отношение радикалов III : IV равно $0{,}175 : 0{,}235 = 0{,}75$ таким образом, α С—Н связи в спиртовой части молекулы изопропилацетата по крайней мере в 8 раз реакционноспо-

собнее, чем β C—H связи. Проводя аналогичные рассуждения для *н*-пропилацетата, можно сказать, что β C—H связи в спиртовой части его молекулы обладают несколько большей реакционной способностью, чем α C—H связи (приблизительно в 2 раза).

Такая большая разница в относительной реакционной способности α и β C—H связей в *н*-пропил- и изопропилацетатах может быть объяснена тем, что соответствующие α и β-радикалы из них отличаются по стабильности.

$CH_3\dot{C}HCH_2O-$ (V) $\qquad$ $\dot{C}H_2CH(CH_3)-O-$ (III)

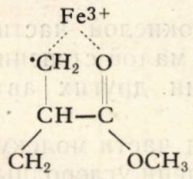
Радикал V дополнительно стабилизирован смещением электронной плотности от метильной группы, что делает его образование энергетически более выгодным, по сравнению с радикалом III. Соответственно энергетически более выгодно образование радикала IV, чем радикала VI.

$CH_3\dot{C}(CH_3)-O-$ (IV) $\qquad$ $CH_3CH_2\dot{C}H-O-$ (VI)

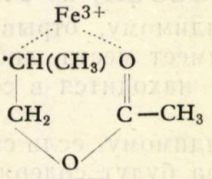
α — радикалы IV и VI нестабильны и далее предпочтительно образуют продукты окисления, реагируя с перекисью водорода (или $\cdot OH$ радикалами) по схеме 4 б.

Таким образом, очевидно, что α C—H связи к карбометокси-группе и эфирному кислороду обладают достаточно высокой реакционной способностью к атаке гидроксильных радикалов, по сравнению с β C—H связями.

Поскольку реакция эфиров с гидроксильными радикалами происходит в присутствии эквивалентного количества катионов Fe^{3+}, то можно предположить, что образующиеся органические радикалы дополнительно стабилизированы за счет образования 5- и 6-членных комплексов с участием Fe^{3+} [1]:



VII



VIII

С этой точки зрения можно объяснять преимущественное образование радикалов VIII из *н*-пропилацетата (6-членный цикл).

Если изобразить зависимость выхода ди- и олигомерных продуктов реакции эфиров общих формул $RCOOCH_3$ и $ROCOCH_3$ от величины и строения остатка (рис. 1 и 2), то кривые выхода имеют резкие максимумы. В случае метиловых эфиров карбоновых кислот максимум отвечает $R=$изо-C_3H_7 (метил-изобутират), в случае алкилацетатов максимум выхода при $R=H.-C_3H_7$ (*н*-пропилацетат).

[1]) Эта мысль была высказана И. И. Моисеевым на симпозиуме по гомолитическим реакциям, в 1960 г.

Это можно объяснить различной стабильностью димеризующихся радикалов. Повышенная стабильность α-радикалов из метилизобутирата (II) обуславливается больший выход ди- и олигомеров. Боль-

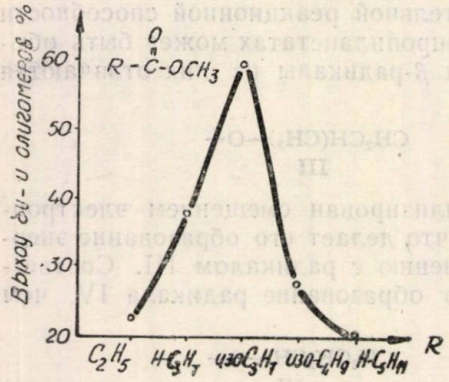


Рис. 1. — Зависимость выхода ди- и олигомеров метиловых эфиров кислот общей формулы $RCOOCH_3$ от величины и строения остатка R.

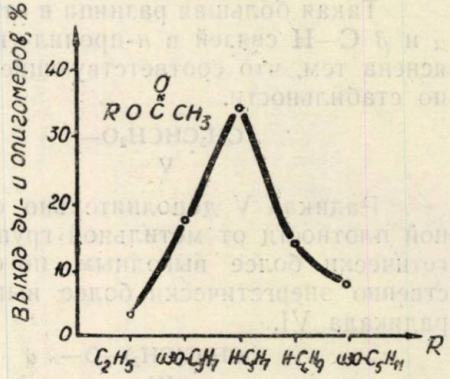


Рис. 2. — Зависимость выхода ди- и олигомеров алкилацетатов общей формулы $ROCOCH_3$ от величины и строения остатка R.

шая стабильность β-радикалов из $н$-пропилацетата обуславливает относительно больший выход ди- и олигомеров последнего, по сравнению с изопропилацетатом (сравни V и III).

Следует особо отметить, что радикалы, образующиеся при отрыве атомов водорода из спиртовой части метиловых эфиров карбоновых кислот (типа $R^{I}R^{II}CHCOOCH_2$), практически не димеризуются.

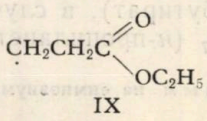
Не было зафиксировано также образование радикалов типа $R^{III}R^{IV}CHOCOCH_2$ из алкилацетатов.

Повидимому, отрыв водорода от уксуснокислой части молекул либо не имеет места, либо проходит в весьма малой степени. Последний факт находится в соответствии с данными других авторов [3], [5], [6].

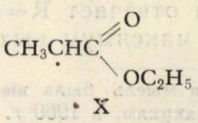
Повидимому, если спиртовая и кислотная части молекулы сложного эфира будут содержать более длинные цепи углеродных атомов, то в продуктах реакции будут содержаться димеры радикалов из обеих частей молекулы.

Представляет интерес количественное определение спиртовых и кислотных радикалов в дегидродимерах.

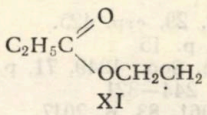
С этой целью мы исследовали продукты дегидродимеризации этилового эфира пропионовой кислоты. При отрыве водорода от этилпропионата вероятно образование следующих радикалов:



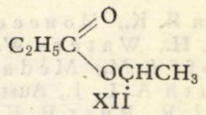
IX



X



XI



XII

Димеры, образующиеся с участием радикалов XI и XII при омылении освобождают пропионовую кислоту, которую легко определить количественно.

Проводя такое определение, мы показали, что в дегидродимеризации принимает участие приблизительно в 2,5 раза больше радикалов из кислотной части этилпропионата, чем из спиртовой.

Это отнюдь не свидетельствует о том, что кислотная часть атакуется энергичнее, чем спиртовая, поскольку неизвестно, сколько спиртовых α-радикалов превращается в ацетальдегид.

Если сопоставить полученные для этилпропионата данные с данными, приведенными на рис. 1 и 2, то видно, что между ними имеется определенное соответствие: выходы димеров из алкилацетатов значительно ниже, чем выходы соответствующих димеров из метиловых эфиров кислот. Этот факт можно объяснить тем, что α-радикалы из спиртовой части (IV, VI, XII) нестабильны и предпочтительно образуют продукты окисления, тогда как α-радикалы из кислот (II, X) стабилизированы сопряжением одиночного электрона с π-электронами карбонильной группы, и вследствие этого способны димеризоваться. А. Л. И. Беквис [7], изучая реакцию третичнобутокси-радикалов с этиловым эфиром масляной кислоты показал что третичнобутокси-радикалы атакуют кислотную часть молекулы в 6 раз энергичнее, чем спиртовую, и отрывают водород из α-положения в кислотной части молекулы в 10 раз активнее, чем из β-положения.

Соответственно в n-масляной кислоте α-положение атакуется в 16 раз активнее, чем β. Из этих данных автор делает вывод, что третично бутокси-радикалы не обладают выраженными электроноакцепторными свойствами, и вследствие этого мало подвержены полярному влиянию карбонильной группы.

Беквис, изучая реакции алкоксирадикалов, полученных при термическом распаде перекисей в среде органических растворителей, сравнивает их реакционную способность с последней для свободных гидроксильных радикалов, генерируемых реактивом Фентона. По нашему мнению такую аналогию проводить нельзя, так как первые реакции протекают в отсутствие воды и ионов металлов, вторые — в большом избытке воды в присутствии катионов Fe^{3+}, количество которых одного порядка с количеством гидроксильных радикалов. Ионы металлов, судя по результатам последних работ, могут стабилизовать свободные органические радикалы [8].

Поступила 5 II 1962 г.

Горковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Разуваев Г. А., Богуславская Л. С.,, ЖОХ, 1960, **30**, стр. 4094.
2. — ЖОХ, 1961, **31**, стр. 3440.
3. Coffman D. D., Jenner E. L., Lipscomb R. D., J. Amer. Chem. Soc., 1958, **80**, p. 2866.

4. Сыркин Я. К., Моисеев И. И., Усп. хим., 1960, **29**, стр. 425.
5. Merz J. H., Waters W. A., J. Chem. Soc., 1949, p. 15
6. Kolthoff J. M., Medalie A. J., J. Amer. Chem. Soc., 1949, **71**, p. 3777.
7. Beckwith A. L. J., Austr. J. Chem., 1960, **13**, pp. 244—321.
8. Kochi J. R., Rust F. F., J. Amer. Chem. Soc., 1961, **83**, p. 2017.
9. Michael A., Ber., 1901, **34**, p. 4028.
10. Kharasch M. S., Brown H. C., J. Amer. Chem. Soc., 1943, **65**, p. 15.

ON THE REACTION CAPACITY OF HYDROXILIC FREE RADICALS DURING CHEMICAL SOLUTION WITH SOME ALIPHATIC ESTERS

(Summary)

Reaction of some aliphatic esters with hydroxylic free radicals which are generated by Fenton's reagent, dimethyl $Fe^{2+} + H_2O_2$, has been studied. It is indicated that by the reaction of methylizobutyrate with Fenton's reagent, dimethyl α, α'-dimethyladipate, α, α, α'-trimethylglutarate and tetramethylsuccinate are formed; by the reaction of methylbutyrate with Fenton's reagent, dymethyl β-methylpimelate, β, β'-dimethyladipates and suberate are isolated.

Some relative quantities of said isomers are given. The available data point out that α C—H bonds of acidic part of methylisobutyrate molecule are more reactive to the attack of hydroxylic free radicals than β C—H bonds, in methylbutyrate molecule β and γ C—H bonds are more reactive than α C—H.

In the reaction of alkylacetates (*n*-propil- and isopropylacetate) with Fenton's reagent, the main products of dehydrodimerisation are diacetates of 2,3-dimethylbutan-1,4-diol and 1,4-dimethylbutan-1,4-diol (β-dehydromers) respectively. Appropriate carbonyl compounds are formed as a result of the parallel oxidizing reaction. For example, acetone is formed from isopropylacetate. Oxydation products are formed as a result of further transformation of α-radicals. Quantity of β- and α-radicals formed has been approximately calculated in accordance with monomer consumption in dehydrodimerisation and oxidation processes. It is shown that α C—H bonds of alcoholic part of isopropylacetate molecule are by 8 times more reactive than β C—H bonds. In *n*-propylacetate β C—H bonds are more reactive than α C—H bonds.

The idea of stability of organic free radicals has been put to explain these observed facts. The assumption has been made the formed organic radicals are stabilized due to the formation of intermediate cyclic complexes with participation of Fe^{3+} cations.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Dependence between the outcome of di- and oligomers methyl esters and the quantity and structure of the remained parts R concerning acids with general formula $RCOOCH_3$.

Fig. 2. — Dependence between the outcome of di- and oligomers of alkylacetates and the quantity and structure of the remained parts R concerning general formula $ROCOCH_3$.

ASUPRA CAPACITĂŢII DE REACŢIE A RADICALILOR HIDROXILICI LIBERI ÎN REACŢIE CU ESTERI ALIFATICI COMPUŞI ÎN SOLUŢIE

(Rezumat)

Ca urmare a reacţiei indicate în titlu se formează dimetil α,α'-dimetiladipat, α, α, α'-trimetilglutarat şi tetrametilsuccinat, izolîndu-se β, β'-dimetiladipat ş. a.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Dependenţa dintre formarea di- şi oligomerilor esterilor metilici ai acizilor de formulă generală $RCOOCH_3$ şi mărimea şi structura restului R.

Fig. 2. — Dependenţa dintre formarea di- şi oligomerilor alchilacetaţilor de formulă generală $ROCOCH_3$ şi mărimea şi structura restului R.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 547.269.352

SULFAMIDELE ACIZILOR FENOXIACETICI
NOTA IV
HIDRAZIDELE ACIZILOR FENOXIACETICI SULFONAMIDAŢI

DE

GH. BOTEZ, MARIA TUTOVEANU şi EUGENIA COMĂNIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

În ultimele două decenii s-au realizat progrese importante în tratamentul tuberculozei prin introducerea în terapeutică a streptomicinei, a hidrazidei acidului izonicotinic (HIN), a acidului *p*-amino-salicilic (PAS) ş. a.

Deşi aceste medicamente sînt foarte active, folosirea lor în clinică întîmpină unele greutăţi, care se datoresc fie toxicităţii lor ridicate, fie eliminării rapide din organism, fie fenomenelor de chimiorezistenţă a bacililor.

Pentru a evita aceste inconveniente se recurge la diferiţi derivaţi ai produselor de mai sus, sau la asocierea lor.

În acest scop s-au întreprins numeroase studii privind sinteza şi acţiunea tuberculostatică a unor noi derivaţi proveniţi din HIN şi din streptomicină.

Astfel, M. N. Sciukina şi colaboratori [1] au studiat o serie de hidrazone obţinute prin condensarea HIN-ului cu aldehidele aromatice. Dintre acestea, izonicotinoil-hidrazona vanilinei este bine suportată de organism, fiind mai activă decît streptomicina şi PAS-ul. Produsul se foloseşte în Uniunea Sovietică sub denumirea de *ftivazidă*.

De asemenea, C. V. Gheorghiu şi alţi cercetători [2] au sintetizat izonicotinoil-hidrazonele unor aldehide aromatice cu grupări nitrice şi halogeni în moleculă, constatînd că unele dintre produsele obţinute posedă aceeaşi activitate antituberculoasă ca şi HIN-ul.

În ceea ce priveşte streptomicina s-a căutat ca prin modificările aduse grupelor aminice şi grupei aldehidice din moleculă să se ajungă la derivaţi mai puţin toxici. Streptomicina se combină cu reactivii grupei carbonilice dar aproape toţi compuşii rezultaţi sînt inactivi. Face excepţie streptoniazida, obţinută prin condensarea streptomicinei cu HIN-ul. Acest produs se descompune în organism în cele două componente active [3].

Fenomenele de intoleranţă ale streptomicinei, caracterizate prin reacţii de tip alergic, histaminic şi leziuni organice, n-au putut fi eliminate decît parţial prin modificările structurale ale acestui antibiotic.

În prezent studiile în domeniul medicamentelor antituberculoase sînt continuate cu multă intensitate, în vederea găsirii unor noi compuşi cu eficacitate ridicată, dar lipsiţi de toxicitate.

În lucrarea de faţă, care are ca scop obţinerea unor noi derivaţi cu acţiune antituberculoasă, se tratează sinteza hidrazidelor acizilor fenoxiacetici sulfonamidaţi.

Prepararea acizilor fenoxiacetici sulfonamidaţi a fost elaborată de noi într-o lucrare anterioară [4], folosind reacţia de clorosulfonare a esterilor fenoxiacetici şi amidarea esterilor sulfocloruraţi respectivi.

Cercetînd acţiunea fiziologică a unora dintre aceşti compuşi am constatat că sînt lipsiţi de toxicitate şi că pătrund cu uşurinţă în ţesuturile nervoase, avînd acţiune anticonvulsivantă [5].

Avînd în vedere importanţa practică a acestor compuşi am continuat cercetările în direcţia sintezei hidrazidelor acizilor aminosulfonil-fenoxiacetici. Orientarea studiilor noastre asupra acestei grupe de compuşi se bazează pe proprietatea grupării sulfonamidice de a forma derivaţi fiziologic activi, lipsiţi de toxicitate. În al doilea rînd, unele dintre produsele intermediare obţinute în fazele de preparare a acizilor fenoxiacetici sulfonamidaţi au reactivitate mare şi deci în molecula lor pot fi introduse cu uşurinţă diferite grupări.

Hidrazidele şi hidrazonele acizilor fenoxiacetici au fost obţinute pentru prima dată în 1955 de E. Baltazzi şi R. Delavigne [6].

Prin descoperirea reacţiei de clorosulfonare a esterilor acizilor fenoxiacetici [7] am deschis calea pentru sinteza hidrazidelor acizilor fenoxiacetici sulfonamidaţi.

Clorosulfonarea esterilor etilici ai acizilor fenoxiacetici se execută la rece (4°...10°C), folosind un exces de 6 moli acid clorsulfonic pentru un mol ester. După descompunerea excesului de acid clorsulfonic, prin aruncarea pe gheaţă a masei de reacţie, se obţin esterii fenoxiacetici sulfocloruraţi, cu randamente ridicate. Prin tratarea acestora cu amoniac (2 moli) rezultă esterii sulfonamidaţi corespunzători, care prin condensare cu hidratul de hidrazină se transformă în hidrazidele acizilor aminosulfonil-fenoxiacetici.

Pe de altă parte, prin tratarea esterilor fenoxiacetici sulfocloruraţi cu dialchil-amine se obţin esterii dialchil-sulfonamido-fenoxiacetici, iar aceştia, prin condensare cu hidrazina, conduc la hidrazidele acizilor dialchil-sulfonamido-fenoxiacetici.

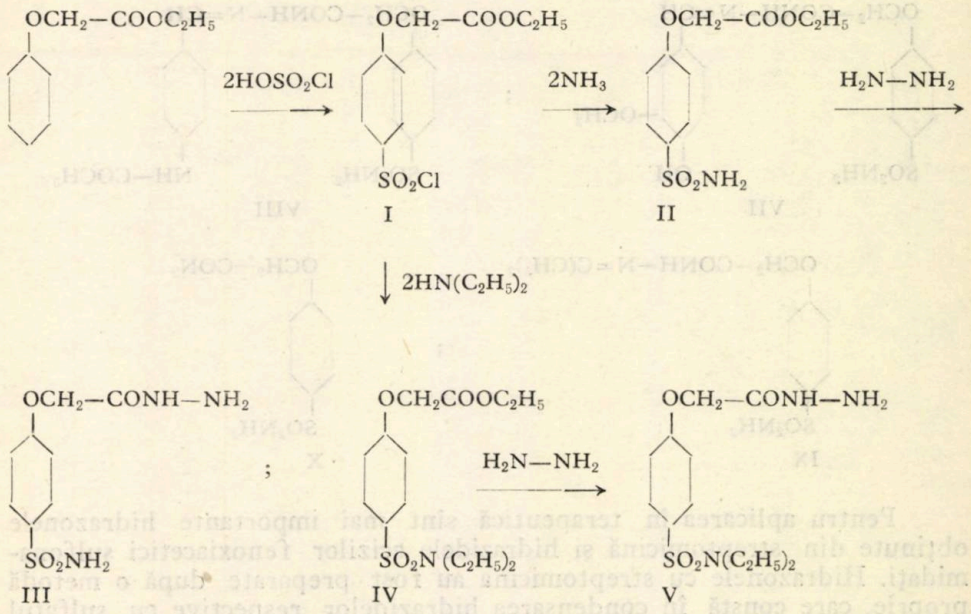
2. Partea teoretică

Folosind această metodă generală de sinteză s-au preparat următorii compuşi :

a) *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic şi derivaţi dialchilaţi la gruparea sulfonamidică.*

Prin clorosulfonarea fenoxiacetatului de etil se obţine 4-clorosulfonil-fenoxiacetatul de etil (I), din care prin amidare cu amoniac (cantitate strict stoichiometrică) rezultă 4-aminosulfonil-fenoxiacetatul de etil (II). Acesta, prin condensare cu hidratul de hidrazină, în mediul alcoolic, conduce la hidrazida acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic (III).

În acelaşi mod, plecînd de la compusul (I), prin tratare cu dietilamină, se obţine 4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetatul de etil (IV), care prin condensare cu hidrazina se transformă în hidrazida acidului 4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetic (V).



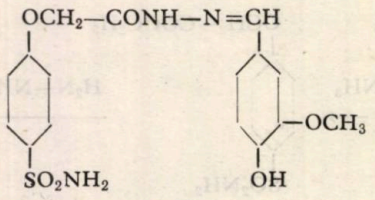
Plecînd de la 4-clorosulfonil-fenoxiacetatul de etil (I) şi dimetilamină, urmînd aceeaşi schemă de reacţii, se prepară hidrazida acidului 4-dimetil-sulfonamido-fenoxiacetic (VI).

Poziţia ocupată de gruparea sulfonamidică în molecula acestor compuşi s-a stabilit prin hidroliza acidă a sulfoclorurii esterului fenoxiacetic, obţinînd acidul fenoxiacetic-4-sulfonic cu p. t. 51°...52°C. Acest acid a fost preparat, pe de altă parte, prin condensarea acidului fenol-4-sulfonic cu acidul cloracetic la fierbere în soluţie alcalină, rezultînd şi pe această cale acidul fenoxiacetic-4-sulfonic (p. t. 50°C).

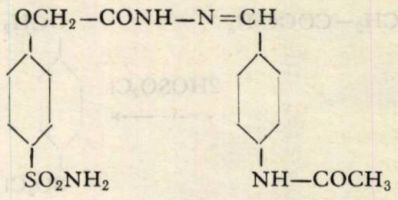
Deoarece prin hidroliza sulfoclorurii se poate obţine numai acest acid, rezultă că gruparea metoxi-carboxilică esterificată orientează restul clorosulfonil în poziţia para.

Poziţia ocupată de această grupare în nucleul benzenic poate fi dedusă şi din efectele electronice. Reactivitatea mare a inelului fenolic se datoreşte conjugării electronilor neparticipanţi ai atomului de oxigen cu electronii π ai nucleului benzenic [8]. Deoarece se creează o densitate mare de electroni în poziţia para, la cererea reactantului substituţia grupei clorosulfonil are loc în această poziţie.

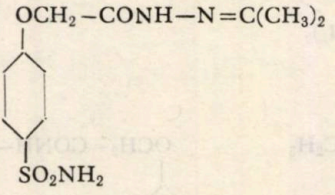
Identificarea hidrazidei acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic s-a făcut prin transformarea în hidrazone. S-au preparat: hidrazona cu vanilina (VII), cu *p*-acetilamino-benzaldehida (VIII) şi acetona (IX), folosind metoda de condensare dintre hidrazidă şi compuşii carbonilici în mediu hidro-alcoolic, slab acidulat cu acid acetic [9]. De asemenea, prin reacţia cu acidul azotos s-a obţinut azida acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic (X).



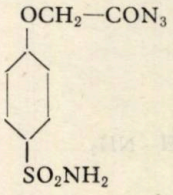
VII ;



VIII



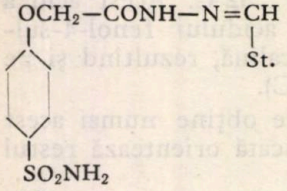
IX ;



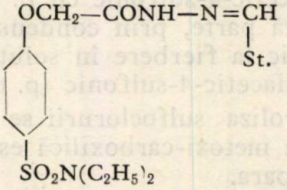
X

Pentru aplicarea în terapeutică sînt mai importante hidrazonele obţinute din streptomicină şi hidrazidele acizilor fenoxiacetici sulfonamidaţi. Hidrazonele cu streptomicina au fost preparate după o metodă proprie, care constă în condensarea hidrazidelor respective cu sulfatul de streptomicină în soluţia apoasă concentrată, slab acidulată cu acid acetic. Din amestecul de reacţie se precipită hidrazona prin tratare cu alcool metilic.

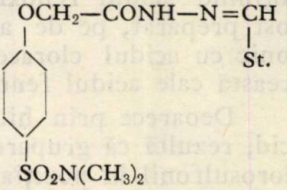
Folosind acest procedeu s-au preparat următoarele produse: streptomiciliden-N-(4-aminosulfonil-fenoxiacetil) hidrazina (XI), streptomiciliden-N-(4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetil) hidrazina (XII), streptomiciliden-N-(4-dimetil-sulfonamido-fenoxiacetil) hidrazina (XIII).



XI



XII



XIII

Produsele cu structura de mai sus, (St. reprezintă restul de streptomicină), sînt dotate cu acţiune tuberculostatică, la fel ca şi compusul de condensare dintre streptomicină şi HIN. Activitatea lor, determinată pe cale microbiologică, este de acelaşi ordin de mărime (circa 500 u. i.) ca şi a streptoniazidei preparată în aceleaşi condiţii şi luată ca martor.

Pe lîngă aceasta, este posibil ca hidrazonele cu streptomicina să posede o stabilitate mai ridicată decît acest antibiotic. Presupunerea noastră se bazează pe cercetările întreprinse de G. Pagani [10], care a constatat că HIN-ul are un efect stabilizant asupra descompunerii termice a streptomicinei şi dihidrostreptomicinei.

Posibilităţile de utilizare în medicină a compuşilor de condensare dintre hidrazidele dialchil-sulfonamidate şi streptomicină, pot fi privite

şi sub alt aspect. După cum se cunoaşte, în terapia cu antibiotice este necesară menţinerea unei concentraţii ridicate de medicament în sînge, un timp cît mai îndelungat. Aceasta se realizează, în anumite cazuri, prin administrarea concomitentă de acid *p*-dietil-sulfonamido-benzoic, cunoscut sub denumirea de etamidă [11]. Deoarece etamida are o structură chimică apropiată de *p*-dietil-sulfonamido-fenoxiacetil-hidrazină, se poate deduce că produsul de condensare cu streptomicina va avea un efect retard.

Cercetările farmacodinamice adecvate vor confirma sau infirma deducţiile noastre.

b) *Hidrazidele acizilor aminosulfonil-crezoxiacetici.*

Plecînd de la esterii etilici ai acizilor *o*, *m*, *p*-crezoxiacetici s-au sintetizat hidrazidele acizilor sulfonamidaţi corespunzători, compuşi care se deosebesc de derivaţii precedenţi prin prezenţa unui radical metil substituit în diferite poziţii pe nucleul benzenic.

Reacţiile ce au loc la prepararea hidrazidelor acizilor aminosulfonil-crezoxiacetici decurg după aceeaşi schemă şi în aceleaşi condiţii ca şi la obţinerea hidrazidelor menţionate anterior.

Prin condensarea acestor produse cu vanilina, *p*-acetilamino-benzaldehida şi acetona, rezultă hidrazonele respective, produse cu puncte de topire caracteristice, care pot servi pentru identificare. De asemenea, prin reacţia cu acidul azotos s-au preparat azidele acizilor aminosulfonil-crezoxiacetici, substanţe ce explodează la încălzire bruscă, dar au puncte de descompunere nete.

Tabelul centralizator 1 cuprinde compuşii sintetizaţi.

Tabelul 1

Denumirea chimică	p. t. °C	p. t. ale hidrazonelor cu °C			azida p. desc. °C
		vanilina	*p*-acetil am. benz.	acetona	
Hidrazida acidului 4-aminosulfonil -2-metil-fenoxiacetic (XIV)	192	213	290	192	107
Hidrazida acidului 4-aminosulfonil -3-metil-fenoxiacetic (XV)	193	231	258	185	108
Hidrazida acidului 2-aminosulfonil -4-metil-fenoxiacetic (XVI)	195	237	264	205	96

Poziţia ocupată de grupa aminosulfonil în molecula acestor compuşi s-a stabilit într-o lucrare anterioară, prin oxidarea acizilor crezoxiacetici sulfonamidaţi, cu permanganat de potasiu în mediu alcalin. În aceste condiţii metilul este oxidat la grupare carboxilică.

În cazul cînd grupa sulfonamidică ocupă poziţia orto faţă de carboxil, la acidulare cu acid clorhidric are loc o anhidrizare spontană, rezultînd imida sulfobenzoică a acidului oxiacetic. Aceasta poate fi uşor

identificată prin condensare cu rezorcina cînd se obţine zahareina corespunzătoare.

Din studiul derivaţilor obţinuţi prin oxidarea acizilor crezoxiacetici sulfamidaţi rezultă că gruparea metoxicarboxilică esterificată orientează noii substituenţi de preferinţă în poziţia para, iar atunci cînd aceasta este ocupată substituţia are loc în poziţia orto.

c) *Hidrazidele acizilor aminosulfonil-xilenoxiacetici şi aminosulfonil-timoxiacetic.*

Plecînd de la esterii etilici ai acizilor xilenoxiacetici, aplicînd aceleaşi faze de reacţii, am sintetizat hidrazidele acizilor xilenoxiacetici sulfonamidaţi. Aceşti compuşi conţin grupa aminosulfonil şi doi radicali metilici substituiţi în diferite poziţii ale nucleului benzenic.

Prin condensarea cu vanilina, *p*-acetilamino-benzaldehida şi acetona, am obţinut hidrazonele corespunzătoare, iar prin reacţia cu acidul azotos rezultă azidele acizilor aminosulfonil-xilenoxiacetici.

În tabelul 2 se specifică denumirile chimice ale hidrazidelor sintetizate.

Tabelul 2

Denumirea chimică	p. t. °C	p.t. ale hidrazonelor cu °C			azida p. desc. C°
		vanilina	*p*-acetil am. benz.	acetona	
Hidrazida acidului 6-aminosulfonil -3,4-dimetil-fenoxiacetic (XVII)	202	260	259	190	104
Hidrazida acidului 5-aminosulfonil -2,4-dimetil-fenoxiacetic (XVIII)	219	263	220	185	88
Hidrazida acidului 4-aminosulfonil -3,5-dimetil-fenoxiacetic (XIX)	174	229	239	201	92
Hidrazida acidului 4-aminosulfonil -2,6-dimetil-fenoxiacetic (XX)	197	214	255	246	84
Hidrazida acidului 4-aminosulfonil -2,5-dimetil-fenoxiacetic (XXI)	198	218	265	203	94
Hidrazida acidului 4-aminosulfonil -3-metil-6-izopropil-fenoxi-acetic (XXII)	177	194	225	206	95

Hidrazida acidului 4-aminosulfonil timoxiacetic (XXII) s-a preparat prin amidarea cu amoniac (25%) a 4-clorosulfonil-3-metil-6-izopropil-fenoxiacetatului de etil, iar esterul sulfamidat obţinut a fost condensat final cu hidratul de hidrazină, în mediu alcoolic.

Structura acestor compuşi a fost stabilită prin reacţii de oxidare, după procedeul indicat la derivaţii acizilor crezoxiacetici.

Esterii etilici ai acizilor aminosulfonil-fenoxiacetici şi hidrazidele corespunzătoare sînt substanţe cristalizate, stabile, care se pot purifica prin recristalizare din etanol 50%, rezultînd produse foarte pure. Prepararea lor decurge fără dificultăţi, cu randamente aproape teoretice.

3. Partea experimentală

1. *4-aminosulfonil-fenoxiacetatul de etil (II).*

7,2 g 4-clorosulfonil-fenoxiacetat de etil (I), în stare anhidră, se solvă în 10 ml acetonă şi se tratează în porţiuni cu 4 ml amoniac (23%). Cantitatea de amoniac folosită se calculează stoichiometric. În timpul amidării se răceşte amestecul de reacţie, deoarece reacţia este puternic exotermă. După cîteva minute de agitare la rece, esterul sulfamidat precipită.

Produsul se filtrează, se spală cu apă pentru îndepărtarea clorurii de amoniu şi se purifică prin recristalizare din alcool etilic (96°).

Substanţa este solubilă la cald în alcooli, esteri, acetonă ; insolubilă în hidrocarburi. Cristalizează în prisme mari, albe, cu p. t. 145...146°C.

$C_{10}H_{13}O_5NS$ (259,16) Calculat: C% 46,33; H% 5,05; N% 5,40;
Găsit: 46,22; 5,12; 5,30; 5,39.

2. *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic (III).*

5,2 g ester 4-aminosulfonil-fenoxiacetic (II) se tratează cu un amestec format din 10 ml etanol şi 2 g hidrat de hidrazină, apoi se încălzeşte la 70°C timp de cîteva minute. Hidrazida fiind insolubilă în alcool, cristalizează chiar în timpul reacţiei.

Masa de reacţie se lasă în repaus timp de 12 ore ; produsul cristalizat se filtrează, se spală cu apă şi se purifică prin recristalizare din alcool etilic 50%, sau din apă. Sînt necesare 10 volume apă pentru 1 g produs. Randamentul este aproape cantitativ.

Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic se prezintă sub forma unor cristale prismatice, albe, avînd p. t. 204°C. Este insolubilă în solvenţi uzuali, solubilă în apă la cald. Este uşor solubilă în hidroxizi alcalini şi în acizi, formînd sărurile corespunzătoare, care precipită din soluţii concentrate la adăugare de alcool. Clorhidratul în soluţie apoasă colorează hîrtia şi lemnul de brad în galben oranj.

Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic reacţionează uşor cu aldehidele şi cetonele, formînd hidrazonele corespunzătoare. Hidrazona cu dimetilamino-benzaldehida se prezintă sub forma unor cristale crem-sidefii.

$C_8H_{11}O_4N_3S$ (245,16) Calculat: C% 39,15; H% 4,52; N% 17,13;
Găsit: 39,23; 4,66; 17,21; 17,18.

3. *Vanilil-N-(4-aminosulfonil-fenoxiacetil)-hidrazina (VII).*

2,45 g hidrazidă a acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic (III) se amestecă cu 1,52 g vanilină, se tratează cu 20 ml etanol (50%) acidulat cu o picătură de acid acetic şi se fierbe sub reflux timp de 2...3 min. Hidrazona cu vanilină precipitată la răcire se filtrează şi se spală cu alcool. Substanţă microcristalină albă, inodoră, cu p. t. 229°C. Produsul este insolubil în apă şi solvenţi la cald, solubil în hidroxizi alcalini. La neutralizarea soluţiilor alcaline se separă un precipitat slab gălbui.

$C_{16}H_{17}O_6N_3S$ (379,16) Calculat: N% 11,08;
Găsit: 11,32; 11,16.

4. p-*acetilamino-benzaldehid-N-(4-aminosulfonil-fenoxiacetil) hidrazina (VIII).*

0,24 g hidrazidă (III) se amestecă cu 0,16 g *p*-acetilamino-benzaldehidă, se suspendă în 20 ml apă acidulată cu o picătură de acid acetic şi se fierbe sub agitare pînă la dispariţia culorii galbene (2 min).

Precipitatul format se filtrează la cald. Substanţă albă, amorfă, cu p. t. 289°C, solubilă în apă şi în solvenţi uzuali. Produsul se solvă în soluţii alcaline diluate, iar la acidulare soluţia capătă o coloraţie galbenă.

$C_{17}H_{18}O_5N_4S$ (390,16) Calculat: N% 14,35;
Găsit: 14,47.

5. *Hidrazona cu acetona (IX).*

0,5 g hidrazidă (III) se tratează cu 2 ml apă, 2 ml acetonă, o picătură de acid acetic şi se aduce la fierbere 2...3 min. La răcire cristalizează hidrazona, care se filtrează şi se purifică din etanol.

Produsul se prezintă sub forma unor cristale albe, strălucitoare, cu p. t. 220°C, solubile în alcool la cald.

$C_{11}H_{15}O_4N_3S$ (285,16) Calculat: N% 14,73;
Găsit: 14,85.

6. *Azida acidului 4-aminosulfonil-fenoxiacetic (X).*

2,45 g hidrazidă (III) se solvă în 20 ml apă acidulată cu 2 ml acid clorhidric concentrat, se răceşte la gheaţă şi se tratează cu 10 ml dintr-o soluţie de azotit de sodiu 20%. Reacţia are loc imediat formîndu-se azida cu randament aproape cantitativ. Precipitatul format se filtrează imediat, se spală cu apă şi se usucă pe hîrtie de filtru, apoi în exicator pe acid sulfuric. Azida este explozivă, cu punct de descompunere 106°C.

7. *Streptomiciliden-N-(4-aminosulfonil-fenoxiacetil) hidrazina (XI).*

Pentru obţinerea acestui derivat am folosit un procedeu diferit faţă de cel propus de F. C. Pennington şi colaboratori [12] la prepararea streptohidrazidei. Autorii citaţi execută reacţia de condensare dintre streptomicină şi HIN în mediu metanolic, în prezenţa trietanolaminei, prin încălzire sub reflux (randament 54%).

Acest procedeu nu poate fi aplicat în cazul hidrazidelor acizilor aminosulfonil-fenoxiacetici, deoarece acestea sînt insolubile în alcool metilic la cald.

Metoda propusă de noi constă în condensarea celor două componente în mediu apos, slab acidulat cu acid acetic, purificarea cu cărbune activ şi precipitarea produsului de reacţie cu metanol.

3 g sulfat de streptomicină se solvă în 6 ml apă slab acidulată cu acid acetic, se tratează cu 0,9 g hidrazidă (III) şi se încălzeşte la 75°...80°C pînă la solubilizare (circa 1 min). Soluţia rezultată se purifică cu cărbune activ şi se răceşte la gheaţă apoi se toarnă în picături, sub agitare mecanică, peste 30 ml metanol anhidru. Produsul precipitat se filtrează şi se spală cu etanol.

Hidrazona cu streptomicina, sub formă de sulfat, este o pulbere albă, amorfă, solubilă în apă, insolubilă în solvenţi organici. La încălzire se carbonizează fără a se topi. Prin neutralizare cu alcalii separă un produs uleios, greu solubil în apă.

Activitatea determinată microbiologic este de 480 u. i./mg.

$C_{29}H_{48}O_{15}N_{10}S$, 3/2 H_2SO_4 (955,46) Calculat: N% 14,65;
Găsit: 14,82; 14,93.

8. *4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetatul de etil (IV).*

5,60 g 4-clorosulfonil-fenoxiacetat de etil (I) se tratează cu 3 g dietil-amină diluată cu 5 ml apă. Reacţia fiind puternic exotermă se răceşte, pentru a evita hidroliza. După 12 ore se decantează pătura apoasă, care conţine clorhidratul de dietil-amină, iar stratul uleios se spală cu apă şi se separă. Esterul etilic al acidului 4-dietilsulfonamido-fenoxiacetic este un lichid foarte dens, de culoare galben pal, solubil în alcooli, eter, cetone. Se foloseşte ca atare pentru prepararea hidrazidei corespunzătoare.

9. *Hidrazida acidului-4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetic (V).*

Esterul dietil sulfonamidat, obţinut în faza anterioară, se solvă în 10 ml alcool etilic, se tratează cu 2 g hidrat de hidrazină şi se încălzeşte la 60°...70°C timp de cîteva minute. Se lasă în repaus 12 ore; produsul se filtrează şi se recristalizează din etanol. Cristalizează în plăcuţe strălucitoare, cu p. t. 142°C, insolubile în apă, solubile la cald în alcooli şi esteri.

$C_{12}H_{19}O_4N_3S$ (301,26) Calculat: N% 13,94;
Găsit: 14,05; 14,13.

10. *Streptomiciliden-N-(4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetil) hidrazina (XII).*

Se prepară în aceleaşi condiţii ca derivatul XI, utilizînd 3 g sulfat de streptomicină şi 1,2 g hidrazidă a acidului 4-dietil-sulfonamido-fenoxiacetic. Produsul se obţine sub formă de sulfat, cu un randament de circa 70% faţă de streptomicină. Pulbere albă, amorfă, solubilă în apă. Activitatea 420 u. i./mg.

$C_{33}H_{56}O_{15}N_{10}S$, 3/2 H_2SO_4 (1031,56) Calculat: N% 13,57;
Găsit: 13,73; 13,81.

11. *4-dimetil-sulfonamido-fenoxiacetatul de etil.*

Se obţine în mod analog derivatului IV. Utilizînd 5,5 g ester clorosulfonil-fenoxiacetic şi 5,5 g dimetil-amină de 33% rezultă un lichid vîscos, de culoare galben pal,

care cristalizează greu la răcire. Produsul se prezintă sub forma unor cristale albe, cu p. t. 41°C.

12. *Hidrazida acidului 4-dimetil-sulfonamido-fenoxiacetic (VI).*
Esterul dimetil-sulfonamidat obţinut în faza precedentă se solvă în 10 ml etanol, se tratează cu 2 g hidrat de hidrazină şi se încălzeşte la 60°...70°C timp de 3...4 min; se lasă în repaus 12 ore. Produsul se filtrează şi se recristalizează din alcool. Se obţin cristale prismatice cu p. t. 150°C.

$C_{10}H_{15}O_4N_3S$ (273,26) Calculat: N% 15,38;
Găsit: 15,53; 15,62.

13. *Streptomciliden-N-(4-dimetil-sulfonamido-fenoxiacetil) hidrazina (XIII).*
Se prepară analog ca derivatul XI. Se prezintă ca o pulbere amorfă, albă, solubilă în apă. Activitatea dozată microbiologic este de 490 u. i./mg.

$C_{31}H_{52}O_{15}N_{10}S$, 3/2 H_2SO_4 (1 003,56) Calculat: N% 13,95;
Găsit: 13,86.

14. *4-aminosulfonil-2-metil-fenoxiacetatul de etil.*
Se obţine în aceleaşi condiţii ca şi derivatul II. Prin purificare din etanol rezultă cristale prismatice albe, cu p. t. 137°C.

$C_{11}H_{15}O_5NS$ (273,18) Calculat: N% 5,12;
Găsit: 5,02; 5,27.

15. *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-2-metil-fenoxiacetic (XIV).*
Se obţine pe aceeaşi cale ca derivatul III. Prin purificare din alcool 50% cristalizează în prisme albe, cu p. t. 192°C. Clorhidratul colorează în galben hîrtia şi lemnul de brad.

$C_9H_{13}O_4N_3S$ (259,16) Calculat: N% 16,20;
Găsit: 16,38; 16,31.

Plecînd din produsul pur s-au preparat: hidrazona cu vanilina (p. t. 213°C), hidrazona cu *p*-acetilamino-benzaldehida (p.t. 290°C), hidrazona cu acetona (p.t. 192°C), precum şi azida corespunzătoare cu punct de descompunere 107°C.

16. *4-aminosulfonil-3-metil-fenoxiacetatul de etil.*
Se procedează în mod similar ca la prepararea compusului II. După recristalizare din alcool etilic produsul are p. t. 139°...140°C.

$C_{11}H_{15}O_5NS$ (273,18) Calculat: N% 5,12;
Găsit: 5,16.

17. *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-3-metil-fenoxiacetic (XV).*
Se prepară în mod analog cu derivatul III. Produsul purificat din etanol 50% cristalizează în prisme albe, cu p. t. 193°C.

$C_9H_{13}O_4N_3S$ (259,16) Calculat: N% 16,20;
Găsit: 16,24.

Hidrazona cu vanilina (p. t. 231°C), cu *p*-acetilamino-benzaldehida (p. t. 258°C), cu acetona (p. t. 108°C), s-au preparat după metoda indicată anterior.

18. *2-aminosulfonil-4-metil-fenoxiacetatul de etil.*
Se obţine pe aceeaşi cale ca derivatul II. Cristale prismatice albe, cu p. t 135°C.

$C_{11}H_{15}O_5NS$ (273,18) Calculat: N% 5,12;
Găsit: 5,00; 5,03.

19. *Hidrazida acidului 2-aminosulfonil-4-metil-fenoxiacetic (XVI).*
Se prepară după procedeul indicat la compusul III. Se obţin prisme albe, cu p.t. 195°C. Soluţia apoasă a clorhidratului colorează hîrtia în galben.

$C_9H_{13}O_4N_3S$ (259,16) Calculat: N% 16,20;
Găsit: 16,25.

Din produsul pur s-au preparat hidrazonele cu vanilina, cu *p*-acetilamino-benzaldehida, cu acetona şi azida corespunzătoare, care au punctele de topire indicate în tabelul 1.

20. *6-aminosulfonil-3,4-dimetil-fenoxiacetatul de etil.*
Se obţine pe aceeaşi cale ca şi derivatul II, sub forma unor cristale prismatice, cu p. t. 119° C.

$C_{12}H_{17}O_5NS$ (287,20) Calculat: N% 4,87;
Găsit: 4,93; 5,11.

21. *Hidrazida acidului 6-aminosulfonil-3,4-dimetil-fenoxiacetic (XVII).*
Se prepară în mod analog derivatului III; produsul purificat din etanol 50% are p. t. 202° C.

$C_{10}H_{15}O_4N_3S$ (273,2) Calculat: N% 15,37;
Găsit: 15,32.

Hidrazonele şi azida se obţin după procedeul indicat anterior; punctele de topire sînt date în tabelul 2.

22. *5-aminosulfonil-2,4-dimetil-fenoxiacetatul de etil.*
Produsul cristalizează din alcool etilic în prisme albe, cu p. t. 138° C.

$C_{12}H_{17}O_5NS$ (287,20) Calculat: N% 4,87;
Găsit: 4,88.

23. *Hidrazida acidului 5-aminosulfonil-2,4-dimetil-fenoxiacetic (XVIII).*
Se prepară după procedeul indicat la derivatul III; după purificare din apă se obţin cristale prismatice, cu p. t. 219° C.

$C_{10}H_{15}O_4N_3S$ (273, 0) Calculat: N% 15,37;
Găsit: 15,25; 15,47.

24. *4-aminosulfonil-3,5-dimetil-fenoxiacetatul de etil.*
Substanţă cristalină, albă, cu p. t. 123° C.

$C_{12}H_{17}O_5NS$ (287,20) Calculat: N% 4,87;
Găsit: 4,93; 5,12.

25. *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-3,5-dimetil-fenoxiacetic (XIX).*
A fost preparată în acelaşi mod ca derivatul III. După purificare din etanol 50% produsul are p. t. 174° C. Punctele de topire ale hidrazonelor sînt date în tabelul 2.

$C_{10}H_{15}O_4N_3S$ (273,20) Calculat: N% 15,37;
Găsit: 15,42.

26. *4-aminosulfonil-2,6-dimetil-fenoxiacetatul de etil.*
Cristale prismatice albe, avînd p. t. 150° C.

$C_{12}H_{17}O_5NS$ (287,20) Calculat: N% 4,87;
Găsit: 5,05; 5,18.

27. *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-2,6-dimetil-fenoxiacetic (XX).*
A fost preparată în mod analog compusului III. Prin purificare din etanol 50% se obţin cristale albe, prismatice, cu p. t. 197° C. Hidrazonele şi azida au punctele de topire indicate în tabelul 2.

$C_{10}H_{15}O_4N_3S$ (273,20) Calculat: N% 15,37;
Găsit: 15,49.

28. *4-aminosulfonil-2,5-dimetil-fenoxiacetatul de etil.*
Substanţă cristalină albă, cu p. t. 117° C.

$C_{12}H_{17}O_5NS$ (287,20) Calculat: N% 4,87;
Găsit: 4,96; 5,14.

29. *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-2,5-dimetil-fenoxiacetic (XXI).*
Se prepară după acelaşi procedeu ca şi derivatul III. După purificare din apă rezultă cristale prismatice albe, avînd p. t. 198° C.

$C_{10}H_{15}O_4N_3S$ (273,20) Calculat: N% 15,37;
Găsit: 15,48.

30. *4-aminosulfonil-3-metil-6-izopropil-fenoxiacetatul de etil.*
6,7 g ester clorosulfonil-timoxiacetic (p. t. 42° C) se solvă în 10 ml acetonă şi se tratează sub răcire cu 4 ml amoniac de 25%. La diluare cu apă şi răcire produsul cristalizează. După filtrare şi purificare din etanol 50% se obţin cristale prismatice albe, cu p. t. 103° C.

$C_{14}H_{21}O_5NS$ (315,20) Calculat: N% 4,44;
Găsit: 4,57.

31. *Hidrazida acidului 4-aminosulfonil-3-metil-6-izopropil-fenoxiacetic.*
Se prepară la fel ca derivatul III. Se obţin prisme albe, cu p. t. 177° C.

$C_{12}H_{19}O_4N_3S$ (301,22) Calculat: N% 13,94;
Găsit: 13,92; 14,04.

4. Concluzii

În lucrarea de faţă s-au continuat cercetările asupra sintezei unor noi derivaţi ai acizilor fenoxiacetici sulfonamidaţi, ajungînd la următoarele concluzii:

1. Esterii sulfoclorurați ai acizilor fenoxiacetici se pot amida cu amoniac sau cu amine primare şi secundare, obţinîndu-se esterii aminosulfonil-fenoxiacetici respectivi.

2. Esterii aminosulfonil-fenoxiacetici reacţionează uşor cu hidratul de hidrazină, în mediu alcoolic sau apos, rezultînd hidrazidele acizilor aminosulfonil-fenoxiacetici, cu randamente aproape teoretice.

3. Prin condensarea acestor hidrazide cu aldehide şi cetone se obţin hidrazonele corespunzătoare.

4. Condensarea hidrazidelor acizilor aminosulfonil-fenoxiacetici cu streptomicina (sulfat) se poate executa în mediu apos, slab acetic, cu formarea de streptomiciliden-hidrazine.

5. Streptomiciliden-hidrazinele sînt produse stabile, dotate cu activitate tuberculostatică.

6. S-au sintetizat 65 de compuşi noi, care pot să-şi găsească utilizare practică fie ca medicamente cu acţiune antituberculoasă, fie ca stimulatori de creştere pentru plante.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de industrii organice

BIBLIOGRAFIE

1. Щукина М. Н., Созонова Е. Д., ЖОХ, 1953, **23 (85)**, стр. 687.
2. Gheorghiu C. V., Budeanu C. H., Budeanu El., Toma A., Stavri Gr., Niţescu S., An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, S. I, 1955, **I**, *1—2*, p. 320.
3. Ciorănescu E., *Medicamente de sinteză*, Ed. tehn., Buc., 1957, p. 567.
4. Botez Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, p. 133.
5. Brînzei P., Botez Gh., Rev. Medico-Chirurgicală, Iaşi, 1961, **LXV**, *2*, p. 487.
6. Baltazzi M. E., C. R. Ac. Sci. Paris, 1955, **241**, p. 321.
7. Botez Gh., Niţescu S., Teodorovici Gr., Cruceanu M., Dogaru M., Rev. de Chimie, 1959, *2*, p. 92.
8. Neniţescu C., *Tratat elementar de chimie organică*, I, Ed. tehn. Buc., 1956, p. 390.

9. Baltazzi E., Delavigne R., C. Z., 1959, **11**, p. 3446.
10. Pagani G., Farmaco, 1959, **14**, p. 261.
11. * * * *Produse noi farmaceutice*, MIPC, Buc., 1958, p. 67.
12. Pennington F. C., Guercio P. A., Solomonsi I. A., J. Am. Chem. Soc., 1953, **9**, *75*, p. 2 261.

СУЛЬФАМИДЫ ФЕНОКСИАЦЕТНЫХ КИСЛОТ
Заметка IV
Хидразиды сучьфонамидатов фенокеиацетных кислот

(Резюме)

В виду получения новых медикаментов с туберкулезностатичным действием, были синтетизированы ряд хидразид происходящих из производных сульфонамидатов крезокеиацетных, кеиленокеиацетных, фенокеиацетных и тимокеиацетных кислот.

Для получения этих веществ употребляются этильные эфиры фенокеиацетных кислот, которые подвергаются реакции хлоросульфонирования, употребляя хлоросульфонову кислоту в избытке. Полученные сульфохлорированные эфиры амидируется аммиаком или аминами, при низкой температуре, а полученные сульфомидированные эфиры конденсируютья с гидратом гидразины в алькогольном растворе, получая соответствующие гидразиды. Выход превышает 93% во всех фазах превращений. Полученные гидразиды были определены путем их превращения в гидразоны при помощи ванилина, *н*-ацетиламино бензальдегида и ацетоны. Также путем диазитирования были получены сульфонамидирование азиды.

При конденсации гидразид сульфонамидированных фенокеиацетных кислот с сульфатом стрептомицина в водяной среде, после которого нагревания, образуются соответствующие стрептомицилиден-гидразины. Продукты отделяются от реакционной среды путем осаждения метиловым спиртом. Эти продукты являются стабильными и содержащими туберкулезностатичные качества.

Их активноьть дозирована микробиологическим путем и равна 500 u. i./мг.

Были синтетизированы 65 новых продуктов, среди которых некоторые могут получить практическое применение в качестве медикаментов, а другие в качесте стимуляторов роста растений.

SULFAMIDES DES ACIDES PHÉNOXIACÉTIQUES
Note IV
Les hydrazides des acides phénoxiacétiques sulfamidés

(Résumé)

En cherchant de nouveaux médicaments ayant une action tuberculostatique les Auteurs ont synthétisé une série de hydrazides qui proviennent des dérivés sulfamidés des acides crésoxyacétiques, xylénoxyacétiques, phénoxyacetique et thymoxyacétique.

Pour préparer ces composés on prend comme point de départ les esthers des acides phénoxyacétiques, qui sont soumis à la réaction de chlorosulfonation en utilisant un excès d'acide chlorsulfonique. On prépare les amides des esthers chlorosulfonés obtenus par traitement avec ammoniaque ou amine à froid et on condense les esthers formés avec l'hydrate de hydrazine en solution alcoolique ; il en résulte des hidrazides correspondants. Les rendements dépassent 93% dans toutes les phases de transformations. Les hydrazides ainsi preparées ont été identifiées par leur transformation en hydrazones avec vanilline, *p*-acétilamino-benzaldéhyde et acétone. D'autre part par diazotation ont été obtenues les azides sulfamidés correspondants.

Par la condensation des hydrazides des acides phénoxyacétiques sulfamidés avec le sulfate de streptomycine, en milieu aqueux, faiblement acétique, au bref chauffage, il en résulte les streptomycilidenhydrazines respectives. On sépare les composés du milieu de réaction par précipitation avec de l'alcool méthylique.

Ces produits sont des substances stables, douées de propriétés tuberculostatiques. Leurs activités, dosées par voie microbiologique, s'élèvent à aproximatif 500 u.i./mg.

On a synthétisé un nombre de 65 nouveaux composés, parmi lesquels les uns peuvent trouver une utilisation pratique comme médicaments, d'autres comme stimulateurs de croissance pour les plantes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 547.556 ; 665.5

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНДЕНСИРОВАННЫХ АРОМАТИЧЕСКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ КЕРОСИНОВОЙ ФРАКЦИИ НОРИЙСКОЙ НЕФТИ

Х. И. АРЕШИДЗЕ и Е. М. БЕНАШВИЛИ

1. *Введение*

Глубокое изучение химического состава нефтяных фракций с температурой кипения выше 150° С является одной из наиболее важных задач химии нефти.

Установление индивидуальной природы моноциклических ароматических углеводородов входящих в состав керосиновых фракций нефтей, являлось предметом исследования ряда авторов [1]...[5].

Н. Д. Зелинский и Ю. К. Юрьев [1], при исследовании ароматических углеводородов уральской (пермской) нефти показали, что окислением ароматических углеводородов с температурой кипения 150°...170° С и 225°...240° С получается бензойная кислота, что дало авторам возможность заключить о присутствии моноалкилбензолов в исследуемой нефти. Однако в работе нет указаний о том, какие именно моноалкилбензолы присутствуют в уральской нефти.

Б. А. Казанский, Г. С. Ландсберг и др. [2] установили, что коечагыльский лигроин содержит *н*-бутилбензол и другие моноалкилбензолы, присутствие которых установлено по данным группового анализа.

На IV международном нефтяном конгрессе А. В. Топчиев [3] указал, что из моноциклических ароматических углеводородов в керосиновых фракциях некоторых советских нефтей установлено содержание 1,2,3,4- и 1,2,4,5-тетраметилбензолов. На том-же нефтяном конгрессе Миллер [4] указывает на присутствие 1-метил-3-*н*-бутилбензола в оклахомской нефти.

В обзорной статье Россини [5], посвященной деятельности Американского нефтяного института, в части изучения состава и свойств нефтей, указывается на присутствие *н*-амилбензола в мидконтинетской нефти с примечанием, что присутствие этого углеводорода точно не установлено.

Х. И. Арешидзе и Е. М. Бенашвили [6] исследовали моноциклические ароматические углеводороды керосиновой фракции норийской нефти. В результате спектроскопического анализа фракции ароматических углеводородов, полученных после удаления конденсированной ароматики, было установлено присутствие в норийской нефти *н*-гексил- и изогексилбензолов, 1,3- и 1,4-диалкилзамещенных бензола и также 1,2, 3- и 1, 3, 5-триалкилзамещенных бензола.

Природа конденсированных ароматических углеводородов входящих в состав керосиновых фракций некоторых советских нефтей исследована С. С. Наметкиным с сотрудниками [7], [8].

Из сураханской нефти, с применением пикриновой кислоты, выделены и идентифицированы α-метилнафталин и 1,6-диметилнафталин [7]. В майкопской нефти тем же методом установлено присутствие нафталина, α-метилнафталина, 1,6-диметил и 1,7-диметилнафталинов [8].

Из грозненской парафинистой нефти Е. С. Покровской [9], выделены и идентифицированы аналогичным образом нафталин, α- и β-метилнафталины, 1,6- и 1,7-диметилнафталины, 1,2,7-триметилнафталин и 1,2,5,6-тетраметилнафталин.

Е. С. Покровской ускоренным пикратным методом исследованы конденсированные ароматические углеводороды норийской и мирзаанской нефтей [10]. За неимением в достаточном количестве образцов этих нефтей не было детально исследована конденсированная ароматика, входящая в состав керосиновых фракций. В частности из норийской нефти выделена смесь пикратов с температурой плавления 113°...116° С, 134°...141° С, и пикрат с температурой плавления 116°...118° С который с некоторым приближением можно считать за пикрат α-метилнафталина.

Во фракции 200°...250° С, мирзаанской нефти Х. И. Арешидзе и А. В. Киквидзе установлено присутствие нафталина, α- и β-метилнафталинов и 1,6-диметилнафталина [11].

2. *Экспериментальная часть*

Для исследования была взята фракция 200°...250° С норийской нефти из скважины № 26, в которой содержание ароматических углеводородов равно 23,1%, как это было установлено ранее одним из нас [12]. Эта фракция выделялась из остатка кипящего выше 200° С перегонкой в вакууме.

Для удаления неуглеводородных примесей исследуемая фракция обрабатывалась серной кислотой (уд. веса 1,81) в течение 15 мин, кислота бралась в количестве 8%...10% к обрабатываемой фракции. Затем фракция 200°...250° С промывалась слабым раствором соды и дистиллированной водой, сушилась над хлористым кальцием и перегонялась в вакууме. После этого фракция деароматизировалась при помощи хроматографической адсорбции на силикагеле марки КСМ, с величиной зерен 80...180 меш. В процессе адсорбции применялся пентан в качестве смещающей жидкости.

Таблица 1

№	n_D^{20}	№	n_D^{20}
1	1,4824	10	1,5176
2	1,4850	11	1,5210
3	1,4900	12	1,5233
4	1,4920	13	1,5275
5	1,4932	14	1,5305
6	1,5025	15	1,5378
7	1,5048	16	1,5412
8	1,5058	17	1,5483
9	1,5106		

В результате хроматографической адсорбции было выделено 17 узких фракций ароматических углеводородов с возрастающими показателями преломления (см. таблицу 1).

Эти фракции далее, каждая в отдельности, перегонялась в вакууме при остаточном давлении 20 мм. После перегонки фракции кипящие в одинаковых температурных пределах, объединялись. В результате перегонки были получены следующие широкие фракции ароматических углеводородов:

1. 168° С ... 182° С
2. 182° С ... 196° С
3. 196° С ... 208° С
4. 208° С ... 220° С
5. 220° С ... 235° С
6. 235° С ... 255° С
7. 255° С ... 266° С
8. 266° С ... 275° С

С целью выделения конденсированных ароматических углеводородов, каждая фракция была обработана пикриновой кислотой. К исследуемой фракции добавлялся насыщенный раствор пикриновой кислоты в этиловом спирте и смесь кипятилась на водяной бане в продолжении 1 часа; после охлаждения производилось вымораживание пикратов охлаждающей смесью (лед + поваренная соль). После удаления пикратов фракция вновь обрабатывалась пикриновой кислотой до тех пор пока не прекращалось образование пикратов и в результате охлаждения не выделялась свободная пикриновая кислота. Выделение конденсированных ароматических углеводородов производилось также обработкой фракций непосредственно сухой пикриновой кислотой. Результаты в обоих случаях получались совпадающие.

Полученные пикраты затем обрабатывались этиловым эфиром и дважды перекристаллизовывались из этилового спирта, после чего определялись их температуры плавления.

Из фракции с температурой кипения 168°...182° С в результате обработки пикриновой кислотой выделен золотисто-желтый пикрат с температурой плавления 148...149° С; эта температура плавления соответствует пикрату нафталина, который согласно литературным данным [13] плавится при 149,5° С.

Из фракции с температурой кипения 182...196° С такжевыделен в большом количестве пикрат нафталина с температурой плавления 148...149° С.

Из фракции с температурой кипения 196°...208° С аналогичным образом получен пикрат, представляющий собой оранжево-желтые игольчатые кристаллы с температурой плавления 139°...141° С. Согласно литературным данным этот пикрат соответствует пикрату α-метилнафталина [13].

Из фракций 208°...220° С получен пикрат оранжево-желтого цвета с температурой плавления 111° С, который полностью соответствует пикрату 1,6-диметилнафталина [14].

Из фракции 220°...235° С выделены два пикрата с температурой плавления 115°...116° С и 111° С, первый соответствует пикрату β-метилнафталина [13], второй 1,6 диметилнафталина.

Из фракции с температурой кипения 235°...255° С выделены два пикрата с температурой плавления 106°...108 С° и 109°...110° С, этот последний по всей вероятности соответствует 1,6-диметилнафталину, а другой, повидимому, представляет смесь пикратов, строение которых нами не установлено.

Из двух последних фракций с температурой кипения 255°...266° С и 266°...275° С получен пикрат с температурой плавления 140...142° С, который соответствует согласно литературным данным температуре плавления пикратов 1,4- и 2,6-диметилнафталинов [13].

Регенерирование конденсированных ароматических углеводородов из пикратов производилось следующим образом: к раствору пикрата в этиловом эфире прибавлялось 5%...6% аммониевое основание в количестве 1 : 1,5 в условиях энергичного перемешивания. В результате разложения пикратов в эфирный слой перешли регенерированные кон-

денсированные ароматические углеводороды, а в осадок — пикриновая кислота. Эфирный экстракт, после соответствующей промывки и сушки, перегонялся с целью удаления эфира. Выделенная таким путем смесь конденсированных ароматических углеводородов фракционировалась в вакууме при остаточном давлении 12 мм.

Таблица 2

№	t °C	n_D^{20}
1	196...225	1,5263
2	225...242	1,5575
3	242...250	1,5670

Были выделены фракции данные в таблице 2.

Состав этих фракции исследовался с помощью спектров комбинационного рассеяния по характерным частотам алкилнафталинов.

Фракция с температурой кипения 196°...225°С содержит нафталин (до 60%), $\Delta\nu$ (см$^{-1}$) : 512, 764, 1 024, 1 146, 1 377, 1 436, 1 461, 1 577; α-метилнафталин (до 10%), $\Delta\nu$ (см$^{-1}$): 513, 564, 701, 1 023, 1 375, 1 466, 1 583; β-метилнафталин (до 30%), $\Delta\nu$ (см$^{-1}$): 519, 770, 1 019, 1 338, 1 469, 1 575.

Фракция 225°...242° С покрыта фоном виден спектр только β-метилнафталина.

Фракция 242°...250° С состоит из 1,4-диметилнафталина (до 40%), $\Delta\nu$ (см$^{-1}$): 338, 479, 515, 638, 665, 705, 1 026, 1 070, 1 272, 1 466, 1 433, 1 585, 1 614; 1,6-диметилнафталина (до 15%), $\Delta\nu$ (см$^{-1}$): 168, 338, 419, 454, 490, 517, 574, 719, 1 071, 1 164, 1 244, 1 364, 1 382, 1 432, 1 467, 1 579; 2,6-диметилнафталина (до 5%), $\Delta\nu$ (см$^{-1}$): 415, 527, 755, 1 177, 1 378, 1 406 и β-метилнафталина (до 40%), $\Delta\nu$ (см$^{-1}$): 519, 770, 1 019, 1 383, 1 469, 1575. Кроме алкилнафталинов содержится также в небольших количествах монозамещенные алкилбензолы с $\Delta\nu$ (см$^{-1}$): 620, 1 000, 1 030.

Спектроскопическое исследование выполнено в Институте органической химии им. Зелинского АН СССР Ю. П. Егоровым.

3. *Выводы*

1. Исследованы кондесированные ароматические углеводороды входящие в состав керосиновой фракции с температурой кипения 200°...250° С норийской нефти, с применением хроматографической адсорбции, пикратного метода и спектроскопического анализа.

2. Установлено присутствие в исследуемой фракции нафталина, α и β-метилнафталинов, 1,4- 1,6- и 2,6-диметилнафталинов.

Поступила 23 III 1962 г.

Институт химии им. П. Г. Меликишвили АН Груз ССР, Тбилиси, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Зелинский Н. Д., *Собр. трудов*, т. **II**, Изд. АН СССР, М., 1955, стр. 499.
2. Казанский Б. А., Ландсберг Г. С., Александян В. Т., Буланова Т. Ф., Либерман А. Л., Михайлова Е. А., Платэ А. Ф., Стерин Х. И., Уголин С. А., ИАН СССР, сер. физ., 1954, *6*, стр. 704.
3. Топчиев А. В., *IV международный нефтяной конгресс*, Гостоптехиздат, М., 1956, **6**, стр. 12.

4. Миллер А. Е., *IV международный нефтяной конгресс*, Гостоптехиздат, М., 1956, **6**, стр. 61.
5. Rossini F. D., Chem. Eng. News, 1947, *4*, p. 230.
6. Арешидзе Х. И., Бенашвили Е. М., *Нефтехимия*, (в печати).
7. Наметкин С. С., Покровская Е. С., Степанцова Т. Г., ДАН СССР, 1949, **67**, стр. 847.
8. — ДАН СССР, 1950, **73**, стр. 715.
9. Покровская Е. С., ДАН, 1951, **81**, стр. 203.
10. — Тр. инст. нефти АН СССР, 1954, **4**, стр. 47.
11. Арешидзе Х. И., Киквидзе А. В., ДАН Азерб. ССР, 1959, **15**, стр. 307.
12. Бенашвили Е. М., Сообщ. АН Груз. ССР, 1956, **17**, стр. 689.
13. Beilstein, 1923, **6**, S. 272.
14. Beriley A. S., Bruyant K. R., Hancock R. A., Morrela S. U., Smith J. C., Inst. Petr. Tech., 1948, **34**, p. 667.

RESEARCH FOR THE CONDENSED AROMATIC HYDROCARBONS IN THE KEROSENE FRACTION OF THE NORIO PETROLEUM

(Summary)

The finding out of the individual nature of the aromatic hydrocarbons, constituents of the kerosene fraction of petroleum, is not only of scientific interest, but has a practical importance as well.

In this work the condensed aromatic hydrocarbons of the kerosene fraction of the Norio petroleum have been studied.

A fraction with boiling-point at 200°...250° C, isolated in vacuum, was used for the research. The aromatic hydrocarbons were isolated by means of chromatographical adsorbtion on silicagel KCM with grain size of 80...180 meshes. The aromatic hydrocarbons were subjected to vacuum distillation, which resulted in eight fractions. In order to separate the condensed aromatic hydrocarbons from monocyclic ones, every fraction was treated with picric acid until all the products in question were entirely removed.

The picrates thus obtained were recrystallized from ethyl alcohol and their melting points were determined.

The picrates were decomposed so as to isolate the condensed aromatic hydrocarbons, the individual nature of which then being determined by means of spectres of combinational dispersion, acording to characteristic alkilnaphthalene frequencies.

As the outcome of the research, there has been established the presence in the Norio petroleum of α- and β-methylnaphthalenes and of 1,4-, 1,6- and 2,6-dimethylnaphthalenes.

STUDIUL HIDROCARBURILOR AROMATICE CONDENSATE DIN FRACŢIA DE PETROL A ŢIŢEIULUI NORIAN

(Rezumat)

Problema determinării caracteristicilor individuale ale hidrocarburilor aromatice care fac parte din constituţia fracţiilor de petrol, prezintă pe lîngă un incontenstabil interes ştiinţific şi o importanţă practică considerabilă.

În această lucrare se studiază hidrocarburile aromatice condensate din fracţia de petrol a ţiţeiului norian.

În studiul întreprins s-a folosit fracţia de petrol cu punctul fierbere 200°...250° C, izolată în vid. Izolarea hidrocarburilor aromatice s-a realizat cu ajutorul absorţiei cromatografice în prezenţa silicagelului KCM cu dimensiunea grăunţelor de 80...180 linii.

Hidrocarburile aromatice au fost supuse la distilare în vid, rezultînd astfel opt fracţii. În vederea separării hidrocarburilor aromatice condensate din hidrocarbura monociclică fiecare fracţie a fost tratată cu acid picric pînă cînd toate produsele menţionate au fost complet îndepărtate.

Picraţii astfel obţinuţi au fost recristalizaţi din alcool etilic, determinîndu-se şi punctele lor de topire.

Picraţii au fost apoi descompuşi în aşa mod încît să izoleze hidrocarburile aromatice condensate, natura fiecăreia din aceste hidrocarburi fiind determinată prin intermediul spectrelor de dispersie combinate, ţinînd seama de frecvenţele caracteristice pentru alchilnaftalen.

Ca rezultat s-a stabilit prezenţa în ţiţeiul norian a α- şi β-metilnaftalenei şi a 1,4-, 1,6 şi 2,6-dimetilnaftalenei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 676.1.062 ; 541.141

К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ ФОТОДЕСТРУКЦИИ ЦЕЛЛЮЛОЗЫ

Г. Н. РОЗМАРИН
и
КР. И. СИМИОНЕСКУ
Член корреспондент Академии РНР

Доклад представленный на Республиканской научной сессии по вопросам химии в г. Клуже, 24—27 сентября 1962 г.

1. *Введение*

В ходе технологического процесса получения и переработки целлюлоза подвергается разрушительному действию света, тепла, влажности и кислорода воздуха ; это окислительное разрушение продолжается в частности в процессе получения искусственного волокна и не прекращается во время эксплуатации и хранения разного рода волокнистых материалов. Как результат вышеуказанного в макромолекулах целлюлозы появляются новые функциональные негидроксильные группы, благодаря чему окисленная целлюлоза приобретает ряд свойств — некоторые являющиеся нежелательными — другие имеющие научный и практический характер. При деструкции волокнистых материалов наблюдаются снижение механических свойств полимера, преждевременное разрушение и износ.

Самопроизвольные изменения физико-химических и физико-механических свойств полимеров, наблюдаемые во время хранения или эксплуатации таких материалов, называют *старением* [1], а реакции, вызывающие это явление и ведущие к укорочению высокомолекулярных цепей называют *деструкцией* [2]. При всем значении таких реакций, механизм, по которому они протекают, до сих пор еще не выяснен ввиду их сложности. По принятой некоторыми авторами классификации различают следующие типы реакции деструкции целлюлозы [3], [4] :

I. Деструкция, вызываемая физическими воздействиями : а) реакции разрыва цепи — деполимеризация (реальная, необратимая деструкция) ; б) реакции, не приводящие к разрыву цепей (потенциальная деструкция).

II. Деструкция, вызываемая химическими реагентами : а) реакции деполимеризации (реальная, необратимая деструкция) ; б) реакции без разрыва цепей (потенциальная деструкция).

При изучении механизма деструкции прибегают к различным методам искусственного старения волокнистых материалов, определяя этим так называемую *долговечность* изделий. У нас подобные работы велись еще с 1953 г. Так, например, Кр. Симионеску и Э. Поппель исследовали влияние ультрафиолетового излучения на целлюлозу [5] и бумагу [6], [7] в присутствии некоторых антиокислителей ; указанные авторы изучили также и влияние различных технологических факторов на старение бумаги [8]. В этой области нами проведены новые исследования по деструкции целлюлозы и бумаг различных сортов [9].

Настоящая работа задалась целью установить примерный механизм, по которому протекает фотохимическая деструкция, вызванная УФ-излучением у целлюлоз различных происхождения (еловая, буковая, тростниковая, соломеная), назначения (химическая, вискозная, бумагоделательная) и различных методов варки (сульфитная, сульфатная).

2. *фотохимическая деструкция целлюлозы*

В качестве источника УФ-излучения применяли лампы У-300 (250 ватт) и У-500 (450 ватт), вмонтированные к генератору „Thelta Sonne“ (VEB Berliner Glühlampen Werk), и обладающие спектром волн 210...410 ммк.

Облучали следующие виды целлюлозы:

1. Бисульфитная вискозная (из ели), шведского производства, (толщина материала 1,0 мм).
2. Бисульфитная вискозная (из ели), норвежского производства, (толщина материала 0,8 мм).
3. Бисульфитная облагороженная „альфа“ (из ели), румынского производства, (толщина материала 1,2 мм),
4. Сульфатная вискозная (из бука, с предгидролизом), чехословацкого производства, (толщина материала 1,5 мм).
5. Сульфатная вискозная (из тростника *Phragmites communis* с предгидролизом), полученная в ГДР, (толщина материала 0,9 мм).
6. Бисульфитная вискозная (из тростника *Arundo donax* с предгидролизом), итальянского производства, (толщина материала 1,2 мм).
7. Бисульфитная беленая бумагоделательная (из ели), шведского производства, (толщина материала 1,0 мм).
8. Бисульфитная беленая бумагоделательная (из ели), югославского производства, (толщина материала 1,3 мм).
9. Сульфатная крафт-целлюлоза беленая (из ели), шведского производства, (толщина материала 1,0 мм).
10. Бисульфитная беленая бумагоделательная (из ели), румынского производства, (толщина материала 1,0 мм).
11. Сульфатная беленая (из тростника *Phragmites communis*) румынского производства, (толщина материала 1,5 мм).

Образцы целлюлозы облучали попеременно с обеих сторон на расстоянии 10 см от излучателя „Thelta Sonne“ (температура у поверхности целлюлозного листа, 40° С). Продолжительность излучения, от 10 до 100 час. Облученные образцы целлюлозы после измерения степени белизны тщательно распушивали, потом определяли содержание α-, β-, γ-целлюлозы, функциональных групп (альдегидных, кетонных, карбоксильных) и степень полимеризации. Анализ ведется по методике, указанной в [10].

На рис. 1...6 представлены полученные результаты для вискозных и химических целлюлоз, облученных лампой У-300. Анализ этих данных позволил прийти к следующим выводам:

а) Все указанные показатели существенно изменяют свои значения за 10 час УФ-облучения; наблюдается снижение содержания

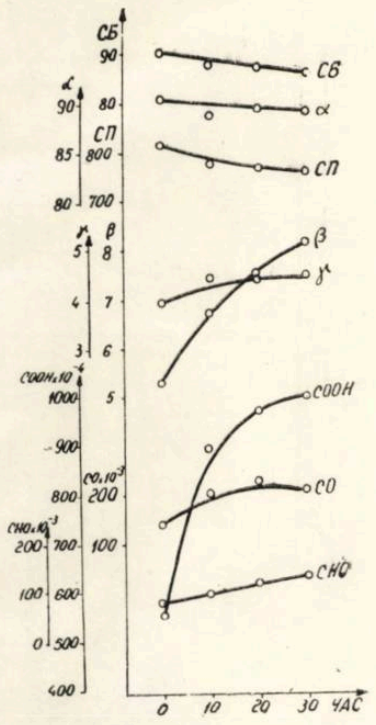


Рис. 1. — Изменение физико-химических показателей под влиянием УФ-света для бисульфитной вискозной целлюлозы из ели (шведского производства).

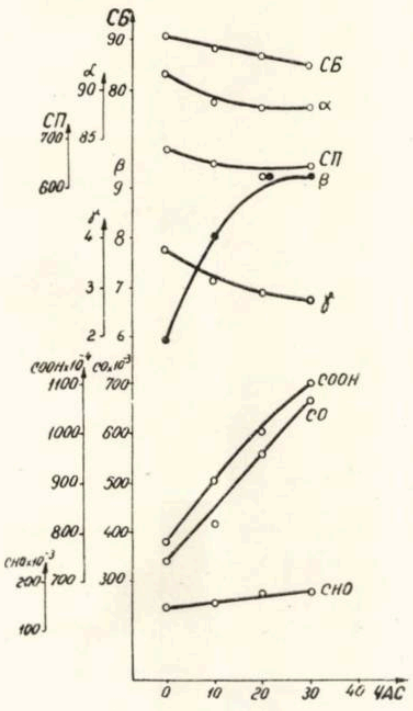


Рис. 2. — Изменение физико-химических показателей под влиянием УФ-света для бисульфитной вискозной целлюлозы из ели (норвежского производства).

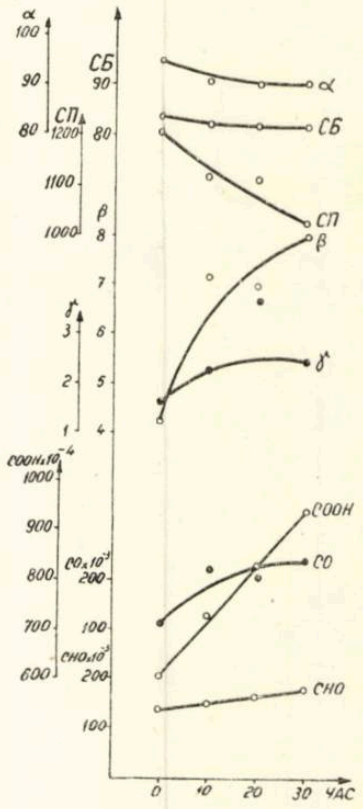


Рис. 3. — Изменение физико-химических показателей под влиянием УФ-света для бисульфитной облагороженной целлюлозы „альфа" из ели (румынского производства).

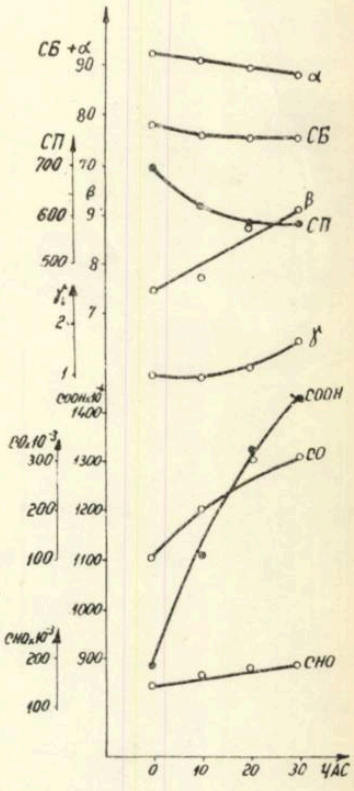


Рис. 4. — Изменение физико-химических показателей под влиянием УФ-света для сульфатной вискозной целлюлозы из бука (с предгидролизом), чехословацкого производства.

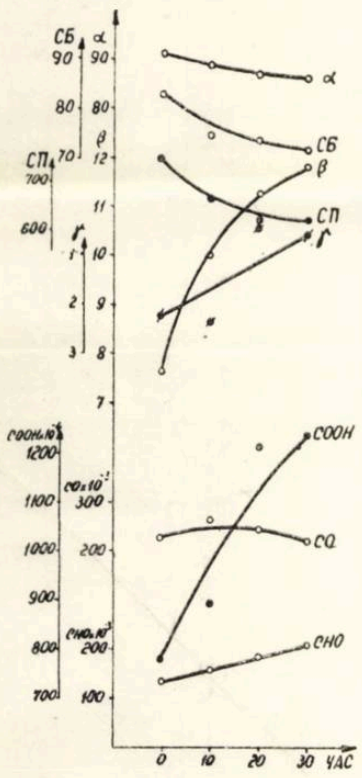


Рис. 5. — Изменение физико-химических показателей под влиянием УФ-света для сульфатной вискозной целлюлозы из румынского тростника (с предгидролизом), полученной в ГДР.

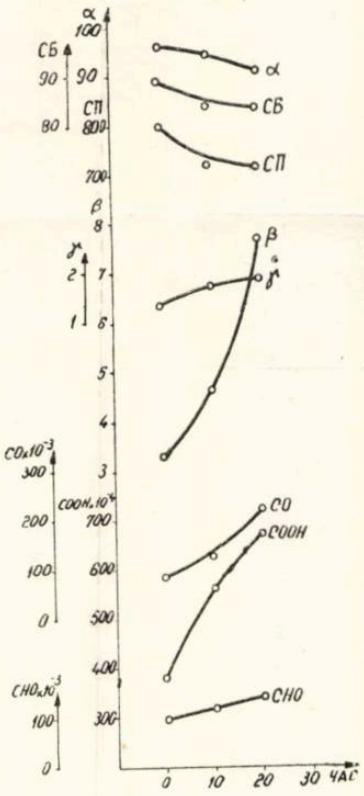


Рис. 6. — Изменение физико-химических показателей под влиянием УФ-света для бисульфитной вискозной целлюлозы (с предгидролизом), из итальянского тростника.

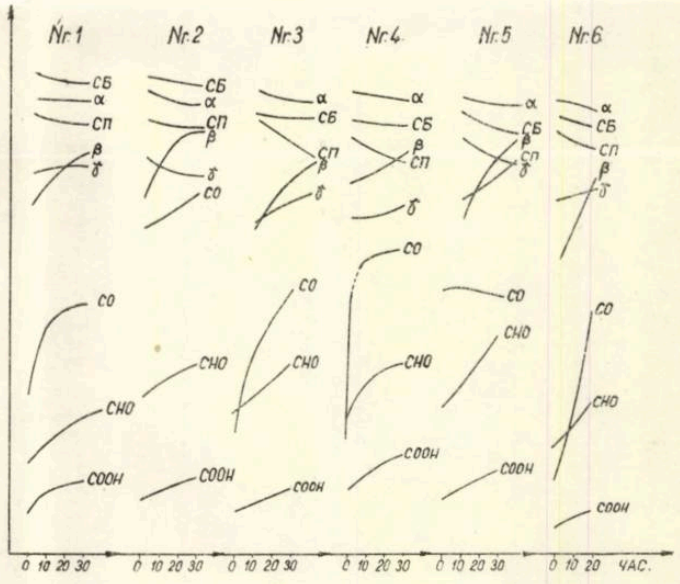
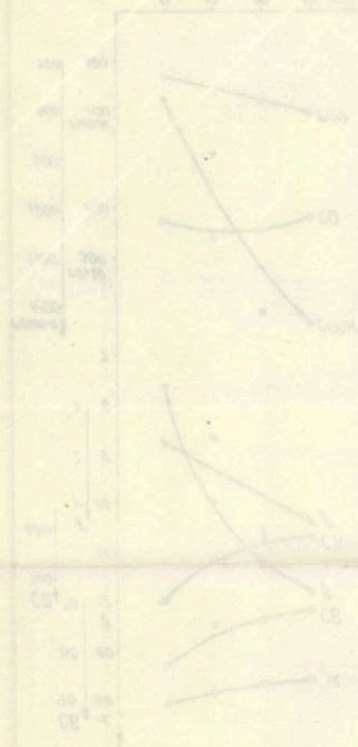


Рис. 7. — Общая картина изменений, наблюдаемых под влиянием УФ-света, для вискозных и химических целлюлоз.



α-целлюлозы, степени белизны (СБ) и степени полимеризации (СП) с одновременным повышением содержания гемицеллюлоз и функциональных групп. При увеличении времени облучения деструкция проявляется интенсивнее.

б) Целлюлозы с завышенным (около 95%) начальным содержанием α-целлюлозы более чувствительны к процессам деструкции: например, для целлюлозы „альфа" (PHP) и вискозной из тростника (Италия) вследствие облучения установлено снижение на 5% содержания α-целлюлозы и одновременное повышение содержания гемицеллюлоз; СБ и СП также значительно снизились.

в) Содержание γ-целлюлозы не влияет на исход деструкции: всегда содержание гемицеллюлоз повышается за счет β-целлюлозы.

г) Интенсивнее протекает деструкция в случае целлюлоз из бука и тростника по сравнению с еловой, что отмечается значительной деполимеризацией, окислительными процессами, снижением СБ; целлюлоза из *Arundo donax* (итальянский тростник) оказалась более стойкой, чем из *Phragmites communis* (румынский тростник), благодаря низкому содержанию гемицеллюлоз.

д) Установлены следующие изменения: содержание α-целлюлозы снижается в среднем на 4%, в то время как содержание гемицеллюлоз повышается на 50%; СП снижается на 10%, а СБ — на 5%. Соответственное повышение процентного содержания функциональных групп (альдегидных, кетонных, карбоксильных): 30; 100 и 50% по сравнению с контролем (преобладают кето-группы).

е) Выражая содержание функциональных групп в экв-г —CHO, —CO— и —COOH на 100 глюкозных единиц и рассматривая значения отношения CO/COOH, констатируется большая скорость появления кето-групп по сравнению с остальными группами. Среди данного типа вискозных целлюлоз менее устойчивыми оказались целлюлозы из бука и тростника. На рис. 7 дана общая картина указанных выше изменений (содержание функциональных групп выражено в экв-г/100 глюкозных единиц).

Бумагоделательные целлюлозы также облучались УФ-светом от ламп У-300 и У-500 (рис. 8...13). Из полученных данных следует:

а) В общих чертах наблюдаются аналогичные результаты, а именно, деструкция значительна при большем содержании гемицеллюлоз. Увеличение продолжительности облучения вызывает еще большую деструкцию; содержание гемицеллюлоз во всех случаях повышается за счет обогащения β-целлюлоз.

б) Деструктивное влияние двух ламп (У-300 и У-500) ничем не различается; завышенная желтизна под влиянием лампы У-500 объясняется появлением большего числа CO-групп.

в) Для сульфитных еловых целлюлоз наблюдается примерно одинаковая глубина деструкции; отмечена повышенная скорость пожелтения шведской и югославской целлюлоз.

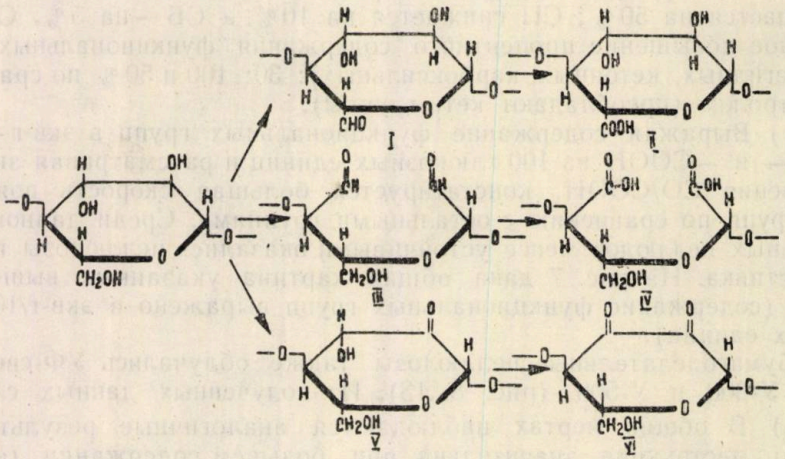
г) В случае еловых целлюлоз, сульфатные более устойчивы чем бисульфитные, а наименьшей стойкостью обладает тростниковая целлюлоза.

д) Отмечаются следующие изменения показателей: содержание α-целлюлозы падает на 3% (меньшее в сравнение с химическими целлюлозами), β-целлюлозы повышается на 50%, γ-целлюлозы не изменяется, СП снижает на 10% свое значение. Содержание функциональных групп, а также СБ, варьируют в более широком интервале по сравнению с предыдущей группой целлюлоз. Выявляется некоторая пропорциональность между СБ и содержанием СО-групп.

Фотохимическая деструкция бумагоделательной целлюлозы протекает различно, в зависимости от исходного сырья и метода варки. На рис. 14 дано общее графическое представление указанных изменений (содержание функциональных групп расчитано в виде отношения соответствующих эквивалентов к 100 глюкозным остаткам).

Вышеизложенный материал по фотодеструкции различного сорта целлюлоз указывает на двойной характер протекающих реакций: *фотолитический* (падение СП и содержания α-целлюлозы) и *окислительный* (повышение желтизны и содержания функциональных групп).

Главные типы окислительных реакций, протекающих в глюкозном звене, можно представить следующей схемой:



Вероятность протекания окисляющего действия УФ-излучений равна для всех типов указанных реакций (I...VI). Учитывая это, заключаем, что скорость образования кето-групп является превалирующей по сравнению со скоростью появления СООН-групп, а потому *фотоокислительные реакции являются кетонного типа* (V, VI).

3. *фотолитическая деструкция целлюлоз*

Для установления глубины фотолитических реакций проводилось облучение более тонких слоев целлюлозы (предварительно размолотой до 40° ШР), из которых отливались листы толщиной в 0,1 мм (80 г/м²);

применяли два источника: лампы У-500 (на расстоянии 10 см) и две бактерицидные лампы типа БУВ, имеющие преобладающее излучение в области 253,7 ммк и смонтированные на алюминиевом щите (продолжительность облучения соответственно 100 и 240 час). Следует отметить, что БУВ-лампы излучают „холодный" свет, т. е. в последнем случае исключается влияние температуры.

Изучались целлюлозы следующих сортов:

1. Бисульфитная беленая, шведского происхождения, (из ели), для бумажного производства (принятое сокращение БЕБ).

2. Бисульфитная вискозная, шведского производства, (из ели) (принятое сокращение ВЕ).

3. Сульфатная вискозная (с предгидролизом), полученная в ГДР из румынского тростника (принятое сокращение ВТ).

4. Сульфатная беленая (из тростника) для бумажного производства, полученная в РНР (сокращенно БТ).

5. Сульфатная (крафт) беленая шведского производства, (из ели), для бумаг специальных сортов (БЕК).

6. Моносульфитная беленая (из соломы), полученная в РНР, (принятое сокращение БСМ).

Полидисперсность нормальных и облученных целлюлоз определялась фосфорнокислотным методом [11]. Результаты представлены на рис. 15. При рассмотрении полученных данных выявляется более энергичное воздействие лампы У-500 по сравнению с БУВ-лампами, хотя продолжительность облучения была наполовину меньше. Бумагоделательные сорта оказались более стойкими по сравнению с вискозными, а сульфатные — более стойки, чем бисульфитные. Соломеная целлюлоза ведет себя своеобразно, благодаря присутствию большого количества гемицеллюлоз.

Анализ полидисперсности целлюлоз показывает, что УФ-облучение ведет либо к повышению гомогенности системы (когда контрольные пробы обладают большой степенью полидисперсности), либо к дезорганизации молекулярного распределения (когда контрольные образцы гомогенны). Отмечается высокое качество ВЕ (80% фракций со СП 430...800), которая под влиянием интенсивного деструктирующего действия ламп У-500 значительно изменяет свой молекулярный состав; более умеренное воздействие БУВ-ламп также вызывает сильный распад. ВТ обладает хорошей молекулярной гомогенностью (80% фракций со СП 430...800). Облучение ведет к смещению дисперсии в область СП 10...430. БТ обогащается за счет облучения фракциями со СП 200...300 и 300...430. Следует отметить большую стойкость БЕК, содержащую 50% фракций со СП 800...1 200 и более. Несмотря на продолжительность облучения расщеплению подвергается только VIII-я фракция (СП $>$ 1 200). Не наблюдается больших изменений в полидисперсности целлюлозы из соломы, благодаря, очевидно, большому начальному содержанию гемицеллюлоз.

Изучение полидисперсности целлюлоз, облученных УФ-лучами, показало, что при длительном освещении в основном протекают реакции *фотолитического* распада высокомолекулярных цепей целлюлозы.

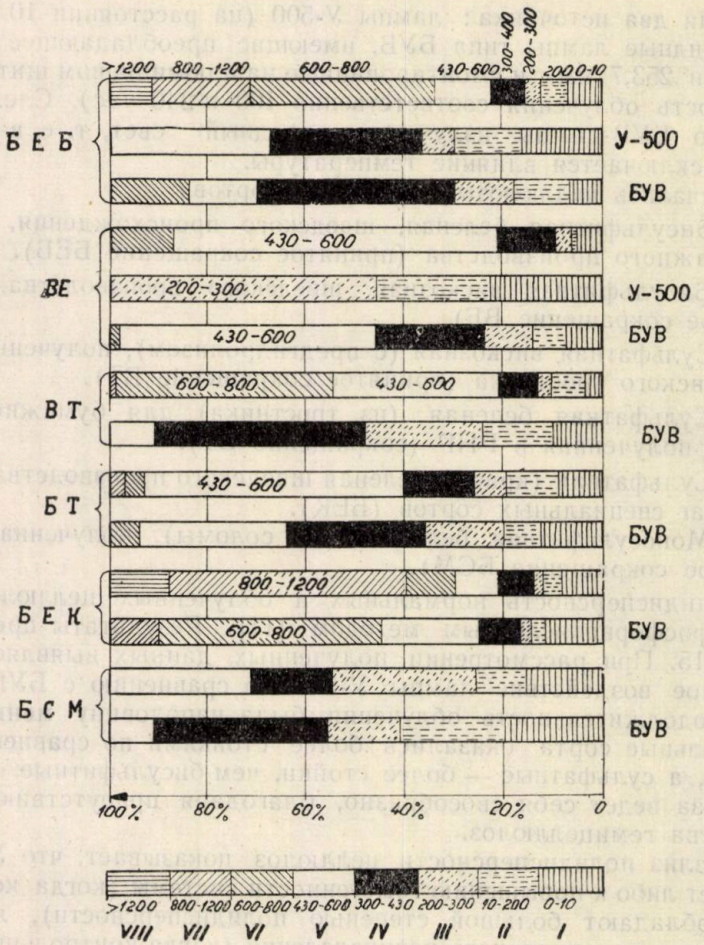


Рис. 15. — Изменение молекулярного состава целлюлоз, подвергаемых действию УФ-лучей.

4. *Спектроскопическое изучение фотодеструкции*

Спектроскопические методы исследования имеют исключительное значение благодаря их чувствительности при незначительном количестве различных функциональных групп. Спектры сняты на спектрофотометре UR-10 K. Zeiss-Jena. Применялись целлофан (из продажи) в качестве модели целлюлозы и эфироцеллюлозные пленки — с целью установления влияния природы заместителя на поведение материала в процессе деструкции. Интересным оказалось параллельное наблюдение за ходом реакции фотоокисления карбоцепных полимеров (например, полиэтилена); возможно, что присутствие кислорода в молекуле влияет на механизм окисления. Ниже приведены толщина и природа используемых нами полимеров:

1. Целлофан (Ц); толщина 0,04 мм.
2. Метилцеллюлоза (МЦ); толщина 0,015 мм.
3. Карбоксиметилцеллюлоза (КМЦ); толщина 0,05 мм.
4. Бензилцеллюлоза (БЦ); толщина 0,07 мм.
5. Ацетилцеллюлоза (АЦ); толщина 0,04 мм.
6. Нитроцеллюлоза (НЦ); толщина 0,09 мм.
7. Полиэтилен (ПЭ); толщина 0,09 мм, которые облучались 240 час бактерицидными лампами.

Спектр поглощения *целлофана* приведен на рис. 16; наблюдаются следующие полосы: 3300, 2940, 1650, 1428, 1360, 1340, 1325, 1150...950, 705 $см^{-1}$ [12]. При 3300 $см^{-1}$ находится полоса, соответствующая симметричному валентному колебанию гидроксилов, вклю-

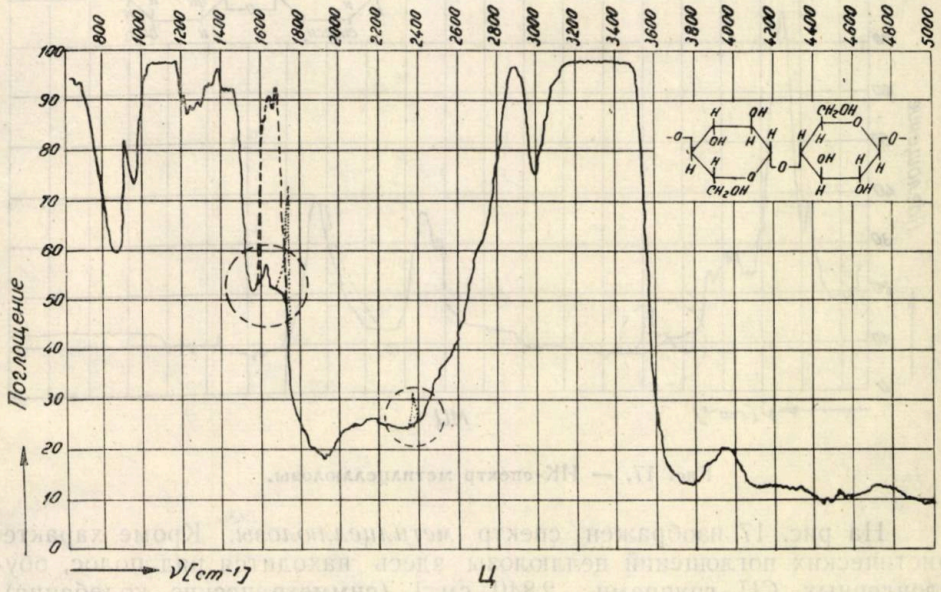


Рис. 16. — ИК-спектр целлофана.

ченных в водородную связь. Поглощение при 2940 $см^{-1}$ относится к валентным колебаниям атомной группы CH, а при 1428 $см^{-1}$ — к деформационным внутренним колебаниям CH_2-группы. Полосы при 1360, 1340 и 1325 $см^{-1}$ вызваны деформационными колебаниями HO-группы при 6-ом атоме углерода глюкозного ядра. Область поглощения 1150...970 $см^{-1}$ чувствительна к валентным колебаниями пиранозного кольца, глюкозидной связи —C—O—C—, связи C—O—, крутильным колебаниям CH_2-группы и др. Спорной осталось объяснение полосы при 705 $см^{-1}$. Поглощение при 1650 $см^{-1}$ вызвана наличием влажности.

Используемая пленка целлофана содержит дополнительно двойную (дублетную) полосу при 1635 и 1650 $см^{-1}$, очевидно, за счет пластификатора (прерывная линия - - -); в спектре такой пленки не обнаружено никаких изменений в результате облучения, хотя и наблю-

дается ухудшение механических показателей (растрескивание). Удаление пластификатора (кипячением дистиллированной водой) из контрольного образца изменило спектр в области 1600...1700 $см^{-1}$ (непрерывная линия ——). В результате облучения целлофана без пластификатора установлено появление двух новых полос (пунктирная линия ...): при 1740 $см^{-1}$, соответствующей валентным колебаниям карбонильных групп, и при 2375 $см^{-1}$ (?).

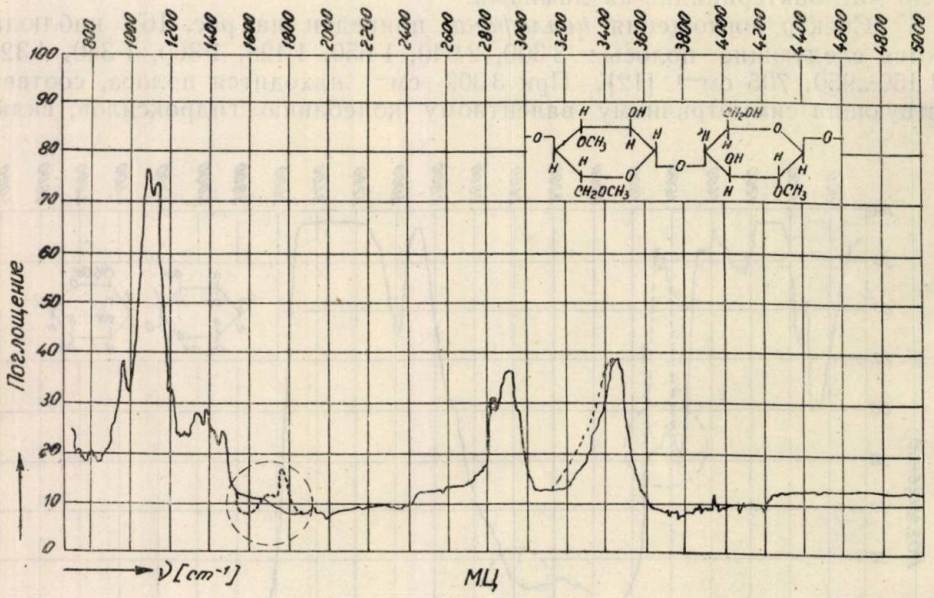


Рис. 17. — ИК-спектр метилцеллюлозы.

На рис. 17 изображен спектр *метилцеллюлозы.* Кроме характеристических поглощений целлюлозы здесь находится ряд полос, обусловленных CH_3-группами: 2840 $см^{-1}$ (симметрические колебания), 1465 $см^{-1}$ (деформационные асимметрические колебания) и 1920 $см^{-1}$ (валентные колебания третичного углерода CH-групп и асимметрические колебания CH_3-групп) в виде сплошной полосы. Следует отметить, что при 3480 $см^{-1}$ (полоса, принадлежащая HO-группам целлюлозы) наблюдается снижение интенсивности поглощения в результате метилирования. Деструкция вызывает появление новой полосы карбонильных групп при 1740 $см^{-1}$ и расширение полосы при 3480 $см^{-1}$, благодаря вступлению новых количеств HO-групп в водородную связь.

Карбоксиметилцеллюлоза (натриевая соль, рис. 18) обладает полосой при 2100 $см^{-1}$ (валентные колебания эфирно-метильной группы, деформационные колебания CH- и HO-групп целлюлозы) и рядом полос при 1620, 1470 и 1370 $см^{-1}$ (карбоксилат-ионы). Деструкция вызывает появление полосы карбонильной группы (1740 $см^{-1}$).

Спектр *бензилцеллюлозы* (рис. 19) содержит ряд новых полос: 3110, 3093, 3065, 3035, 3010 $см^{-1}$ (валентные колебания CH-групп

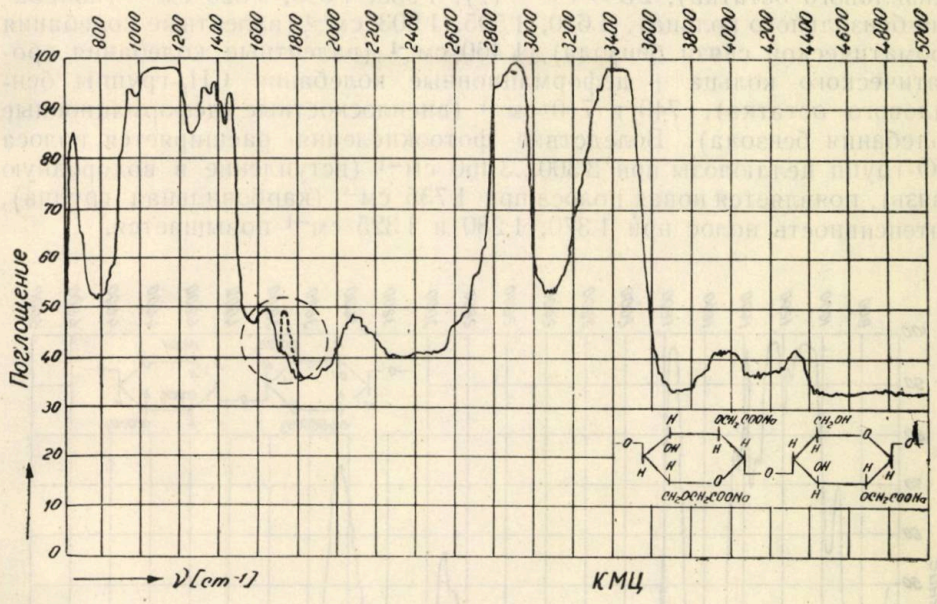


Рис. 18. — ИК-спектр карбоксиметилцеллюлозы.

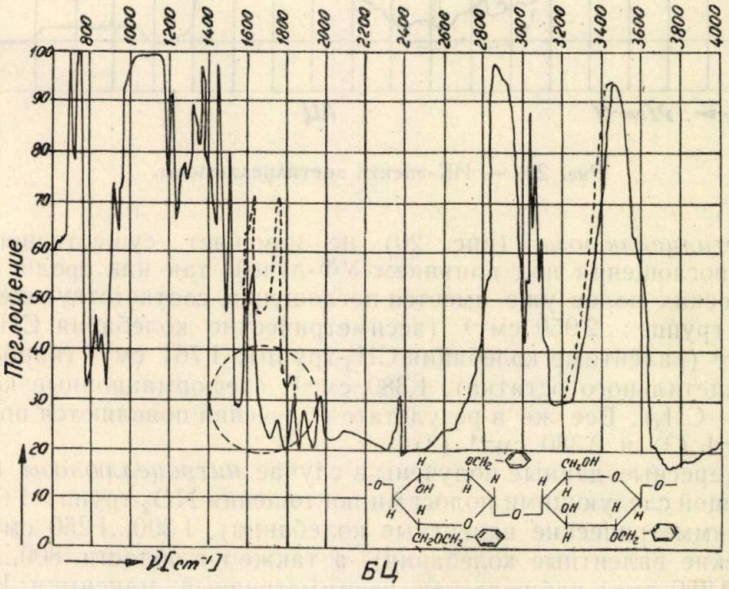


Рис. 19. — ИК-спектр бензилцеллюлозы.

бензольного кольца); 2 930, 2 875 см$^{-1}$ (валентные колебания CH_2-групп бензилового остатка), 2 330 см$^{-1}$ (?), 1 960, 1 880, 1 820 см$^{-1}$ (колебания бензольного кольца), 1 610, 1 595, 1 503 см$^{-1}$ (валентные колебания ароматической связи бензола), 1 460 см$^{-1}$ (валентные колебания ароматического кольца + деформационные колебания CH_2-группы бензилового остатка), 740 и 710 см$^{-1}$ (внеплоскостные деформационные колебания бензола). Вследствие фотоокисления расширяется полоса НО-групп целлюлозы при 3 300...3 450 см$^{-1}$ (вступление в водородную связь), появляется новая полоса при 1 735 см$^{-1}$ (карбонильная группа), интенсивность полос при 1 370, 1 280 и 1 325 см$^{-1}$ повышается.

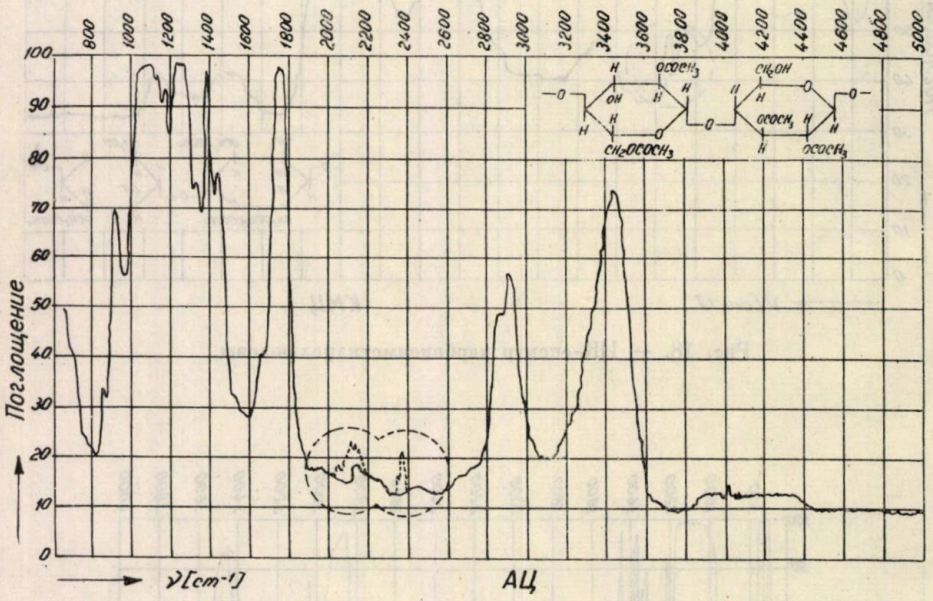


Рис. 20. — ИК-спектр ацетилцеллюлозы.

Ацетилцеллюлоза (рис. 20) не изменяет существенно своего спектра поглощения под влиянием УФ-лучей, так как среди ее характеристических полос уже имеется поглощение, соответствующее карбонильной группе: 2 950 см$^{-1}$ (ассиметрические колебания CH_3-групп), 2 800 см$^{-1}$ (валентные колебания CH_3-групп), 1 761 см$^{-1}$ (карбонильная группа ацетильного остатка), 1 380 см$^{-1}$ (деформационные колебания групп C—CH_3). Все же в результате облучения появляются полосы при 2 100 см$^{-1}$ (?) и 2 380 см$^{-1}$ (?).

Интересные данные получены в случае *нитроцеллюлозы* (рис. 21), обладающей следующими полосами поглощения NO_2-групп: 1 650...1 600 см$^{-1}$ (асимметрические валентные колебания), 1 300...1 250 см$^{-1}$ (симметрические валентные колебания), а также и в области 800...500 см$^{-1}$. При ~ 3 380 см$^{-1}$ наблюдается несимметричный максимум НО-групп целлюлозы, что объясняется слабой степенью ассоциации. Однако,

деструкция под влиянием УФ-света вызывает существенные изменения в спектре: снова появляются характеристические полосы поглощения целлюлозы (CH- и HO-групп), частично остаются полосы нитро-групп (~ 1 660, 1 290, ~ 850 $см^{-1}$), а при 1 745 $см^{-1}$ появляется новая полоса карбонильной группы. Ширина полосы HO-групп в деструктированном материале доказывает колосальную степень ассоциации HO-групп, путем вступления в водородную связь. Пленка в результате облучения потеряла прозрачность, стала рассыпаться в порошок желтовато-бурого цвета, поэтому для снятия спектра применили метод таблетирования.

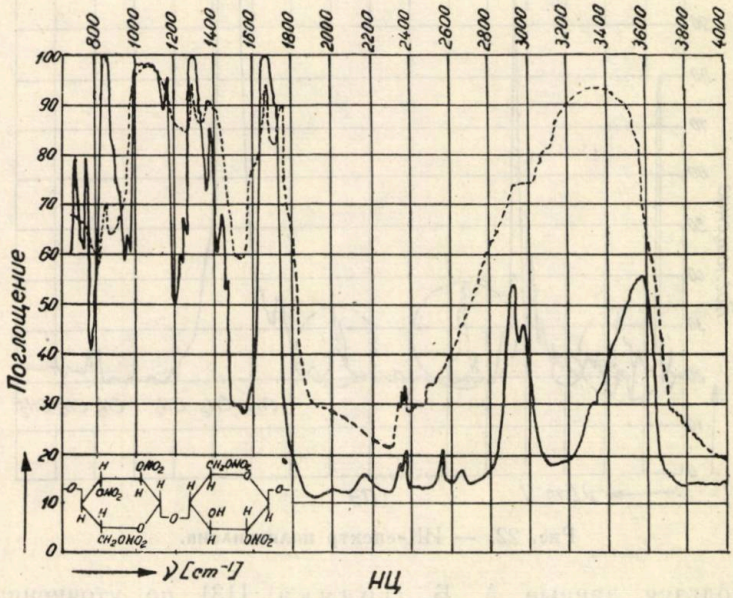


Рис. 21. — ИК-спектр нитроцеллюлозы.

На рис. 22 представлен спектр *полиэтилена* — карбоцепного полимера, содержащий следующие характеристические полосы поглощения: 2 925 $см^{-1}$ (асимметрические валентные колебания CH_2-группы), 2 855 $см^{-1}$ (симметрические колебания CH_2-группы), 1 472 $см^{-1}$ (деформационные колебания CH_2-группы), 1 380 $см^{-1}$ (деформационные колебания CH_3-групп); 723, 733 $см^{-1}$ (дублетные максимумы, благодаря пластификатору). Под влиянием УФ-облучения появляется новая полоса карбонильной группы при 1 720 $см^{-1}$, менее интенсивная полоса при 1 650 $см^{-1}$ (валентные колебания ненасыщенной связи C=C), а также полоса поглощения при 910 $см^{-1}$ (валентные колебания $C=CH_2$-групп). При полном отсутствии кислорода в молекуле, полимер окисляется за счет кислорода воздуха, образуя под действием УФ-света карбонильные группы и ненасыщенные соединения.

Из анализа вышеприведенных спектров можно прийти к общему замечанию, что в результате УФ-излучения констатируются существенные химические и структурные изменения: появляются полосы карбо-

нильных групп (в интервале 1 720...1 760 $см^{-1}$), часть которых принадлежит СООН-группам (ввиду увеличенного поглощения в области 2 600...2 800 $см^{-1}$). Полоса при ~ 2 380 $см^{-1}$ (облученный Ц, БЦ, облученная АЦ, НЦ) осталась необъясненной. Деструкция сопровождается пожелтением пленок, ухудшением механических показателей, сильной деполимеризацией (снижается вязкость растворов).

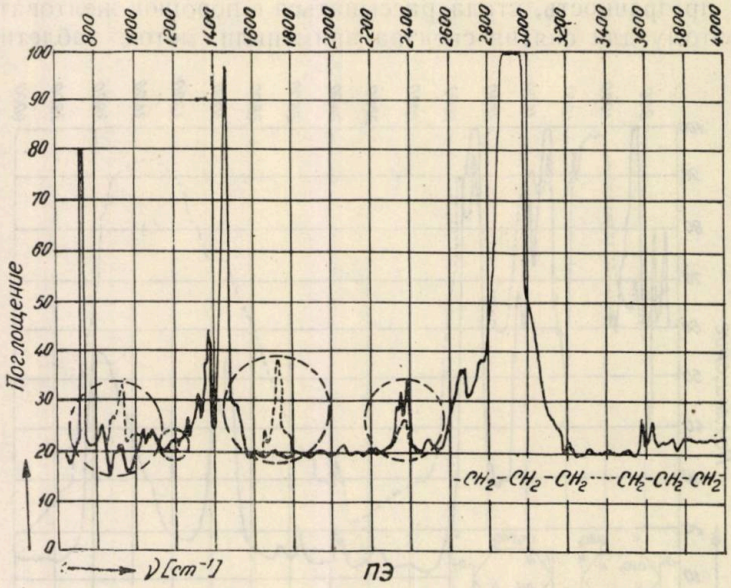


Рис. 22. — ИК-спектр полиэтилена.

Используя данные А. Б. Поляка [13] по уточнению полос поглощения карбонильной группы в препаратах целлюлозы:

1 725 $см^{-1}$	1 750 $см^{-1}$	1 760 $см^{-1}$
—C=O (C—6) \OH	—C=O (C—2, C—3) \OH	>C=O (C—2, C—3)

можно заключить, что в Ц, МЦ, КМЦ и НЦ (ν_{CO} = 1 740 $см^{-1}$) происходит, под влиянием УФ-облучения, окисление вторичных спиртовых групп элементарного звена; БЦ окисляется, возможно, у шестого атома углерода (ν_{CO} = 1 735 $см^{-1}$). Спектр АЦ не поставляет данных по механизму деструкции. ПЭ (ν_{CO} = 1 720 $см^{-1}$) обогащается альдегидными соединениями [14] окисляясь с участием кислорода воздуха.

Изучение ИК-спектров поглощения показало, что *фотоокисление проходит с участием кислорода воздуха,* что в результате такого воздействия *появляются новые карбонильные группы* (кетонные, карбоксильные). Введение различных заместителей *снижает светостойкость целлюлозы* (МЦ, КМЦ, НЦ). УФ-облучение вызывает *сильные эффекты переуплотнения макромолекул.*

5. *Выводы*

Фотохимическая деструкция целлюлозы сопровождается как фотолитическими, так и окислительными явлениями. Старение целлюлозных волокнистых материалов зависит от природы исходного сырья, метода варки и содержания высокомолекулярных фракций. Окисление целлюлозы протекает по кетонному типу с участием кислорода воздуха (более уязвимыми оказались вторичные спиртовые группы и глюкозидные связи *1—4*). Деструкция вызывает существенные структурные уплотнения производных целлюлозы.

Ясский политехнический институт,
Кафедра целлюлозы, бумаги
и искусственного волокна

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьминский А. С., Усп. хим., 1955, **25**, стр. 842—872.
2. Rogovin Z. A., Şorîghina N. N., *Chimia celulozei şi a substanţelor însoţitoare*, Ed. Tehn., Buc., 1958, p. 246.
3. Грасси Н., *Химия процессов деструкции полимеров*, ИНИ, М., 1959, стр. 8—11, (перев. с англ.).
4. Meller A., Proc. Austr. Pulp a. Paper Ind. Techn. Asoc., 1955, **9**, p. 192.
5. Simionescu Cr., Poppel E., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1953, **4**, *1—4*, pp. 257—266.
6. — St. şi cerc. şt. Acad., R.P.R., filiala Iaşi, 1954, **5**, *3—4*, pp. 153—170.
7. — Ind. lemn. cel. şi hîrtiei, 1953, **2**, *3*, pp. 25—29.
8. Poppel E., *Cercetări de chimie aplicată în tehnologia hîrtiei*, Disertaţie, Inst. polit., Iaşi, 1958.
9. Simionescu Cr., Poppel E., Rozmarin Gh., Celuloză şi hîrtie, 1961, **10**, *11*, pp. 388—403.
10. * * * *Справочник по аналитическому контролю в производстве искусственных и синтетических волокон*, Гизлегпром, М., 1957.
11. Никитин В. М., *Химия древесины и целлюлозы*, Гослесбумиздат, М.—Л., 1960, стр. 188—189.
12. Ермоленко И. Н., *Спектроскопия в химии окисленных целлюлоз*, Изд. АН БССР, Минск, 1959.
13. Поляк А. Б., Тр. Ленингр. лесот. ак. им. С. М. Кирова, 1960, *91*, стр. 95—100.
14. Кросс А., *Введение в практическую ИК-спектроскопию*, ИНИ, М., 1960, (перев. с англ.).

ÜBER DEN PHOTOCHEMISCHEN ABBAUMECHANISMUS DES ZELLSTOFFES

(Zusammenfassung)

Der photochemische Abbau des Zellstoffes ist von Photolitische- und Oxydationsphenomäne begleitet. Die Älterung der Faserstoffmaterialen ist von der Art des Rohstoffes, von den Aufschlussverfahren, wie auch von den Hochmolekülarfraktionengehalt (P. G. 1 000...1 200 und über 1 200), bedingt.

Die Oxydation verläuft wie eine Keto-oxydationsreaktion, mit Teilnahme des Luftsauerstoffes (die meinst angriffbare sind die Alkoholgruppen aus der Stelle *2* und *3* des Elementarringes der Cellulose und die glykosidischen Bindungen *1—4*).

Der Abbau verursacht zugleich Veränderungen der Strukturpackungsgrades der Celullosederivaten.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der Fichtensulfitzellstoffen für K. S., (schwedische Fabrikation), unter dem Einfluss der UV-Strahlung.

Abb. 2. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der Fichtensulfitzellstoffen für K. S., (norwegische Fabrikation), unter dem Einfluss der UV-Strahlung.

Abb. 3. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der veredelten Fichtensulfitzellstoffen „Alpha", (rumänische Fabrikation), unter dem Einfluss der UV-Strahlung.

Abb. 4. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der Buchensulfatzellstoffen für K. S. (mit Vorhydrolyse), (tschechoslowakische Fabrikation), unter dem Einfluss der UV-Strahlung.

Abb. 5. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen des Schilfsulfatzellstoffen *Phragmites communis* (mit Vorhydrolise), (D. D. R.-Erzeugniss), unter dem Einfluss der UV-Strahlung.

Abb. 6. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen des Schilfsulfitzellstoffen *Arundo donax* (mit Vorhydrolise), (italienische Fabrikation), unter dem Einfluss der UV-Strahlung.

Abb. 7. — Das Gesammtbild der Veränderungen, welche bei der UV-Bestrahlung von den Zellstoffen für K. S. und Alpha zu beobachten sind.

Abb. 8. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der gebleichten Fichtensulfitzellstoffen, (schwedische Erzeugniss), unter dem Einfluss der UV-Strahlung (U-500).

Abb. 9. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der gebleichten Fichtensulfitzellstoffen, (schwedische Erzeugniss), unter dem Einfluss der UV-Strahlung (U-500).

Abb. 10. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der gebleichten Fichtensulfatzellstoffen (kraft), (schwedische Erzeugniss), unter dem Einfluss der UV-Strahlung (U-300).

Abb. 11 — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der gebleichten Fichtensulfitzellstoffen, (jugoslawische Erzeugniss), unter dem Einfluss der UV-Strahlung (U-500).

Abb. 12. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der gebleichten Fichtensulfitzellstoffen, (rümanische Fabrikation), unter dem Einfluss der UV-Strahlung (U-500).

Abb. 13. — Die Veränderung der physisch-chemischen Kennzahlen der gebleichten Schilfsulfatzellstofen, (rumänische Erzeugniss), unter dem Einfluss der UV-Strahlung (U-500).

Abb. 14. — Das Gesammtbild der Veränderungen, welche bei der UV-Bestrahlung vom Papierzellstoffen zu beobachten sind.

Abb. 15. — Die Veränderung der Zusammensetzung von den Zellstoff-Fraktionen bei der UV-Bestrahlung.

Abb. 16. — Das U. R.-Spektrum der Cellophans.

Abb. 17. — Das U. R.-Spektrum der Methylcellulose.

Abb. 18. — Das U. R.-Spektrum der Carboxymethylcellulosse.

Abb. 19. — Das U. R.-Spektrum der Benzylcellulose.
Abb. 20 — Das U. R.-Spektrum der Acethylcellulose.
Abb. 21. — Das U. R.-Spektrum der Nitrocellulose.
Abb. 22. — Das U. R.-Spektrum der Polyethylene.

ASUPRA MECANISMULUI DE DESTRUCŢIE FOTOCHIMICĂ A CELULOZEI

(Rezumat)

Destrucţia fotochimică a celulozei este însoţită de fenomene fotolitice şi oxidative. Îmbătrînirea materialelor fibroase depinde de natura materiei prime vegetale, de metoda de dezincrustare folosită şi de conţinutul de fracţiuni macromoleculare (G. P. 1 000...1 200 şi peste 1 200).

Oxidarea decurge după tipul reacţiilor oxidative cetonice cu participarea oxigenului din aer (cele mai susceptibile la acţiuni fotochimice fiind grupele alcoolice din poziţia *2* şi *3* ale verigii elementare şi legăturile glucozidice *1—4*).

Destrucţia provoacă de asemenea modificări importante ale gradului de împachetare structurală a derivaţilor celulozei.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Variaţia indicilor fizico-chimici sub acţiunea luminii UV în cazul celulozei bisulfitice pentru mătase din molid (fabricaţie suedeză).

Fig. 2. — Variaţia indicilor fizico-chimici sub acţiunea luminii UV în cazul celulozei bisulfitice pentru mătase din molid (fabricaţie norvegiană).

Fig. 3. — Variaţia indicilor fizico-chimici sub acţiunea luminii UV în cazul celulozei înnobilate bisulfitice pentru „alfa“ din molid (fabricaţie romînească).

Fig. 4. — Variaţia indicilor fizico-chimici sub acţiunea luminii UV în cazul celulozei sulfat pentru mătase din fag (cu prehidroliză), fabricată în R. S. C.

Fig. 5. — Variaţia indicilor fizico-chimici sub acţiunea luminii UV în cazul celulozei sulfat pentru mătase, fabricată din stuf romînesc (cu prehidroliză) în R. D. G.

Fig. 6. — Variaţia indicilor fizico-chimici sub acţiunea luminii UV în cazul celulozei bisulfitice pentru mătase (cu prehidroliză) fabricată din stuf italian.

Fig. 7. — Imaginea generală a variaţiilor înregistrate sub influenţa luminii UV pentru celulozele chimice şi pentru mătase.

Fig. 8. — Variaţia indicilor fizico-chimici pentru celuloza bisulfitică albită (din molid) de fabricaţie suedeză, sub influenţa lămpii U-300.

Fig. 9. — Variaţia indicilor fizico-chimici pentru celuloza bisulfitică albită (din molid) de fabricaţie suedeză, sub influenţa lămpii U-500.

Fig. 10. — Variaţia indicilor fizico-chimici pentru celuloza sulfat (kraft) albită (din molid) de fabricaţie suedeză, sub influenţa lămpii U-300.

Fig. 11. — Variaţia indicilor fizico-chimici pentru celuloza sulfit albită (din molid) de fabricaţie iugoslavă, sub influenţa lămpii U-500.

Fig. 12. — Variaţia indicilor fizico-chimici pentru celuloza bisulfitică albită (din molid) de fabricaţie romînească, sub influenţa lămpii U-500.

Fig. 13. — Variaţia indicilor fizico-chimici pentru celuloza bisulfitică albită (din stuf) de fabricaţie romînească, sub influenţa lămpii U-500.

Fig. 14. — Imaginea generală a variaţiilor înregistrate sub influenţa luminii UV pentru cazul celulozelor papetare.

Fig. 15. — Variaţia compoziţiei de fracţiuni a celulozelor supuse radiaţiilor UV.

Fig. 16. — Spectrul în I. R. al celofanului.

Fig. 17. — Spectrul în I. R. al metilcelulozei.

Fig. 18. — Spectrul în I. R. al carboximetilcelulozei.

Fig. 19. — Spectrul în I. R. al benzilcelulozei.

Fig. 20. — Spectrul în I. R al acetilcelulozei.

Fig. 21. — Spectrul în I. R. al nitrocelulozei.

Fig. 22. — Spectrul în I. R. al polietilenei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 675.041 ; 581.48

CONTRIBUŢII LA STUDIUL OBŢINERII ENOTANINULUI DIN SEMINŢE DE STRUGURI

DE
AGLAIA CHIRIŢĂ, GH. CHIRIŢĂ, MARIA MANCIU şi GH. ALEXA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Substanţele tanante din struguri joacă un rol cu totul deosebit în tehnologia preparării şi condiţionării vinurilor. Ele influenţează însuşirile gustative ale vinului, garantează conservarea lui în bune condiţii şi previn unele boli şi defecte [1].

Conţinutul strugurilor în substanţe tanante hotărăşte alegerea celor mai corespunzătoare scheme tehnologice de vinificaţie. În tehnologia vinurilor se foloseşte, de preferinţă, taninul din seminţe de struguri (enotanin). Diferitele calităţi de tanin existente în comerţ se deosebesc printr-un conţinut diferit de substanţă activă (între 40% şi 60%) şi prin nuanţe diferite de culoare. Din lipsă de enotanin se folosesc diferite extracte tanante vegetale ca: extract de stejar, extract de valonee şi altele.

Folosirea enotaninului pentru limpezirea vinurilor, în vinificaţie, este cu totul justificată deoarece el este un component natural al strugurilor şi prezenţa lui nu modifică cu nimic compoziţia chimică şi structura vinului, spre deosebire de alte substanţe tanante care exercită o acţiune mult mai brutală şi pot influenţa neplăcut gustul vinului.

Substanţele tanante se găsesc în toate părţile componente ale strugurelui (ciorchine şi boabe). După M. A. Gherasimov [2] compoziţia chimică a strugurilor este cea redată în tabelul 1. Compoziţia chimică a strugurilor este destul de complexă şi strîns legată de o serie de factori ca: soiul, gradul de coacere, condiţiile ecologice (sol, climă, expoziţie la soare). Din tabelul 1 se poate constata conţinutul ridicat în substanţe tanante, substanţe grase şi substanţe azotoase al seminţelor de struguri.

Ciorchinii au proporţia cea mai ridicată de substanţe tanante atunci cînd sînt verzi. Pe măsură ce strugurii se coc scade apreciabil conţinutul în tanin [3].

În ţara noastră tescovina care rezultă după stoarcerea mustului din struguri nu este valorificată decît ca îngrăşămînt. Nu se valorifică cantitatea importantă de substanţe grase şi nici substanţele tanante din seminţele de struguri. Prin extragerea substanţelor grase şi a substanţelor tanante din seminţele de struguri, acestea ar putea fi întrebuinţate mai departe, ca îngrăşăminte pentru agricultură, cu acelaşi efect.

Pentru ţara noastră, ca o regiune viticolă importantă, ar prezenta o deosebită eficienţă economică valorificarea completă a deşeurilor viticole, aşa cum se procedează în alte ţări ca: U.R.S.S., Franţa, Italia, Spania, Argentina, California [4]...[7].

Principalele subproduse ale valorificării deşeurilor viticole sînt: alcoolul, tartraţii, uleiul, enotaninul şi îngrăşămintele.

Compoziţia chimică a seminţelor de struguri a fost studiată de mulţi cercetători. La noi în ţară S. Gogălniceanu şi E. Negreanu [4] dau drept compoziţie medie a seminţelor de struguri, uscate la soare, valorile indicate în tabelul 2.

Conţinutul în tanin al seminţelor de struguri este influenţat într-o măsură importantă de perioada de recoltare a strugurilor.

Tabelul 1

Compoziția chimică a strugurilor

Date analitice %	Boabe			Ciorchine
	miez	pieliță	semințe	
Apă	60...90	60...80	25...500	55...80
Substanțe azotoase	0,2...0,5	2	6	2
Substanțe grase	—	0,1	8..15	—
Substanțe extractibile neazotoase	10...40	20	19	21
Celuloză	f. puțin	4	28	5
Cenușă	0,2...0,5	0,5...1,0	1...2	1...2
Zahăr	5...21	puțin	urme	urme
Acid malic	0,1...1,5	f. puțin	—	0,05...0,3
Acid tartric	0,4...1,0	f. puțin	—	urme
Substanțe taninoase	urme	0,5...4	2,2...8	1...5,4

Tabelul 2

Compoziția medie a semințelor de struguri

Date analitice	%
Umiditate	10...15
Ulei	15...18
Proteine	12...40
Hidrați de carbon	44...46
Celuloză	23...25
Cenușă	1,5... 2
Tanin	2... 7

S. V. Durmișidze și T. P. Tiskarișvili [8] au studiat transformarea substanțelor tanante din struguri în cursul procesului de coacere pe 19 soiuri de struguri, în anii 1948...1949, ajungînd la concluzia că conținutul în tanin al semințelor a variat între 7,83% și 15,93%.

În țara noastră s-a studiat uleiul de semințe de struguri [4], [6], [10], atît sub aspectul condițiilor de extracție cît și al caracteristicilor sale fizico-chimice.

După datele lui S. Gogălniceanu și E. Negreanu (*op. cit.*) conținutul mediu în ulei al semințelor de struguri din țara noastră este de 14%.

2. Rezultate experimentale

În tabelul 3 se dă conținutul de substanțe grase al semințelor unor soiuri de struguri din țara noastră, recoltate de noi în anii 1957...1961.

Tabelul 3

Conținutul în substanțe grase al semințelor unor soiuri de struguri din R. P. R.

Nr. crt.	Soiul	*U* %	Substanțe grase %
1	Muscat otonel	8,93	9,92
2	Aligoté	8,96	9,39
3	Riesling italian	9,52	8,25
4	Fetească	10,81	4,3
5	Pinot gris	8,78	7,46
6	Tămîioasă romînească	8,88	8,31
7	Chasselas d'oré	8,84	11,63
8	Semințe (amestec de soiuri) de la: G.A.S. Copou	9,69	10,83
9	vinalcool Mediaș	7,06	11,21
10	vinalcool Pitești	8,14	14,33
11	Semințe de la Copou	8,03	9,17

Uleiul de semințe de struguri este un ulei comestibil, poate fi utilizat la fabricarea săpunurilor, a lacurilor și a vopselelor, ca lubre-

fiant la motoarele de avioane, poate fi sulfonat sau poate fi utilizat la prepararea rășinilor sintetice gliceroftalice etc.

Conținutul ridicat în ulei și enotanin al seminţelor de struguri, pus în valoare prin recuperare, ar reprezenta venituri importante pentru economia noastră națională.

Separarea seminţelor de struguri din tescovina care trebuie să fie nefermentată [2], [4], [11], [12] se face prin cernere cu site prin care trec numai seminţele, cu ajutorul trioarelor etc. Seminţele trebuie apoi uscate, fără să fermenteze sau să mucegăiască, și în această stare sînt păstrate pentru extragerea uleiului și a taninului.

În lucrarea de față ne-am ocupat numai cu problema obținerii enotaninului din seminţele de struguri.

O valorificare rațională a seminţelor de struguri constă întîi într-o tratare cu un solvent în vederea extragerii enotaninului.

Taninul din struguri este format dintr-un amestec de taninuri pirogalice și pirocatehinice în care predomină substanţele tanante pirocatehinice.

Enotaninul are un gust astringent, cu sărurile ferice dă o culoare verzuie-neagră și un precipitat de aceeași culoare, este solubil în apă, în alcool, și insolubil în eter, precipită substanţele proteice.

Se presupune că enotaninul este format din trei substanţe [14], una asemănătoare acidului galic, solubilă în apă, alcool și eter, care nu precipită gelatina, iar cu sărurile ferice formează precipitate albastre-negre. O altă componentă a enotaninului ar fi cuercitina, un derivat al oxiflavonei. A treia componentă formează cu sărurile ferice precipitate verzi-măslinii, murdare. Unii autori consideră enotaninul ca o glucozidă, deoarece prin fierbere cu acid sulfuric diluat se separă pînă la 2,4% glucoză, taninul însuși descompunîndu-se cu degajare de CO_2.

În scopul valorificării seminţelor diferitelor soiuri de struguri din țara noastră s-au colectat seminţe de struguri ale soiurilor celor mai răspîndite la noi, determinîndu-se conținutul în tanin. Probele de seminţe de struguri au fost colectate și din recolte din ani diferiți, pentru a se urmări influența care o exercită condițiile climaterice asupra conținutului în tanin al seminţelor aceluiași soi de struguri. Seminţele analizate au fost în prealabil măcinate și degresate cu eter de petrol.

În vederea determinării conținutului în enotanin al seminţelor de struguri s-a lucrat după metoda colorimetrică [14], aplicată de A. V. Korotkievici la studiul conținutului în tanin al seminţelor de struguri din R.S.S. Moldovenească. Metoda constă în tratarea unei cantități de 1 g de seminţe cu 100 ml alcool de 50%, timp de o lună, cu agitare periodică. Soluția rezultată se colorimetrează la fotocolorimetrul F. M., utilizînd filtru albastru, în următoarele condiții: 2,5 ml soluție alcoolică de tanin se diluează cu 27,5 ml apă distilată, după care se adaugă 10 picături de soluție de fosfomolibdat de amoniu saturată la rece. Apoi se fotometrează în cuve de 5 cm grosime.

Calculul cantității de tanin se efectuează, înmulțind rezultatul citit la colorimetrare cu coeficientul 5,12, obținîndu-se direct conținutul de tanin la 100 g seminţe de struguri. Conținutul de tanin din seminţele celor mai răspîndite soiuri de struguri romînești, calculate la 100 g substanță uscată, este dat în tabelul 4.

Din cercetarea datelor obținute se constată că conținutul de tanin la același soi de struguri variază de la an la an, funcție de condițiile de climă.

Tabelul 4

Conținutul de tanin al semințelor de diferite soiuri de struguri din R. P. R.

Nr. crt.	Soiul	Anul de recoltare		
		1955	1960	1961
1	Pinot gris	7,31	8,36	9,10
2	Pinot noire	—	—	8,44
3	Muscat Ottonel	—	6,36	7,23
4	Aligoté	—	6,01	6,27
5	Riesling italian	—	6,10	6,04
6	Chasselas d'oré	—	5,07	5,66
7	Cabernet Sauvignon	—	—	5,88
8	Plavaie	8,96	—	8,07
9	Fetească albă	—	—	5,14
10	Traminer	—	—	8,81
11	Gordin	7,27	—	—
12	Galbenă de Odobești	—	—	7,66
13	Galbenă de Ardeal	6,41	—	—
14	Galbenă uriașă	6,97	—	—
15	Alicanté	—	—	7,57
16	Băbească	7,37	—	6,49
17	Mustoasă	6,83	—	8,20
18	Bășicată de Dealul mare	—	—	8,68
19	Roșioară	7,01	—	—
20	Steinschiller	—	—	7,98
21	Busuioacă de Bohotin	6,07	—	—
22	Merlot	7,16	—	—
23	Crîmpoșie	6,35	—	—
24	Saint Emilion	7,29	—	—
25	Coarnă albă	6,20	—	—
26	Tămîioasă românească	—	6,22	7,24
27	Negru de Căușani	6,05	—	—
28	Alb românesc	—	—	—
29	Meslier	7,50	—	—
30	Muscadelle	5,89	—	—
31	Petit Sauvignon	5,81	—	—

Conținutul de tanin al semințelor de struguri din diferite soiuri analizate, variază: a) pentru probele recoltate în anul 1955, între 5,81% și 8,96%; b) pentru probele recoltate în anul 1960, între 5,07% și 8,36%; c) pentru probele recoltate în anul 1961, între 5,14% și 9,10%.

Din datele tabelului 4, ca și din alte determinări citate în literatură, semințele unor soiuri de struguri au un conținut redus de tanin, ca de exemplu soiurile: Fetească, Chasselas d'oré, Petit Sauvignon.

Din cauza conținutului de tanin scăzut al semințelor unor soiuri de struguri, am obținut la analiza unor probe de semințe de struguri în amestec de soiuri rezultatele indicate în tabelul 5.

Tabelul 5

Analiza unor probe de semințe de struguri

Probe de semințe de la:	Tanin %
Vinalcool Mediaș	5,54
Vinalcool Pitești	4,25
G.A.S. Copou	4,63

În vederea recoltării semințelor de struguri pentru obținerea taninului este necesar să nu se amestece semințele cu cele ale soiurilor

de struguri cu conținut redus de tanin, fapt care duce la scăderea conținutului în tanin al amestecului.

În prezenta lucrare s-a studiat influența gradului de mărunțire și a degresării asupra conținutului de tanin extras. În acest scop, pentru determinarea conținutului de tanin, s-a folosit metoda colorimetrică a lui Korotkievici.

Pentru a urmări influența gradului de măcinare s-a determinat conținutul de tanin al seminților întregi și măcinate, ale acelorași soiuri de struguri. Rezultatele determinărilor sînt date în tabelul 6.

Tabelul 6

Influența gradului de mărunțire (calculat la % umiditate)

Nr. crt.	Soiul	Semințe	
		întregi	măcinate
1	Muscat otonel	3,53	4,97
2	Aligoté	4,45	6,23
3	Pinot gris	4,65	6,23
4	Cabernet	3,10	6,06
5	Băbească	4,80	6,65
6	Plavaie gloire	7,64	8,47
7	Riesling italian	2,74	5,47
8	Semințe de la Vinalcool Mediaș	3,62	5,21

Din analiza datelor obținute rezultă că prin mărunțirea seminților conținutul de tanin extras crește, în medie, cu peste 50%.

Pentru a studia influența degresării s-a extras tanin din probe de semințe de struguri întregi nedegresate și din semințe de struguri degresate, întregi și măcinate. Degresarea s-a făcut cu eter de petrol în extractoare Soxhlet. Rezultatele determinărilor sînt înscrise în tabelul 7.

Tabelul 7

Influența degresării (calculat la 0% umiditate)

Nr. crt.	Soiul	Semințe întregi		Semințe măcinate degresate
		nedegresate	degresate	
1	Muscat Ottonel	3,53	3,55	6,36
2	Aligoté	4,45	4,75	7,01
3	Pinot gris	4,65	5,00	8,36
4	Cabernet	3,10	4,00	5,98
5	Băbească	4,80	5,76	6,94
6	Plavaie gloire	7,64	8,05	8,88
7	Riesling italian	2,74	3,54	6,04
8	Semințe de la Vinalcool Mediaș	3,62	3,55	5,54

Din datele tabelului 7 se observă că degresarea seminților întregi influențează asupra conținutului de tanin extras. Astfel, se înregistrează o creștere a conținutului de tanin, de maximum 15%...17%.

În cazul acelorași semințe măcinate și degresate se constată o creștere remarcabilă a conținutului de tanin extras, creștere ce este în medie de 70%...80% în comparație cu cantitatea de tanin extrasă din seminții întregi, nedegresate.

3. Concluzii

a) Pentru țara noastră valorificarea seminţelor din struguri (enotanin, ulei şi îngrăşăminte) prezintă o importanţă economică însemnată, avînd în vedere că din seminţele de struguri s-ar putea obţine anual circa 3000 t ulei şi 1000 t tanin.

b) Seminţele celor mai răspîndite soiuri de struguri din ţara noastră au un conţinut în tanin care le face apte ca materie primă pentru extragerea enotaninului.

c) În vederea extragerii enotaninului din seminţele de struguri este avantajoasă mărunţirea şi degresarea seminţelor, fapt ce duce la creşterea randamentului în tanin extras, în medie cu 70 %...80 %.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia pielii,
înlocuitorilor de piele şi a tananţilor

BIBLIOGRAFIE

1. Bernaz D., Dumitrescu I., Bernaz Gh., Martin M., *Tehnologia vinului*, Ed. Agrosilv., Buc., 1962, p. 38—39.
2. Gherasimov M. A., *Tehnologia vinului*, Ed. tehn., Buc., 1954, p. 471, (trad. din l. rusă).
3. Дурмишидзе С. В., *Дубильные вещества и анточяны виноградной лозы и вино*, Изд. АН СССР, М., 1955.
4. Gogălniceanu S., Negreanu E., Cerc. Agr. 1943, XV.
5. Martinenghi G. B., *Chemica i tecnologia oli, gassi i derivati*, Ulrico Hoepli, Milano, 1948, pp. 279—288.
6. Colţescu I. H., *Oenologia*, Cartea Romînească, Buc., 1943, p. 434.
7. Fritsch J., *Fabrication et raffinage des huiles végétales*, Paris, Amédée Legrand, 1931, p. 327.
8. Дурмишидзе С. В., Тискаришвили Т. П., *Биохимия виноделия*, сб. *III*, АН СССР, 1950, стр. 7—25.
9. Alexa Gh., Simionescu Cr., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1948, **III**, *2*, p. 81.
10. Dima M., Braniţte C., Huidovici M., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1954, V, *1-2*, pp. 159—172.
11. Slepeanu I., Cazacu M., *Vinificaţia*, 1953, Ed. Agrosilv., Buc., p. 437.
12. Şaraga E., *Valorificarea deşeurilor din industria alimentară*, Ed. Tehn., Buc., 1951.
13. Frolov-Bagraeev A. M., Agabalianţ G. G., *Chimia vinului*, 1956, Ed. Tehn., Buc., p. 81, (trad. din l. rusă).
14. Короткиевич А. В., Виноделие и виноградство, 1961, *2*, стр. 50—51.

К ИЗУЧЕНИЮ МЕТОДОВ ПОЛУЧЕНИЯ ЕНОТАНИНА ИЗ ВИНОГРАДНЫХ СЕМЯН

(Резюме)

Изучена возможность использования виноградных семян для получения енотанина применяемого в осветлении вин. В первой части работы, на основании литературных данных, указывается экономическое значение использования виноградных семян при извлечения масла. Изучено затем таннидное содержание семян главнейших сортов винограда отечественного производства и влияние степени размола и обезжирения виноградных семян на выход извлеченного таннина.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE L'OBTENTION L'OENOTANIN DES PÉPINS DE RAISIN

(Résumé)

On étudie la possibilité de la valorification des pépins de raisins pour l'obtention de l'oenotanin qu'on emploie à la clarification des vins.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 675.04 ; 675.032.13

CONTRIBUŢIUNI LA STUDIUL AMELIORĂRII EXTRACŢIEI MATERIALELOR TANANTE VEGETALE INDIGENE (COAJA DE MOLID)

NOTA IV

DE

IRINA IAROŞINSCHI-DRABIC şi CORNELIA MAGA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

În cîteva lucrări anterioare au fost studiate de noi posibilităţile de ameliorare ale extracţiei cojii de molid prin sulfitare [1], prin uscarea prealabilă a materialului tanant, respectiv a cojii [2], cum şi ameliorarea extracţiei prin dializă, adică aşa-numita extracţie în două faze [3].

Încercările noastre de a creşte cantitatea de tanin extractibil prin extracţie sulfitică, au confirmat observaţiile semnalate de W. Grassmann şi W. Kuntara [4] în sensul că extracţia sulfitică, în condiţii determinate, duce la creşterea extractibilelor din coaja de molid, care se repartizează atît în domeniul taninurilor cît şi în cel al netaninurilor (adică a substanţelor nereţinute de fibra dermică).

Creşterile de tanin obţinute de noi sînt favorabile pentru raportul tanin/netanin, numai în cazul unei sulfitări moderate, fără ca să ducă la creşteri apreciabile ale cifrei de puritate. Cantitatea de 100% sulfit sau 100% sulfit şi bisulfit 1 : 1 (raportată la procentul de insolubile din soluţia analitică obţinută cu apă conform metodelor oficiale de analiză) găsită de noi ca favorabilă pentru extracţie din punct de vedere al cantităţii de tanin extras, care corespunde la 0,4% sulfitanţi (în raport cu coaja), reprezintă circa 66% din cantitatea de sulfitanţi confirmată recent ca avantajoasă pentru extracţia sulfitică a cojii de molid de F. Stather şi G. Wiegand [5].

Efectuînd, pe baza observaţiilor făcute de J. A. Sagoschen [6], [7], un studiu asupra posibilităţilor de creştere a cantităţii de tanin extractibil cu apă prin tratarea cu aer cald a cojii de molid înainte de extracţie, am ajuns la concluzia [2] că această tratare duce la creşteri apreciabile de tanin extractibil (11,55%...14,29%), aceste creşteri de tanin, care se pare că au loc în dauna netaninurilor care descresc, determină creşteri ale cifrei de puritate, funcţie de temperatura şi durata de tratare a materialului tanant cu aer cald, de la 51,48 (cifra de puritate obţinută în cazul extracţiei cojii de molid netratată cu aer cald) la valori cuprinse între 52,53 pînă la 57,28.

Deoarece creşterea cifrei de puritate reprezintă o îmbunătăţire calitativă a extractelor tanante vegetale, au fost căutate şi alte căi în scopul înnobilării extractelor obţinute din materiale tanante „nenobile".

În acest scop, pe baza lucrărilor cercetătorilor A. J. Smetkin şi P. A. Jakimov (citate după [8]) şi P. A. Jakimov [9], am studiat într-o lucrare anterioară [3] ameliorarea cifrei de puritate a extractului din coaja de molid prin extracţie apoasă în

două faze. În prima fază se obține o „fracțiune rece", extrasă timp foarte scurt la temperatura ordinară sau mai scăzută, care conține majoritatea netaninurilor și o oarecare cantitate de tanin, după care urmează a doua fază a extracției care are loc la cald și prin care se obține „fracțiunea caldă".

Fracțiunea caldă este o soluție bogată în tanin și săracă în netaninuri, care se caracterizează printr-o cifră de puritate ridicată. Extracția în două faze duce deci pe de o parte la creșterea cifrei de puritate a extractului obținut și pe de altă parte determină pierderi de tanin care trec în fracțiunea rece, practic neutilizabilă.

Din studiul factorilor care influențează extracția cojii de molid în două faze [3] a rezultat că este posibilă obținerea unui extract tanant cu o cifră de puritate accentuat mărită fără pierderi efective de tanin, în raport cu extracția obișnuită, dacă materialul tanant este spălat foarte scurt timp cu apă rece în stare nemăcinată, uscat, măcinat și apoi supus extracției cu apă.

2. Partea experimentală

Pe baza rezultatelor obținute cu ocazia studiilor efectuate în scopul ameliorării extracției cojii de molid prin fiecare din cele trei posibilități în parte, în lucrarea de față am urmărit efectul combinat al pretratării cu aer cald, urmată de extracția sulfitică și extracția în două faze cu apă și sulfitică.

În acest scop am utilizat o coajă de molid depozitată în condiții bune circa 2 ani, care pentru umiditatea calculată de 14,50% avea un conținut în tanin de 8,53% (metoda agitării), 7,19% netaninuri solubile și o cifră de puritate de 57,94. Coaja care urma să fie supusă cercetării a fost măcinată la o granulație medie de 2...3 mm și ținută la etuvă sub acțiunea unui curent de aer furnizat de un ventilator de laborator de 100 W, la temperatura de 70°; 100° și 120° C, timp de 2; 4; 6 și 8 ore. Materialul astfel tratat a fost supus extracției cu apă și în paralel extracției sulfitice cu 0,3% sulfit de sodiu (în raport cu coaja). Extracțiile au fost efectuate în extractorul Koch, conform metodelor oficiale de analiză [10]. Rezultatele analitice obținute sînt prezentate în tabelele 1...4.

Din analizarea datelor cuprinse în aceste tabele rezultă că tratarea cojii de molid înainte de extracția cu aer cald, duce în toate cazurile la creșterea extractibilelor. Acestea se repartizează atît pe taninuri cît și pe netaninuri solubile. Între temperatura și durata de tratament există relații care determină comportarea extractibilelor față de pudra de piele și deci manifestarea lor ca substanțe determinate ca taninuri sau ca netaninuri.

Astfel tratarea cojii de molid timp de 8 ore cu aer la 70° C (tabelul 1), determină creșteri simultane atît a taninului extras (de la 8,58 la 8,98, deci cu 5,27%) cît și a netaninurilor (de la 6,19 la 6,67, deci cu 7,75%); aceste creșteri duc la scăderea cifrei de puritate de la 57,94 la 57,38, în timp ce tratarea materialului timp de 8 ore cu aer la 100° C (tabelul 2) duce la creșterea taninului extras cu 6,91% și a netaninurilor numai cu 6,30%, ceea ce are drept efect o creștere a cifrei de puritate de la 57,94 la 58,69.

Tratarea cojii de molid cu aer la 120° C timp de 8 ore, duce la o creștere mică a taninului extras, creșteri mai accentuate observîndu-se dacă tratarea cu aer la 120° C durează numai 6 ore. În acest ultim caz creșterea taninului cu 8,90% este însoțită de o creștere a netaninurilor cu 9,20%. La temperatura de 120° C nu poate fi observată deci nici o modificare favorabilă a cifrei de puritate la nici o durată de tratament.

Tabelul 1

Datele analitice recalculate la 14,50% umiditate, obținute prin tratarea cojii de molid înainte de extracție, cu aer cald de 70°C

	Definirea cojii de molid netratată cu aer cald, conform metodelor oficiale	Coajă tratată timp de 2 ore la 70° C	Diferența în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coajă tratată timp de 4 ore la 70° C	Diferența în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coajă tratată timp de 6 ore la 70° C	Diferența în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coajă tratată timp de 8 ore la 70° C	Diferența în raport cu coajă netratată, extrasă cu apă
	I	II		III		IV		V	
Extracție cu apă									
Umiditate (%)	14,50	14,50		14,50		14,50		14,50	
Neextractibile (%)	70,48	66,90	—0,83	69,74	—1,06	70,36	—0,18	69,50	—1,40
Insolubile (%)	0,30	0,30		0,26		0,13		0,35	
Tanin (%)	8,53	8,63	+1,17	8,77	+2,81	8,49	—0,47	8,98	+5,27
Netanin (%)	6,19	6,67	+7,75	6,73	+8,72	6,52	+5,33	6,67	+7,75
Cifra de raport	57,94	56,42		56,58		56,56		57,38	
Extracție cu soluție de 0,3 % sulfit de sodiu (în raport cu coaja)									
Umiditate (%)	14,50	14,50		14,50		14,50		14,50	
Neextractibile (%)	69,16	69,77	— 1,01	68,07	— 3,45	69,86	—0,88	68,75	— 2,44
Insolubile (%)	0,28	0,35		1,09		0,12		0,35	
Tanin (%)	9,02	8,19	— 3,99	9,21	+ 7,85	8,83	+3,51	8,95	+ 4,92
Netanin (%)	7,04	7,19	+16,15	7,13	+15,18	6,69	+8,07	7,45	+20,35
Cifra de raport	56,16	53,25		56,36		56,89		54,58	

Tabelul 2

Datele analitice recalculate la 14,50 % umiditate, obținute prin tratarea cojii de molid înainte de extracție, cu aer cald la 100° C

	Definirea cojii de molid netratate cu aer cald, conform metodelor oficiale	Coaja tratată timp de 2 ore la 100° C	Diferența în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coaja tratată timp de 4 ore la 100° C	Diferența în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coaja tratată timp de 6 ore la 100° C	Diferența în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coaja tratată timp de 8 ore la 100° C	Diferența în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă
	I	II		III		IV		V	
Extracție cu apă									
Umiditate (%)	14,50	14,50		14,50		14,50		14,50	
Neextractibile (%)	70,48	69,39	—1,55	69,45	—1,47	69,78	—1,00	69,48	—1,42
Insolubile (%)	0,30	0,38		0,37		0,24		0,32	
Tanin (%)	8,53	9,01	+5,62	9,04	+5,97	8,88	+4,10	9,12	+ 6,91
Netanin (%)	6,19	6,72	+8,56	6,64	+7,26	6,60	+ 6,62	6,58	+6,30
Cifra de raport	57,94	57,27		57,77		57,36		58,69	
Extracție cu soluție de 0,3 % sulfit de sodiu (în raport cu coaja)									
Neextractibile (%)	69,16	68,69	— 2,54	68,99	— 2,12	68,84	— 2,35	69,74	— 1,05
Insolubile (%)	0,28	0,47		0,49		0,49		0,27	
Tanin (%)	9,02	8,89	+ 4,22	8,89	+ 4,22	9,33	+ 9,37	8,44	— 1,06
Netanin (%)	7,04	7,45	+20,35	7,13	+15,18	6,84	+11,05	7,05	+12,27
Cifra de raport	56,16	54,40		55,49		57,69		54,48	

Tabelul 3

Datele analitice recalculate la 14,50 % umiditate, obţinute prin tratarea cojii de molid înainte de extracţie, cu aer cald la 120° C

	Definirea cojii de molid netratate cu aer cald, conform metodelor oficiale	Coaja tratată timp de 2 ore la 120° C	Diferenţa în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coaja tratată timp de 4 ore la 120° C	Diferenţa în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coaja tratată timp de 6 ore la 120° C	Diferenţa în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă	Coaja tratată timp de 8 ore la 120° C	Diferenţa în raport cu coaja netratată, extrasă cu apă
	I	II		III		IV		V	
Extracţie cu apă									
Umiditate (%)	14,50	14,50		14,50		14,50		14,50	
Neextractibile (%)	70,48	69,26	—1,74	69,51	—1,38	69,16	—1,88	69,79	—0,92
Insolubile (%)	0,30	0,36		0,65		0,29	—3,34	0,32	
Tanin (%)	8,53	9,13	+7,03	8,63	+1,17	9,29	+8,90	8,68	+1,75
Netanin (%)	6,19	6,75	+9,04	6,71	+8,40	6,76	+9,20	6,71	+8,40
Cifra de raport	57,94	57,49		56,25		57,87		56,40	
Extracţie cu soluţie de 0,3 % sulfit de sodiu (în raport cu coaja)									
Neextractibile (%)	69,16	69,21	— 1,81	69,64	— 1,20	68,70	— 2,52	69,19	— 1,84
Insolubile (%)	0,28	0,29		0,44		0,49		0,53	
Tanin (%)	9,02	8,82	+ 3,39	8,31	— 2,58	9,03	+ 5,86	8,51	— 0,24
Netanin (%)	7,04	7,18	+15,99	7,11	+14,86	7,28	+17,60	7,27	+17,44
Cifra de raport	56,16	55,12		53,89		55,36		53,90	

Tabe

Datele analitice recalculate la 14,50 % umiditate, obținute prin extracție în și durate de

	Definirea cojii de molid netratate cu aer cald, conform metodelor oficiale	Coaja tratată timp de 6 ore la 70° C		
				Extracție
Umiditate (%)	14,50	14,50		
Neextractibile (%)	70,48	70,03		
		Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată
		rece	caldă	
Reziduu sec (%)		4,50	10,97	
Insolubile (%)	0,30		0,12	
Tanin (%)	8,53		7,05	— 17,35
Netanin (%)	6,19		3,80	
Cifra de raport	57,94		64,98	
				Extracție cu soluție de 0,3 % sulfit
Umiditate (%)	14,50	14,50		
Neextractibile (%)	69,16	70,28		
		Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată, extrasă cu apă
		rece	caldă	
Reziduu sec (%)		4,04	11,13	
Insolubile (%)	0,28		0,11	
Tanin (%)	9,02		6,60	— 22,73
Netanin (%)	7,04		4,42	
Cifra de raport	56,16		59,89	

lul 4

două faze a cojii de molid tratate înainte de extracție cu aer cald la diferite temperaturi tratament variabile

Coaja tratată timp de 6 ore la 100° C			Coaja tratată timp de 8 ore la 100° C			Coaja tratată timp de 6 ore la 120° C		
cu apă								
14,50 68,87			14,50 68,58			14,50 70,02		
Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată	Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată	Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată
rece	caldă		rece	caldă		rece	caldă	
4,96	11,67		4,54	12,38		4,76	10,72	
	0,32			0,24			0,08	
	7,52	— 11,85		7,90	— 7,63		7,02	— 17,71
	3,83			4,24			3,62	
	66,25			65,07			65,98	
de sodiu (în raport cu coaja)								
14,50 69,55			14,50 69,50			14,50 70,25		
Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată, extrasă cu apă	Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată, extrasă cu apă	Fracțiunea		Diferența fracțiunii calde față de coaja netratată, extrasă cu apă
rece	caldă		rece	caldă		rece	caldă	
2,89	13,06		4,70	11,30		4,73	10,52	
	0,35			0,27			0,12	
	7,52	— 11,85		6,85	— 19,30		6,56	— 27,10
	5,18			4,18			3,84	
	59,24			62,10			63,04	

Aplicînd extracţia sulfitică asupra cojii de molid pretratată cu aer cald, se constată aproape în toate cazurile o creştere mai accentuată a cantităţii de extractibile decît în cazul extracţiei cu apă a cojii pretratate cu aer cald. Aceste creşteri, deşi se repartizează şi pe seama taninurilor (tabelul 1, coloana III — extracţia sulfitică, faţă de coloana III — extracţia cu apă şi tabelul 2, coloana IV — extracţia sulfitică, faţă de coloana IV — extracţia apoasă), se referă în primul rînd la netaninuri, avînd drept efect scăderea cifrei de puritate atît în raport cu cea a cojii netratate, cît şi faţă de cifrele de puritate obţinute la coaja tratată în prealabil cu aer cald şi extrasă cu apă curată. Acest fapt arată că sub acţiunea sulfitării se produce o scindare a moleculelor tanice, ceea ce determină manifestarea lor ca netaninuri şi confirmă observaţiile anterioare ale unor cercetători [11], [12], anume că în cazul unei sulfitări normale, majoritatea sulfitului este consumată pentru transformarea taninurilor solubile, ceea ce determină scăderea valorii tanante a extractului.

Extracţia în două faze, cu apă şi sulfitică, a cojii de molid, tratate cu aer cald în condiţiile indicate în tabelul 4, duce în toate cazurile la creşterea cantităţii de extractibile cu aceeaşi repartizare a acestor creşteri pe taninuri şi netaninuri. Fracţiunile calde prezintă cifre de puritate foarte ridicate, între 64,98 pînă la 66,28 în cazul extracţiei cu apă şi 59,89 pînă la 63,04 în cazul extracţiei sulfitice, faţă de cifra de puritate de 57,94 a cojii netratate cu aer cald. Extracţia în două faze a materialului pretratat cu aer cald, după cum rezultă din tabelul 4, deşi prezintă avantajul realizării în fracţiunea caldă a unei cifre de puritate cu mult mărită (12,15%...14,54%), duce la pierderi considerabile de tanin (7,63%...17,71% în cazul extracţiei cu apă şi 11,85%...27,11% în cazul extracţiei sulfitice), creşterile de tanin extractibil, prin tratarea cojii cu aer cald, fiind mai mici ca pierderile care au loc prin eliminarea fracţiunii reci.

Derizinificarea cojii de molid (care s-a făcut cu benzină grea, conţinutul de răşină determinat fiind de 1,75%), duce după, cum rezultă din tabelul 5, de asemenea la creşterea procentului de tanin extras, dacă coaja se tratează cu aer cald; cifrele de puritate sînt în acest caz majorate în raport cu coaja netratată cu aer cald.

Atît din datele cuprinse în tabelul 5, cît şi din cele prezentate în tabelele 1...4, rezultă că atît tratarea cu aer cald a cojii de molid, cît şi acţiunea sulfitului de sodiu în timpul extracţiei, modifică într-o oarecare măsură constituţia componentelor cojii, determinînd, funcţie de durata şi temperatura de tratament, trecerea mai accentuată în soluţie a compuşilor de natură tanică. Aceste modificări vor avea influenţă asupra gradului de dispersie al particulelor tanice în soluţie, respectiv asupra gradului lor de liofilie, şi vor modifica în consecinţă comportarea soluţiilor tanice faţă de pielea gelatină. Pentru a avea o imagine asupra modului în care tratamentele cu aer cald modifică gradul de dispersie al particulelor tanice am efectuat asupra cîtorva extracte obţinute din coaja de molid pretratată cu aer cald, în condiţiile care au permis realizarea randamentelor mai favorabile în tanin şi cifrelor de puritate mărite, precipitări fracţionate cu clorură de sodiu. Pentru determinarea

Tabelul 5

Influența derizinificării cojii de molid asupra calității de tanin extractibil și a cifrei de raport în cazul extracției sulfitice și în două faze a cojii de molid pretratate timp de 6 ore cu aer la 100° C

	Definirea cojii de molid netratate	Coaja de molid derizinificată, extrasă cu apă	Diferența față de coaja netratată	Coaja de molid derizinificată, extracție sulfitică	Diferența față de coaja netratată	Coaja de molid derizinificată, tratată timp de 6 ore la 100° C, extrasă cu apă	Diferența față de coaja netratată	Coaja de molid derizinificată, tratată timp de 6 ore la 100° C, extracție sulfitică	Diferența față de coaja netratată	Coaja de molid derizinificată, tratată timp de 6 ore la 100° C, extracție fracționată cu apă		Coaja de molid derizinificată, tratată timp de 6 ore la 100° C, extracție fracționată sulfitică	
Umiditate (%)	14,50	14,50		14,50		14,50		14,50		14,50		14,50	
Neextractibile (%)	70,48	69,55		69,22		69,09		68,59		69,95		68,93	
										Fracțiune		Fracțiune	
										rece	caldă	rece	caldă
Reziduu sec (%)										4,27	11,28	4,40	12,17
Insolubile (%)	0,30	0,0		0,42		0,40		0,50			0,15		0,32
Tanin (%)	8,53	9,34	+ 9,49	8,45	— 0,94	9,38	+ 9,96	9,35	+ 9,61		7,12		7,46
Netanin (%)	6,19	6,61		7,41		6,63		7,06			4,01		4,39
Cifra de raport	57,94	58,56		53,21		58,58		56,97			63,97		62,95

cantităţii de tanin precipitat sub acţiunea cantităţilor mereu crescînde de clorură de sodiu s-a folosit metoda Löwenthal modificată după Glozic [13].

Datele obţinute cu ocazia precipitărilor fracţionate sînt prezentate în tabelul 6 şi curbele din fig. 1.

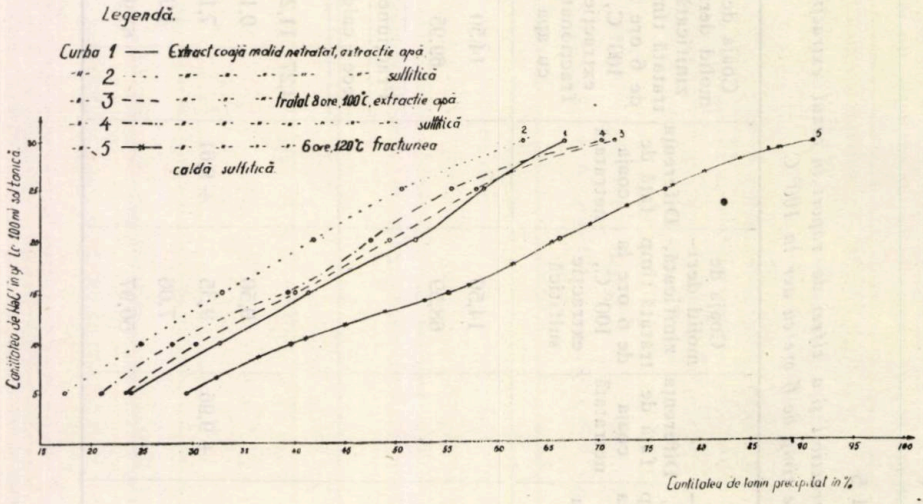


Fig. 1

Din analizarea datelor cuprinse în tabelul 6 rezultă că tratamentul cu aer cald modifică taninurile din celula vegetală, acţionînd pe de o parte asupra celor mai greu solubile în sensul creşterii solubilităţii lor; în consecinţă fracţiunile precipitate cu 5% NaCl sînt în toate cazurile în cantitate mai mică decît în cazul cojii netratate cu aer cald (22,07%; 23,47% şi 20,85% faţă de 23,78%). Pe de altă parte, tratamentul cu aer cald acţionează în sens invers asupra fracţiunilor cu liofilie medie şi puternic liofile, precipitabile cu 10%; 20% şi 30% NaCl, care în extractele obţinute din coaja tratată cu aer cald sînt în cantitate mai mare decît în cazul cojii netratate.

În toate cazurile de tratare a cojii de molid cu aer cald, cantitatea totală de particule precipitabile cu NaCl este mai mare decît în cazul cojii netratate, ceea ce înseamnă că în soluţii de aceeaşi concentraţie vor exista, în cazul cojii tratate, mai multe particule capabile de a fi absorbite de pielea gelatină, decît în cazul cojii net atate cu aer cald. Sub acest aspect există diferenţe determinate de temperatura şi durata de tratament cu aer cald.

Extracţia sulfitică a cojii pretratate cu aer cald acţionează în acelaşi sens, dar mai accentuat, atît asupra particulelor tanice uşor precipitabile, cît şi asupra acelor mai greu precipitabile. În cazul extracţiei sulfitice a cojii pretratate cu aer cald se constată o creştere a cantităţii de tanin precipitabil cu clorura de sodiu în raport cu extracţia cu apă sau sulfitică a cojii netratate cu aer cald.

Tabelul 6

Valorile procentuale de tanin precipitat prin cantităţi crescînde de sare (raportate la taninul total din soluţie)

Cantitatea de NaCl (g/100 ml soluţie tanică 1% tanin pur)	Soluţie tanică obţinută din coaja netratată cu aer cald	Soluţie tanică obţinută din coaja tratată timp de 6 ore cu aer cald, la 100° C	Soluţie tanică obţinută din coaja tratată timp de 8 ore cu aer cald, la 100° C	Soluţie tanică obţinută din coaja tratată timp de 6 ore cu aer cald, la 120° C	Soluţie tanică, fracţiunea caldă, obţinută din coaja tratată timp de 6 ore cu aer cald, la 100°C	Soluţie tanică, fracţiunea caldă, obţinută din coaja tratată timp de 6 ore cu aer cald, la cu 120° C
Soluţii obţinute prin extracţia cu apă						
Soluţia iniţială + 5% NaCl	23,78	22,07	23,47	20,85		
Soluţia iniţială + 10% NaCl	32,57	34,98	34,25	35,50		
Soluţia iniţială + 20% NaCl	48,16	46,90	50,01	49,06		
Soluţia iniţială + 30% NaCl	60,48	64,89	70,04	68,16		
Soluţia iniţială + 5% NaCl	23,78	22,07	23,47	20,85		
Filtrat + 2 × 5% NaCl	8,76	7,67	6,88	7,84		
Filtrat + 3 × 5% NaCl	8,76	7,67	9,65	10,01		
Filtrat + 4 × 5% NaCl	10,46	12,14	9,37	7,84		
Filtrat + 5 × 5% NaCl	6,77	6,43	8,82	7,29		
Filtrat + 6 × 5% NaCl	8,19	8,91	13,24	15,97		
Soluţii obţinute prin extracţie sulfitică						
Soluţia iniţială + 5% NaCl	17,45	15,14	20,99	19,47	22,66	29,36
Soluţia iniţială + 10% NaCl	28,91	27,10	33,89	30,94	32,29	43,61
Soluţia iniţială + 20% NaCl	46,99	44,61	48,47	49,00	50,32	70,34
Soluţia iniţială + 30% NaCl	61,90	63,12	68,22	67,77	68,19	91,48
Soluţia iniţială + 5% NaCl	17,45	15,14	20,99	19,47	22,66	29,36
Filtrat + 2 × 5% NaCl	7,51	7,56	6,98	8,00	7,12	10,20
Filtrat + 3 × 5% NaCl	7,81	7,27	11,46	11,16	9,91	15,55
Filtrat + 4 × 5% NaCl	9,01	11,35	8,10	7,71	8,98	11,09
Filtrat + 5 × 5% NaCl	8,71	6,68	8,10	7,43	9,29	10,20
Filtrat + 6 × 5% NaCl	12,02	14,27	14,83	12,30	10,85	14,66

Extractul care s-a obţinut prin extracţia în două faze, respectiv cel rezultat din fracţiunea caldă a extracţiei sulfitice a cojii tratate 6 ore cu aer cald la 120° C, cuprinde 91 % din totalul de tanin la un grad de dispersie care permite precipitarea sa cu electrolit (NaCl). Aceasta înseamnă că majoritatea acestor particule vor avea capacitatea de a se lega de fibra dermică în mod ireversibil.

În fig. 1 sînt reprezentate grafic repartiţiile cantitative ale particulelor tanice într-o soluţie de 1 % tanin pur, obţinute prin precipitarea fracţionată cu cantităţi crescînde de clorură de sodiu, de unde rezultă, de exemplu pentru cazul extractului obţinut din coaja tratată timp de 8 ore cu aer cald, scăderea evidentă a cantităţii de particule liofobe, deci greu difuzibile, şi scăderea liofiliei la particulele foarte puternic dispersate, care la extractul obţinut din coaja netratată se menţin în soluţie chiar la 30 % NaCl.

3. Concluzii

Taninul din coaja de molid reprezintă un amestec foarte complex de substanţe, care sînt atît de natură catechinică cît şi complecşi de altă natură, încă neidentificaţi [14].

Geneza taninurilor în plante este un proces foarte complex, care are loc sub acţiunea unei serii de factori biogenetici şi constă probabil într-o transformare treptată a zaharurilor şi polifenolilor simpli în compuşi macromoleculari cu structură complexă, respectiv în substanţe tanante solubile şi flobafene. Procesele de transformare ale substanţelor pe cale de a forma substanţe tanante, sau ale substanţelor tanante ca atare, se intensifică o dată cu vîrsta plantei şi nu se termină nici după moartea acesteia. Pentru coaja de molid acest proces a fost dovedit prin lucrările lui W. Grassmann [15], în condiţiile unei oxidări fermentative (cînd are loc transformarea parţială a substanţelor tanante solubile în apă în substanţe tanante insolubile), cum şi prin tratarea cojii de molid cu un conţinut mare în netaninuri (cifră de puritate 51,48) cu aer cald [2], cînd se constată creşterea cantităţii de tanin extractibil cu apă în dauna netaninurilor care descresc.

Rezultatele obţinute de noi în lucrarea de faţă arată că sub acţiunea unui tratament mai intens cu aer cald, în celula vegetală a cojii de molid se produc transformări ale substanţelor neextractibile şi insolubile în taninuri solubile sau taninuri şi netaninuri, care sînt favorabile sau nefavorabile pentru calitatea extractului, funcţie de condiţiile de tratare.

Astfel tratarea cojii de molid, care a fost depozitată timp mai îndelungat şi care are o cifră de puritate de 57,94 înainte de extracţie, cu aer cald timp de 8 ore la 100° C, determină modificarea compoziţiei extractului în raport cu cel obţinut din coaja netratată atît sub aspectul valorii sale tanante (creşterea procentului de tanin extras şi a cifrei de puritate) cît şi sub aspectul ameliorării extracţiei (creşterea procentului de extractibile). Aceste modificări ale compoziţiei extractului permit a se presupune că particulele de natură tanică de dimensiuni mari, insolubile sau solubile dar foarte uşor precipitabile, se scindează sub acţiunea căldurii în particule de dimensiuni mai mici. Unele din ele, absorbabile prin pudra de piele, măresc cantitatea de tanin în extractul respectiv, iar altele prezintă dimensiuni mici, nu sînt reţinute de pudra de piele

și măresc procentul de netaninuri. Constatări asemănătoare au fost făcute de altfel de noi în cazul frunzelor de *Rhus typhina* [16] cum și în cazul extractului sec de stejar [17].

Transformările substanțelor neextractibile și insolubile în taninuri sau taninuri și netaninuri sînt deci reversibile. Modul în care se face această transformare depinde de condițiile de tratare cu aer cald și de starea în care se găsesc componentele ce reprezintă taninurile, substanțele pe cale de a forma taninurile sau cele care prin condensare avansată au trecut în flobafene.

În concluzie se poate afirma că:

a) Tratarea cojii de molid cu aer cald, înainte de extracție, în condiții determinate, duce la realizarea unui randament mai ridicat în tanin extractibil și în unele cazuri la o creștere a cifrei de puritate.

b) Tratarea cu aer cald determină o repartiție mai favorabilă a particulelor în sistemul polidispers din soluția apoasă, modificînd gradul lor de liofilie și permite obținerea unui extract de molid cu o comportare mai favorabilă la tăbăcire.

c) Extracția sulfitică a cojii de molid (0,3% sulfit de sodiu față de coajă), tratate cu aer cald în limitele de temperatură și durată de tratament studiate de noi, nu se prezintă avantajoasă din punct de vedere al cifrei de puritate a extractelor obținute, deși din punct de vedere al randamentului în tanin extras pot fi constatate unele creșteri.

d) Prin extracția sulfitică a cojii de molid tratate cu aer cald, înainte de extracție, se obține însă o repartiție mai favorabilă a particulelor tanice funcție de gradul lor de liofilie în raport cu cel al cojii extrase cu soluție de sulfit dar netratată cu aer cald și chiar cu cel al cojii tratate extrase cu apă.

e) Extracția în două faze a cojii de molid tratată cu aer cald duce la realizarea unor cifre de puritate în faza caldă foarte favorabile, fără însă a fi avantajoasă pentru randamentul în tanin. Creșterile de tanin obținute în urma tratării cu aer cald nu depășesc pierderile ce au loc prin eliminarea fazei reci. Extracția sulfitică apare nefavorabilă și în cazul extracției în două faze, din punct de vedere al randamentului în tanin extras. Din punct de vedere al cifrei de puritate extracția sulfitică în două faze a materialului tratat cu aer cald este avantajoasă și permite obținerea unui extract din faza caldă în care 91% din tanin este la un grad de liofilie care va permite fixarea sa ireversibilă de fibra dermică și aceasta cu atît mai mult cu cît repartiția particulelor funcție de gradul lor de liofilie este foarte uniformă.

f) Pentru extractul de molid, care în general se caracterizează printr-o cantitate mare de particule puternic dispersate fără acțiune tanantă propriu-zisă, cum și prin prezența în cantitate prea mare a particulelor greu difuzibile, deci liofobe, tratarea cojii de molid cu aer cald înainte de extracție este avantajoasă deoarece modifică repartiția cantitativă a particulelor în sensul creșterii cantității de particule cu liofilie medie prin liofilizarea celor greu difuzibile și agregarea celor foarte solubile și deci poate ameliora calitatea extractului de molid.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia pielii, înlocuitorilor de piele și a tananților

BIBLIOGRAFIE

1. Alexa Gh., Maga C., Iaroşinschi-Drabic I., Strub C., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1951, **II**, *3—4*, pp. 306—333.
2. Alexa Gh., Strub C., Maga C., Iaroşinschi-Drabic I., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1954, **V**, *3—4*, pp. 173—188.
3. Alexa Gh., Iaroşinschi-Drabic I., Maga C., Strub C., Burghelea Gh., St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1956, **VII**, *1*, pp. 105—127.
4. Grassmann W., Kuntara W., Collegium, 1941, *187*, S. 855.
5. Stather F., Wiegand G., Gesam. Abhandl. des Deutschen Lederinst., Freiberg, 1960, *16*.
6. Sagoschen J. A., Collegium, 1941, *853*, S. 121—141.
7. * * * Documents scientifiques et techniques des industries du cuir, 1942, *8*, pp. 18—23.
8. Pavlovici P., *Die Gerbextrakte*, J. Springer, Wien, 1921, S. 135.
9. Jakimov P. A., Collegium, 1929, S. 334.
10. * * * *Méthodes officielles d'analyse de la Société Internationale des Chimistes des Industries du cuir*, 1938.
11. Shuttleworth, JALCA, 1948, p. 408.
12. Kuntzel A., AFCIC, 1954, *8*, p. 123.
13. Glozic B., Das Leder, 1957, *8*, S. 57.
14. Grassmann W., Das Leder, 1958, *8*, S. 193—202.
15. — Das Leder, 1952, S. 241.
16. Strub C., Maga C., Iaroşinschi-Drabic I., St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1956, **VII**, *1*, pp. 76—93.
17. Strub C., Iaroşinschi-Drabic I., Maga C., St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1954, V, *1—2*, p. 174—184.

К УВЕЛИЧЕНИЮ ЭКСТРАКЦИИ МЕСТНЫХ РАСТИТЕЛЬНЫХ ДУБИЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВ (ЕЛОВАЯ КОРА) (IV)

(Резюме)

Авторы изучают возможность увеличения экстракта танина из еловой коры подвергая ее предварительному нагреву теплым воздухом, проводя затем сульфитную и двухповторные водную и сульфитную экстракции.

BEITRÄGE ZUM STUDIUM DER EXTRAKTIONSVERBESSERUNG EINHEIMISCHER PFLANZLICHER GERBMITTEL (DIE FICHTENRINDE) (IV)

(Zusammenfassung)

Es wurde die Möglichkeit, die Gerbstoffausbeute der Fichtenrinde durch Vorbehandlung des Gerbmittels mit heisser Luft, und anschliessende Auslaugung mit Wasser, Sulfitlösung und durch zweistufige Auslaugung mit Wasser und Sulfitlösung, geprüft.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 3—4, 1962

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 537.531 ; 535.37

CONTRIBUŢII LA DETERMINAREA FILTRULUI OPTIM ÎN TEHNICA RAZELOR X

DE

EMIL LUCA şi GH. ILIESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Noţiuni generale

Filtrarea în tehnica razelor X a fost determinată de faptul că fasciculele emergente de raze X prezintă un spectru continuu foarte larg în domeniul lungimilor de undă mari, domeniu foarte uşor absorbabil, care prezentînd dificultăţi, impune eliminarea lui prin filtrarea fasciculului respectiv cu diferite plăci metalice, ce au rolul de a restrînge banda spectrală ce trece prin filtru [1].

Un filtru judicios ales trebuie ca pe de-o parte să reducă cît mai mult lungimea de undă mijlocie a fasciculului de raze X, iar pe de altă parte să reducă cît mai puţin intensitatea lui.

Filtrele utilizate în tehnica razelor X pot fi din Al, Cu, Sn sau Ag, funcţie de lungimea de undă a fasciculului emergent ce urmează a fi filtrat, caracterizîndu-se prin coeficientul lor de eficacitate.

Valoarea coeficientului de eficacitate este dată, după Destriau şi Mathey Cornat [2], [1], de relaţia :

$$(1) \qquad \varepsilon = (\mathrm{d}\lambda/\lambda) / (\mathrm{d}I/I) = \mathrm{d}(\ln \lambda)/\mathrm{d}(\ln I),$$

care reprezintă raportul dintre variaţia relativă $\mathrm{d}\lambda/\lambda$ a lungimii de undă eficace şi variaţia relativă $\mathrm{d}I/I$ a intensităţii ionometrice a fasciculului de raze X.

Menţinînd constantă tensiunea de alimentare a tubului de raze X, autorii citaţi au trasat curba de variaţie a coeficientului de eficacitate a filtrelor funcţie de lungimea de undă echivalentă a fasciculului de raze X, obţinut în urma filtrării fasciculului prin filtre de Al, Cu şi Ag de diverse grosimi.

Curbele experimentale trasate de autori, pentru tensiuni de alimentare cuprinse între 140 şi 300 kV, au arătat că coeficientul de eficacitate al filtrelor de Al, Cu şi Ag trece printr-un maxim pentru o anumită lungime de undă şi că pentru lungimi de undă mari filtrele de Al sînt mai eficace decît cele de Cu. Dacă lungimea de undă a fasciculului de raze X scade, filtrele de Cu devin la rîndul lor mai eficace decît cele de Al, iar pentru lungimi de undă ale fasciculului de raze X şi mai mici, filtrele de Cu sînt înlocuite cu ale de Ag, care devin mai eficace.

Deoarece în tehnica razelor X se lucrează cu cele eterogene, a căror compoziţie spectrală este determinată de tensiunea efectiv aplicată tubului de raze X, într-o lucrare anterioară [3] am exprimat coeficientul de eficacitate al unui filtru prin ra-

portul dintre variaţia relativă a tensiunii de alimentare a tubului de raze X şi variaţia relativă a intensităţii ionometrice a fasciculului respectiv, adică prin relaţia:

$$\varepsilon = (dU/U)/(dI/I) = d(\ln U)/d(\ln I), \tag{2}$$

care din punct de vedere experimental cuprinde mărimi mai uşor de măsurat.

2. Consideraţii teoretice

În vederea determinării filtrului optim, necesar a fi utilizat în procesul de filtrare a unui fascicul de raze X, Destriau şi Mathey Cornat au trasat curbele de variaţie a inversului coeficientului de eficacitate al filtrelor respective funcţie de logaritmul lungimii de undă eficace a fasciculului de raze X, pentru o aceeaşi tensiune de alimentare a tubului. Aceste considerente de lucru au fost determinate de relaţia de definiţie a coeficientului de eficacitate al filtrelor, utilizată de autori.

Ţinînd seama de condiţiile reale de lucru, adică de faptul că se lucrează cu fascicule eterogene de raze X şi că elementul variabil ce determină compoziţia spectrală a fasciculului este tensiunea de alimentare a tubului, ne-am propus a determina natura şi grosimea filtrului optim, necesar unei anumite tensiuni de alimentare a tubului, pentru o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent.

În acest scop am trasat curbele de variaţie a inversului eficacităţii filtrului funcţie de logaritmul tensiunii de alimentare a tubului de raze X, la o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, şi din aceste curbe am determinat, pentru fiecare tensiune de alimentare a tubului, filtrul optim şi deci cel mai eficace.

În acest caz, pentru o anumită tensiune de alimentare a tubului de raze X (< 100 kV), deci pentru o anumită intensitate ionometrică a fasciculului de raze X, se poate obţine aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent utilizînd fie filtre de Al, fie filtre de Cu.

Iluminarea unui ecran fluorescent fiind exprimată după Destriau (*op. cit.*) prin curentul fotoelectric obţinut la o celulă fotoelectrică iluminată de ecran, este dată de relaţia

$$\beta = I \exp(-\tau a)\,[1 - \exp(-\mu b)],$$

unde: I — intensitatea ionometrică a fasciculului de raze X incident la ecranul fluorescent, τ — coeficientul de slăbire al fasciculului de raze X datorită suportului ecranului fluorescent, a — grosimea suportului ecranului fluorescent, μ — coeficientul de absorbţie în raze X datorită substanţei fluorescente de pe ecranul fluorescent, b — grosimea substanţei fluorescente a ecranului.

Considerînd că filtrarea se face printr-un filtru de Al de grosime x_1, în acest caz, dacă I_0 este intensitatea ionometrică a fasciculului de raze X incident la filtru, iar τ_0' este coeficientul de slăbire a fasciculului datorită filtrului de Al, la ecranul fluorescent va ajunge un fascicul de raze X avînd o intensitate ionometrică:

$$I_1 = I_0 \exp(-\tau_0' x_1). \tag{3}$$

Dacă filtrarea se realizează printr-un filtru de Cu de grosime x_2 şi dacă τ_0'' este coeficientul de slăbire a fasciculului de raze X datorită filtrului de Cu, atunci la ecranul fluorescent va ajunge un fascicul de raze X avînd o intensitate ionometrică:

$$I_2 = I_0 \exp(-\tau_0'' x_2). \tag{4}$$

Coeficientul de slăbire al fasciculului de raze X fiind mai mare la filtrul de Cu decît la cel de Al, adică $\tau_0'' > \tau_0'$, atunci între anumite limite, pentru cazul în care prin variaţia grosimii filtrelor de Al şi Cu se realizează condiţiile $x_1 \gtrless x_2$, se poate obţine $I_1 \lesseqgtr I_2$.

În această situaţie iluminarea ecranului fluorescent, corespunzătoare acestor două fascicule de raze X filtrate şi cu intensităţile ionometrice I_1 şi I_2, va fi

$$\beta_1 = I_1 \exp(-\tau_1 a)\,[1-\exp(-\mu_1 b)],\quad \beta_2 = I_2 \exp(-\tau_2 a)\,[1-\exp(-\mu_2 b)]. \tag{5}$$

Deoarece, după cum am arătat într-o lucrare anterioară [4], se poate admite între anumite limite, că termenul $1 - \exp(-\mu b)$ se menţine constant, şi întrucît conform curbelor de absorbţie ale lui Holthusen, Braun şi Red, date de Destriau (*op. cit.*, pp. 25-26) dacă $I_1 \gtrless I_2$ şi $\tau_1 \gtrless \tau_2$ rezultă că atunci cînd $I_1 \gtrless I_2$ vom avea $\exp(-\tau_1 a) \lesseqgtr \exp(-\tau_2 a)$. De aici rezultă că între anumite limite, pentru anumite grosimi ale filtrelor de Al şi Cu, se poate obţine $I_1 \exp(-\tau_1 a) = I_2 \exp(-\tau_2 a)$ şi întrucît s-a admis că $1 - \exp(-\mu b)$ se menţine constant, adică $1-\exp(-\mu_1 b) = 1 - \exp(-\mu_2 b)$ vom avea:

$$I_1 \exp(-\tau_1 a)\,[1 - \exp(-\mu_1 b)] = I_2 \exp(-\tau_2 a)\,[1 - \exp(-\mu_2 b)] \tag{6}$$

şi deci

$$\beta_1 = \beta_2, \tag{7}$$

ceea ce arată că, pentru o aceeaşi tensiune de alimentare a tubului de raze X, se poate obţine o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent utilizînd filtre de Al sau filtre de Cu judicios alese.

3. Rezultate experimentale şi interpretarea lor

Procedeul experimental utilizat în vederea obţinerii noilor date, este cel indicat în lucrările anterioare [3]...[6].

În acest caz, considerînd funcţionarea tubului de raze X în regim de mare intensitate, curentul electronic din tub fiind de 82 mA, pentru anumite tensiuni la gol de alimentare a tubului de raze X, cuprinse între 52 şi 92 kV, s-a determinat experimental grosimea filtrelor de Al şi Cu care să producă o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, la o aceeaşi tensiune de alimentare a tubului de raze X.

Corespunzător fiecărei grosimi de filtru din relaţia (2) s-a determinat apoi coeficientul de eficacitate respectiv [3].

Curbele de variaţie ale coeficientului de eficacitate al filtrelor de Al şi Cu, funcţie de tensiunea de alimentare a tubului de raze X, pentru o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, sînt redate în fig. 1.

Din analiza curbelor reprezentate în fig. 1 rezultă următoarele observaţii:

a) Coeficientul de eficacitate al filtrelor de Al şi Cu, necesare obţinerii aceleiaşi iluminări a ecranului fluorescent, variază cu tensiunea de alimentare a tubului de raze X, prezentînd un maxim pentru o anumită tensiune de alimentare.

b) Maximul coeficientului de efcacitate se deplasează, atît în cazul filtrelor de Al cît şi în cel al filtrelor die Cu, spre tensiuni de alimentare

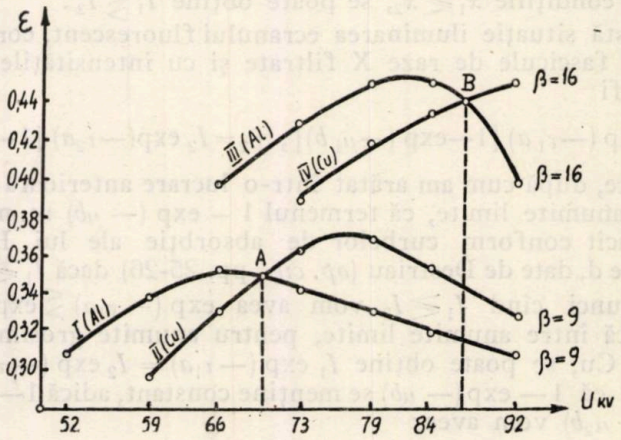


Fig. 1

cu atît mai mari, deci lungimi de undă cu atît mai mici, cu cît iluminarea ecranului fluorescent este mai mare.

c) Curba de variaţie a coeficientului de eficacitate al filtrelor de Cu, pentru o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, intersectează întotdeauna curba de variaţie a coeficientului de eficacitate al filtrelor de Al. De aici rezultă că la fiecare valoare a tensiunii de alimentare a tubului de raze X se poate obţine o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent şi o aceeaşi intensitate ionometrică a fasciculului de raze X incident la ecranul fluorescent, utilizînd fie un filtru de Al, fie un filtru echivalent de Cu.

d) Pentru tensiuni de alimentare a tubului de raze X mai mari (respectiv lungimi de undă ale fasciculului de raze X mai mici) decît cele corespunzătoare punctului de intersecţie a curbei coeficientului de eficacitate de egală iluminare al filtrului de Al cu curba coeficientului de eficacitate de egală iluminare al filtrului de Cu, se observă că la o aceeaşi tensiune de alimentare valoarea coeficientului de eficacitate al filtrului de Cu este mai mare ca cea corespunzătoare a filtrului de Al, deci din acest moment este de preferat a se înlocui filtrul de Al cu un filtru echivalent de Cu, sau a se utiliza pe lîngă filtrul de Al de grosime corespunzătoare punctului de intersecţie *A*, filtre echivalente de Cu.

Pentru tensiuni de alimentare mai mici (respectiv lungimi de undă mai mari) decît cele corespunzătoare punctului de intersecţie al curbelor coeficienţilor de eficacitate ai filtrelor, valoarea coeficientului de eficacitate al filtrului de Al este mai mare ca cea corespunzătoare filtrului de Cu şi deci, în această zonă a tensiunilor de alimentare a tubului de raze X, este de preferat a se filtra numai cu filtre de Al.

În sensul determinării complete a condiţiilor în care filtrul de Al poate fi înlocuit cu un filtru echivalent de Cu, pentru domeniul ten-

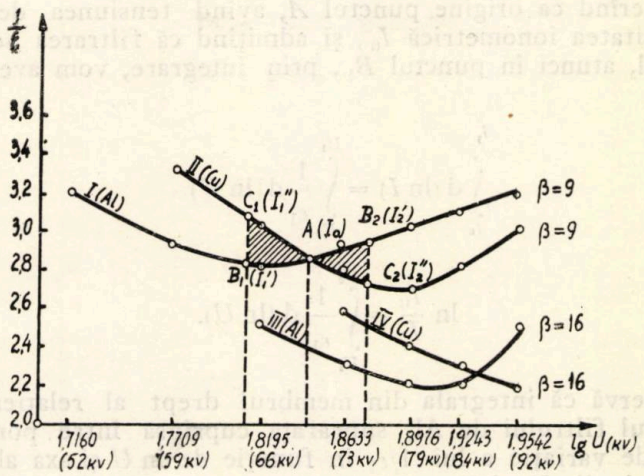


Fig. 2

siunilor la gol de alimentare a tubului de raze X mai mici ca 100 kV, deci şi pentru determinarea măririi intensităţii ionometrice a fasciculului de raze X incident la ecranul fluorescent, ce rezultă în urma filtrării prin filtru de Al sau prin filtru de Cu, vom utiliza acelaşi raţionament ca şi Destriau (*op. cit.*), aplicat de acesta în condiţiile coeficientului de eficacitate definit de el, la filtrele de Cu şi Ag, pentru domeniul tensiunilor de alimentare cuprinse între 140 şi 320 kV.

Din expresia (2) a coeficientului de eficacitate al filtrelor, stabilită de noi, rezultă :

$$\mathrm{d}(\ln I) = (1/\varepsilon)\,\mathrm{d}(\ln U). \tag{8}$$

Trasînd curbele de variaţie ale lui $1/\varepsilon$ funcţie de $\ln U$, la o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, atît pentru filtrele de Al cît şi pentru filtrele de Cu, se obţine fig. 2.

Analiza acestor curbe arată că, pentru o anumită tensiune de alimentare U_0 a tubului de raze X, se poate obţine o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent şi o aceeaşi intensitate ionometrică a fasciculului de raze X incident la ecranul fluorescent, atît cu un filtru de Al cît şi cu un filtru de Cu, ce prezintă însă acelaşi coeficient de eficacitate. Această condiţie corespunde punctului A de intersecţie a curbelor de variaţie a lui $1/\varepsilon$ în funcţie de $\ln U$, atît pentru filtrul de Al cît şi pentru cel de Cu.

Dacă se consideră regiunea din stînga punctului A, ce îndeplineşte condiţiile de mai sus, atunci pentru o tensiune de alimentare $U_1 < U_0$ se obţin pe curbele de variaţie a lui $1/\varepsilon$ ale filtrelor de Al şi Cu punctele B_1 şi C_1, cărora le corespund intensităţile ionometrice I_1' şi I_1''.

Dacă se notează cu ε_1 coeficientul de eficacitate al filtrelor de Al şi cu ε_2 cel al filtrelor de Cu, atunci, deoarece în punctele B_1 şi C_1, corespunzătoare tensiunii de alimentare U_1, avem $1/\varepsilon_1 \neq 1/\varepsilon_2$, rezultă imediat că şi $I_1' \neq I_1''$.

Considerînd ca origine punctul A, avînd tensiunea de alimentare U_0 şi intensitatea ionometrică I_0, şi admiţînd că filtrarea se face prin filtrul de Al, atunci în punctul B_1, prin integrare, vom avea

$$\int_{I_0}^{I_1'} d(\ln I) = \int_{U_0}^{U_1} \frac{1}{\varepsilon_1} d(\ln U)$$

sau

$$\ln \frac{I_0}{I_1'} = \int_{U_1}^{U_0} \frac{1}{\varepsilon_1} d(\ln U). \tag{9}$$

Se observă că integrala din membrul drept al relaţiei (9) reprezintă, în cazul filtrului de Al, suprafaţa cuprinsă între porţiunea AB_1 a curbei I de variaţie a lui $1/\varepsilon_1$ în funcţie de $\ln U$ şi axa abscisei limitată prin tensiunile U_1 şi U_0, corespunzătoare punctelor B_1 şi A de pe curbă.

Dacă filtrarea s-ar face prin filtru de Cu, la aceeaşi tensiune de alimentare U_1, s-ar obţine pe curba II, de variaţie a lui $1/\varepsilon_2$ în funcţie de $\ln U$, punctul C_1; prin integrare avem :

$$\ln \frac{I_0}{I_1''} = \int_{U_1}^{U_0} \frac{1}{\varepsilon_2} d(\ln U), \tag{10}$$

unde integrala din membrul drept reprezintă, în cazul filtrului de Cu, suprafaţa cupri să între porţiunea AC_1 a curbei II, de variaţie a lui $1/\varepsilon_2$ în funcţie de $\ln U$ şi axa absciselor limitată prin aceleaşi tensiuni de alimentare (U_1 şi U_0), corespunzătoare punctelor C_1 şi A.

Diferenţa relaţiilor (9) şi (10), ce reprezintă suprafaţa haşurată (fig. 2) dintre porţiunea AB a curbei I, de variaţie a lui $1/\varepsilon_1$ în funcţie de $\ln U$ la filtrul de Al, şi porţiunea AC_1 a curbei II, de variaţie a lui $1/\varepsilon_2$ în funcţie de $\ln U$, la filtrul de Cu, ne dă expresia:

$$\ln \frac{I_0}{I_1'} - \ln \frac{I_0}{I_1''} = \int_{U_1}^{U_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) d(\ln U). \tag{11}$$

Deoarece din analiza curbelor se observă că $1/\varepsilon_2 > 1/\varepsilon_1$ relaţia finală se va scrie sub forma:

$$\ln \frac{I_1'}{I_1''} = \int_{U_1}^{U_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \mathrm{d}(\ln U). \tag{12}$$

Dacă se consideră regiunea din dreapta punctului A, căruia îi corespunde tensiunea de alimentare U_0 şi intensitatea ionometrică I_0, şi se admite o tensiune de alimentare $U_2 > U_0$, se obţin pe curbele I şi II punctele B_2 şi C_2, cărora le corespund intensităţile ionometrice I_2' şi I_2''.

Prin integrare, pe baza aceluiaşi raţionament şi ţinînd seama că de această dată $1/\varepsilon_1 > 1/\varepsilon_2$, se obţine în final:

$$\ln \frac{I_2''}{I_2'} = \int_{U_2}^{U_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \mathrm{d}(\ln U), \tag{13}$$

unde integrala din membrul drept reprezintă suprafaţa dintre porţiunea AB_2 a curbei I, de variaţie a lui $1/\varepsilon_1$ în funcţie de $\ln U$ la filtrul de Al, şi porţiunea AC_2 a curbei II, de variaţie a lui $1/\varepsilon_2$ în funcţie de $\ln U$ la filtrul de Cu (suprafaţa haşurată în fig. 2).

Suprafeţele haşurate din fig. 2 şi exprimate prin integralele:

$$\int_{U_1}^{U_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \mathrm{d}(\ln U) \quad \text{şi} \quad \int_{U_2}^{U_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \mathrm{d}(\ln U),$$

putînd fi măsurate, rezultă că din cunoaşterea valorii lor se poate determina cu cît se măreşte, la o aceeaşi tensiune de alimentare a tubului de raze X şi o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, intensitatea ionometrică a fasciculului de raze X incident la ecranul fluorescent, prin înlocuirea filtrului de Al cu un filtru echivalent de Cu, sau invers.

4. Exemplu numeric

Considerăm datele numerice ale situaţiei din fig. 2. Astfel, pentru fiecare pătrat al scării ordonatelor ($1/\varepsilon$) corespunde valoarea 0,02, iar pentru fiecare pătrat al scării absciselor ($\ln U$) — valoarea 0,002.

Suprafaţa fiecărui pătrat elementar va fi deci $\Delta S = 0{,}02 \times 0{,}002 = 0{,}00004$; suprafaţa dată de integrala (12) conţine 125 asemenea pătrate elementare, deci va avea o suprafaţă totală $S_1 = 0{,}00004 \times 125 = 0{,}005$, iar suprafaţa dată de integrala (13) conţine 105 asemenea pătrate elementare, deci va avea o suprafaţă $S_2 = 0{,}00004 \times 105 = 0{,}0042$.

În acest caz rezultă: $\ln (I_1'/I_1'') = 0{,}0052$ şi $\ln (I_2''/I_2') = 0{,}0042$, adică $I_1'/I_1'' = 1{,}012$ deci $I_1' = 1{,}012\, I_1''$, de unde rezultă o ameliorare de 1,2 % şi $I_2''/I_1' = 1{,}010$ deci $I_2'' = 1{,}010\, I_1'$, de unde rezultă o ameliorare de 1 %.

Acest calcul numeric arată că în cazul experimental considerat de noi şi corespunzător unei iluminări constante a ecranului fluorescent, exprimată prin curentul fotoelectric obţinut la o celulă fotoelectrică, şi anume $\beta = 9$, pentru tensiuni de alimentare a tubului de raze X inferioare lui 70 kV (punctul A din fig. 2) este mai avantajos a filtra cu filtre de Al în timp ce pentru tensiuni de alimentare mai mari ca 70 kV este mai avantajos a filtra cu filtre de Cu şi anume: la tensiunea de 55 kV se poate obţine o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent atît cu un filtru de Al cît şi cu un

filtru echivalent de Cu, însă intensitatea ionometrică a fasciculului de raze X filtrat cu filtru de Al este cu 1,2% mai mare ca cea obişnuită în cazul cînd se utilizează un filtru de Cu, în timp ce pentru tensiunea de 75 kV, la o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, intensitatea ionometrică obţinută cu filtrul de Cu este cu 1% mai mare ca cea obţinută cu filtrul echivalent de Al.

5. Concluzii

a) Plecînd de la posibilitatea determinării experimentale a coeficientului de eficacitate al unui filtru, pentru o iluminare constantă a ecranului fluorescent, s-au trasat curbele de variaţie ale coeficientului de eficacitate (ε) al filtrelor de Al şi Cu, cu tensiunea la gol de alimentare a tubului de raze X şi curbele de variaţie ale inversului coeficientului de eficacitate ($1/\varepsilon$) ale aceloraşi filtre în funcţie de ln U.

b) Din curbele $\varepsilon = f(U)$ (fig. 1) s-a constatat că pentru tensiuni de alimentare mai mici decît 100 kV, atît curbele de variaţie ale coeficientului de eficacitate al filtrului de Al cît şi cele ale coeficientului de eficacitate al filtrului de Cu, pentru o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, variază cu tensiunea de alimentare a tubului de raze X, că aceste curbe prezintă un maxim pentru o anumită tensiune de alimentare, că acest maxim se deplasează spre tensiuni mai mari, respectiv lungimi de undă mai mici, cu cît iluminarea ecranului fluorescent creşte, şi că totdeauna curba de variaţie a coeficientului de eficacitate al filtrului de Cu intersectează curba de variaţie a coeficientului de eficacitate al filtrului de Al. Acest fapt arată că la fiecare valoare a tensiunii de alimentare a tubului de raze X se poate obţine o aceeaşi iluminare a ecranului fluorescent, fie cu un filtru de Al, fie cu un filtru echivalent de Cu.

c) În cazul unei iluminări constante a ecranului fluorescent, pentru valori ale tensiunii de alimentare a tubului de raze X mai mari decît cea corespunzătoare punctului de intersecţie a curbelor $\varepsilon = f(U)$ ale filtrelor de Al şi Cu, este de preferat a se utiliza filtre de Cu, deoarece prezintă o eficacitate mai mare, în timp ce pentru tensiuni mai mici, se preferă utilizarea filtrelor de Al, pe aceleaşi considerente.

d) Din studiul curbelor de variaţie a lui $1/\varepsilon$ în funcţie de ln U, atît în cazul filtrelor de Al cît şi în cel al filtrelor de Cu (fig. 2), se poate determina raportul intensităţilor ionometrice ale fasciculelor de raze X filtrate prin filtre de Al şi Cu, care ajungînd la ecranul fluorescent produc o aceeaşi iluminare a acestuia. Şi în acest caz se constată că la o anumită tensiune de alimentare U_0, curbele de variaţie ale lui $1/\varepsilon$ în funcţie de ln U, ale filtrelor de Al, se intersectează cu cele ale filtrelor de Cu. Pentru tensiuni de alimentare ale tubului de raze X, mai mari sau mai mici ca tensiunea U_0 corespunzătoare acestui punct, se pot determina din curbe mărimile suprafeţelor limitate între curbele de variaţie a lui $1/\varepsilon$ în funcţie de ln U pentru filtre de Al şi Cu şi tensiunile alese, care permit apoi determinarea intensităţilor ionometrice corespunzătoare fasciculelor de raze X ce ajung la ecranul fluorescent, care produc o aceeaşi iluminare a acestuia la o aceeaşi tensiune de alimentare, dar care au fost filtrate în prealabil prin filtre de Al sau prin

filtre echivalente de Cu. Se constată că pentru tensiuni de alimentare ale tubului de raze X superioare tensiunii U_0, corespunzătoare punctului de intersecţie, filtrarea prin filtre de Cu produce o ameliorare a intensităţii ionometrice a fasciculelor de raze X faţă de cazul filtrării prin filtre de Al, în timp ce pentru tensiuni de alimentare ale tubului de raze X mai mici ca tensiunea U_0, filtrarea prin filtre de Al conduce la o ameliorare a intensităţii ionometrice a fasciculului de raze X faţă de cazul filtrării prin filtre de Cu, deşi în ambele cazuri se lucrează la o aceeaşi tensiune de alimentare, iar iluminarea ecranului fluorescent este aceeaşi.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Destriau G., *Physique appliquée des installations à rayons X,* Dunod, Paris, 1945.
2. Destriau G., Mathey Cornat, Archives d'électricité medicale, 1936, p. 145.
3. Luca E., Petrescu V., Iliescu Gh., Reus N., Bul. Inst polit. Iaşi, 1956, **II** (**VI**), *3—4*, p. 165.
4. Petrescu V., Luca E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1947, **II**, *1*, p. 193.
5. Luca E., Iliescu Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1947, **II**, *2*, p. 203.
6. Luca E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1948, **III**, *2*, p. 285.

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА В ТЕХНИКЕ Х-ЛУЧЕЙ

(Резюме)

Исходя из возможности определения коэффициента эффективности у фильтра, были выведены сперва кривые роста коэффициента эффективности у фильтров Al и Cu, в зависимости от напряжения холостого питания рентгеновской трубки, соответствующему постоянному освещению флуоресцирующего экрана, по которому можно определить область оптимального применения этих фильтров.

Затем, были выведены кривые вариации обращенного коэффициента эффективности фильтров Al и Cu, дающих такое же освещение флуоресцирующего экрана в зависимости от логарифма напряжения питания трубки, кроме точного определения областей оптимального применения этих фильтров, можно установить и улучшение ионометрической интенсивности пучка Х-лучей при корректном употреблении наилучшего фильтра, указанного для соответствующей области холостого напряжения питания рентгеновской трубки.

CONTRIBUTIONS À LA DÉTERMINATION DU FILTRE OPTIMUM DANS LA TECHNIQUE DES RAYONS X

(Résumé)

Compte tenu de la possibilité de détermination du coefficient d'efficacité d'un filtre, on a tracé tout d'abord les courbes de variation du coefficient d'efficacité des filtres d'Al et de Cu, founction de la tension d'alimentation au vide du tube de rayons X,

qui correspondent à une brillance constante de l'écran fluorescent, d'où on peut déterminer les domaines d'utilisation optima de ces filtres.

En traçant ensuite les courbes de variation de l'inverse du coefficent d'efficacité des filtres d'Al et de Cu, qui produisent la même brillance de l'écran fluorescent, en fonction du logarithme de la tension d'alimentation du tube, hormis la détermination exacte des domaines d'utilisation optima de ces filtres, on peut aussi déterminer l'amélioration qui en résulte dans l'intensité ionométrique du fascicule des rayons X par l'utilisation correcte du filtre optimum indiqué pour le domaine respectif des tensions d'alimentation au vide du tube de rayons X.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 621.3.083.5

COMPENSATOR ÎN COORDONATE RECTANGULARE FOLOSIND UN CIRCUIT DERIVAŢIE CU REACTANŢE SEMICOMPENSATE

DE

D. BÂRBULESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Compensatoarele în coordonate rectangulare sînt dispozitive care furnizează o tensiune, rezultantă a două componente în cuadratură, variabile independent una de alta şi cunoscute. Cu ajutorul lor se pot măsura forţe electromotoare sau tensiuni alternative sinusoidale de aceeaşi pulsaţie; în acest scop, prin intermediul unui instrument de nul, se opune forţei electromotoare sau tensiunii de măsurat diferenţa de potenţial furnizată de compensator, care se reglează prin modificarea componentelor sale, pînă la anularea deviaţiei instrumentului de nul. În această situaţie tensiunea de măsurat este egală şi în opoziţie cu aceea furnizată de compensator, cunoscută prin componentele sale:

$$\underline{U} = U_x + jU_y .$$

Literatura descrie multe tipuri de compensatoare în coordonate rectangulare, dintre care unele clasice [1], [2], [3], [4], iar altele de apariţie recentă [5], [6].

Utilizînd o punte neechilibrată care are trei ramuri active şi a patra formată dintr-un circuit derivaţie cu reactanţe semicompensate se realizează un compensator în coordonate rectangulare. Ideia folosirii unui astfel de circuit în punte a rezultat în urma analizei proprietăţilor circuitelor cu reactanţe semicompensate.

Într-o lucrare anterioară [7] s-a arătat că circuitele derivaţie care conţin pe ramuri distincte reactanţe de semn contrar îndeplinind condiţia $LC\omega^2 = 1/2$ sînt echivalente unei impedanţe de modul constant şi argument variabil: $\underline{Z} = Z\,\underline{/\varphi(R)}$, unde $Z = \text{const.}$

Argumentul impedanţei poate fi variat prin modificarea rezistenţei din ramura inductivă. Un asemenea circuit constituie un defazor de curent ale cărui proprietăţi sînt folosite pentru realizarea unui compensator în punte.

2. Descrierea compensatorului

Puntea reprezentată în fig. 1 are un braţ format dintr-un circuit defazor, ai cărui parametri îndeplinesc condiţia $LC\omega^2 = 1/2$, în serie cu o rezistenţă fixă R, de valoare egală cu modulul Z_0 al impedanţei defazorului, iar al doilea braţ din două rezistenţe variabile r_1 şi r_2, a căror sumă trebuie să rămînă permanent constantă. (Cele două rezistenţe pot fi înlocuite printr-un potenţiometru etalonat).

Folosind diagrama vectorială a tensiunilor, reprezentată în fig. 2, se poate urmări uşor principiul de funcţionare a compensatorului.

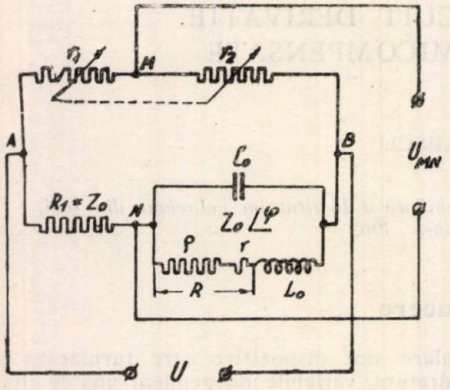


Fig. 1

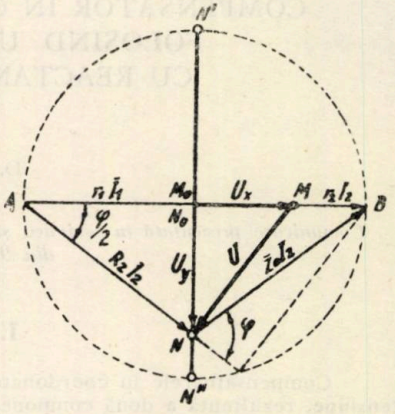


Fig. 2

La aplicarea unei tensiuni constante U_{AB} la intrare rezultă la bornele diagonalei de măsurare o tensiune de ieşire U_{MN}. Tensiunea de ieşire poate fi modificată atît în modul cît şi în argument, prin modificarea componentelor ei U_x, în fază cu tensiunea aplicată, şi U_y, în cuadratură cu această tensiune.

Variaţia componentei U_x se realizează prin modificarea rezistenţelor r_1 şi r_2 astfel încît suma lor să rămînă constantă ($r_1 + r_2 = \text{const.}$), în care situaţie potenţialul punctului M se deplasează de-a lungul segmentului AB.

Variaţia componentei U_y se realizează prin modificarea rezistenţei R din ramura inductivă a circuitului defazor. La variaţia rezistenţei R punctul N se deplasează pe direcţia $N'N''$, perpendiculară pe AB, deoarece egalitatea $R_1 = Z_0$ se păstrează la variaţia rezistenţei R.

Folosind diagrama vectorială se pot deduce expresiile celor două componente (U_x, U_y) în funcţie de parametrii punţii.

Componenta U_x, în fază cu tensiunea de intrare, se deduce din $U_x = U_{M_0M} = (U_{AM} - U_{MB})/2$, rezultînd:

$$U_x = [(r_1 - r_2)/(r_1 + r_2)] \cdot (U/2). \tag{1}$$

Notînd:

$$\Delta r = r_1 - r_2, \quad k = r_1 + r_2$$

şi

(2) $$x = (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2) = \Delta r/k,$$

relaţia (1) devine:

(3) $$U_x = x\,(U/2).$$

Conform relaţiei (1), la variaţia rezistenţei r_1 între valorile 0 şi k, componenta U_x variază între limitele $-U/2$ şi $+U/2$.

Componenta U_y, în cuadratură cu tensiunea de intrare, se determină din triunghiul AM_0N: $\overline{M_0N} = \overline{AM_0}\,\mathrm{tg} \sphericalangle NAM_0$, sau

(4) $$U_y = (U/2)\,\mathrm{tg}\,(\varphi/2),$$

în care φ reprezintă argumentul circuitului defazor de modul constant şi rezultă din relaţia $\varphi = 2\psi - 90°$, unde $\mathrm{tg}\,\psi = L\omega/R$. Introducînd în relaţia (4), $\varphi/2 = \psi - 45°$ se ajunge la expresia:

$$U_y = [(L\omega - R)/(L\omega + R)]\,(U/2).$$

Deoarece $L\omega = Z_0/2 = R_1/2$ expresia componentei U_y devine:

(5) $$U_y = [(R_1 - 2R)/(R_1 + 2R)]\,(U/2,$$

unde $R_1 = Z_0 = \mathrm{const.}$

Notînd:

$$\Delta R = R_1 - 2R, \quad \sum R = R_1 + 2R$$

şi

(6) $$y = (R_1 - 2R)/(R_1 + 2R) = \Delta R/\sum R,$$

relaţia (5) devine:

(7) $$U_y = y\,(U/2).$$

Aşadar puntea descrisă, alimentată la tensiune constantă, poate furniza în diagonala de măsurare o tensiune de ieşire ale cărei componente — în fază şi în cuadratură cu tensiunea de intrare — pot fi variate separat şi cunoscute prin intermediul relaţiilor (3) şi (7). Tensiunea la ieşire se poate determina din relaţia:

(8) $$\underline{U}_{ieş} = U_x + jU_y \quad \text{sau} \quad (9) \quad \underline{U}_{ieş} = (x + jy)\,(U/2),$$

unde x şi y sînt exprimate prin relaţiile (2) şi (6). Modulul tensiunii de ieşire se exprimă prin:

(10) $$U_{ieş} = (U/2)\sqrt{x^2 + y^2},$$

iar argumentul tensiunii de ieşire, în raport cu tensiunea de intrare, prin relaţia:

(11) $$\varphi = \mathrm{arctg}\,(y/x).$$

Aplicînd la bornele diagonalei de ieşire, prin intermediul unui instrument de nul, o tensiune necunoscută, se pot modifica componentele tensiunii de ieşire pînă cînd aceasta va fi în opoziţie cu tensiunea necunoscută, în care situaţie deviaţia instrumentului de nul va trece prin zero. În felul acesta puntea serveşte la determinarea unei tensiuni necunoscute prin componentele sale rectangulare.

Ceea ce deosebeşte acest compensator în punte de alte compensatoare clasice este faptul că acesta măsoară tensiuni sau forţe electromotoare prin componentele lor rectangulare, în fază şi în cuadratură cu tensiunea de intrare, şi nu cu curentul de alimentare.

3. Verificarea compensatorului

S-a realizat un compensator în punte utilizînd două cutii de rezistenţe jumelate de 1 111 Ω (R.F.T.), o cutie de rezistenţe de 11 111 Ω şi circuitul cu reactanţe semicompensate compus din următoarele elemente — calculate pentru frecvenţa de 1 000 Hz: $L=0{,}1$ H — inductanţă etalon; $r_b = 20{,}8$ Ω — rezistenţa interioară a inductanţei măsurată în punte;

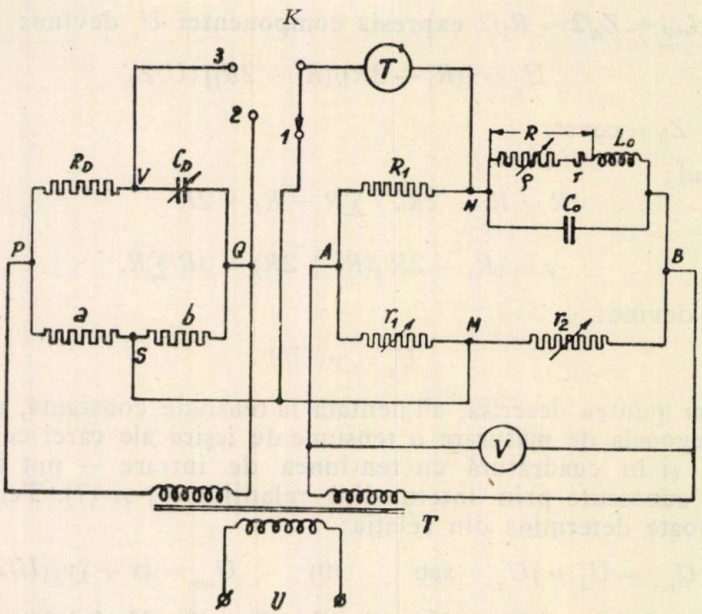


Fig. 3

$C=0{,}1267$ μF — capacitate luată pe o cutie Ulrich, îndeplinind condiţia de semicompensare a reactanţelor la frecvenţa de 1 000 Hz.

În laborator verificarea compensatorului s-a efectuat determinînd unghiul de defazaj al tensiunii furnizate de un circuit defazor auxiliar în punte [8]. (De menţionat că circuitul defazor utilizat a servit numai

pentru verificarea compensatorului şi, în măsurările curente, el nu este necesar). Circuitul defazor auxiliar a fost constituit din elemente etalon avînd următoarele valori: $a = b = 500\ \Omega$, $R_D = 1\,000\ \Omega$, $C_D = 1,111\ \mu F$, variabil. Schema de verificare a compensatorului este redată în fig. 3.

Înaintea măsurării propriu-zise au fost efectuate două operaţii preliminare: a) verificarea elementelor punţii (verificarea zeroului) şi b) determinarea unghiului de defazaj dintre tensiunea de alimentare a compensatorului şi aceea de alimentare a defazorului.

Verificarea elementelor punţii se face trecînd comutatorul K în poziţia *1*. Realizînd în punte situaţia $r_1 = r_2$, $R_1 = Z_0 = 2L\omega$ şi $R = L\omega$ ($\varphi = 0$), instrumentul de nul trebuie să indice zero, deoarece partea dreaptă a schemei din fig. 3 reprezintă o punte echilibrată.

Determinarea unghiului de defazaj dintre cele două tensiuni secundare se efectuează trecînd comutatorul K în poziţia *2*; în acest mod diagonala de măsurare MN a compensatorului este cuplată la bornele SQ ale defazorului. Reglînd parametrii punţii (r_1 cuplat cu r_2 şi R) pînă la echilibru se determină unghiul de defazaj care trebuie considerat în determinările următoare.

După verificarea zeroului punţii şi determinarea unghiului de defazaj iniţial se trece la efectuarea măsurării, în modul şi argument, a tensiunii furnizate de către circuitul defazor, după ce în prealabil argumentul acesteia a fost calculat şi realizat prin introducerea capacităţii corespunzătoare C_D. În acest scop se trece comutatorul K în poziţia *3* cuplînd diagonala de măsurare a compensatorului la diagonala de ieşire a circuitului defazor (bornele SV).

4. Rezultate experimentale

Determinările s-au efectuat calculînd în prealabil capacitatea defazorului astfel încît tensiunea de măsurat, constantă în modul, să varieze în argument în intervalul unghiular 0°...180°. Dintr-o determinare prealabilă, făcută cu comutatorul în poziţia *2*, a rezultat o diferenţă de fază de 0° 17′ între tensiunile de alimentare ale defazorului şi compensatorului. Trecînd apoi comutatorul K în poziţia *3* s-a determinat tensiunea furnizată de defazor, prin componentele ei, în fază şi în cuadratură cu tensiunea de intrare a compensatorului.

Rezultatele sînt trecute în tabelul 1 care conţine:

a) Datele calculului capacităţii circuitului defazor C_D necesare pentru a realiza diferite unghiuri de defazaj ale tensiunii de ieşire a defazorului (U_{SV}) în raport cu tensiunea de intrare (U_{PQ}), la intervale de 15°. Calculul s-a făcut utilizînd relaţia:

$$C = 1/[6{,}28 \operatorname{tg}(\varphi/2)],\ [\mu F];$$

b) Datele determinării unghiului de defazaj a tensiunii de ieşire U_{SV} cu ajutorul compensatorului cu reactanţe semicompensate.

MUZEUL TEHNIC BUCUREŞTI INVENTII 1848

Tabelul 1

φ		15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Calculul capacităţii circuitului defazor												
tg ($\varphi/2$)		0,1316	0,268	0,4142	0,5773	0,7673	1	1,3032	1,732	2,414	3,732	7,596
C	μF	1,21	0,594	0,384	0,276	0,206	0,159	0,122	0,092	0,066	0,0427	0,021
Determinarea unghiului de defazaj cu compensatorul în punte												
r_1	Ω	893	852,5	788	705	604	500	394	296	211	145	104
r_2	Ω	107	147,5	212	295	396	500	606	704	789	855	896
$x = \Delta r/\Sigma r$		+0,786	+0,705	+0,576	+0,41	+0,209	0	−0,212	−0,408	−0,578	−0,710	−0,792
R_1	Ω	1 260	1 260	1 260	1 260	1 260	1 260	1 260	1 260	1 260	1 260	1 260
R	Ω	408	264	168	108,5	74	64	74,5	107,5	168	265	412
$y = \Delta R/\Sigma R$		0,214	0,41	0,578	0,708	0,79	0,817	0,79	0,709	0,578	0,408	0,209
tg $\varphi' = y/x$		0,272	0,58	1,0	1,728	3,79	∞	−3,71	−1,732	−1	−0,574	−0,264
φ'		15° 14′	30° 7′	45°	59° 57′	75° 14′	90°	105° 5′	120°	135°	150° 8′	165° 12′
$\varphi = \varphi' - \varphi_0$		14° 57′	29° 50′	44° 43′	59° 40′	74° 57′	89° 43′	104° 48′	119° 43′	134° 43′	149° 51′	164° 55′
Determinarea componentelor şi a modulului tensiunii furnizate de defazor												
U_{AB}	V	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$U_x = x\,U/2$	V	+0,786	+0,705	+0,576	+0,410	+0,209	0	−0,212	−0,408	−0,576	−0,71	−0,792
$U_y = y\,U/2$	V	0,214	0,41	0,578	0,707	0,79	0,817	0,79	0,709	0,578	0,408	0,209
$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$	V	0,816	0,815	0,816	0,817	0,816	0,817	0,817	0,817	0,816	0,818	0,82
		$0{,}82 \pm 0{,}01$										

c) Datele determinării componentelor în cuadratură ale tensiunii U_{SV} la ieşirea defazorului precum şi a modulului acestei tensiuni.

Din datele cuprinse în tabelul 1 rezultă că puntea indicată determină corect componentele tensiunii deoarece : a) din raportul acestora rezultă unghiul de defazaj calculat şi realizat prin elementele defazorului pentru intervalul unghiular 15°...165°; b) modulul tensiunii la ieşirea defazorului, rezultat din sumarea vectorială a componentelor determinate, este sensibil acelaşi, în tot intervalul unghiular, şi egal cu tensiunea măsurată direct cu un voltmetru electronic.

Pentru un unghi oarecare (de exemplu $\varphi = 60°$) rezultă: $U = 0{,}41 + j0{,}707$ V cu modulul $U = 0{,}817$ V şi argumentul $\varphi = 59° 40'$.

Tensiunea măsurată cu voltmetrul electronic este $U_{más} = 0{,}82$ V iar argumentul calculat $\varphi_c = 60°$, date foarte apropiate de cele furnizate de compensator.

Noul compensator în punte prezintă avantajul că poate fi realizat cu elemente uzuale care, în mod normal, se găsesc în laborator.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Bigorgne R., *Mesures électriques,* t. **III**, Eyrolles, Paris, 1946, p. 116.
2. *** La lumière électrique, 1910, **XII**, *47*, p. 239.
3. Pedersen P. O., The Electrician, 1919, **LXXXIII**, p. 523.
4. Kalantarov P. L., *Îndreptar pentru lucrările de laborator în curent alternativ,* Ed. tehn., Buc., 1956, p. 30, (trad. din l. rusă).
5. Schlamp G., E.T.Z., A., 1960, **81**, *22*, S. 784.
6. Wigan E. R., Electronic Technology, 1960, **37**, *11*, p. 422.
7. Bărbulescu D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2*, pp. 201—215.
8. Aseev B. P., *Relaţii de fază în radiotehnică,* EES, Buc., 1955, p. 39, (trad din l. rusă).

КОМПЕНСАТОР В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЦЕПЬЮ ИМЕЮЩЕЙ ПОЛУКОМПЕНСИРОВАННЫЙ РЕАКТАНС

(Резюме)

Описывается схема неуравновешенного моста представляющая новый компенсатор в декартовых координатах. Мост имеет три активных ветви, четвертая будучи составлена из параллельной цепи с полукомпенсированным реактансом, свойства которой описаны в [7]; эта последняя ветвь эквивалентна импедансу имеющему постоянный модуль и переменный аргумент.

Компенсатор поставляет, в измерительной диагонале, напряжение, определяемое его составляющими, по фазе и при 90° с входным напряжением.

COMPENSATEUR EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES EN UTILISANT UN CIRCUIT DÉRIVATION À RÉACTANCES SÉMICOMPENSÉES

(Résumé)

On décrit le schéma d'un pont nonéquilibré qui constitue un nouveau compensateur en coordonnées rectangulaires.

Trois branches de ce pont sont actives et la quatrième est constituée par un circuit dérivation à réactances sémicompensées equivalent à une impédance de module constant et d'argument variable [7].

Le compensateur fournit dans la diagonale de mesure, une tension connue par ses composantes, l'une en phase et l'autre en quadrature avec la tension d'entrée.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 621.318.5

ASUPRA PARAMETRILOR CARACTERISTICI AI RELEELOR MAGNETICE FĂRĂ CONTACTE, FUNCŢIONÎND PE SARCINI INDUCTIVE

DE

I. BEJAN şi N. V. BOŢAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9–11 noiembrie 1962

1. Introducere

Tehnica nouă a impus utilizarea pe scară largă a unor elemente capabile să asigure o funcţionare certă a instalaţiilor automate. Pe această linie, tendinţa actuală este de a înlocui unele elemente ca releele electronice etc., cu relee magnetice fără contacte, care se impun din ce în ce mai mult, datorită avantajelor pe care le prezintă: siguranţă în funcţionare datorită lipsei părţilor mobile şi a contactelor, siguranţă în mediile explozive, independenţa curenţilor de atragere şi eliberare de poziţia releului, lipsa de anclanşări false în cazul vibraţiilor, sensibilitate ridicată, stabilitate a curentului de lucru al releului, coeficient de amplificare ridicat, rapiditate în funcţionare şi gabarit redus în cazul alimentării la frecvenţe ridicate.

În literatura de specialitate se tratează funcţionarea releelor magnetice fără contacte, în funcţionarea ca relee normale de diferite tipuri cît şi ca relee temporizate [1]...[3], acordîndu-se atenţie în mod special elementelor de acest tip, de puteri mici, care folosesc pentru circuitul magnetic, materiale feromagnetice cu proprietăţi speciale.

În cele ce urmează se studiază parametrii principali ai releelor magnetice fără contacte, cu circuit magnetic din fier electrotehnic, care după cum se ştie, sînt folosite atunci cînd puterea comandată este ridicată [1]. Asemenea relee sînt folosite de exemplu în comanda acţionărilor electrice. Întrucît în acţionările electrice sarcinile asupra cărora lucrează aceste relee au caracter inductiv (motoare electrice) s-a insistat în mod special asupra parametrilor releelor funcţionînd pe asemenea sarcini.

2. Rezultate experimentale

După cum se ştie [2], sarcina inductivă nu exercită nici o influenţă asupra componentei continue a curentului de ieşire. În schimb această sarcină aduce modificări cantitative asupra componentei alternative a cu-

rentului de ieşire redresat. Pe de altă parte, dat fiind numărul mare de spire a înfăşurării de reacţie (externă), în aceasta se induc armonice de rang par ale f.e.m., care dau naştere unui curent ce poate introduce o reacţie suplimentară, şi prin aceasta pot apare modificări ale parametrilor principali ai releului. Aceste modificări sînt cu atît mai evidente cu cît volumul circuitului magnetic este mai mare.

Parametrii a căror modificare a fost urmărită sînt: valorile curentului de atragere (I_a) şi de eliberare (I_d), coeficientul de revenire pentru o reacţie de bază dată, şi lăţimea buclei caracteristicii releului, numai pentru relee cu reacţie externă.

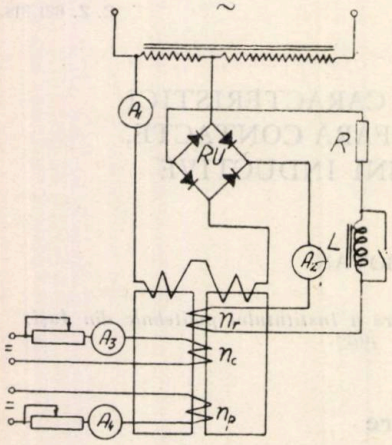


Fig. 1

Încercările experimentale au fost întreprinse utilizînd schema din fig. 1.

Experienţele au fost făcute montînd la ieşirea releului numai rezistenţe active, sau rezistenţe active şi bobine cu miez de fier, sarcina fiind alimentată în curent continuu. Valoarea rezistenţei active a fost luată de diferite mărimi, iar atunci cînd a fost folosită împreună cu bobina, valoarea rezistenţei a fost aleasă astfel încît să fie pe cît posibil preponderentă faţă de rezistenţa bobinei. Bobina utilizată a avut următoarele caracteristici: $r = 1{,}3\ \Omega$, $x_L = 50\ \Omega$, cînd curentul de ieşire al releului este $I_e = 2$ A, şi $x_L = 150\ \Omega$, cînd curentul de ieşire al releului este $I_e = 0{,}02$ A, reprezentînd valorile maxime şi minime ale curentului de ieşire.

Cît priveşte releele utilizate, acestea au fost în număr de trei, toate fiind de construcţie toroidală cu miez de fier electrotehnic. Caracteristicile constructive şi magnetice ale releelor sînt cele indicate mai jos:

Releul magnetic RM_1. Diametrul exterior $d_1 = 7{,}6$ cm, diametrul interior $d_2 = 5{,}2$ cm secţiunea $s = 3$ cm^2. Înfăşurarea de lucru este formată din 558 spire avînd diametrul $\varnothing = 0{,}35$ mm. Înfăşurarea de comandă este formată din 345 spire avînd diametrul $\varnothing = 0{,}35$ mm. Înfăşurarea de reacţie are 832 spire cu diametrul $\varnothing = 0{,}3$ mm. Coeficientul de reacţie este $K_r = 1{,}5$. Circuitul magnetic este caracterizat prin următorii parametri: valoarea maximă a permeabilităţii medii pe ciclu parţial (măsurată pentru $H_i = 0$) este $\mu = 7\,000$ Gs/Oe, la $H_{em} = 0{,}75$ Oe şi $B_m = 5\,100$ Gs.

Releul magnetic RM_2. Diametrul exterior $d_1 = 7{,}6$ cm, diametrul interior $d_2 = 5{,}2$ cm, secţiunea $s = 1{,}5$ cm^2. Înfăşurarea de lucru este formată din 269 spire cu diametrul $\varnothing = 0{,}6$ mm. Înfăşurarea de comandă este formată din 220 spire cu diametrul $\varnothing = 0{,}6$ mm. Înfăşurarea de reacţie are 378 spire cu diametrul $\varnothing = 0{,}6$ mm. Coeficientul de reacţie este $K_r = 1{,}4$. Circuitul magnetic este executat din acelaşi material ca şi releul RM_1.

Releul magnetic RM_3. Diametrul exterior $d_1 = 16$ cm, diametrul interior $d_2 = 10{,}2$ cm, secţiunea $s = 7{,}8$ cm^2. Înfăşurarea de comandă are 844 spire cu diametrul $\varnothing = 0{,}45$ mm. Înfăşurarea de lucru este formată din 517 spire cu diametrul $\varnothing = 0{,}6$ mm. Înfăşurarea de reacţie are 880 spire cu diametrul $\varnothing = 0{,}45$ mm. Coeficientul de reacţie este $K_r = 1{,}7$. Circuitul magnetic este caracterizat prin următorii parametri: valoarea maximă a permeabilităţii medii pe ciclu parţial (măsurată pentru $H_i = 0$) este $\mu = 1\,700$ Gs/Oe, la $H_{em} = 0{,}8$ Oe şi $B_m = 1\,350$ Gs.

S-au determinat experimental valorile curenţilor de intrare şi ieşire obţinute pe releul magnetic RM_1 pentru diferite valori ale tensiunii de alimentare şi rezistenţei de sarcină, fără sau cu reactanţă inductivă în circuitul de sarcină.

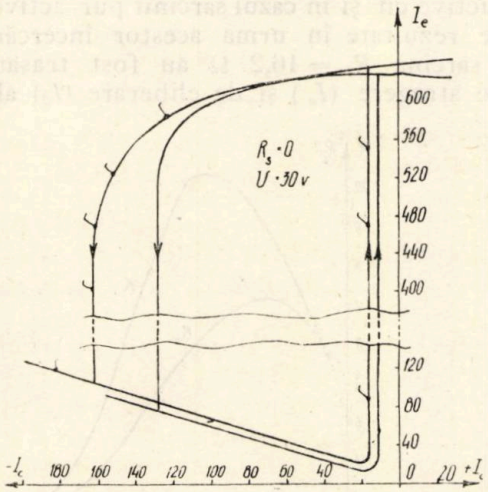


Fig. 2

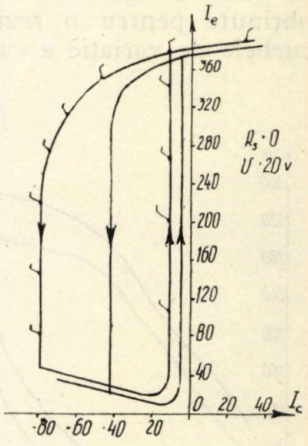


Fig. 3

Pe baza datelor experimentale obţinute s-au trasat caracteristicile releului numai pentru următoarele valori ale tensiunii de alimentare şi ale rezistenţei de sarcină: în fig. 2 şi fig. 3 — pentru $R_s = 0$ şi $U = 20$ V şi, respectiv, 30 V; iar în fig. 4 şi fig. 5 — pentru $R_s = 30\ \Omega$ şi aceleaşi valori ale tensiunilor.

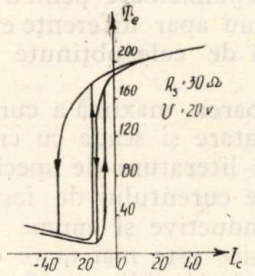


Fig. 4

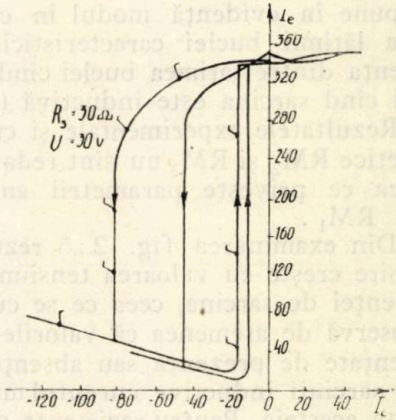


Fig. 5

Pe aceleaşi figuri au fost reprezentate atît caracteristicile releului numai cu rezistenţă activă de sarcină, cît şi caracteristicile obţinute în situaţia cînd s-a introdus şi sarcina inductivă.

Întrucît s-a urmărit variaţia parametrilor amintiţi, cu şi fără reactanţă inductivă, au fost întreprinse o serie de încercări asupra curenţilor de atragere şi de eliberare şi pentru alte valori ale tensiunii, mai mari ca cele redate în fig. 2...5, rezistenţa de sarcină menţinîndu-se constantă atît în cazul sarcinii inductive cît şi în cazul sarcinii pur active. Pe baza rezultatelor experimentale rezultate în urma acestor încercări obţinute pentru o rezistenţă de sarcină $R_s = 16{,}2\ \Omega$ au fost trasate curbele de variaţie a curentului de atragere (I_a) şi de eliberare (I_d) ale

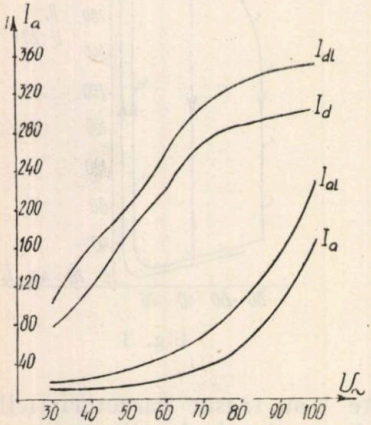


Fig. 6

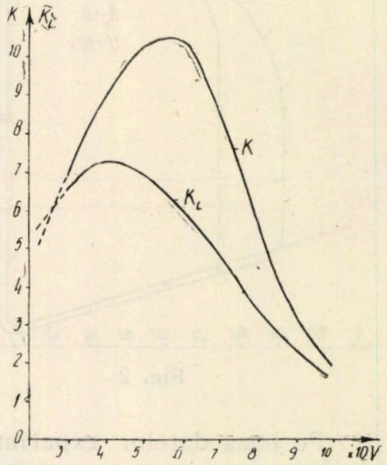


Fig. 7

releului (fig. 6), variaţia coeficientului de revenire K şi K_L al releului (fig. 7) şi lăţimea buclei caracteristicii releului (Δ şi Δ_L), (fig. 8). Pentru a se pune în evidenţă modul în care influenţează reactanţa inductivă asupra lăţimii buclei caracteristicii releului, în fig. 9 s-a reprezentat diferenţa dintre lăţimea buclei cînd sarcina este pur activă (Δ) şi lăţimea buclei cînd sarcina este inductivă (Δ_L).

Rezultatele experimentale şi curbele corespunzătoare pentru releele magnetice RM_2 şi RM_3 nu sînt redate, întrucît nu apar diferenţe evidente în ceea ce priveşte parametrii analizaţi faţă de cele obţinute pentru releul RM_1.

Din examinarea fig. 2...5 rezultă că valoarea maximă a curentului de ieşire creşte cu valoarea tensiunii de alimentare şi scade cu creşterea rezistenţei de sarcină, ceea ce se cunoaşte din literatura de specialitate. Se observă de asemenea că valorile maxime ale curentului de ieşire sînt influenţate de prezenţa sau absenţa sarcinii inductive şi anume în prezenţa sarcinii inductive curentul maxim de ieşire este mai mare decît în absenţa acesteia. Pentru rezistenţe de sarcină relativ ridicate ($R_s = 30\ \Omega$) situaţia se inversează.

Din examinarea fig. 6 rezultă că indiferent de valoarea tensiunii de alimentare, prezenţa reactanţei inductive duce la creşterea curenţilor de eliberare şi de atragere ai releului. Aceste creşteri, în cazul curentului de eliberare, sînt cuprinse între 13% şi 27%, iar în cazul curentului de

atragere a releului, între 25% şi 50%, valoarea maximă avînd loc pentru o anumită tensiune de alimentare. Cît priveşte influenţa tensiunii, alura curbelor se păstrează aceeaşi atît în prezenţa cît şi în lipsa reactanţei inductive, cu observaţia că în timp ce curentul de atragere creşte mai puţin pentru tensiuni reduse şi mai accentuat pentru tensiuni mai ridicate, pentru curentul de eliberare situaţia este opusă.

În fig. 7 s-a reprezentat variaţia coeficientului de revenire K în

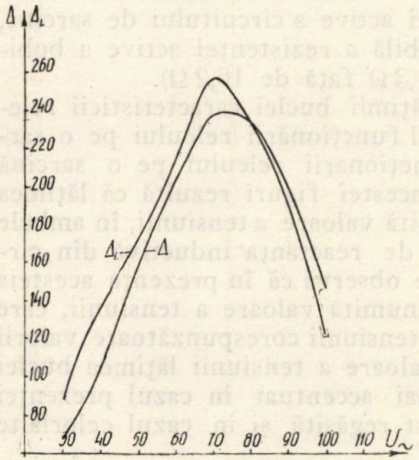


Fig. 8

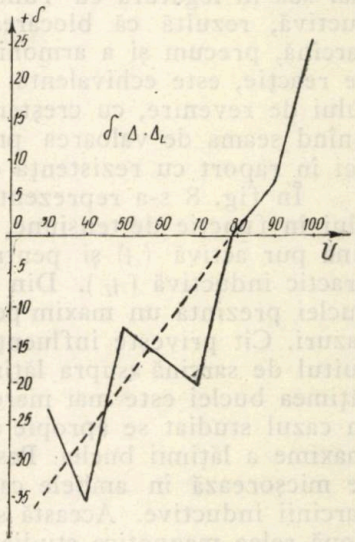


Fig. 9

cazul cînd sarcina este pur activă şi K_L — cînd sarcina este inductivă, în funcţie de tensiunea de alimentare. Se menţionează că s-a definit drept coeficient de revenire al releului, raportul [4]:

$$K = I_d / I_a = \text{curent de eliberare/curent de atragere}$$

După cum rezultă din fig. 7 prezenţa sarcinii inductive în circuitul de ieşire al releului face ca valoarea coeficientului de revenire pentru diferite tensiuni de alimentare să fie mai mică decît în cazul unei sarcini pur active. Această micşorare a coeficientului de revenire poate fi determinată fie de blocarea componentei alternative a curentului de sarcină, prin introducerea reactanţei inductive, fie de blocarea armonicelor pare din circuitul înfăşurării de reacţie, fie de suprapunerea celor două efecte. În condiţiile în care s-a lucrat creşterea coeficientului de revenire, în lipsa sarcinii inductive, este cuprinsă între 20% şi 45%, avînd valoarea maximă pentru tensiuni de 60...65 V.

Pe de altă parte se observă că coeficientul de revenire, atît în cazul sarcinii inductive cît şi în cazul sarcinii pur active, prezintă o valoare maximă pentru o anumită valoare a tensiunii, fapt menţionat în literatura de specialitate [1]. Examinînd curbele din fig. 7 se constată că prezenţa

reactanţei inductive deplasează maximul curbei de variaţie a coeficientului de revenire către valori mai mici ale tensiunii de alimentare.

În cazul celorlalte două relee magnetice (RM_1 şi RM_3) coeficientul de revenire păstrează aceleaşi legi de variaţie, cu menţiunea că valorile maxime se regăsesc pentru alte tensiuni.

Din fig. 2...5 se observă că coeficientul de revenire scade cu creşterea rezistenţei de sarcină, pentru aceeaşi valoare a tensiunii, fapt cunoscut din literatura de specialitate [2]. Ţinînd seama de cele arătate mai sus în legătură cu funcţionarea releului magnetic pe o sarcină inductivă, rezultă că blocarea componentei alternative din circuitul de sarcină, precum şi a armonicelor pare de curent induse în înfăşurarea de reacţie, este echivalentă, din punct de vedere al valorilor coeficientului de revenire, cu creşterea rezistenţei active a circuitului de sarcină, ţinînd seama de valoarea practic neglijabilă a rezistenţei active a bobinei în raport cu rezistenţa de sarcină (1,3 Ω faţă de 16,2 Ω).

În fig. 8 s-a reprezentat variaţia lăţimii buclei caracteristicii releului în funcţie de tensiune, pentru cazul funcţionării releului pe o sarcină pur activă (Δ) şi pentru cazul funcţionării releului pe o sarcină practic inductivă (Δ_L). Din examinarea acestei figuri rezultă că lăţimea buclei prezintă un maxim pentru o anumită valoare a tensiunii, în ambele cazuri. Cît priveşte influenţa exercitată de reactanţa inductivă din circuitul de sarcină asupra lăţimii buclei, se observă că în prezenţa acesteia lăţimea buclei este mai mare pînă la o anumită valoare a tensiunii, care în cazul studiat se apropie de valoarea tensiunii corespunzătoare valorii maxime a lăţimii buclei. Peste această valoare a tensiunii lăţimea buclei se micşorează în ambele cazuri, însă mai accentuat în cazul prezenţei sarcinii inductive. Această situaţie a fost regăsită şi în cazul celorlalte două relee magnetice studiate.

Încercările experimentale întreprinse pe releul magnetic RM_1 au arătat că creşterea lăţimii buclei în prezenţa reactanţei inductive, variază între 10% şi 60%, valoarea maximă fiind obţinută pentru tensiuni mici. Cît priveşte micşorarea lăţimii buclei în cazul sarcinii inductive (pentru valori ridicate ale tensiunii) este mult mai mică şi anume de cel mult 18% în cazul studiat, pentru tensiunile cele mai mari.

Cele relatate cu privire la lăţimea buclei caracteristicii releului magnetic sînt puse în evidenţă în fig. 9, în care s-a reprezentat diferenţa $\delta = \Delta - \Delta_L$ în funcţie de tensiunea de alimentare. Din această figură cît şi din cea precedentă rezultă că pentru o anumită valoare a tensiunii lăţimea buclei nu este influenţată de caracterul sarcinii (activ sau inductiv).

3. Concluzii

a) Funcţionarea releului magnetic pe o sarcină inductivă duce la modificări calitative şi cantitative ale parametrilor principali ai releului: curentul maxim de ieşire, curenţii de atragere şi eliberare, coeficientul de revenire şi lăţimea buclei. Aceste modificări se datoresc pe de-o parte blocării de către reactanţa inductivă a componentei alternative a curentului de reacţie, iar pe de altă parte blocării armonicelor pare de curent induse în înfăşurarea de reacţie.

b) Valoarea maximă a curentului de ieşire (pentru $I_i = 0$) este în general puţin modificată de caracterul sarcinii, şi anume pentru rezistenţe de sarcină mici valoarea maximă a curentului de ieşire este mai mare în cazul sarcinii inductive, iar pentru rezistenţe de sarcină mari, situaţia este opusă.

c) Indiferent de valoarea tensiunii de alimentare, introducerea reactanţei inductive în circuitul de sarcină al releului duce la creşterea curenţilor de eliberare şi de atragere ai releului magnetic.

d) Prezenţa reactanţei inductive în circuitul de sarcină al releului magnetic duce la micşorarea coeficientului de revenire al acestuia şi la deplasarea maximului curbei de variaţie a coeficientului de revenire în funcţie de tensiune, spre valori mai mici ale tensiunii.

e) Sarcina inductivă duce la creşterea lăţimii buclei caracteristicii releului magnetic pînă la anumite valori ale tensiunii de alimentare, după care lăţimea buclei devine mai mică decît în cazul unei sarcini pur active în circuitul releului magnetic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de utilizări electrice,
Laboratorul de acţionări electromecanice
şi automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Розенблат М. А., *Магнитные усилители,* 3-е изд., Изд. Советское радио, М., 1960.
2. Тищенко И. М., *Безконтактные магнитные реле,* Библиотека по автоматике, *39,* ГЭИ, М.-Л., 1961.
3. Розенблат М. А., *Безконтактные магнитные устройства автоматики,* Изд. АН СССР, М., 1961.
4. Babikov M. A., *Aparate electrice,* EES, Buc., 1952, (trad. din l. rusă).
5. Васильева Н. П., Седых О. А., Боярченков М. А., *Проектирование магнитных усилителей,* ГЭИ, М.-Л., 1959.

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МАГНИТНЫХ БЕЗКОНТАКТНЫХ РЕЛЕ, ПРИ ИХ РАБОТЕ НА ИНДУКТИВНЫХ НАГРУЗКАХ

(Резюме)

Исследуются изменения главных параметров магнитных безконтактных реле, при их работе на индуктивных нагрузках, случай часто встречающийся в электроприводных установках. Указывается действие индуктивной нагрузки на значения токов срабатывания и отпускания реле, на коэффициент возврата и на ширину петли характеристики реле.

SUR LES PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES DES RELAIS MAGNÉTIQUES SANS CONTACTS, FONCTIONNANT SUR DES CHARGES INDUCTIVES

(Résumé)

On étudie la variation des paramètres principaux des relais magnétiques sans contacts, lorsque la charge est inductive, cas souvent rencontré dans les installations de commande électrique. On met en évidence l'influence de la charge inductive sur les valeurs des courants d'atraction et d'élibération du relais, sur le coefficient de revenu et sur la largeur de la boucle caractéristique du relais.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 621.313.323

MOTOR SINCRON REACTIV MONOPOLAR MONOFAZAT

DE

AUREL POPOVICI, GH. ŞERBAN, VITALIE VASILACHE,
I. SUCHAR şi PARASCHIVA HABA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că un cîmp alternativ sinusoidal cu repartiţie sinusoidală radială monopolară poate fi descompus în două cîmpuri învîrtitoare, cu viteza $n = 120\,f$, încît dacă curentul care dă naştere acestui cîmp are frecvenţa de 50 Hz se obţine viteza sincronă de 6 000 rot/min, şi de asemenea s-a specificat utilitatea practică a acestei viteze.

S-a mai arătat că cele două cîmpuri învîrtitoare componente au şi ele o repartiţie sinusoidală în spaţiu, existenţa fiecăruia dintre acestea fiind limitată la un singur pas polar ; amplitudinea lor este constantă şi echivalentă unei singure alternanţe numai din punctul de vedere al valorii absolute. Existenţa lor şi posibilitatea de acţiune independentă a fost pusă în evidenţă pe un dispozitiv experimental, într-o gamă largă de frecvenţe, ceea ce a sugerat posibilitatea de a construi maşini bazate pe acest principiu.

Obiectul acestei Note îl formează prezentarea realizării unui motor sincron reactiv monopolar şi a unei prime serii de constatări experimentale calitative.

2. Criteriile de realizare

Ţinînd seama de natura cîmpului învîrtitor obţinut în cazul cîmpului alternativ monopolar (valoarea absolută constantă), rezultă că cea mai simplă şi mai sigură realizare practică, bazată pe utilizarea acestui cîmp, poate fi o maşină sincronă reactivă, la care, după cum se ştie, funcţionarea nu se bazează pe inducerea de curenţi. Maşina trebuie construită astfel încît să permită obţinerea unui cîmp alternativ cu repartiţie monopolară, pe cît posibil sinusoidală, adică repartiţia în întrefier a inducţiei unui pol să fie extinsă la 360° geometrice.

Deşi motorul sincron monofazat monopolar monocircular face parte din familia maşinilor sincrone reactive, reprezentînd totuşi o construcţie experimentală bazată pe un principiu nou, nu s-a putut executa într-o

formă precisă, din primul moment. Necunoscînd în prealabil comportarea maşinii, s au căutat soluţii de realizare cît mai apropiate de considerentele de principiu rezultate teoretic [1], care să permită în acelaşi timp reglajul într-o gamă oarecare a anumitor parametri constructivi; a fost deci necesară mai întîi realizarea ei în formă ajustabilă, pentru a permite determinarea aspectelor specifice construcţiei după acest principiu. S-a adoptat construcţia maşinii cu cîmp axial şi întrefier de lungime constantă, repartiţia monopolară a fluxului magnetic fiind obţinută prin forma secţiunii părţii active a pieselor polare şi a rotorului. Motorul a fost realizat după indicaţiile noastre, cu posibilităţile limitate ale atelierului laboratorului (de către maistrul I. Fediuc), reuşindu-se totuşi rezolvarea unei serii de probleme tehnologice dificile. În altă fază a acestui studiu urmează să se treacă spre o construcţie de performanţe, care să ţină seama şi de indicaţiile existente în literatură pentru proiectarea şi realizarea maşinilor sincrone reactive, adaptîndu-le la cazul de faţă.

3. Construcţia şi funcţionarea maşinii

Principalele părţi componente ale maşinii sînt redate în fig. 1. Piesele polare *1*, rotorul *2*, întrefierul de lungime uniformă *7* şi miezul de fier al statorului *3* reprezintă circuitul magnetic al maşinii.

Înfăşurarea de excitaţie *4* şi miezul de fier *3* au fost împărţite în două părţi din necesităţi de montaj, precum şi pentru a avea posibilitatea de reglaj a întrefierului şi a lungimii roţii polare. Arborele rotorului *5*, construit din bronz laminat, este trecut printr-un spaţiu anume prevăzut în interiorul fierului statoric şi se poate roti în lagărele *6*, fixate independent pe şasiu.

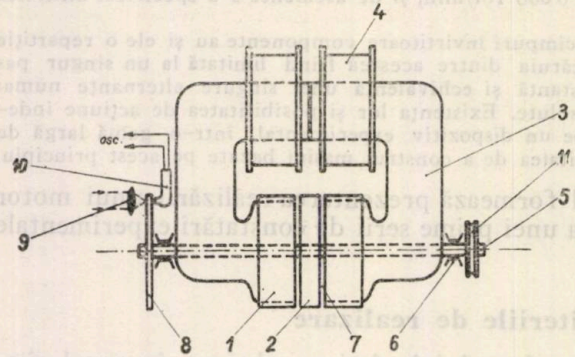


Fig. 1

Fig. 2 reprezintă o secţiune prin piesa polară a statorului, unde s-a arătat: fierul piesei polare *1*, axul rotorului *2*, materialul de fixare neferomagnetic şi neconductor *3* şi cilindrul de asamblare *4*, din material neconductor.

Spre deosebire de rotorul maşinilor sincrone, care deseori se construieşte din fier masiv, la maşina monopolară este obligatorie construcţia rotorului din table. În maşina folosită experimental secţiunea rotorului, obţinută prin asamblare din table izolate, are o formă analogă celei a statorului, cu deosebirea că rotorul este fixat rigid pe ax, printr-un sistem de flanşe, iar dozarea părţii *3* este făcută totodată şi în vederea echilibrării sale dinamice. Din motive de rezistenţă mecanică cilindrul

de asamblare a rotorului este construit din aluminiu, cu o tăietură în vederea anulării efectului de spiră în scurt-circuit.

Din întreaga construcţie a maşinii, realizarea rotorului, cu viteza sa ridicată, prezintă o problemă tehnologică mai delicată, în special datorită nesimetriei sale în raport cu axul de rotaţie precum şi faptului că părţile sale componente necesită izolarea electrică pe unele trasee şi totodată o asamblare perfect sigură din punct de vedere al rezistenţei mecanice. Cu toate acestea se poate considera că motoarele construite pe acest principiu prezintă simplitatea de construcţie proprie maşinilor reactive, permiţînd totodată obţinerea pe cale simplă a vitezei de 6 000 rot/min, atît de necesară în practică.

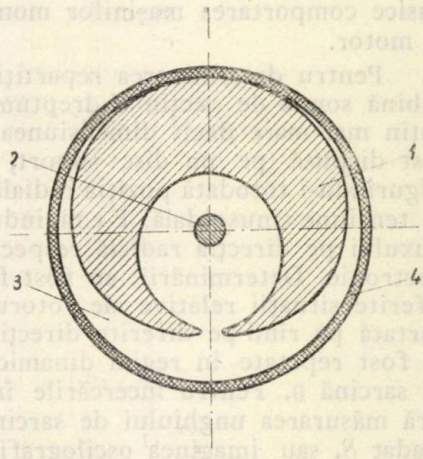


Fig. 2

Este cunoscut [2] că puterea electromagnetică a unei maşini cu poli aparenţi ($X_d \neq X_q$) este dată de expresia:

$$(1) \qquad P_{em} = m(UE/X_d)\sin\theta + m[U^2(X_d - X_q)/(X_d X_q)]\sin 2\theta,$$

unde: X_d şi X_q — reactanţele sincrone, longitudinală şi transversală, m — numărul de faze, U şi E — tensiunea şi f.e.m. a unei faze a statorului, iar θ — unghiul de sarcină.

Termenul al doilea din membrul drept al relaţiei (1) reprezintă aşa-numita putere parametrică pe care maşina o dezvoltă atunci cînd nu este excitată ($E = 0$), adică funcţionează ca maşină sincronă reactivă. Spre deosebire de primul termen (componenta principală) din relaţia (1), care are valoarea maximă la $\theta = \pm 90°$ el., puterea parametrică atinge valoarea maximă la $\theta = \pm 45°$ el.

Pe de altă parte se ştie că pentru ca între statorul şi rotorul unei maşini sincrone să se exercite un cuplu permanent diferit de zero, este necesar ca rotorul să fie adus la viteza de sincronism. Aducerea la sincronism a motorului monopolar s-a făcut prin intermediul şaibei *11* (fig. 1), cu ajutorul unui motor auxiliar, cuplarea la reţeaua cu frecvenţa de 50 Hz făcîndu-se la atingerea vitezei de sincronism (6 000 rot/min). Această viteză a fost apreciată comod cu tahometrul sau cu stroboscopul, dar sincronizarea se poate face simplu şi după cîteva tatonări scurte de cuplare. Intrarea în sincronism se face cu sau fără oscilaţii, aceasta depinzînd de valoarea lui θ în momentul cuplării motorului la reţea. Odată intrat în sincronism motorul reactiv devine capabil să dezvolte cuplu în mod independent, motorul de antrenare fiind decuplat. Pornirea în asincron, utilizată uneori la motoarele sincrone reactive multipolare, nu este posibilă în cazul constructiv de faţă.

4. Încercări experimentale

Încercările experimentale au fost întreprinse cu scopul de a verifica măsura în care repartiţia reală a fluxului corespunde cu indicaţiile teoretice de principiu şi pentru a cunoaşte şi compara cu maşinile reactive clasice comportarea maşinilor monopolare, în special în funcţionarea lor ca motor.

Pentru determinarea repartiţiei fluxului în întrefier s-a utilizat o bobină sondă de secţiune dreptunghiulară, avînd dimensiunea radială cu puţin mai mare decît dimensiunea radială maximă a piesei polare. Ea a fost dispusă pe un disc suport, care îi permitea rotirea în întrefier, asigurîndu-i totodată poziţia radială. S-a alimentat înfăşurarea de excitaţie cu tensiune sinusoidală. F.e.m. indusă în sondă, proporţională cu valoarea fluxului pe direcţia radială respectivă, a fost măsurată cu un voltmetru electronic. Determinările au fost făcute mai întîi în regim static, pentru diferite situaţii relative ale rotorului în raport cu statorul, sonda fiind purtată pe rînd pe diferite direcţii radiale în întregul întrefier, iar apoi au fost repetate în regim dinamic, pentru diverse valori ale unghiului de sarcină θ. Pentru încercările în regim dinamic, la care a fost necesară măsurarea unghiului de sarcină θ, s-a folosit stroboscopul şi discul gradat *8*, sau imaginea oscilografică dată de o celulă fotoelectrică *10*, iluminată de sistemul optic *9*, o dată la fiecare rotaţie, printr-o fantă radială în discul *8*, fixat solidar pe axul rotorului (fig. 1).

Poziţia de funcţionare teoretică a maşinii la gol ($\theta = 0$) a fost determinată folosind măsurarea puterii absorbite de motorul monopolar în regim static şi la mersul sincron la gol, precum şi a puterii absorbite de motorul de lansare atunci cînd acţiona la sincronism motorul monopolar neexcitat şi atunci cînd motorul monopolar funcţiona sincron sub tensiunea nominală la gol. Considerînd că pierderile de tip transformatoric produse în rotor rămîn practic invariabile prin trecerea de la regimul static la cel dinamic şi că motorul de lansare furnizează numai pierderile mecanice, rezultă că puterea absorbită de acest motor în cele două situaţii menţionate trebuie să fie aceeaşi. Experimental s-a reglat cuplajul dintre cele două maşini pentru realizarea acestei condiţii. Totodată s-a constatat că puterea absorbită de motorul monopolar în funcţionarea sincronă la gol a păstrat valoarea pe care o avea în regim static la aceeaşi tensiune de alimentare, confirmîndu-se justeţea ipotezei făcute. Lectura unghiului θ s-a făcut cu ajutorul stroboscopului alimentat de la aceeaşi sursă de tensiune. Curbele din fig. 3, care reprezintă repartiţia f.e.m. induse în sondă, practic proporţională cu repartiţia fluxului, au fost obţinute prin alimentarea maşinii monopolare la tensiunea de 400 V, în regim static (curbele *1* şi *2*) şi în regim dinamic (curba *3*). Curba *1* corespunde situaţiei în care axa polului rotoric coincide cu axa polului statoric, iar curba *2* — situaţiei cînd axa polului rotoric este decalată cu 60° geometrice faţă de axa polului statoric; curba *3* este trasată în regim dinamic la un unghi de sarcină egal cu 60° geometrice în urmă faţă de sensul de rotaţie, adică în regim de motor.

Din curba *1* se observă că repartiţia fluxului în întrefier este destul de apropiată de repartiţia sinusoidală urmărită, cu mici nesimetrii pro-

venite din unele imperfecţii constructive, atît în ce priveşte distribuţia fierului în piesa polară statorică cît şi distribuţia fierului şi realizarea sistemului de asigurare a ansamblului rotoric care, prin neizolarea perfectă a unor şuruburi radiale, a creat cîteva spire în scurtcircuit. La curba *2*, în zona corespunzătoare coarnelor polare ale rotorului, se observă o scădere a fluxului, care se explică prin efectul local de mărire a reluctanţei, ca urmare a reducerii secţiunii de fier prin care se face trecerea fluxului

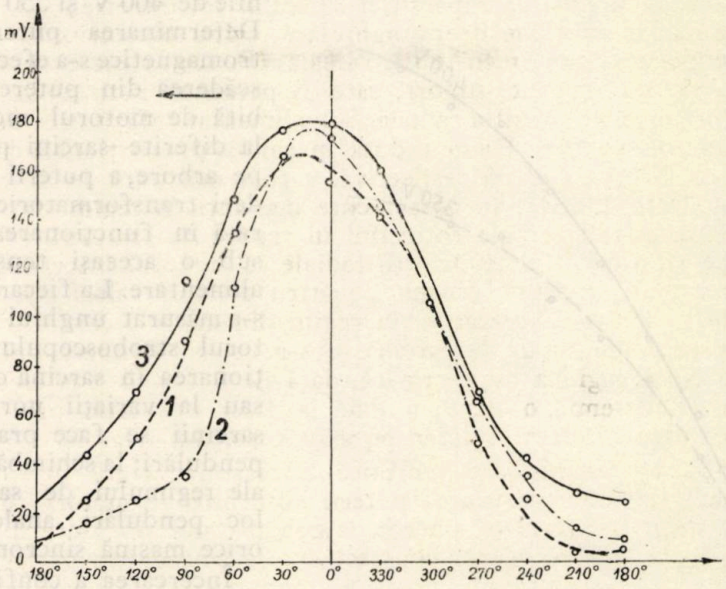


Fig. 3

magnetic. În zona de valoare minimă a fluxului statoric se observă o uşoară creştere, care se explică în mod analog, iar depăşirea valorii maxime a fluxului reprezintă, probabil, urmarea unui efect de distorsiune. Curba *3* indică menţinerea unei repartiţii sensibil sinusoidale şi în regim dinamic; abaterile valorii f. e. m. din sondă faţă de valorile repartiţiei statice (curba *1*) se datoresc unui efect local de modulaţie a fluxului magnetic cauzat de variaţia locală a reluctanţei magnetice în decursul mişcării rotorului. Măsurările referitoare la repartiţia fluxului magnetic vor fi reluate într-o construcţie ameliorată.

Aspectele de funcţionare a maşinii monopolare ca motor şi ca generator sînt redate sugestiv prin oscilograme în care unghiul θ apare prin poziţia relativă a impulsului dat de celula fotoelectrică (curba în dinţi de ferăstrău) faţă de valoarea maximă a curentului de excitaţie. Poziţia $\theta = 0$ în raport cu curentul a fost obţinută prin reglajul poziţiei fantei discului *8* la fixarea acestuia pe axul rotorului Fig. 4...6 reprezintă oscilogramele în funcţionarea ca motor, în trei situaţii de sarcină, pînă la limita de stabilitate.

Fig. 4 corespunde la o sarcină pe arbore nulă; fig. 5 corespunde la o sarcină intermediară, iar fig. 6 corespunde unei sarcini situate în apropiere de sarcina limită.

Fig. 7 reprezintă funcţionarea maşinii la $\theta = 0$, obţinută prin cuplarea cu motorul de antrenare, iar fig. 8 — funcţionarea ca generator la o sarcină oarecare.

O verificare cantitativă a comportării maşinii ca motor a fost întreprinsă prin trasarea curbelor puterii electromagnetice (P) în funcţie de unghiul de sarcină (θ), alimentînd motorul la tensiunile de 400 V şi 350 V (fig. 9). Determinarea puterii electromagnetice s-a efectuat prin scăderea din puterea absorbită de motorul monopolar, la diferite sarcini provocate pe arbore, a puterii de pierderi transformatorice, măsurată în funcţionarea statică sub o aceeaşi tensiune de alimentare. La fiecare sarcină s-a măsurat unghiul θ cu ajutorul stroboscopului. Funcţionarea în sarcină constantă sau la variaţii normale ale sarcinii se face practic fără pendulări; la schimbări bruşte ale regimului de sarcină au loc pendulări, analog ca la orice maşină sincronă.

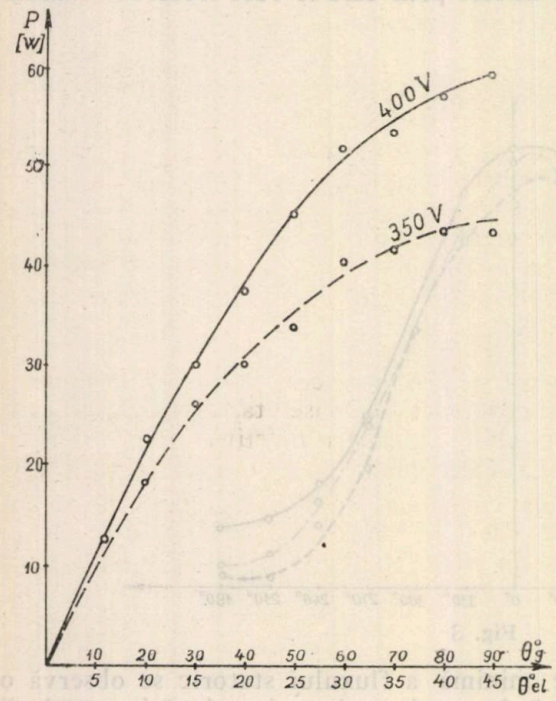


Fig. 9

Încercarea a confirmat variaţia sinusoidală a cuplului funcţie de unghiul θ, încadrarea funcţionării ca motor în gama $0 < \theta < 45°$ el., aşa cum rezultă teoretic, precum şi variaţia puterii electromagnetice cu pătratul tensiunii de alimentare. Un aspect specific motorului reactiv monopolar îl constituie faptul că stabilitatea în funcţionarea ca motor se extinde pe un interval de 90° geometrice, adică analog ca în cazul motorului sincron bipolar cu excitaţie normală, ceea ce constituie un avantaj faţă de motorul reactiv bipolar, a cărui funcţionare stabilă are loc numai pe un interval de 45° geometrice.

Studiind motorul monopolar monofazat în funcţionare sincronă, consecutiv în ambele sensuri de rotaţie, s-a constatat o comportare absolut identică, ceea ce dovedeşte că el poate funcţiona fără preferinţe, pe oricare dintre cele două componente învîrtitoare ale cîmpului monopolar monofazat, verificînd şi sub acest aspect consideraţiile teoretice [1].

Ţinînd seama de faptul că motorul prezentat în această Notă a avut ca scop, în special, punerea în evidenţă a posibilităţii de construire şi de funcţionare a motoarelor bazate pe acest principiu şi că actuala construcţie a motorului monopolar nu a corespuns întrutotul şi este

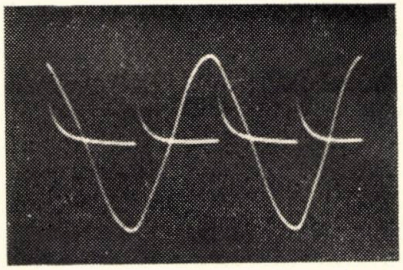


Fig. 4

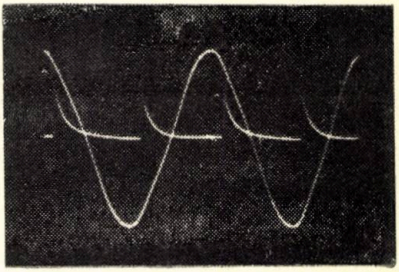


Fig. 5

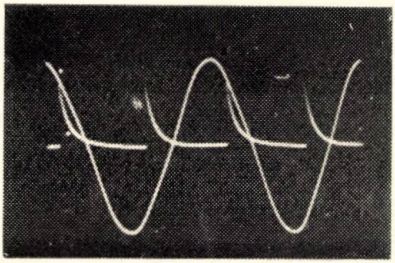


Fig. 6

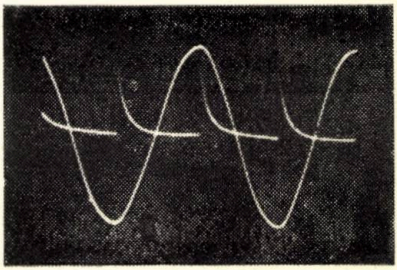


Fig. 7

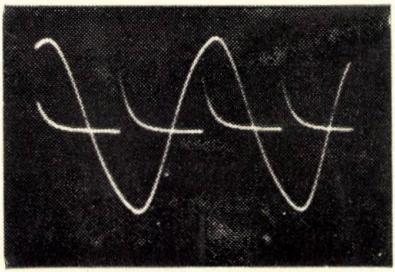


Fig. 8

încă susceptibilă, cu siguranţă, de importante ameliorări, considerăm că valorile coborîte ale randamentului şi factorului de putere, obţinute experimental, nu sînt semnificative şi ca atare n-au fost reproduse aici.

Este cunoscut faptul că la motoarele reactive se obţin uneori şi viteze de funcţionare subsincrone (de exemplu la jumătate din viteza sincronă). În cazul de faţă, datorită repartiţiei suficient de apropiată de sinusoidă a fluxului în regim dinamic, rezultă că nu pot exista alte viteze de funcţionare, fapt verificat experimental.

5. Concluzii

a) Lucrarea de faţă dovedeşte posibilitatea de utilizare a cîmpului monopolar monofazat pentru transformarea energiei electrice în energie mecanică.

b) Printr-o construcţie adecvată s-a obţinut distribuţia monopolară, practic sinusoidală, a fluxului în întrefier.

c) Pentru a evita pierderile de energie produse prin inducerea de curenţi de scurtcircuit în rotor, este obligatorie construirea lui din table izolate.

d) Atît prin funcţionarea cît şi prin caracteristicile sale, motorul monopolar realizat în forma sa constructivă deosebită, prezintă, aşa cum s-a prevăzut, proprietăţile maşinii sincrone reactive (mers sincron, $\theta_{max} = \pm 45°$ el., variaţia puterii electromagnetice funcţie de θ după o lege sinusoidală şi proporţională cu pătratul tensiunii, oscilaţii pendulare la variaţii bruşte de sarcină), deşi se bazează pe existenţa unui cîmp învîrtitor de o formă care pînă în prezent nu a fost semnalată.

e) Deşi construcţia maşinii monopolare prezintă unele dificultăţi tehnologice specifice, se poate totuşi considera că ea păstrează, cu avantajele respective, aspectul simplu, specific maşinii sincrone reactive.

f) Învingerea dificultăţilor tehnologice în condiţiile de laborator permite să apreciem că realizarea motoarelor de acest tip în sectorul industrial se va putea face cu mult mai uşor şi cu rezultate corespunzătoare.

g) Din punct de vedere constructiv şi al alimentării la frecvenţa de 50 Hz, motorul reprezintă un procedeu simplu de obţinere a vitezei sincrone de 6000 rot/min.

h) Construcţia de faţă este una de principiu şi nu de performanţe, ceea ce explică o serie de valori scăzute ale parametrilor: randament, factor de putere, coeficient de modulaţie.

i) Constatările făcute impun ca necesară şi posibilă continuarea studiilor pe o maşină de un tip ameliorat.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică,
Laboratorul de electrotehnică generală

BIBLIOGRAFIE

1 Popovici A., Şerban Gh., Suchar I., Vasilache V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2*, pp. 215—228.
2. Gheorghiu I. S., *Maşini electrice*, vol. **III** (Maşina sincronă), ESDP, Buc., 1961.

ОДНОФАЗНЫЙ ОДНОПОЛЮСНЫЙ СИНХРОННЫЙ РЕАКТИВНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ

(Резюме)

Проверяется возможность превращения электрической энергии в механическую энергию при помощи однофазного однополюсного поля. Было создано, при помощи соответствующей конструкции машины, однополюсное синусоидальное распределение магнитного потока в зазоре. Во избежание потерь энергии, вызываемых вихревыми токами в роторе, последний был построен из изолированных листов электротехнической стали. Как работой, так и своими характеристиками, однополюсный двигатель обладает, согласно теоретическим предвидениям, свойствами синхронной реактивной машины (синхронный ход, колебания скорости при резких изменениях нагрузки, $\theta_{макс} = \pm 45$ эл. гр., изменение электромагнитной мощности пропорционально второй степени напряжения, а также и синусоидально в отношении θ), несмотря на то, что его работа основывается на производстве вращающегося магнитного поля формы доныне не указанной в литературе. Не смотря на то, что конструкция однополюсной машины представляет некоторые, присущие ей, технологические трудности, можно считать, что этот двигатель сохраняет простой вид, характерный для синхронной реактивной машины. Возможность побороть в лабораторных условиях технологические затруднения позволяет считать, что конструкция двигателей этого типа промышленным путем будет значительно легче и даст хорошие результаты. С конструктивной точки зрения, однополюсный двигатель представляет собой простой прибор получения синхронной скорости в 6 000 об/мин, питая двигатель токами частотой в 50 Hz.

Построение прототипа синхронного реактивного однополюсного однофазного двигателя в лаборатории имело как цель проверку его характера в качестве синхронной реактивной машины, без попытки получить особо высокие характеристики работы, чем и оправдываются низкие величины некоторых параметров (к. п. д., коэффициент мощности, коэффициент модуляции).

Конечные результаты выявляют необходимость и возможность продолжать исследования на улучшенной машине.

MOTEUR SYNCHRONE RÉACTIF MONOPOLAIRE MONOPHASÉ

(Résumé)

La présente Note prouve la possibilité d'utiliser le champ monopolaire monophasé pour transformer l'énergie electrique en travail mécanique. Grâce à une construction apropriée, on a obtenu une distribution monopolaire, à peu pres sinusoïdale, du flux dans l'entrefer. Pour éviter les pertes d'énergie produites par l'induction de courants dans le rotor, celui-ci doit être construit saus forme de tôles isolées.

Par son fonctionnement et aussi par ses caractéristiques, le moteur monophasé, réalisé dans sa forme constructive spécifique, présente, en concordance avec les prévisions théoriques, les propriétés de la machine synchrone réactive (fonctionnement synchrone, oscillations de vitesse aux variations brusques de la charge, $\theta_{max} = 45°$ el., proportionalité entre la puissance électromagnétique et le carré de la tension et variation sinusoïdale de cette puissance par rapport à 0), quoique la forme du champ tournant utilisé n'a pas été signalée jusqu'à présent.

Malgré que'que difficultés technologiques spécifiques, la construction de la machine monopolaire conserve l'aspect simple, caractéristique aux machines synchrones réactives et les avantages qui en découlent.

La possibilité de surmonter les difficultés technologiques en conditions de laboratoire prouve que le secteur industriel pourra construire d'une manière bien plus facile des moteurs de ce type ayant des paramètres supérieurs. Simple par sa construction, le moteur monopolaire représente un procédé facile d'obtenir la vitesse synchrone de 6 000 t/min à la fréquence de 50 Hz.

La variante constructive du moteur réalisée par les Auteurs a eut seulement le but de vérifier le principe de la machine monopolaire et son caractère da machine synchrone réactive, sans viser des performances supérieures, ce qui explique les valeurs abaissées de quelque paramètres (rendement, cos φ, coefficient de modulation).

Les remarques faites ci-dessus justifient la nécessité et la possibilité de la continuation des recherches sur une machine d'un type constructif amélioré.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 621.313.333.021

CONTRIBUŢIE LA STUDIUL TEORETIC ŞI EXPERIMENTAL AL MOTORULUI ASINCRON TRIFAZAT CU STATORUL ÎN FORMĂ DE ARC

DE

GH. ŞERBAN, M. VASILCIUC, IOSIF BERGMAN şi P. LEONTE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Anumite mecanisme necesită viteze de lucru diferite de vitezele normale de funcţionare ale motoarelor asincrone alimentate cu curenţi de frecvenţă industrială. Acţionarea lor ar necesita fie utilizarea de sisteme mecanice de modificare a vitezei, fie alimentarea motorului asincron cu curenţi de altă frecvenţă decît cea industrială, fie să se recurgă la alte tipuri de motoare electrice.

O cale de obţinere a acestor viteze cu motoare alimentate cu curenţi de frecvenţă industrială, fără contacte glisante, o constituie folosirea motoarelor cu statorul în formă de arc. Dacă este necesar, se poate realiza schimbarea vitezei în trepte prevăzînd statorul în formă de arc cu o înfăşurare ce permite modificarea numărului de perechi de poli.

Studiul maşinilor asincrone cu statorul în formă de arc, început cu lucrarea lui P. A. Fridkin (1944) [1] şi continuat de G. I. Sturman [2], [3] şi M. G. Rezin [4], [5] ocupă loc şi în prezent în cercetarea ştiinţifică [6], [7] precum şi în unele aplicaţii practice.

Maşinile asincrone cu statorul în formă de arc prezintă şi unele dezavantaje. Astfel, în afara pierderilor existente la orice maşină electrică de construcţie normală, la maşina cu statorul în formă de arc apare un supliment de pierderi datorit efectului de margine, ceea ce duce la înrăutăţirea randamentului maşinii. Tot din cauza deschiderii circuitului magnetic, curentul de magnetizare creşte şi în consecinţă şi factorul de putere se înrăutăţeşte.

În literatură [2] se demonstrează pe cale teoretică existenţa la statoarele în formă de arc şi la cele plane, a unor forţe pulsatorii care produc cupluri parazite, deosebit de supărătoare, înainte de atingerea vitezei de sincronism a acestor maşini. Cu ajutorul formulelor de calcul obţinute, G. I. Sturman şi R. L. Aronov calculează curba cuplului unor asemenea maşini pentru frecvenţe mici ale curenţilor de alimentare (15 Hz, respectiv 30 Hz).

Pentru a aborda studiul maşinilor cu statorul în formă de arc şi pentru a avea o posibilitate obiectivă de comparaţie cu maşinile asincrone obişnuite, în lucrarea de faţă vom studia teoretic şi experimen-

tal cazul particular al unei maşini cu statorul în formă de arc, provenită dintr-o maşină asincronă normală cu rotorul în scurtcircuit, la care circuitul magnetic statoric nu este întrerupt, însă s-a lăsat nebobinat spaţiul corespunzător unei perechi de poli. Menţionăm că maşinile cu statorul în formă de arc şi circuitul magnetic neîntrerupt nu au fost încă studiate.

2. Consideraţii teoretice

Fie o maşină asincronă cu rotorul în scurtcircuit având înfăşurarea trifazată a statorului realizată pentru $2p$ poli, la care alimentăm numai bobinele a $2(p-1)$ poli alăturaţi. Statorul fiind incomplet bobinat, în curbele de repartiţie în spaţiu a f.m.m. vor apare armonice pe care ne propunem să le studiem. Vom considera că fiecare din cei $2(p-1)$ poli produce o f.m.m. învîrtitoare rezultantă, cu repartiţie sinusoidală în spaţiu. Fig. 1 prezintă o astfel de curbă pentru cazul $p=3$.

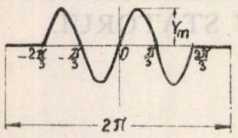


Fig. 1

La o înfăşurare trifazată repartizată amplitudinea acestei sinusoide este $Y_m = 1{,}35 I w_b q_1 k_{b1}$ [7], unde: I — curentul pe fază, w_b — numărul de conductoare active pe crestătură, q_1 — numărul de crestături pe pol şi fază şi k_{b1} — coeficientul de repartiţie al înfăşurării.

Ecuaţia curbei de repartiţie a f.m.m. pe întreaga periferie a statorului este $y=0$ în domeniile $-\pi < \alpha < -[(p-1)/p]\pi$ şi $[(p-1)/p]\pi < \alpha < \pi$, şi $y = Y_m \sin p\alpha$ pentru $-[(p-1)/p]\pi < \alpha < [(p-1)/p]\pi$, unde α (radiani) este unghiul geometric la centru care defineşte poziţia diferitelor puncte ale periferiei statorului. Descompunem funcţia periodică y în serie Fourier, observînd că perioada 2π corespunde întregii periferii a statorului. Conform teoriei generale [8] seria considerată nu va avea termen constant şi nici termeni în cos $k\alpha$, k fiind ordinul armonicei.

Seria va fi de forma:

$$y = \sum_1^k A_k \sin k\alpha,$$

iar coeficientul termenului general

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y \sin k\alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{(p-1)/p} Y_m \sin p\alpha \sin k\alpha \, d\alpha,$$

adică:

$$A_k = \{Y_m/[\pi(k-p)]\} \sin\{(k-p)[(p-1)/p]\pi\} -$$

$$-\{Y_m/[\pi(k+p)]\} \sin\{(k+p)[(p-1)/p]\pi\}.$$

Pentru armonica de spaţiu de rang p rezultă expresia:

$$A_p = [(p-1)/p]\, Y_m,$$

iar pentru celelalte armonice ($k \neq p$, k şi p fiind numere întregi):

$$A_k = [(-1)^{p+k} Y_m / \pi] [2p / (k^2 - p^2)] \sin (k\pi / p).$$

Întrucît pe baza ipotezei iniţiale nu au sens decît valorile $p \geqslant 2$, din calcule reiese că dintre toţi coeficienţii seriei Fourier, cel mai mare în valoare absolută este coeficientul armonicei de rang p. Relevăm că, spre deosebire de maşinile normale, la care numărul de perechi de poli al armonicelor spaţiale ale cîmpului este un multiplu întreg al numărului de perechi de poli p, la maşina studiată acest număr poate fi un număr întreg oarecare, mai mic, egal sau mai mare decît p.

Deoarece circuitul magnetic al maşinii nu este întrerupt, reiese că cele k armonice ale curbei f.m.m. rezultante vor produce k fluxuri magnetice învîrtitoare, fiecare avînd un număr de poli egal cu ordinul armonicei şi o viteză de rotaţie sincronă $n_k = 60 f / k$. Este evident că fiecăruia din cele k fluxuri învîrtitoare îi corespunde cîte un cuplu electromagnetic. Cum fiecare din aceste cupluri are maximul situat în apropierea propriei viteze sincrone rezultă că influenţa sa maximă asupra cuplului electromagnetic rezultant se va manifesta printr-o creştere şi apoi o scădere a acestuia în jurul vitezei menţionate. Din expresia lui A_k rezultă că cele mai mari valori ale f.m.m. parazite şi ale cuplurilor produse de ele au loc pentru armonicele de ordinul $k = p \pm 1$. Dacă curba f.m.m. rotitoare pe zona bobinată a statorului, pentru înfăşurarea dată, nu s-ar fi aproximat cu o sinusoidă, am fi obţinut o serie de armonice de spaţiu cu numărul de poli multiplu de $2p$, la fel ca la maşinile obişnuite. Cum influenţa acestora este mică şi cunoscută din literatura clasică [7], existenţa şi efectul lor au fost neglijate. Maşina folosită pentru verificarea ipotezelor teoretice are înfăşurarea trifazată tetrapolară, distribuită pe 2/3 din periferia statorului, adică $p = 3$, iar expresia repartiţiei spaţiale a f.m.m. este:

$$y = -[3\sqrt{3}/(8\pi)] Y_m \sin \alpha + [3\sqrt{3}/(5\pi)] Y_m \sin 2\alpha + (2/3) Y_m \sin 3\alpha +$$

$$+ [3\sqrt{3}/(7\pi)] Y_m \sin 4\alpha - [3\sqrt{3}/(16\pi)] Y_m \sin 5\alpha + \cdots +$$

$$+ (-1)^{k+1} (Y_m / \pi) [6 / (k^2 - 9)] \sin (k\pi / 3) \sin k\alpha + \cdots$$

Deşi sînt bobinaţi numai patru poli maşina se va comporta ca un motor asincron cu $2p = 6$ poli, avînd la 50 Hz viteza de sincronism de 1 000 rot/min. Ea va prezenta de asemenea cupluri pulsatorii importante pentru $2p = 4$, $(k = 2)$; $2p = 8$, $(k = 4)$; $2p = 2$, $(k = 1)$; $2p = 10$, $(k = 5)$ etc. Enumerarea s-a făcut în ordinea descrescîndă a valorilor absolute ale coeficienţilor termenilor seriei Fourier din dezvoltarea curbei f.m.m. Prin urmare, la 50 Hz va avea loc o scădere foarte accentuată a cuplului motor în jurul vitezelor de 750 rot/min şi 600 rot/min, iar în domeniul funcţionării ca generator (la $n >$ 1 000 rot/min), în jurul vitezelor de 1 500 şi 3 000 rot/min, unde pot apare şi domenii res-

trînse de funcţionare ca motor. Pentru fixarea ideilor în fig. 2 sînt reprezentate exemple de curbe $C = f(n)$ pentru $p = 1$; $p = 2$; $p = 3$; $p = 4$ şi $p = 5$, precum şi rezultanta lor.

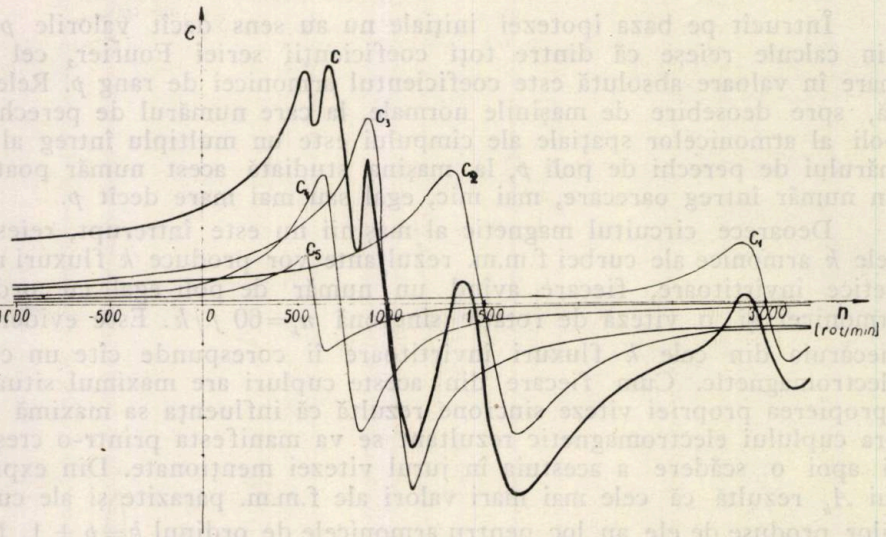


Fig. 2

3. Verificarea experimentală

Maşina asincronă pe care s-a făcut verificarea experimentală a fost obţinută prin rebobinarea unui motor asincron normal cu rotorul în scurtcircuit tip AO - 63 - 6, de 10 kW, 380 V, (Y), 21 A, 50 Hz şi 980 rot/min. Înfăşurarea trifazată tetrapolară, repartizată numai pe 2/3 din periferia statorului, a fost calculată pentru tensiunea nominală de 380 V.

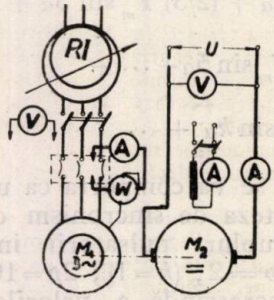


Fig. 3

În fig. 3 s-a reprezentat schema experimentală. Maşina de încercat M_1 se alimentează prin intermediul regulatorului de inducţie *RI* şi a instrumentelor de măsurat. Regulatorul de inducţie a permis menţinerea constantă a tensiunii, la valoarea dorită.

Maşina M_1 a fost cuplată mecanic cu o maşină de curent continuu M_2 de 8 kW, 3 150 rot/min, care avea rolul de a produce cuplu motor sau rezistent, funcţie de cerinţe. Alimentarea înfăşurării de excitaţie a maşinii de curent continuu s-a făcut de la o sursă cu tensiunea constantă, iar cea a indusului de la un generator de curent continuu cu tensiunea reglabilă în limite largi. Datele experimentale au fost ridicate la frecvenţa nominală iar tensiunea de alimentare a maşinii M_1 a fost de 110 V pe fază, pentru ca la viteze mult diferite de cea de regim nominal curenţii din stator să nu depăşească dublul valorii nominale. Se ştie că încercarea la tensiune redusă nu modifică forma curbei cuplului electromagnetic. Viteza de rotaţie a maşinii M_1 a fost variată între limitele 0...3 300 rot/min. De asemenea s-au făcut probe şi în regimul de frînă electromagnetică, pînă la $n = 1\,050$ rot/min.

În fig. 4 se reprezintă curba puterii P_1 absorbită de maşina M_1 şi cea a puterii utile la arbore P_2, în funcţie de viteza de rotaţie n. Se observă că în regimul de frînă electromagnetică cele două puteri nu prezintă variaţii anormale, deoarece în acest regim atît cuplurile parazite cît şi cel principal au peste tot acelaşi sens şi nu variază brusc. La antrenarea maşinii M_1 în sensul de rotaţie al cîmpului învîrtitor se observă următoarele:

În jurul vitezei de rotaţie de 600 rot/min puterile P_1 şi P_2 prezintă minime. Această viteză corespunde vitezei de sincronism a armonicei de rang 5. La viteza de

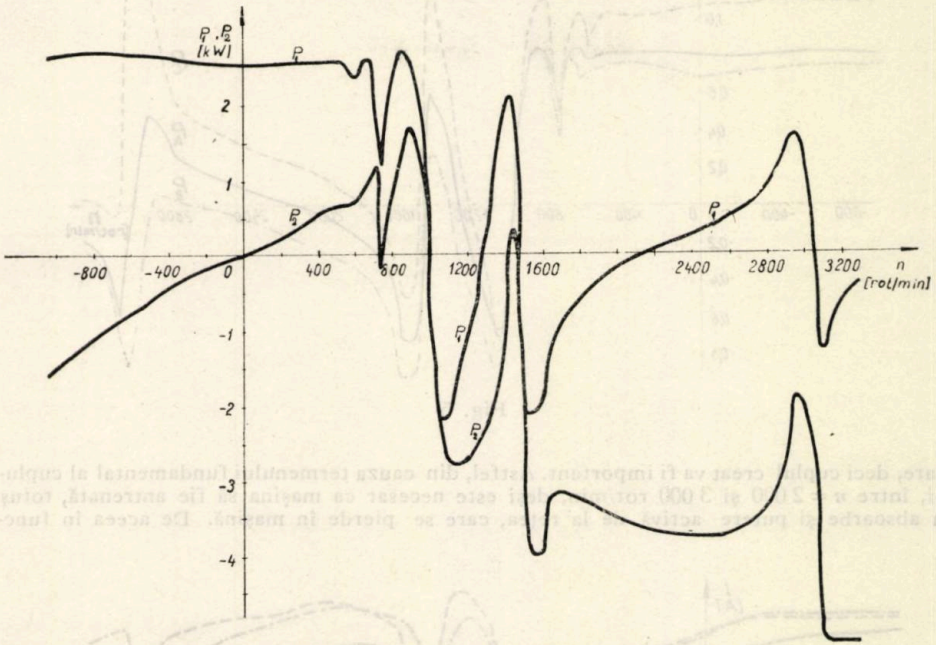


Fig. 4

750 rot/min, corespunzătoare armonicei de rang 4 a cîmpului, puterile P_1 şi P_2 prezintă minime mult mai pronunţate. De altfel puterea la arbore P_2 devine negativă, încît dacă maşina M_1 n-ar fi antrenată ea nu ar putea depăşi viteza de 750 rot/min, la această tensiune de alimentare. Experienţa a arătat că numai la tensiunea pe fază de ordinul 200 V această viteză este depăşită cu greu de către maşina neantrenată. Amplitudinea armonicei de rang 4 este mult mai mare decît cea a armonicei de rang 5, ceea ce explică faptul că aici minimele puterilor sînt mult mai pronunţate decît la viteza de 600 rot/min.

La viteza de 1 000 rot/min, corespunzătoare vitezei de sincronism a armonicei de rang 3, a cărei amplitudine este maximă, maşina M_1 trece din regimul de motor în cel de generator. Este evident că maşina va putea fi utilizată ca motor sau ca generator tocmai în jurul acestei viteze. Ulterior vom analiza performanţele ei în funcţionarea la tensiunea nominală, în jurul vitezei de 1 000 rot/min.

La viteza de 1 500 rot/min, corespunzătoare vitezei sincrone a armonicei de rang 3, cele două puteri îşi schimbă din nou semnul, maşina funcţionînd ca motor într-un interval restrîns de viteze. Cuplul motor este redus, încît dacă se întrerupe alimentarea maşinii M_2, maşina M_1 nu se poate menţine singură la această viteză, ci revine la o viteză apropiată de 1 000 rot/min.

La viteze mai mari decît 1 500 rot/min maşina trece rapid în regim de generator. Puterea pe arbore P_2 rămîne negativă, deci maşina M_1 dezvoltă numai cuplu de frînare.

În apropiere de viteza de $n = 3\,000$ rot/min, corespunzătoare vitezei de sincronism a termenului fundamental, puterea absorbită de la reţea trece printr-un maxim, ca şi valoarea absolută a puterii utile. Se ştie că amplitudinea termenului fundamental este

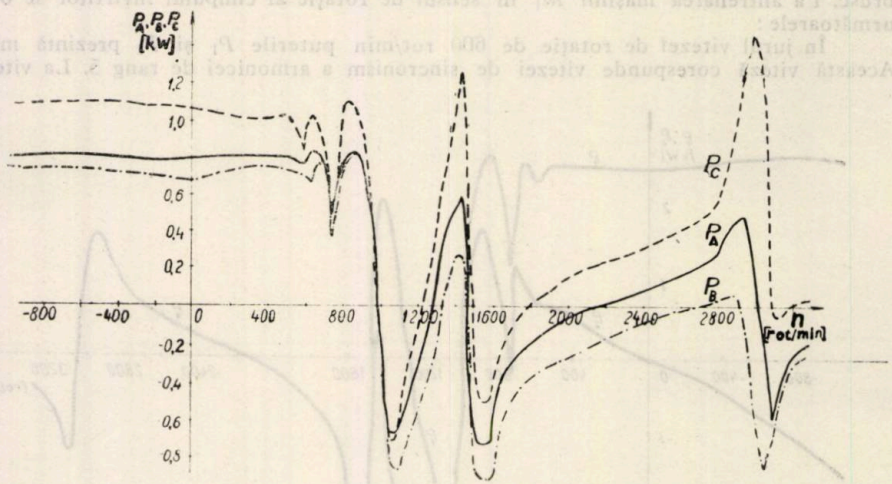


Fig. 5

mare, deci cuplul creat va fi important. Astfel, din cauza termenului fundamental al cuplului, între $n = 2\,000$ şi 3 000 rot/min, deşi este necesar ca maşina să fie antrenată, totuşi ea absoarbe şi putere activă de la reţea, care se pierde în maşină. De aceea în funcţionarea la aceste viteze încălzirea maşinii va fi exagerată. După depăşirea vitezei de 3 000 rot/min maşina reîncepe să genereze putere activă în reţea.

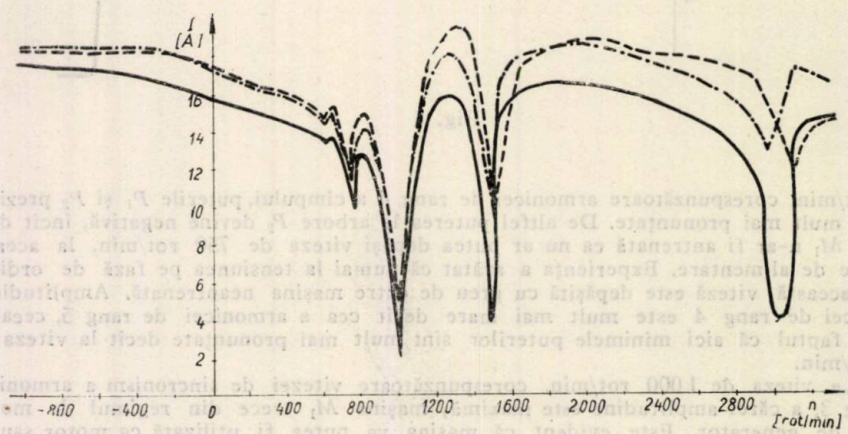


Fig. 6

În fig. 5 sînt reprezentate puterile absorbite de cele trei faze ale înfăşurării statorului în funcţie de viteza de rotaţie a maşinii. Cu linie plină s-a trasat puterea absorbită de faza mijlocie, a cărei tensiune de alimentare a fost menţinută mereu constantă, la valoarea de 110 V. Tensiunile de alimentare a celorlalte două faze au variat

puţin (în general sub $\pm 5\%$). Numai în jurul vitezei de 3000 rot/min aceste tensiuni au crescut cu circa 25%. Se observă că pe faza statorică de la marginea de intrare a rotorului puterea absorbită (trasată cu linie-punct) este mereu mai mică, iar pe cea de la marginea de ieşire (trasată cu linie punctată) este mai mare decît pe faza din mijloc (trasată cu linie plină). În regimul de generator situaţia se inversează. La vitezele corespunzătoare cuplurilor maxime ale diverselor armonice diferenţele puterilor absorbite pe fiecare fază devin maxime. Cele mai mari diferenţe procentuale au loc în jurul vitezei de 3 000 rot/min, unde cuplul electromagnetic al armonicei de rang 3

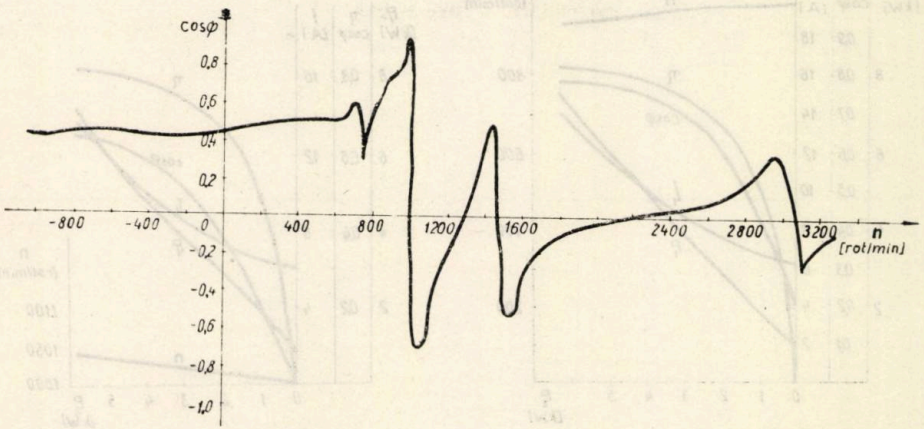


Fig. 7

are deja o valoare neglijabilă. Se constată astfel că şi la maşinile asincrone cu circuitul magnetic neîntrerupt, cu înfăşurarea în arc, are loc un fenomen de reacţie a rotorului, analog celui descris de M. G. Rezin în [4] pentru maşinile cu statorul în formă de arc.

În fig. 6 sînt reprezentaţi curenţii pe cele trei faze, în aceleaşi condiţii ca în fig. 5. Ca şi puterile, curenţii sînt diferiţi pe cele trei faze. Ţinînd seama de faptul că la producerea f. m. m. a fazei mijlocii aceasta este ajutată de către f. m. m. a celorlalte două faze, este normal ca intensitatea curentului absorbit de această fază să fie minimă. Într-adevăr f. m. m. produse de fazele aşezate la margine dau fluxuri care circulă parţial şi prin partea nebobinată a maşinii, deci pentru acelaşi flux util f. m. m. a lor trebuie să fie mai mare.

În fig. 7 este redată curba de variaţie a factorului de putere mediu în funcţie de viteza de rotaţie. Se observă că la majoritatea vitezelor factorul de putere este scăzut; numai în jurul vitezei de 1 000 rot/min acesta atinge valori ridicate, comparabile cu cele de la maşinile asincrone normale. Valorile apropiate de unitate ale factorului de putere se explică prin faptul că încercarea s-a făcut la tensiune redusă.

4. Performanţele maşinii

Maşina încercată a fost realizată cu inducţia medie în întrefier de 0,66 Te şi curentul nominal de 10,5 A corespunzător la aceeaşi densitate de curent (5,1 A/mm²) ca la maşina cu înfăşurare normală. Din trasarea caracteristicii de mers la gol rezultă că înfăşurarea a fost bine dimensionată pentru tensiunea de 380 V.

În fig. 8 sînt reprezentate caracteristicile maşinii încercate pentru regimul de motor, iar în fig. 9 cele corespunzătoare regimului de generator, la tensiunea nominală $U = 220$ V pe fază. Ca şi în încercarea precedentă, puterea pe arborele maşinii încercate s-a calculat după ce s-au determinat pierderile în maşina de curent continuu. Curbele reprezintă: puterea absorbită P_1, curentul statoric I_1, viteza de rotaţie n, factorul de

putere cos φ şi randamentul η în funcţie de puterea utilă P_2. Se observă că la un curent absorbit $I_1 \cong 14$ A, puterea utilă este 6,3 kW, iar în regim de generator, de 5,8 kW. La această valoare a curentului absorbit densitatea de curent este de 6,8 A/mm^2, valoare admisibilă la maşinile bine ventilate. Însă în cazul de faţă funcţionarea îndelungată în aceste condiţii nu este posibilă din cauza suplimentului de pierderi în fier cauzate de efectul de margine. În ambele regimuri randamentul şi factorul de putere sînt mai mici decît la maşina cu înfăşurarea normală, la care $\eta = 87\%$ şi cos $\varphi = 0{,}82$. Valorile

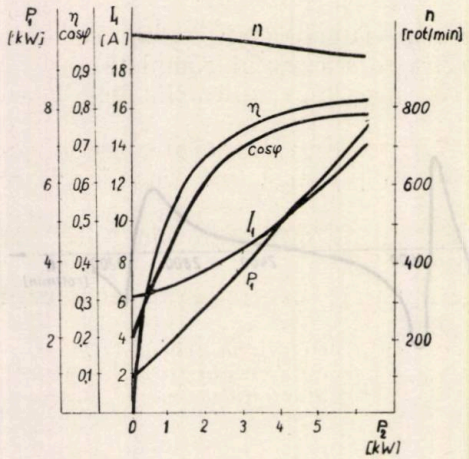


Fig. 8

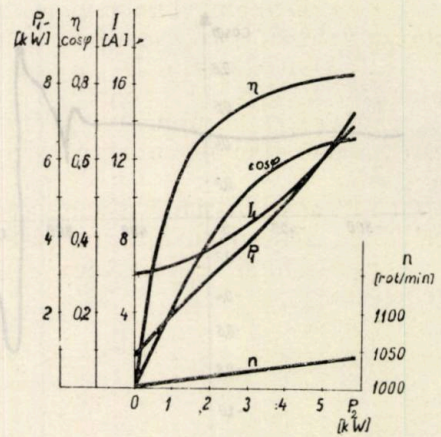


Fig. 9

factorului de putere şi randamentul sînt mai scăzute în regimul de generator decît în cel de motor. Ca şi în cazul anterior valorile curenţilor, tensiunilor şi puterilor pe cele trei faze nu sînt egale între ele.

Diferenţele dintre curenţii celor trei faze pot ajunge pînă la 20%. Avînd în vedere faptul că f. m. m. a armonicei de rang 3, care are rolul principal în funcţionarea maşinii studiate, are amplitudinea egală cu 2/3 din amplitudinea f. m.m. a maşinii normale, rezultă că cuplul maxim al maşinii încercate va fi de $(2/3)^2$ ori mai mic. S-ar părea că, deoarece f. m. m. a armonicei de rang p este mai mică decît la maşina normală, maşina ar putea să funcţioneze la o inducţie mai mare în întrefier. Însă din cauza suprapunerii efectului diverselor armonice încălzirea este exagerată chiar fără o asemenea mărire.

Pornirea dificilă şi pericolul de a rămîne prins la 750 rot/min constituie, de asemenea, dezavantaje importante ale acestui motor. Chiar dacă motorul atinge viteza nominală (aproape 1 000 rot/min), timpul de pornire este mult prelungit.

5. Concluzii

Se studiază teoretic şi experimental o maşină asincronă cu rotorul în scurtcircuit, la care statorul în formă de arc s-a realizat pe un circuit magnetic neîntrerupt, lăsînd nebobinat spaţiul corespunzător unei perechi de poli. S-au obţinut următoarele concluzii mai importante:

a) Curba de repartiţie spaţială a cîmpului la maşina în formă de arc poate fi descompusă într-o serie de cîmpuri armonice sinusoidale, avînd diferite numere de perechi de poli, distribuite pe întreaga periferie a statorului. Spre deosebire de maşinile normale, la care cîmpul prezintă

numai armonice spaţiale de rang multiplu de p, la statorul în formă de arc rangul armonicelor, respectiv numărul lor de perechi de poli, poate fi un număr întreg oarecare, mai mic, egal, sau mai mare decît p.

b) Fiecare armonică a cîmpului produce un cuplu electromagnetic propriu, de aceea cuplul electromagnetic rezultant prezintă mai multe maxime şi minime în apropierea vitezelor de sincronism corespunzătoare la diferite numere de perechi de poli, atît în regimul de motor cît şi în cel de generator asincron.

c) Principalul domeniu de viteze de funcţionare stabilă ca motor corespunde cu cel al maşinii cu înfăşurarea statorului completă.

d) Dintre cuplurile parazite, cele mai importante sînt cele corespunzătoare la $p \pm 1$ perechi de poli.

e) Prezenţa cuplurilor parazite face procesul de pornire mai dificil, maşina rămînînd în anumite cazuri prinsă la viteze mai mici decît cea normală.

f) Caracteristicile maşinii cu acest tip de înfăşurare sînt inferioare celor ale maşinii cu înfăşurarea completă.

g) Rezultatele încercărilor experimentale concordă cu concluziile teoretice.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de măsuri şi maşini electrice,
Laboratorul de maşini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Фридкин П. А., *Дуговые статоры и их промышленное применение,* Уральский политехнический институт, Диссертация, 1944.
2. Штурман Т. И., Аронов Р. Л., Электричество, 1947, *2,* стр. 54—59.
3. Штурман Т. И., Электричество, 1948, *6,* стр. 58—59.
4. Резин М. Т., Электричество, 1950, *2,* стр. 51—52.
5. — Электричество, 1951, *6,* стр. 25—29.
6. Laithwaite E. K., Electrical Energy, 1958, **2**, *6.*
7. Piotrovski L. M., *Maşini electrice,* EES, Buc., pp. 721—722 şi 431—450, (trad. din l. rusă).
8. Antoniu I. S., *Chestiuni speciale de electrotehnică,* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1956.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХФАЗНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ДУГООБРАЗНЫМ СТАТОРОМ

(Резюме)

Исследуется теоретическим и опытным путем асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором, дугообразный статор которого исполнен на непрерывной магнитной цепи, оставляя необмотанным пространство соответствующее одной паре полюсов.

Получены следующие выводы :

а) Кривая пространственного распределения магнитного поля разлагается на ряд гармоник, число пар полюсов которых является некоторым целым числом — меньшим, большим, или равным p.

б) Наиболее значительный электромагнитный момент соответствует гармонике порядка p, а нормальная работа машины имеет место около синхронной скорости соответствующей этой гармонике.

в) Другие (паразитные) моменты затрудняют процесс пуска по сравнению с нормальной асинхронной машиной.

г) Экономические параметры машины с дугообразным статором ниже таковых соответствующих эквивалентной нормальной асинхронной машине.

BEITRAG ZUM THEORETISCHEN UND ERFAHRUNGSMÄSSIGEN STUDIUM DES DREHSTROMASYNCHRONMOTORS MIT BOGENARTIGEN STÄNDER

(Zusammenfassung)

Es wird eine Käfigläufer-Asynchronmaschine, dessen bogenartiger Ständer auf einen nicht unterbrochenen magnetischen Kreis gebaut ist, bei welchen der Raum entsprechend einem Polpaare nicht bewickelt ist, theoretisch und erfahrungsmässig studiert. Es werden die folgenden wichtigsten Schlüsse gezogen:

a) Die räumliche Verteilungskurve der Durchflutung wird in einer Reihe Harmonischen, dessen Polpaarzahl kleiner, grösser oder gleich p ist, zerlegt.

b) Das grösste Moment entspricht der Harmonischen p, und der normale Betrieb der Maschine findet neben der Synchrondrehzahl derselben stat.

c) Die anderen Momente erschwehren den Anlauf dieser Maschine in Vergleich zur normalen Asynchronmaschine.

d) Die wirtschaftlichen Parameter der bogenartigen Maschine sind niedriger als die der gleichwertigen normalen Asynchronmaschinen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 621.313.32

О ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ СИНХРОННЫХ МАШИН

Г. М. МАХАРАДЗЕ

1. *Введение*

Переходные процессы при несимметричных режимах работы синхронных генераторов в настоящее время теоретически и экспериментально изучены в недостаточной степени.

Исследование этих процессов представляет с обеих точек зрения значительный интерес. Наиболее общим случаем переходных несимметричных режимов следует считать внезапное замыкание зажимов несимметричного генератора на несимметричную нагрузку. Из этого общего случая легко перейти к частным, а именно : к двухфазному, однофазному и т. д. короткому замыканию.

Как известно автору, в настоящее время нет более или менее удовлетворительной теории переходных процессов несимметричных режимов работы синхронных машин.

В работах отдельных авторов исследуются переходные процессы при различных несимметричных режимах, однако эти исследования носят частный характер и по мнению автора настоящей работы, они не дают возможности полного изучения переходных процессов.

В основе исследования переходных процессов как при симметричных, так и при несимметричных режимах машин, лежат уравнения двух реакций и уравнения, получаемые из них путем их развития. Эти уравнения позволяют решать задачи переходных процессов достаточно точно только при симметричных коротких замыканиях. Что касается несимметричных переходных процессов, то существующие уравнения и теории, позволяют решать эти задачи только грубо приближенно.

Настоящим предлагается новая теория анализа переходных процессов при несимметричных нарушениях нормального режима работы синхронных машин. Метод этот является дальнейшим развитием метода двух реакций (Горева-Парка) и он может быть представлен и в форме уравнений вращающихся полей или в другом виде. Метод обосновывается для трехфазной системы и может быть легко обобщен для случая произвольного количества фаз. В настоящей статье предлагается только основное положение и уравнение нового метода, могущего быть названным методом „четырех реакций".

2. *Теория „четырех реакций"*

Для исследования переходных процессов несимметричных режимов работы синхронных машин вместо двух осей d, q, или α, β и т. д. (без нулевой оси), используемых в обычном методе, явления переходных процессов трехфазной несимметричной машины изучаются в системе трех пар осей (d_a, q_a), (d_b, q_b), и (d_c, q_c). В общем же случае для m фазной обмотки имеем m пар осей.

На рис. 1 приведены расположения осей фазных и преобразованных составляющих токов, напряжений и других величин. На рис. 2 приведена схема несимметричной синхронной машины. Фазные обмотки в данной машине расположены не под углом $2\pi/3$, а под разными углами и числа витков их не равны друг другу. Обозначим углы между фазами (a, b) и (a, c) через ϱ и ϱ'. Причем $\varrho \neq \varrho'$ коэффициенты самоиндукции определяются выражениями:

$$(1)\qquad \begin{cases} L_a = L_{da}\cos^2\theta + L_{qa}\sin^2\theta, \\ L_b = L_{db}\cos^2(\theta-\varrho) + L_{qb}\sin^2(\theta-\varrho), \\ L_c = L_{dc}\cos^2(\theta+\varrho') + L_{qc}\sin^2(\theta+\varrho'), \end{cases}$$

где L_{da}, L_{db}, L_{dc}, L_{qa}, L_{qb}, L_{qc} — коэффициенты самоиндукции при совпадении вращающихся осей с определенным положением.

Для коэффициентов взаимоиндукции имеем:

$$(2)\qquad \begin{cases} M_{ab} = (M_{d1}+M_{q1})/2 + [(M_{d1}-M_{q1})/(2\cos\varrho)]\cos(2\theta-\varrho), \\ M_{ac} = (M_{d2}+M_{q2})/2 + [(M_{d2}-M_{q2})/(2\cos\varrho')]\cos(2\theta+\varrho'), \\ M_{bc} = (M_{d3}+M_{q3})/2 + \{(M_{d3}-M_{q3})/[2\cos(\varrho-\varrho')]\}\cos[2\theta-(\varrho-\varrho')]. \end{cases}$$

При симметричной обмотке будем иметь:

$$(3)\qquad L_{da} + 2M_{d1} = L_{qa} + 2M_{q1} = L_0.$$

При отсутствии нулевого провода

$$(4)\qquad i_a + i_b + i_c = 0.$$

В данной статье рассматривается случай, когда имеет место уравнение (4). В теории четырех реакций вводится система продольного и поперечного токов, связанных между собой следующими соотношениями:

$$(5)\qquad I_{da} + I_{db} + I_{dc} = 0, \quad I_{qa} + I_{qb} + I_{qc} = 0.$$

Аналогично имеем для потокосцеплений и напряжений:

$$(6)\qquad \psi_{da} + \psi_{db} + \psi_{dc} = 0, \quad \psi_{qa} + \psi_{qb} + \psi_{qc} = 0,$$

и

$$(7)\qquad U_{da} + U_{db} + U_{dc} = 0, \quad U_{qa} + U_{qb} + U_{qc} = 0.$$

Последние уравнения имеют силу тогда, когда

$$\psi_a + \psi_b + \psi_c = 0 \quad \text{и} \quad U_a + U_b + U_c = 0. \tag{8}$$

Переход фазных токов к токам преобразования (D, θ) осуществляется соотношениями:

$$\begin{cases} I_{da} = 2[i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta - \varrho_1) + i_c \cos(\theta + \varrho_1)]/3, \\ I_{db} = 2[i_a \cos(\theta + \varrho_1) + i_b \cos\theta + i_c \cos(\theta - \varrho_1)]/3, \\ I_{dc} = 2[i_a \cos(\theta - \varrho_1) + i_b \cos(\theta + \varrho_1) + i_c \cos\theta]/3. \end{cases} \tag{9}$$

Аналогично для поперечных токов:

$$\begin{cases} I_{qa} = 2[i_a \sin\theta + i_b \sin(\theta - \varrho_1) + i_c \sin(\theta + \varrho_1)]/3, \\ I_{qb} = 2[i_a \sin(\theta + \varrho_1) + i_b \sin\theta + i_c \sin(\theta - \varrho_1)]/3, \\ I_{qc} = 2[i_a \sin(\theta - \varrho_1) + i_b \sin(\theta + \varrho_1) + i_c \sin\theta]/3. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $\varrho_1 = 2\pi/3$.

В системе уравнений (9), (10) независимыми являются по два уравнения поскольку третье уравнение в обеих системах получается

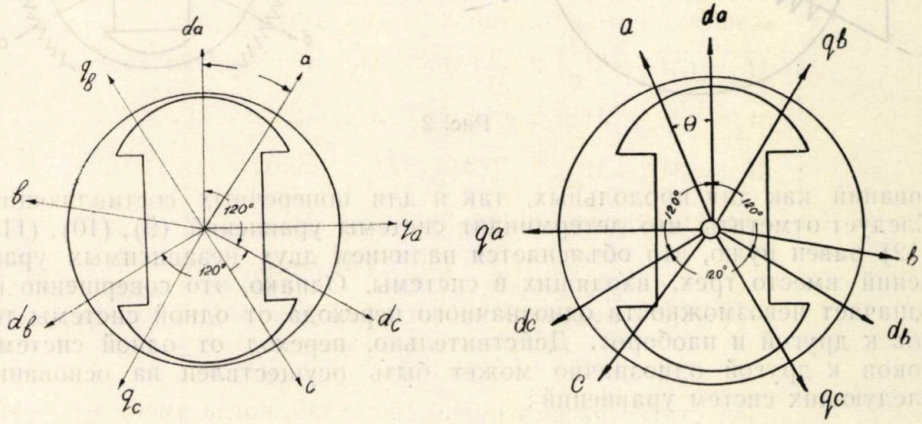


Рис. 1

из первых двух, т. к. имеет уравнение (5). Обратный переход от преобразований (D, θ) к преобразованию (a, b, c), осуществляется на оснований следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} i_a = 2[I_{da} \cos\theta + I_{db} \cos(\theta + \varrho_1) + I_{dc} \cos(\theta - \varrho_1)]/3, \\ i_b = 2[I_{da} \cos(\theta - \varrho_1) + I_{db} \cos\theta + I_{dc} \cos(\theta + \varrho_1)]/3, \\ i_c = 2[I_{da} \cos(\theta + \varrho_1) + I_{db} \cos(\theta - \varrho_1) + I_{dc} \cos\theta]/3. \end{cases} \tag{11}$$

Аналогично получаются преобразования по поперечным токам:

$$(12)\quad \begin{cases} i_a = 2\,[I_{qa}\sin\theta + I_{qb}\sin(\theta+\varrho_1) + I_{qc}\sin(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ i_b = 2\,[I_{qa}\sin(\theta-\varrho_1) + I_{qb}\sin\theta + I_{qc}\sin(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ i_c = 2\,[I_{qa}\sin(\theta+\varrho_1) + I_{qb}\sin(\theta-\varrho_1) + I_{qc}\sin\theta]/3. \end{cases}$$

Следует также отметить, что в преобразовании (11), (12) последние уравнения излишни, т. к. в данном случае как при прямом переходе достаточно иметь два уравнения для i_a и i_b. При несимметричной обмотке возникает необходимость в использовании преобра-

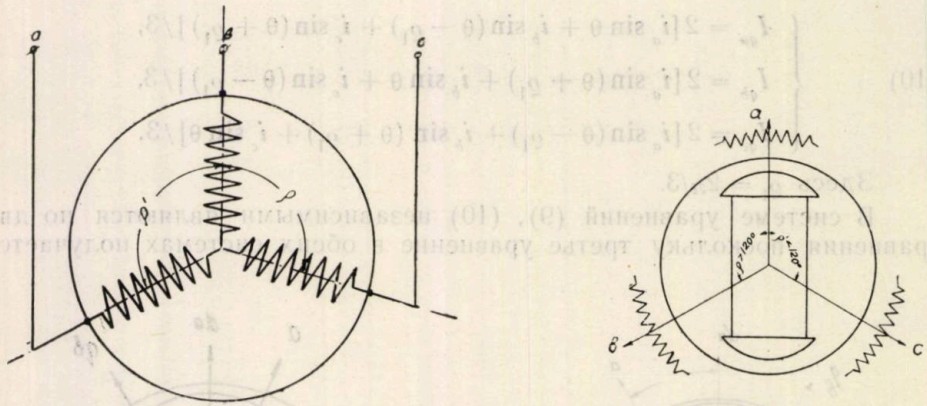


Рис. 2

зований как для продольных, так и для поперечных составляющих. Следует отметить, что детерминант системы уравнений (9), (10), (11), (12) равен нулю, что объясняется наличием двух независимых уравнений вместо трех, входящих в системы. Однако, это совершенно не означает невозможности однозначного перехода от одной системы токов к другой и наоборот. Действительно, переход от одной системы токов к другой однозначно может быть осуществлен на основании следующих систем уравнений:

$$(13)\quad \begin{cases} I_{da} = 2\,[i_a\cos\theta + i_b\cos(\theta-\varrho_1) + i_c\cos(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ I_{db} = 2\,[i_a\cos(\theta+\varrho_1) + i_b\cos\theta + i_c\cos(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ i_a + i_b + i_c = 0, \end{cases}$$

и

$$(14)\quad \begin{cases} I_{qa} = 2\,[i_a\sin\theta + i_b\sin(\theta-\varrho_1) + i_c\sin(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ I_{qb} = 2\,[i_a\sin(\theta+\varrho_1) + i_b\sin\theta + i_c\sin(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ i_a + i_b + i_c = 0. \end{cases}$$

Детерминант этих систем равен 9/4. Обратный переход осуществляется на основании следующих систем:

$$(15)\qquad \begin{cases} i_a = 2\,[I_{da}\cos\theta + I_{db}\cos(\theta+\varrho_1) + I_{dc}\cos(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ i_b = 2\,[I_{da}\cos(\theta-\varrho_1) + I_{db}\cos\theta + I_{dc}\cos(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ I_{da} + I_{db} + I_{dc} = 0, \end{cases}$$

или

$$(16)\qquad \begin{cases} i_a = 2\,[I_{qa}\sin\theta + I_{qb}\sin(\theta+\varrho_1) + I_{qc}\sin(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ i_b = 2\,[I_{qa}\sin(\theta-\varrho_1) + I_{qb}\sin\theta + I_{qc}\sin(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ I_{qa} + I_{qb} + I_{qc} = 0. \end{cases}$$

Аналогично получаются результаты для потокосцеплений и напряжений.

3. *Уравнение потокосцеплений синхронной машины*

Потокосцепление фаз обмотки статора выражается уравнениями:

$$(17)\qquad \begin{cases} \psi_{as} = L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ac} i_c, \quad \psi_{bs} = M_{ba} i_a + L_b i_b + M_{cb} i_c, \\ \psi_{cs} = M_{ca} i_a + M_{cb} i_b + L_c i_c. \end{cases}$$

В общем случае $\psi_{as} + \psi_{bs} + \psi_{cs} \neq 0$, поэтому разлагаем:

$$(18)\qquad \psi_{as} = \psi'_{as} + \psi_{as_0}, \quad \psi_{bs} = \psi'_{bs} + \psi_{bs_0}, \quad \psi_{cs} = \psi'_{cs} + \psi_{cs_0},$$

где

$$(19)\qquad \psi_{as_0} = \psi_{bs_0} = \psi_{cs_0} = [i_a(L_a + M_{ab} + M_{ac}) + i_b(M_{ab} + L_b + M_{bc}) + i_c(M_{ac} + M_{bc} + L_c)\,]/3,$$

$$(20)\qquad \psi'_{as} = \psi_{as} - \psi_{as_0}, \quad \psi'_{bs} = \psi_{bs} - \psi_{bs_0}, \quad \psi'_{cs} = \psi_{cs} - \psi_{cs_0}.$$

Согласно преобразованию (16) можно написать:

$$(21)\qquad \begin{cases} \psi'_{as} = 2\,[\psi'_{da}\cos\theta + \psi'_{db}\cos(\theta+\varrho_1) + \psi'_{dc}\cos(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ \psi'_{bs} = 2\,[\psi'_{da}\cos(\theta-\varrho_1) + \psi'_{db}\cos\theta + \psi'_{dc}\cos(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ \psi'_{da} + \psi'_{db} + \psi'_{dc} = 0, \end{cases}$$

где: ψ'_{da}, ψ'_{db}, ψ'_{dc} — потокосцепления вдоль вращающейся системы осей. Аналогично можно выразить фазные потокосцепления через поперечные составляющие:

$$(22)\qquad \begin{cases} \psi'_{as} = 2\,[\psi'_{qa}\sin\theta + \psi'_{qb}\sin(\theta+\varrho_1) + \psi'_{qc}\sin(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ \psi'_{bs} = 2\,[\psi'_{qa}\sin(\theta-\varrho_1) + \psi'_{qb}\sin\theta + \psi'_{qc}\sin(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ \psi'_{qa} + \psi'_{qb} + \psi'_{qc} = 0. \end{cases}$$

Потокосцепления ψ'_{da}, ψ'_{db}, ψ'_{dc} выражаются следующими уравнениями:

$$(23)\quad \begin{cases} \psi'_{da} = 2[\psi'_{as}\cos\theta + \psi'_{bs}\cos(\theta - \varrho_1) + \psi'_{cs}\cos(\theta + \varrho_1)]/3, \\ \psi'_{db} = 2[\psi'_{as}\cos(\theta + \varrho_1) + \psi'_{bs}\cos\theta + \psi'_{cs}\cos(\theta - \varrho_1)]/3, \\ \psi'_{as} + \psi'_{bs} + \psi'_{cs} = 0, \end{cases}$$

и для поперечных составляющих:

$$(24)\quad \begin{cases} \psi'_{qa} = 2[\psi'_{as}\sin\theta + \psi'_{bs}\sin(\theta - \varrho_1) + \psi'_{cs}\sin(\theta + \varrho_1)]/3, \\ \psi'_{qb} = 2[\psi'_{as}\sin(\theta + \varrho_1) + \psi'_{bs}\sin\theta + \psi'_{cs}\sin(\theta - \varrho_1)]/3, \\ \psi'_{as} + \psi'_{bs} + \psi'_{cs} = 0. \end{cases}$$

Ток и напряжение обмотки возбуждения также могут быть представлены как равнодействующие величины некоторых фазных значений токов и направлений неподвижных обмоток:

$$(25)\quad \begin{cases} I_{fda} = I_f = 2[i_{af}\cos\theta + i_{bf}\cos(\theta - \varrho_1) - i_{cf}\cos(\theta + \varrho_1)]/3, \\ I_{fqa} = 0 = 2[i_{af}\sin\theta + i_{bf}\sin(\theta - \varrho_1) + i_{cf}\sin(\theta + \varrho_1)]/3, \\ I_{fdb} = 2[i_{af}\cos(\theta + \varrho_1) + i_{bf}\cos\theta + i_{cf}\cos(\theta - \varrho_1)]/3, \\ I_{fqb} = 2[i_{af}\sin(\theta + \varrho_1) + i_{bf}\sin\theta + i_{cf}\sin(\theta - \varrho_1)]/3, \\ I_{fdc} = 2[i_{af}\cos(\theta - \varrho_1) + i_{bf}\cos(\theta + \varrho_1) + i_{cf}\cos\theta]/3, \\ I_{fqc} = 2[i_{af}\sin(\theta - \varrho_1) + i_{bf}\sin(\theta + \varrho_1) + i_{cf}\sin\theta]/3. \end{cases}$$

Очевидно:

$$(26)\quad i_{af} + i_{bf} + i_{cf} = 0,$$

$$(27)\quad I_{fda} + I_{fdb} + I_{fdc} = 0, \quad I_{fqa} + I_{fqb} + I_{fqc} = 0.$$

Кроме того:

$$(28)\quad \begin{cases} i_{af} = 2[I_{fda}\cos\theta + I_{fdb}\cos(\theta + \varrho_1) + I_{fdc}\cos(\theta - \varrho_1)]/3, \\ i_{bf} = 2[I_{fda}\cos(\theta - \varrho_1) + I_{fdb}\cos\theta + I_{fdc}\cos(\theta + \varrho_1)]/3, \\ i_{af} = 2[I_{fqa}\sin\theta + I_{fqb}\sin(\theta + \varrho_1) + I_{fqc}\sin(\theta - \varrho_1)]/3, \\ i_{bf} = 2[I_{fqa}\sin(\theta - \varrho_1) + I_{fqb}\sin\theta + I_{fqc}\sin(\theta + \varrho_1)]/3. \end{cases}$$

Фазные потокосцепления обмоток ротора определятся следующими уравнениями:

$$(29)\quad \begin{cases} \psi'_{af} = 2[\psi_{fda}\cos\theta + \psi_{fdb}\cos(\theta + \varrho_1) + \psi_{fdc}\cos(\theta - \varrho_1)]/3, \\ \psi'_{bf} = 2[\psi_{fda}\cos(\theta - \varrho_1) + \psi_{fdb}\cos\theta + \psi_{fdc}\cos(\theta + \varrho_1)]/3, \\ \psi'_{cf} = 2[\psi_{fda}\cos(\theta + \varrho_1) + \psi_{fdb}\cos(\theta - \varrho_1) + \psi_{fdc}\cos\theta)]/3 \end{cases}$$

и

$$(30)\quad \begin{cases} \psi_{fda} = 2\,[\psi'_{af}\cos\theta + \psi'_{bf}\cos(\theta-\varrho_1) + \psi'_{cf}\cos(\theta+\varrho_1)\,]/3, \\ \psi_{fdb} = 2\,[\psi'_{af}\cos(\theta+\varrho_1) + \psi'_{bf}\cos\theta + \psi'_{cf}\cos(\theta-\varrho_1)\,]/3, \\ \psi_{fdc} = 2\,[\psi'_{af}\cos(\theta-\varrho_1) + \psi'_{bf}\cos(\theta+\varrho_1) + \psi'_{cf}\cos\theta)\,]/3. \end{cases}$$

4. *Потокосцепления статора и ротора*

Потокосцепление статора состоит из потокосцеплений статорной обмотки и потокосцепления взаимоиндукции роторной обмотки:

$$(31)\quad \begin{cases} \psi_{da} = \psi'_{da} + \psi_{fda}, & \psi_{qa} = \psi'_{qa} + \psi_{fqa}, \\ \psi_{db} = \psi'_{db} + \psi_{fdb}, & \psi_{qb} = \psi'_{qb} + \psi_{fqb}, \\ \psi_{dc} = \psi'_{dc} + \psi_{fdc}, & \psi_{qc} = \psi'_{qc} + \psi_{fqc}, \end{cases}$$

где:

$$(32)\quad \begin{cases} \psi'_{da} = A_1 I_{da} + A_2 I_{qa} + A_3 I_{d3a} + A_4 I_{q3a}, \\ \psi'_{db} = A_5 I_{da} + A_6 I_{qa} + A_7 I_{d3a} + A_8 I_{q3a}, \\ \psi'_{qa} = A_9 I_{da} + A_{10} I_{qa} + A_{11} I_{d3a} + A_{12} I_{q3a}, \\ \psi'_{qb} = A_{13} I_{da} + A_{14} I_{qa} + A_{15} I_{d3a} + A_{16} I_{q3a}. \end{cases}$$

Далее

$$(33)\quad \begin{cases} \psi_{fdaa} = A_{17} I_f + A_{18} I_{fd3} + A_{19} I_{fq3}, \\ \psi_{fqaa} = A_{20} I_f + A_{21} I_{fd3} + A_{22} I_{fq3}, \\ \psi_{bfdb} = A_{23} I_f + A_{24} I_{fd3} + A_{25} I_{fq3}, \\ \psi_{bfqb} = A_{26} I_f + A_{27} I_{fd3} + A_{28} I_{fq3}. \end{cases}$$

Потокосцепление ротора состоит из потокосцеплений самоиндукции роторной обмотки и потокосцепления взаимоиндукции обмоток статора:

$$(34)\quad \begin{cases} \psi_{ffda} = \psi_{fda} + \psi'_{Afd}, & \psi_{ffdb} = \psi_{fdb} + \psi'_{Bfd}, \\ \psi_{ffqa} = \psi_{fqa} + \psi'_{Afq}, & \psi_{ffqb} = \psi_{fqb} + \psi'_{Bfq}. \end{cases}$$

Здесь:

$$(35)\quad \begin{cases} \psi_{fda} = L_f I_f, \quad \psi_{fqa} = 0, \quad \psi_{fdb} = -\psi_{fda}/2, \quad \psi_{fqb} = \sqrt{3}\,\psi_{fda}/2, \\ \psi_{Afd} = A_{29} I_{da} + A_{30} I_{qa} + A_{31} I_{d3a} + A_{32} I_{q3a}, \\ \psi_{Afq} = A_{33} I_{da} + A_{34} I_{qa} + A_{35} I_{d3a} + A_{36} I_{q3a}, \\ \psi_{Bfd} = A_{37} I_{da} + A_{38} I_{qa} + A_{39} I_{d3a} + A_{40} I_{q3a}, \\ \psi_{Bfq} = A_{41} I_{da} + A_{42} I_{qa} + A_{43} I_{d3a} + A_{44} I_{q3a}. \end{cases}$$

5. *Уравнение баланса напряжений*

Фазные напряжения выражаются следующей системой уравнений:

$$(36)\quad U_a = -i_a r_a - \mathrm{d}\psi_a/\mathrm{d}t, \quad U_b = -i_b r_b - \mathrm{d}\psi_b/\mathrm{d}t, \quad U_c = -i_c r_c - \mathrm{d}\psi_c/\mathrm{d}t.$$

В общем случае

$$U_a + U_b + U_c = 3U_{a0} \neq 0. \tag{37}$$

Разложим U_a, U_b, U_c:

$$U_a = U'_a + U_{a0}, \quad U_b = U'_b + U_{b0}, \quad U_c = U'_c + U_{c0}, \tag{38}$$

как, что:

$$U'_a + U'_b + U'_c = 0. \tag{39}$$

Далее

$$\begin{cases} U_{da} = 2[U'_a \cos\theta + U'_b \cos(\theta - \varrho_1) + U'_c \cos(\theta + \varrho_1)]/3, \\ U_{db} = 2[U'_a \cos(\theta + \varrho_1) + U'_b \cos\theta + U'_c \cos(\theta - \varrho_1)]/3, \\ U_{qa} = 2[U'_a \sin\theta + U'_b \sin(\theta - \varrho_1) + U'_c \sin(\theta + \varrho_1)]/3, \\ U_{qb} = 2[U'_a \sin(\theta + \varrho_1) + U'_b \sin\theta + U'_c \sin(\theta - \varrho_1)]/3. \end{cases} \tag{40}$$

Из системы уравнений (36) получим:

$$\begin{cases} U_{da} = C_1 I_{da} + C_2 I_{qa} - d\psi_{da}/dt - \psi_{qa}(d\theta/dt), \\ U_{db} = C_3 I_{da} + C_4 I_{qa} - d\psi_{db}/dt - \psi_{qb}(d\theta/dt), \\ U_{qa} = C_5 I_{da} + C_6 I_{qa} - d\psi_{qa}/dt + \psi_{da}(d\theta/dt), \\ U_{qb} = C_7 I_{da} + C_8 I_{qa} - d\psi_{qb}/dt + \psi_{db}(d\theta/dt). \end{cases} \tag{41}$$

Подставляя потокосцепления в систему уравнений (41) окончательно получим фундаментальные уравнения статорной обмотки:

$$\begin{cases} U_{da} = C_1 I_{da} + C_2 I_{qa} - \\ -d(A_1 I_{da} + A_2 I_{qa} + A_3 I_{d3a} + A_4 I_{q3a} + A_{17} I_f + A_{18} I_{fd3} + A_{19} I_{fq3})/dt - \\ -(A_9 I_{da} + A_{10} I_{qa} + A_{11} I_{d3a} + A_{12} I_{q3a})(d\theta/dt) - \\ -(A_{20} I_f + A_{21} I_{fd3} + A_{22} I_{fq3})(d\theta/dt), \\ U_{db} = C_3 I_{da} + C_4 I_{qa} - \\ -d(A_5 I_{da} + A_6 I_{qa} + A_7 I_{d3a} + A_8 I_{q3a} + A_{23} I_f + A_{24} I_{fd3} + A_{25} I_{fq3})/dt - \\ -(A_{13} I_{da} + A_{14} I_{qa} + A_{15} I_{d3a} + A_{16} I_{q3a} + A_{26} I_f + A_{27} I_{fd3} + A_{28} I_{fq3})(d\theta/dt), \\ U_{qa} = C_5 I_{da} + C_6 I_{qa} - \\ -d(A_9 I_{da} + A_{10} I_{qa} + A_{11} I_{d3a} + A_{12} I_{q3a} + A_{20} I_f + A_{21} I_{fd3} + A_{22} I_{fq3})/dt + \\ +(A_1 I_{da} + A_2 I_{qa} + A_3 I_{d3a} + A_4 I_{q3a} + A_{17} I_f + A_{18} I_{fd3} + A_{19} I_{fq3})(d\theta/dt), \\ U_{qb} = C_7 I_{da} + C_8 I_{qa} - \\ -d(A_{13} I_{da} + A_{14} I_{qa} + A_{15} I_{d3a} + A_{16} I_{q3a} + A_{26} I_f + A_{27} I_{fd3} + A_{28} I_{fq3})/dt + \\ +(A_5 I_{da} + A_6 I_{qa} + A_7 I_{d3a} + A_8 I_{q3a} + A_{23} I_f + A_{24} I_{fd3} + A_{25} I_{fq3})(d\theta/dt). \end{cases} \tag{42}$$

Для роторной обмотки имеем следующие уравнения баланса напряжения:

$$(43)\qquad \begin{cases} U_{fa} = I_{fa} r_f + \mathrm{d}\psi_{aft}/\mathrm{d}t, \; U_{fb} = i_{fb} r_f + \mathrm{d}\psi_{bft}/\mathrm{d}t, \\ U_{fc} = i_{fc} r_f + \mathrm{d}\psi_{cft}/\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Из системы уравнений (43) можно получить следующую систему:

$$(44)\qquad \begin{cases} U_{fda} = I_{fda} r_f + \mathrm{d}\psi_{ffda}/\mathrm{d}t + \psi_{ffqa}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t), \\ U_{fdb} = I_{fdb} r_f + \mathrm{d}\psi_{ffdb}/\mathrm{d}t + \psi_{ffqb}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t), \\ U_{fqa} = 0 = \mathrm{d}\psi_{ffqa}/\mathrm{d}t - \psi_{ffaa}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t), \\ U_{fqb} = I_{fqb} r_f + \mathrm{d}\psi_{ffqa}/\mathrm{d}t - \psi_{ffdb}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t), \\ U_{fdc} = I_{fdc} r_f + \mathrm{d}\psi_{ffdc}/\mathrm{d}t + \psi_{ffqc}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t), \\ U_{fqc} = I_{fqc} r_f + \mathrm{d}\psi_{ffqc}/\mathrm{d}t - \psi_{ffdc}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t), \end{cases}$$

или:

$$(45)\qquad \begin{cases} U_{fda} = I_f r_f + \mathrm{d}(L_f I_f)/\mathrm{d}t + \mathrm{d}(A_{29} I_{da} + A_{30} I_{qa} + A_{31} I_{d3a} + A_{32} I_{q3a})/\mathrm{d}t - \\ \quad -(A_{33} I_{da} + A_{34} I_{qa} + A_{35} I_{d3a} + A_{36} I_{q3a})\omega, \\ U_{fqa} = 0 = \mathrm{d}(A_{33} I_{da} + A_{34} I_{qa} + A_{35} I_{d3a} + A_{36} I_{q3a})/\mathrm{d}t - \\ \quad -(A_{29} I_{da} + A_{30} I_{qa} + A_{31} I_{d3a} + A_{32} I_{q3a})\omega, \\ U_{fdb} = -I_f r_f/2 - (1/2)[\mathrm{d}(L_f I_f)/\mathrm{d}t] + \mathrm{d}(A_{37} I_{da} + A_{38} I_{qa} + A_{39} I_{d3a} + \\ \quad + A_{40} I_{q3a})/\mathrm{d}t + (A_{41} I_{da} + A_{42} I_{qa} + A_{43} I_{d3a} + A_{44} I_{q3a})\omega = -U_f/2, \\ U_{fqb} = \sqrt{3}\, U_f/2 = \sqrt{3}\, I_f r_f/2 + (\sqrt{3}/2)[\mathrm{d}(L_f I_f)/\mathrm{d}t] + (A_{41} I_{da} + \\ \quad + A_{42} I_{qa} + A_{43} I_{d3a} + A_{44} I_{q3a}) - (A_{37} I_{da} + A_{38} I_{qa} + A_{39} I_{d3a} + A_{40} I_{q3a})\omega. \end{cases}$$

В системе уравнений (44), (45) семь неизвестных токов I_{da}, I_{qa}, I_{d3a}, I_{q3a}, I_f, I_{fd3}, I_{fq3} и при известных напряжениях статора и ротора из семи уравнений этих двух систем имеется возможность их однозначного определения.

Обычно, когда генератор работает в системе напряжения шин (линейные), они известны. Что касается напряжения обмотки возбуждения, то оно всегда известно. В тех случаях, когда генератор работает на независимую сеть, напряжения зажимов неизвестны и они подлежат определению. Этот случай будет представлен в последующих работах. В предыдущих уравнениях из семи неизвестных величин, для определения реальных токов в фазах, а также, в обмотке возбуждения, достаточно знать три тока I_{da}, I_{qa} и I_f. По значениям I_{da} и I_{qa} легко опре-

делить i_a, i_b, i_c. Остальные величины входят в уравнения постольку, поскольку они участвуют в процессе. I_{d3a}, I_{q3a}, I_{fd3} и I_{fq3} определяются следующими уравнениями:

$$(46)\quad \begin{cases} I_{d3a} = 2\,[i_a \cos 3\theta + i_b \cos(3\theta - \varrho_1) + i_c \cos(3\theta + \varrho_1)\,]/3, \\ I_{q3a} = 2\,[i_a \sin 3\theta + i_b \sin(3\theta - \varrho_1) + i_c \sin(3\theta + \varrho_1)\,]/3, \\ I_{fd3} = 2\,[i_{af} \cos 3\theta + i_{bf} \cos(3\theta - \varrho_1) + i_{cf} \cos(3\theta + \varrho_1)\,]/3, \\ I_{fq3} = 2\,[i_{af} \sin 3\theta + i_{bf} \sin(3\theta - \varrho_1) + i_{cf} \sin(3\theta + \varrho_1)\,]/3. \end{cases}$$

Частные случаи несимметричной работы генератора в переходном режиме могут быть получены из общих уравнений и они будут проанализированы в последующих статьях. Представленный метод может быть использован и для исследования несимметричных переходных процессов в синхронных машинах с демпферной обмоткой, а также в асинхронных машинах и они будут рассмотрены отдельно.

Принимая коэффициенты само- и взаимоиндукции отдельных фаз равными, а также приравнивая активные сопротивления отдельных фаз, получим известные уравнения Горева-Парка.

6. *Система нулевого чередования*

Как было отмечено выше, в несимметричной машине отсутствие нулевой составляющей в токе не означает отсутствия ее в напряжении и в потокосцеплении. Для получения фазных напряжений статора, необходимо определить напряжения нулевого чередования фаз. Это напряжение определяется следующим уравнением, определяемым на основании вышеизложенного:

$$(47)\quad \begin{aligned} U_{a0} = U_{b0} = U_{c0} = &-(i_a r_a + i_b r_b + i_c r_c)/3 - \mathrm{d}\{[i_a L_a + i_b L_b + \\ &+ i_c L_c + i_a (M_{ab} + M_{ac}) + i_b (M_{ab} + M_{bc}) + i_c (M_{ac} + M_{bc})\,]/3\}/\mathrm{d}t - \\ &- \mathrm{d}\left(\{I_f [M_{afd} \cos\theta + M_{bfd} \cos(\theta - \varrho) + M_{cfd} \cos(\theta + \varrho')\,]\}/3\right)/\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Если

$$i_a + i_b + i_c = 3i_0 \neq 0,$$

тогда в системе уравнений (42) I_{qa}, I_{da} и т.д. определяются не по выражениям i_a, i_b, i_c, а по

$$(48)\quad i_a' = i_a - i_0, \quad i_b'' = i_b - i_0, \quad i_c'' = i_c - i_0.$$

Все остальные остаются теми же, что касается напряжения нулевого чередования, то для него имеем уравнение:

$$U_{a0} = -(i'_a r_a + i''_b r_b + i'_c r_c)/3 - \mathrm{d}\{[i'_a L_a + i''_b L_b + i''_c L_c +$$
$$+ i'_a (M_{ab} + M_{ac}) + i''_b (M_{ab} + M_{ac}) + i''_c (M_{ac} + M_{bc})]/3\}/\mathrm{d}t -$$
(49)
$$- \mathrm{d}(\{I_f [M_{afd} \cos\theta + M_{bfd} \cos(\theta - \varrho) + M_{cfd} \cos(\theta + \varrho')]\}/3)/\mathrm{d}t -$$
$$- i_0 R_{d0} - \mathrm{d}(i_0 L_0)/\mathrm{d}t,$$

где: $R_{d0} = (r_a + r_b + r_c)/3$, L_0 — индуктивность нулевого чередования фаз.

В последнем уравнении ток нулевого чередования обычно определяется из условия нарушения нормального режима или другими условиями. В отдельных случаях бывает известно U_{a0} и необходимо определить i_0.

Решение систем уравнений (42), (45) возможно или с помощью операционного исчисления или на счетной машине непрерывного или дискретного действия.

Если имеем симметричную машину, работающую в несимметричном режиме, системы уравнений (42), (45) упростятся.

В этом случае коэффициенты при $I_{d3a}, I_{q3a}, I_{fd3}, I_{fq3}$ будут равны нулю и поэтому можем написать:

$$U_{d0} = C_1 I_{da} + C_2 I_{qa} - \mathrm{d}(A_1 I_{da})/\mathrm{d}t - A_9 I_{qa}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t),$$
$$U_{q0} = C_3 I_{da} + C_4 I_{qa} - \mathrm{d}(A_9 I_{qa})/\mathrm{d}t + A_1 I_{da}(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t),$$
$$U_f = I_f r_f + \mathrm{d}(L_f I_f)/\mathrm{d}t + \mathrm{d}(A_{29} I_{da})/\mathrm{d}t.$$

Решение их не представляет труда и может быть произведено аналитически (при $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \mathrm{const.}$). Это конечно относится и к общему случаю. Следует отметить, что в отличие от линейной системы уравнений, полученной нами, другими исследователями получены нелинейные уравнения для простого случая, а именно, для симметричной машины, и они решают частные задачи приближенно, на интегрирующей машине [6]. Предложенный метод обобщается для m-фазной машины.

Использование предлагаемого метода возможно во многих областях, в том числе для анализа процессов в схемах автоматики, где применяются машины с несимметричными фазами.

Значение коэффициентов, приведенных в тексте, дано в приложении.

7. *Выводы*

Метод „четырех реакций", предлагаемый в настоящей статье, позволяет достаточно точно изучать переходные процессы при несимметричных режимах работы трехфазных генераторов или трехфазной электрической машины вообще. Этот же метод можно использовать для изучения переходных процессов при несимметричных нарушениях нормального режима электрических систем. Для облегчения работы, а также для ускорения процесса расчета можно использовать вычислительное универсальное устройство непрерывного действия или же специализированное вычислительное устройство, построенное на

базе систем уравнений (42), (45). Предлагаемый метод может быть обобщен на случай m-фазной машины. Настоящий метод безусловно можно использовать для изучения несимметричных установившихся процессов различных электрических машин и в частности асинхронных машин.

Приложение

$$A_1 = (L_{da} + L_{qa})/2 - (M_{d1} + M_{q1})/4 - (M_{d2} + M_{q2})/4 + (L_{da} - L_{qa})/4 +$$
$$+ [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 - \varrho)]/(4\cos\varrho) + [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho_1 - \varrho')]/(4\cos\varrho') -$$
$$- (L_{da} + L_{qa} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d2} + M_{q2})/6 + (L_{db} + L_{qb} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d3} +$$
$$+ M_{q3})/12 + (L_{dc} + L_{qc} + M_{d2} + M_{q2} + M_{d3} + M_{q3})/12 - (L_{da} - L_{qa})/12 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\cos\varrho]/(12\cos\varrho) - (M_{d2} - M_{q2})/12 - (L_{db} - L_{qb})\cos(\varrho_1 - 2\varrho)/12 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 - \varrho)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho_1 + \varrho' - \varrho)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)] -$$
$$- [(L_{dc} - L_{qc})\cos(-2\varrho' + \varrho_1)]/12 -$$
$$- [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho_1 - \varrho')]/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho - \varrho' - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho - \varrho')],$$

$$A_2 = -(\sqrt{3}/2)[(M_{d1} + M_{q1})/2] + (\sqrt{3}/2)[(M_{d2} + M_{q2})/2] +$$
$$+ [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho_1 - \varrho)]/(4\cos\varrho)] - [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho_1 - \varrho')]/(4\cos\varrho') +$$
$$+ \sqrt{3}(L_{db} + L_{qb} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d3} + M_{q3})/12 - \sqrt{3}(L_{dc} + L_{qc} + M_{d2} + M_{q2} +$$
$$+ M_{d3} + M_{q3})/12 + [(M_{d1} - M_{q1})\sin\varrho]/(12\cos\varrho) - [(M_{d2} - M_{q2})\sin\varrho']/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(L_{db} - L_{qb})\sin(\varrho_1 - 2\varrho)]/12 - [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho_1 - \varrho)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho_1 + \varrho' - \varrho)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)] + [(L_{dc} - L_{qc})\sin(\varrho_1 - 2\varrho')]/12 +$$
$$+ [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho_1 - \varrho')]/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho - \varrho' - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho - \varrho')],$$

$$A_3 = (L_{da} - L_{qa})/4 + [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 - \varrho)]/(4\cos\varrho) +$$
$$+ [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' - \varrho_1)]/(4\cos\varrho') - (L_{da} - L_{qa})/12 - (M_{d1} - M_{q1})/12 -$$
$$- (M_{d2} - M_{q2})/12 - [(L_{db} - L_{qb})\cos(2\varrho - \varrho_1)]/12 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 + \varrho)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho' - \varrho - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)] -$$
$$- [(L_{dc} - L_{qc})\cos(2\varrho' + \varrho_1)]/12 - [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho - \varrho' + \varrho_1)]/[12\cos(\varrho - \varrho')],$$

$$A_4 = [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho + \varrho_1)]/(4\cos\varrho) - [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho' + \varrho_1)]/(4\cos\varrho') -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\sin\varrho]/(12\cos\varrho) + [(M_{d2} - M_{q2})\sin\varrho']/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(L_{db} - L_{qb})\sin(2\varrho - \varrho_1)]/12 - [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho + \varrho_1)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho' - \varrho - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)] +$$
$$+ [(L_{dc} - L_{qc})\sin(2\varrho' - \varrho)]/12 + [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho' - \varrho + \varrho_1)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)],$$

$$A_5 = (M_{d2} + M_{q2})/2 - (M_{da} + M_{qa})/4 - (L_{da} + L_{qa})/4 - (M_{d1} - M_{q1})/4 +$$
$$+ [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho_1 - \varrho')]/(4\cos\varrho') - (L_{da} - L_{qa})/8 +$$
$$+ (L_{da} + L_{qa} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d2} + M_{q2})/12 + (L_{db} + L_{qb} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d3} +$$
$$+ M_{q3})/12 - (L_{dc} + L_{qc} + M_{d2} + M_{q2} + M_{d3} + M_{q3})/6 + (L_{da} - L_{qa})/24 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 - \varrho)]/(12\cos\varrho)] - [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(L_{db} - L_{qb})\cos(2\varrho - \varrho_1)]/12 - (M_{d1} - M_{q1})/12 -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho' - \varrho - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)] - [(L_{dc} - L_{qc})\cos 2\varrho']/12 -$$
$$- [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho_1 - \varrho')]/(12\cos\varrho') - [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho' - \varrho)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)],$$

$$A_6 = -(\sqrt{3}/2)[(L_{da} + L_{qa})/2] + \sqrt{3}(M_{d1} + M_{q1})/4 + [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho' + \varrho_1)]/(4\cos\varrho') +$$
$$+ \sqrt{3}(L_{da} - L_{qa})/8 + [(M_{d1} - M_{q1})\sin\varrho]/(4\cos\varrho) +$$
$$+ \sqrt{3}(L_{da} + L_{qa} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d2} + M_{q2})/12 -$$
$$- \sqrt{3}(L_{db} + L_{qb} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d3} + M_{q3})/12 - (\sqrt{3}/2)[(L_{da} - L_{qa})/12] -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho_1 - \varrho)]/(12\cos\varrho) - [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho' + \varrho_1)]/[12\cos\varrho') +$$
$$+ [(L_{db} - L_{qb})\sin(2\varrho + \varrho_1)]/12 + [(M_{d1} - M_{q1})\sin\varrho]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho - \varrho' - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho - \varrho')] - [(L_{dc} - L_{qc})\sin 2\varrho']/12 +$$
$$+ [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho_1 - \varrho')]/(12\cos\varrho') - [(M_{d3} - M_{q3})/\sin(\varrho - \varrho')]/[12\cos(\varrho - \varrho')],$$

$$A_7 = (M_{d2} - M_{q2})/4 - (L_{da} - L_{qa})/8 + [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho - \varrho_1)]/(4\cos\varrho) +$$
$$+ (L_{da} - L_{qa})/24 - [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho - \varrho_1)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho')] - [(L_{db} - L_{qb})\cos(2\varrho + \varrho_1)]/12 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho + \varrho_1)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho' - \varrho + \varrho_1)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)] - [(L_{dc} - L_{qc})\cos 2\varrho']/12 -$$
$$- (M_{d2} - M_{q2})/12 - [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho' - \varrho)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)],$$

$$A_8 \quad -[(M_{d2}-M_{q2})\sin\varrho']/(4\cos\varrho')+\sqrt{3}\,(L_{da}-L_{qa}]/8+$$
$$+[(M_{d1}-M_{q1})\cos(\varrho-\varrho')]/(4\cos\varrho)+\sqrt{3}\,(L_{da}-L_{qa})/24-$$
$$-[(M_{d1}-M_{q1})\sin(\varrho-\varrho_1)]/(12\cos\varrho)+[(M_{d2}-M_{q2})\sin(\varrho'+\varrho_1)]/(12\cos\varrho')+$$
$$+[(L_{dc}-L_{qc})\sin 2\varrho']/12-[(L_{db}-L_{qb})\sin(2\varrho+\varrho_1)]/12-$$
$$-[(M_{d1}-M_{q1})\sin(\varrho+\varrho_1)]/(12\cos\varrho)-$$
$$-[(M_{d3}-M_{q3})\sin(\varrho-\varrho'+\varrho_1)]/[12\cos(\varrho-\varrho')]+[(M_{d2}-M_{q2})\sin\varrho']/(12\cos\varrho')-$$
$$-[(M_{d3}-M_{q3})\sin(\varrho-\varrho')]/[12\cos(\varrho-\varrho')],$$

$$A_9=\sqrt{3}\,(M_{d1}+M_{q1})/4-\sqrt{3}\,(M_{d2}+M_{q2})/4+[(M_{d1}-M_{q1})\sin(\varrho_1-\varrho)]/(4\cos\varrho)+$$
$$+[(M_{d2}-M_{q2})\sin(\varrho_1-\varrho')]/(4\cos\varrho')-\sqrt{3}\,(L_{db}+L_{qb}+M_{d1}+M_{q1}+M_{d3}+$$
$$+M_{q3})/12+\sqrt{3}\,(L_{dc}+L_{qc}+M_{d2}+M_{q2}+M_{d3}+M_{q3})/12+$$
$$+[(M_{d1}-M_{q1})\sin\varrho]/(12\cos\varrho)]-[(M_{d2}-M_{q2})\sin\varrho']/(12\cos\varrho')-$$
$$-(L_{db}-L_{qb})\sin(\varrho_1-2\varrho)]/12-[(M_{d1}-M_{q1})\sin(\varrho_1-\varrho)]/(12\cos\varrho)-$$
$$-[(M_{d3}-M_{q3})\sin(\varrho-\varrho'+\varrho_1)]/[12\cos(\varrho-\varrho')]+[(L_{dc}-L_{qc})\sin(\varrho_1-2\varrho')]/12+$$
$$+[(M_{d2}-M_{q2})\sin(\varrho_1-\varrho')]/(12\cos\varrho')-$$
$$-[(M_{d3}-M_{q3})\sin(\varrho-\varrho'-\varrho_1)]/[12\cos(\varrho-\varrho')],$$

$$A_{10}=(L_{da}+L_{qa})/2-(M_{d1}+M_{q1})/4-(M_{d2}+M_{q2})/4-(L_{da}-L_{qa})/4-$$
$$-[(M_{d1}-M_{q1})\cos(\varrho_1-\varrho)]/(4\cos\varrho)-[(M_{d2}-M_{q2})\cos(\varrho_1-\varrho')]/(4\cos\varrho')]-$$
$$-(L_{da}+L_{qa}+M_{d1}+M_{q1}+M_{d2}+M_{q2})/6+$$
$$+(L_{db}+L_{qb}+M_{d1}+M_{q1}+M_{d3}+M_{q3})/12+(L_{dc}+L_{qc}+M_{d1}+M_{q1}+M_{d3}+M_{q3})/2+$$
$$+(M_{d1}-M_{q1})/12+(L_{da}-L_{qa})/12++(M_{d2}-M_{q2})/12+[(L_{db}-L_{qb})\cos(\varrho_1-2\varrho)]/12+$$
$$+[(M_{d1}-M_{q1})\cos(\varrho_1-\varrho)]/(12\cos\varrho)+[(M_{d3}-M_{q3})\cos(\varrho-\varrho'+\varrho_1)]/[12\cos(\varrho-\varrho')]+$$
$$+[(L_{dc}-L_{qc})\cos(\varrho_1-2\varrho')]/12+[(M_{d2}-M_{q2})\cos(\varrho_1-\varrho')]/(12\cos\varrho')+$$
$$+[(M_{d3}-M_{q3})\cos(\varrho-\varrho'-\varrho_1)]/[12\cos(\varrho-\varrho')],$$

$$A_{11}=-[(M_{d1}-M_{q1})\sin(\varrho_1-\varrho)]/(4\cos\varrho)+[(M_{d2}-M_{q2})\sin(\varrho'-\varrho_1)]/(4\cos\varrho')+$$
$$+[(M_{d1}-M_{q1})\sin\varrho]/(12\cos\varrho)-[(M_{d2}-M_{q2})\sin\varrho']/(12\cos\varrho')+$$
$$+[(L_{db}-L_{qb})\sin(2\varrho+\varrho_1)/12]+[(M_{d1}-M_{q1})\sin(\varrho_1-\varrho)]/(12\cos\varrho)+$$
$$+[M_{d3}-M_{q3})\sin(\varrho+\varrho'-\varrho_1)]/[12\cos(\varrho+\varrho')]+[(L_{dc}-L_{qc})\sin(2\varrho'-\varrho_1)]/12-$$
$$-[(M_{d2}-M_{q2})\sin(\varrho'+\varrho_1)]/(12\cos\varrho')+$$
$$+[(M_{d3}-M_{q3})\sin(\varrho+\varrho'+\varrho_1)]/[12\cos(\varrho+\varrho')],$$

$$A_{12} = (L_{da} - L_{qa})/4 + [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 + \varrho)]/(4\cos\varrho) +$$
$$+ [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho_1 + \varrho')]/(4\cos\varrho') - (L_{da} - L_{qa})/12 - (M_{d1} - M_{q1})/12 -$$
$$- (M_{d2} - M_{q2})/12 - [(L_{db} - L_{qb})\cos(2\varrho + \varrho_1)]/12 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 + \varrho)]/(12\cos\varrho) - [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho - \varrho' + \varrho_1)]/[12\cos(\varrho - \varrho')] -$$
$$- [(L_{dc} - L_{qc})\cos(2\varrho' + \varrho_1)]/12 - [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho_1 + \varrho')]/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho - \varrho' - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho - \varrho')],$$

$$A_{13} = \sqrt{3}(L_{da} + L_{qa})/4 - \sqrt{3}(M_{d1} + M_{q1})/4 + \sqrt{3}(L_{da} - L_{qa})/8 +$$
$$+ [(M_{d1} - M_{q1})\sin\varrho]/(4\cos\varrho) - [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho + \varrho_1)]/(4\cos\varrho') -$$
$$- \sqrt{3}(L_{da} + L_{qa} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d2} + M_{q2})/12 +$$
$$- \sqrt{3}(L_{db} + L_{qb} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d3} + M_{q3})/12 - \sqrt{3}(L_{da} - L_{qa})/24 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho_1 - \varrho)]/(12\cos\varrho) - [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho') +$$
$$+ [(L_{db} - L_{qb})\sin(2\varrho + \varrho_1)]/12 - [(M_{d1} - M_{q1})\sin\varrho]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho - \varrho' + \varrho_1)]/[12\cos(\varrho - \varrho')] - [(L_{dc} - L_{qc})\sin 2\varrho']/12 +$$
$$+ [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho') -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho - \varrho')]/[12\cos(\varrho - \varrho')],$$

$$A_{14} = -(L_{da} + L_{qa})/4 - (M_{d1} + M_{q1})/4 + (M_{d2} + M_{q2})/2 + (L_{da} - L_{qa})/8 -$$
$$- (L_{da} - L_{qa})/24 - [(M_{d1} - M_{q1})\cos\varrho]/(4\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' + \varrho_1)]/(4\cos\varrho') + (L_{da} + L_{qa} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d2} + M_{q2})/12 -$$
$$- (L_{db} + L_{qb} + M_{d1} + M_{q1} + M_{d3} + M_{q3})/12 -$$
$$- (L_{dc} + L_{qc} + M_{d2} + M_{q2} + M_{d3} + M_{q3})/6 -$$
$$- (L_{da} - L_{qa})/24 + [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho_1 - \varrho)]/(12\cos\varrho) +$$
$$+ [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho') + (M_{d1} - M_{q1})/12 +$$
$$+ [(L_{db} - L_{qb})\cos(2\varrho + \varrho_1)]/12 + [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho - \varrho' - \varrho_1)]/(12\cos(\varrho - \varrho')] +$$
$$+ [(L_{dc} - L_{qc})\cos 2\varrho']/12 - [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' + \varrho_1)]/(12\cos\varrho') + (M_{d3} - M_{q3})/12,$$

$$A_{15} = -\sqrt{3}(L_{da} - L_{qa})/8 - [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho - \varrho_1)]/(4\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d2} - M_{q2})\sin\varrho']/(4\cos\varrho') + \sqrt{3}(L_{da} - L_{qa})/24 +$$
$$+ [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho + \varrho_1)]/(12\cos\varrho) - [(M_{d2} - M_{q2})\sin(\varrho' - \varrho_1)]/(12\cos\varrho') +$$
$$+ [(L_{db} - L_{qb})\sin(2\varrho + \varrho_1)]/12 + [(M_{d1} - M_{q1})\sin(\varrho - \varrho_1)/(12\cos\varrho) +$$
$$+ [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho' - \varrho - \varrho_1)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)] + [(L_{dc} - L_{qc})\sin 2\varrho']/12 -$$
$$- [(M_{d2} - M_{q2})\sin\varrho']/(12\cos\varrho') + [(M_{d3} - M_{q3})\sin(\varrho' - \varrho)]/[12\cos(\varrho' - \varrho)],$$

$$A_{16} = -(L_{da} - L_{qa})/8 + [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho - \varrho_1)]/(4\cos\varrho) +$$
$$+ (M_{d2} - M_{q2})/4 + (L_{da} - L_{qa})/24 - [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho + \varrho_1)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d2} - M_{q2})\cos(\varrho' - \varrho_1)]/(12\cos\varrho') - [(L_{db} - L_{qb})\cos(2\varrho - \varrho_1)]/12 -$$
$$- [(M_{d1} - M_{q1})\cos(\varrho - \varrho_1)]/(12\cos\varrho) -$$
$$- [(M_{d3} - M_{q3})\cos(\varrho' - \varrho - \varrho_1)]/(12\cos(\varrho' - \varrho) -$$
$$- [(L_{dc} - L_{qc})\cos 2\varrho']/12 - [(M_{d2} - M_{q2})\cos\varrho']/(12\cos\varrho') - (M_{d3} - M_{q3})/12,$$

$$A_{17} = M_{afd_0} + M_{afd}/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho + \varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho' + \varrho_1)]/6,$$

$$A_{18} = M_{afd}/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho + \varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho' + \varrho_1)]/6,$$

$$A_{19} = [M_{bfd}\sin(\varrho + \varrho_1)]/6 - [M_{cfd}\sin(\varrho' + \varrho_1)]/6,$$

$$A_{20} = M_{afd_0} - [M_{bfq}\sin(\varrho + \varrho_1)]/6 + [M_{cfq}\sin(\varrho' + \varrho_1)]/6,$$

$$A_{21} = -M_{bfq}\sin(\varrho + \varrho_1)]/6 + [M_{cfq}\sin(\varrho' + \varrho_1)]/6,$$

$$A_{22} = M_{afq}/6 + [M_{bfq}\cos(\varrho + \varrho_1)]/6 + [M_{cfq}\cos(\varrho' + \varrho_1)]/6,$$

$$A_{23} = -M_{bfd}/12 + (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho' - \varrho_1)]/6 + M_{bfd_0},$$

$$A_{24} = -M_{bfd}/12 + (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho' - \varrho_1)]/6,$$

$$A_{25} = (M_{bfd}\sin\varrho)/6 - [M_{cfd}\sin(\varrho' - \varrho_1)]/6 - \sqrt{3}\,M_{afd}/12,$$

$$A_{26} = M_{bfq_0} + \sqrt{3}\,M_{afd}/12 - (M_{bfd}\sin\varrho)/6 + [M_{cfd}\sin(\varrho' - \varrho_1)]/6,$$

$$A_{27} = \sqrt{3}\,M_{afd}/12 - (M_{bfd}\sin\varrho)/6 + [M_{cfd}\sin(\varrho' - \varrho_1)]/6,$$

$$A_{28} = -M_{afd}/12 + (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho' - \varrho_1)]/6,$$

$$A_{29} = M_{afd} + [M_{bfd}\cos(\varrho_1 - \varrho)]/3 - (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho + \varrho_1)]/3 +$$
$$+ [M_{cfd}\cos(\varrho' - \varrho_1)]/3 + [M_{cfd}\cos(\varrho' + \varrho_1)]/3 - (M_{cfd}\cos\varrho')/6,$$

$$A_{30} = -(\sqrt{3}\,M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [\sqrt{3}\,M_{bfd}\cos(\varrho + \varrho_1)]/6 - [\sqrt{3}\,M_{cfd}\cos(\varrho' + \varrho_1)]/6 +$$
$$+ (\sqrt{3}\,M_{cfd}\cos\varrho')/6 + [M_{bfd}\sin(\varrho' + \varrho_1)]/6 + [M_{bfd}\sin(\varrho_1 + \varrho)]/2 -$$
$$- [M_{cfd}\sin(\varrho_1 + \varrho')]/2,$$

$$A_{31} = [M_{bfd}\cos(\varrho + \varrho_1)]/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho - \varrho_1)]/6 +$$
$$+ (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho' + \varrho_1)]/6 + (M_{cfd}\cos\varrho')/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho' - \varrho_1)]/6,$$

$$A_{32} = [M_{bfd}\sin(\varrho + \varrho_1)]/6 + [M_{bfd}\sin(\varrho - \varrho_1)]/6 - (M_{bfd}\sin\varrho)/6 -$$
$$- [M_{cfd}\sin(\varrho' + \varrho_1)]/6 - (M_{cfd}\sin\varrho')/6 - [M_{cfd}\sin(\varrho' - \varrho_1)]/6,$$

$$A_{33} = \sqrt{3}(M_{bfd}\cos\varrho)/6 - \sqrt{3}[M_{bfd}\cos(\varrho + \varrho_1)]/6 + \sqrt{3}[M_{cfd}\cos(\varrho' + \varrho_1)]/6 -$$
$$- \sqrt{3}(M_{cfd}\cos\varrho')/6 - [M_{bfd}\sin(\varrho_1 + \varrho)]/2 + [M_{cfd}\sin(\varrho_1 + \varrho')]/2,$$

$$A_{34} = M_{afd} + M_{bfd}/3 - (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho_1+\varrho)]/3 + [M_{cfd}\cos(\varrho_1+\varrho')]/3 + [M_{cfd}\cos(\varrho'-\varrho_1)]/3 - (M_{cfd}\cos\varrho')/6,$$

$$A_{35} = [M_{bfd}\sin(\varrho+\varrho_1)]/6 + [M_{bfd}\sin(\varrho-\varrho_1)]/6 + (M_{bfd}\sin\varrho)/6 - [M_{cfd}\sin(\varrho'+\varrho_1)]/6 - (M_{cfd}\sin\varrho')/6 - [M_{cfd}\sin(\varrho'-\varrho_1)]/6,$$

$$A_{36} = -[M_{bfd}\cos(\varrho+\varrho_1)]/6 - [M_{bfd}\cos(\varrho-\varrho_1)]/6 - (M_{bfd}\cos\varrho)/6 - [M_{cfd}\cos(\varrho+\varrho_1)]/6 - (M_{cfd}\cos\varrho')/6 - [M_{cfd}\cos(\varrho'-\varrho_1)]/6,$$

$$A_{37} = -M_{afd}/2 + [M_{bfd}\cos(\varrho+\varrho_1)]/3 - [M_{bfd}\cos(\varrho_1-\varrho)]/6 + (M_{bfd}\cos\varrho)/3 + (M_{cfd}\cos\varrho')/3 + [M_{cfd}\cos(\varrho'-\varrho_1)]/3 - [M_{cfd}\cos(\varrho_1+\varrho')]/6,$$

$$A_{38} = -\sqrt{3}M_{afd}/2 - \sqrt{3}[M_{bfd}\cos(\varrho_1-\varrho)]/6 + \sqrt{3}(M_{bfd}\cos\varrho)/6 - \sqrt{3}[M_{cfd}\cos(\varrho'-\varrho_1)]/6 + \sqrt{3}[M_{cfd}\cos(\varrho_1+\varrho')]/6 + (M_{bfd}\sin\varrho)/2 + [M_{cfd}\sin(\varrho'-\varrho_1)]/2,$$

$$A_{39} = M_{afd}/6 + (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho+\varrho_1)]/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho-\varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho'-\varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho'+\varrho_1)]/6 + (M_{cfd}\cos\varrho')/6,$$

$$A_{40} = (M_{bfd}\sin\varrho)/6 + [M_{bfd}\sin(\varrho+\varrho_1)]/6 - [M_{bfd}\sin(\varrho-\varrho_1)]/6 - [M_{cfd}\sin(\varrho'-\varrho_1)]/6 - [M_{cfd}\sin(\varrho'+\varrho_1)]/6 - (M_{cfd}\sin\varrho')/6,$$

$$A_{41} = \sqrt{3}M_{afd}/2 - [M_{bfd}\sin(\varrho+\varrho_1)]/3 + [M_{bfd}\sin(\varrho-\varrho_1)]/6 - (M_{bfd}\sin\varrho)/3 + (M_{cfd}\sin\varrho')/3 + 2[M_{cfd}\sin(\varrho_1-\varrho')]/3 - [M_{cfd}\sin(\varrho'+\varrho_1)]/6,$$

$$A_{42} = -M_{afd}/2 + \sqrt{3}[M_{afd}\sin(\varrho-\varrho_1)]/6 - \sqrt{3}(M_{bfd}\sin\varrho)/6 + \sqrt{3}[M_{cfd}\sin(\varrho_1-\varrho')]/6 + \sqrt{3}[M_{cfd}(\sin\varrho'+\varrho_1)]/6 + (M_{bfd}\cos\varrho)/2 + [M_{cfd}\cos(\varrho'-\varrho_1)]/2,$$

$$A_{43} = -(M_{bfd}\sin\varrho)/6 - [M_{bfd}\sin(\varrho+\varrho_1)]/6 - [\sin(\varrho-\varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\sin(\varrho'-\varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\sin(\varrho'+\varrho_1)]/6 + (M_{cfd}\sin\varrho')/6,$$

$$A_{44} = (M_{bfd}\cos\varrho)/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho+\varrho_1)]/6 + [M_{bfd}\cos(\varrho-\varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho'-\varrho_1)]/6 + [M_{cfd}\cos(\varrho'+\varrho_1)]/6 + (M_{cfd}\cos\varrho')/6,$$

$$C_1 = -2r_a/3 - r_b/6 - r_c/6, \quad C_2 = \sqrt{3}r_b/6 - \sqrt{3}r_c/6,$$

$$C_3 = -\sqrt{3}r_b/6 + \sqrt{3}r_c/6, \quad C_4 = -2r_a/3 - r_b/6 - r_c/6.$$

Поступила 12 I 1962 г.

Грузинский политехнический институт, Тбилиси, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Горев А. А., *Переходные процессы синхронной машины*, ГЭИ, М.-Л., 1950.
2. Лайон В., *Анализ переходных процессов в электрических машинах переменного тока*, ИЛ, М., 1958, (перев. с англ.).
3. Конкордиа, Ч., *Синхронные машины. Переходные и установившиеся процессы*, ИЛ, М., 1959, (перев. с англ.).
4. Лаибл Т., *Теория синхронной машины при переходных процессах*, ИЛ, М., 1957, (перев. с нем.).
5. Тафт В А., *Электрические цепи с периодически изменяющимися параметрами и переходные процессы в синхронных машинах*, Изд. АН СССР, М., 1958.
6. Страхов, В., *Переходные процессы в электрических цепях, содержащих машины переменного тока*, ГЭИ, М.-Л, 1959.

THE PROBLEM OF THE TRANSITIONAL PROCESSES THROUGHOUT ASYMMETRIC WORKING REGIME OF THE SYNCHRONOUS MACHINES

(Summary)

The transitional processes throughout asymmetric working regime of the synchronous machines had been studied by using a new method, called the *method of four reactions*. This method makes it possible to investigate the electromagnetical phenomena throughout asymmetrical working regime of the asymmetrical synchronous machines in a system of the three pairs of axes with a diplacement of 120° and rotating with a certain speed. The cardinal equations of the transitional processes throughout asymmetrical working regime just considered are linear and can be solved analytically or by means of computers.

ASUPRA PROBLEMEI PROCESELOR TRANZITORII ÎN CAZUL REGIMURILOR NESIMETRICE DE FUNCŢIONARE A MAŞINILOR SINCRONE

(Rezumat)

Procesele tranzitorii în cazul regimurilor nesimetrice de funcţionare a maşinilor sincrone sînt studiate în această Notă cu ajutorul unei noi metode, ce poate fi numită *metoda celor patru reacţii*. Metoda elaborată permite studiul fenomenelor electromagnetice în cazul regimurilor nesimetrice de funcţionare a maşinilor sincrone asimetrice într-un sistem de trei perechi de axe, decalate cu 120° şi aflate în rotaţie cu o viteză unghiulară prescrisă. Ecuaţiile fundamentale ale proceselor tranzitorii, în cazul regimurilor nesimetrice, sint liniare şi se pot rezolva fie prin metode analitice, fie prin folosirea maşinilor electronice de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 538.541

ВИХРЕВЫЕ ТОКИ ИНДУКТИРУЕМЫЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ПРОВОДОМ С ПЕРЕМЕННЫМ ТОКОМ В ДЛИННОМ ПРОВОДЯЩЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

АНДРЕЙ ЦУГУЛЯ

Доклад представленный на Республиканской научной сессии по вопросам электротехники в г. Бухаресте, 14—16 декабря 1962 г.

1. *Введение*

Представим себе прямолинейный бесконечный провод, по которому течет переменный ток $i = \sqrt{2}I \sin \omega t$, и длинный проводящий цилиндр радиуса a, ось которого параллельна проводу и отстает от него на расстояние $r_0 > a$ (рис. 1).

Предполагаем, что проводящий материал цилиндра линейный и однородной с точки зрения электромагнитных свойств, т. е. его удельная проводимость σ и магнитная проницаемость μ не зависят от полевых величин.

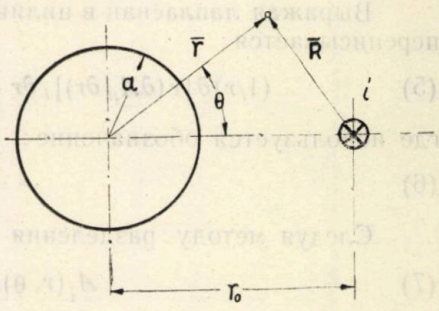


Рис. 1. — Цилиндрический проводник с радиусом a в магнитном поле параллельного провода по которому течет переменный ток.

Нас интересует определение электромагнитного поля внутри проводящего цилиндра, а также электромагнитной мощности переданной электромагнитным полем через его наружную поверхность. Задача решается в предположений квазистационарности режима электромагнитного поля в проводнике, когда плотность тока смещения пренебрежительно мала по сравнению с плотностью тока проводимости, что всегда выполняется в проводниках, даже при самых великих частотах [1].

В цилиндрической системе координат, ось Oz которой совпадает с осью цилиндра, задача решается интегрированием следующих уравнений векторного потенциала:

$$\Delta \underline{A}_i = -\mu \underline{J} \tag{1}$$

для внутренней области цилиндра, и

$$\Delta \underline{A}_i = 0 \tag{2}$$

для внешней области цилиндра, с исключением точек прямолинейного провода несущего переменный ток, в котором векторный потенциал $\underline{A}_e$ имеет логарифмическую сингулярность.

В уравнениях (1) и (2) $\underline{A}_i$ и $\underline{A}_e$ суть комплексные изображения (подчеркнутые внизу) составляющих по оси Oz, векторного потенциала внутри и снаружи цилиндра, зависящие только от координат r и θ т. е.:

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}\underline{A}_z(r, \theta). \tag{3}$$

Поскольку $\underline{j}_z = \sigma \underline{E}_z = -\mathrm{j}\omega\sigma \underline{A}_i$ уравнение (1) переписывается:

$$\Delta \underline{A}_i - \mathrm{j}\omega\mu\sigma \underline{A}_i = 0. \tag{4}$$

Так как задача решается в присутствии двух различных сред в которых векторный потенциал удовлетворяет различным уравнениям, решения этих уравнений определяются в каждой среде различно, а постоянные интегрирования находятся при помощи граничных условий на поверхности цилиндра.

2. *Решение задачи внутри проводящего цилиндра*

Выражая лапласиан в цилиндрических координатах, уравнение (4) переписывается:

$$(1/r)\partial[r(\partial \underline{A}_i/\partial r)]/\partial r + (1/r^2)(\partial^2 \underline{A}_i/\partial\theta^2) + \underline{\gamma}^2 \underline{A}_i = 0, \tag{5}$$

где используется обозначение:

$$\underline{\gamma}^2 = -\mathrm{j}\omega\mu\sigma. \tag{6}$$

Следуя методу разделения переменных, ищем решение в форме:

$$\underline{A}_i(r, \theta) = \underline{R}(r)\Theta(\theta), \tag{7}$$

приводящее к уравнениям:

$$\mathrm{d}^2\Theta/\mathrm{d}\theta^2 + n^2\Theta = 0 \tag{8}$$

и

$$\mathrm{d}^2\underline{R}/\mathrm{d}r + (1/r)(\mathrm{d}\underline{R}/\mathrm{d}r) + (\underline{\gamma}^2 - n^2/r^2)\underline{R} = 0, \tag{9}$$

где n — целое число.

Решения уравнений (8) и (9) суть:

$$\Theta_n = B_n \sin n\theta + C_n' \cos n\theta \tag{10}$$

и

$$\underline{R}_n = \underline{D}_n \mathrm{J}_n(\underline{\varrho}) + \underline{E}_n \mathrm{Y}_n(\underline{\varrho}), \tag{11}$$

где B_n, C'_n, $\underline{D}_n$, $\underline{E}_n$ — постоянные интегрирования, а $J_n(\underline{\varrho})$ и $Y_n(\underline{\varrho})$ — Бессельевы функции первого и второго рода, порядка n, от комплексной переменной $\underline{\varrho} = \underline{\gamma} r$.

Поскольку $|Y_n(\underline{\varrho})| \to \infty$, а решение должно быть конечным, и имея в виду условия симметрии по отношению к прямой соединяющей центр цилиндра с проводником, получаем $\underline{E}_n = 0$, $B_n = 0$. Поэтому решение внутренней задачи получается суммированием всех возможных произведений $\Theta_n \underline{R}_n$:

$$\underline{A}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{C}_n J_n(\underline{\varrho}) \cos n\theta, \tag{12}$$

где постоянные $\underline{C}_n = C'_n \underline{D}_n$ должны определяться при помощи граничных условий.

3. *Решение задачи снаружи проводящего цилиндра*

Имея в виду логарифмическую сингулярность наружнего потенциала вектора в точках линейного проводника, будем искать решение в форме:

$$\underline{A}_e = \underline{A}'_e + \underline{A}''_e, \tag{13}$$

где:

$$\underline{A}''_e = -\frac{\mu \underline{I}}{2\pi} \ln R = \frac{\mu \underline{I}}{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0\right], \tag{14}$$

причем использовалось тождество [2]:

$$\begin{aligned} -\ln R &= -\frac{1}{2}\ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta) = \\ &= -\ln r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta \end{aligned} \tag{15}$$

при $r < r_0$.

Второе слагающее потенциала $\underline{A}''_e$ удовлетворяет уравнению Лапласа без никаких исключений:

$$(1/r)\partial[r(\partial \underline{A}''_e/\partial r)]/\partial r + (1/r^2)(\partial^2 \underline{A}''_e/\partial\theta^2) = 0. \tag{16}$$

Ищем решение в форме:

$$\underline{A}''_e = \underline{R}_e(r)\,\Theta_e(\theta) \tag{17}$$

и получаем уравнения:

$$\mathrm{d}^2\Theta_e/\mathrm{d}\theta^2 + n^2\Theta_e = 0, \tag{18}$$

$$r^2(\mathrm{d}^2\underline{R}_e/\mathrm{d}r^2) + r(\mathrm{d}\underline{R}_e/\mathrm{d}r) - n^2\underline{R}_e = 0, \tag{19}$$

решения которых:

(20) $$\Theta_{en} = F'_n \cos n\theta + G_n \sin n\theta$$

и

(21) $$R_{en} = H_n r^{-n} + I_n r^n,$$

приводящие к общему решению:

(22) $$A''_e = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^{-n} \cos n\theta,$$

где имелись в виду условия симметрии имеющиеся в задаче, а также условие что решение должно быть конечно на бесконечности; постоянная $F_n = H_n F'_n$ должна определяться граничными условиями перехода.

Результирующее решение для внешней задачи будет:

(23) $$A^e = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^{-n} \cos n\theta + \frac{\mu I}{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \ln r_0\right].$$

Условия перехода на границе суть:

(24) $$A_e(a, \theta) = A_i(a, \theta)$$

и

(25) $$(\partial A_e/\partial r)_{r=a} = (\partial A_i/\partial r)_{r=a},$$

в которых, подставляя решения (12) и (23), получаем:

(26) $$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_n(\gamma a)\cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} F_n a^{-n} \cos n\theta + \\ + \frac{\mu I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n \cos n\theta - \frac{\mu I}{2\pi} \ln r_0$$

и

(27) $$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J'_n(\gamma a)\cos n\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} nF_n a^{-(n+1)} \cos n\theta + \\ + \frac{\mu I}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_0}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1} \cos n\theta.$$

Условия (26) и (27) должны быть удовлетворены для любого значения θ, что приводит к соотношениям:

(28) $$F_0 = [\mu I/(2\pi)] \ln r_0,$$

(29) $$C_n J_n(\gamma a) = F_n a^{-n} + [\mu I/(2\pi)]\,(1/n)\,(a/r_0)^n,$$

(30) $$C_n \gamma J'_n(\gamma a) = -nF_n a^{-(n+1)} + [\mu I/(2\pi r_0)]\,(a/r_0)^{n-1}.$$

Решая систему двух последних уравнений, получаем:

$$\underline{C}_n = [\mu \underline{I}/(2\pi)]\,(a/r_0)^n/[n\mathrm{J}_n(\underline{\gamma} a) + \underline{\gamma} a \mathrm{J}'_n(\underline{\gamma} a)], \tag{31}$$

откуда векторный потенциал внутри цилиндра, значение которого нас исключительно интересует, принимает вид:

$$\underline{A}_i = \frac{\mu \underline{I}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a/r_0)^n \mathrm{J}_n(\underline{\gamma} r)}{n\mathrm{J}_n(\underline{\gamma} a) + \underline{\gamma} a \mathrm{J}'_n(\underline{\gamma} a)} \cos n\theta \tag{32}$$

или

$$\underline{A}_i = \frac{\mu \underline{I}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a/r_0)^n \mathrm{J}_n(\underline{\gamma} r)}{\underline{\gamma} a \mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma} a)} \cos n\theta, \tag{33}$$

где имелось в виду тождество [3]:

$$[n/(\underline{\gamma} a)]\,\mathrm{J}_n(\underline{\gamma} a) + \mathrm{J}'_n(\underline{\gamma} a) = \mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma} a). \tag{34}$$

4. *Определение полей и израсходованной проводником комплексной мощности*

Для определения вектора Пойнтинга и комплексной мощности нужны только тангенциальные составляющие полей на поверхности проводника:

$$\underline{E}_z = -\mathrm{j}\omega \underline{A}_i = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu \underline{I}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a/r_0)^n \mathrm{J}_n(\underline{\gamma} a)}{\underline{\gamma} a \mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma} a)} \cos n\theta, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \underline{H}_\theta = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \underline{A}_i}{\partial r}\right)_{r=a} &= -\frac{\underline{I}}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a/r_0)^n \mathrm{J}'_n(\underline{\gamma} a)}{\mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma} a)} \cos n\theta = \\ &= -\frac{\underline{I}}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \left[1 - \frac{n}{\underline{\gamma} a} \cdot \frac{\mathrm{J}_n(\underline{\gamma} a)}{\mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma} a)}\right] \cos n\theta, \end{aligned} \tag{36}$$

где имелось в виду тождество (34).

Комплексный вектор Пойнтинга имеет только одну составляющую нормальную к боковой поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned} \underline{S}_r = \underline{E}_z \underline{H}_0^* = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu \underline{I}^2}{\pi^2 \underline{\gamma}^* a^2} &\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a/r_0)^n \mathrm{J}_n(\underline{\gamma} a)}{\mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma} a)} \cos n\theta\right] \times \\ &\times \left\{\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^m \left[1 - \frac{m}{\underline{\gamma}^* a} \cdot \frac{\mathrm{J}_m(\underline{\gamma}^* a)}{\mathrm{J}_{m-1}(\underline{\gamma}^* a)}\right] \cos m\theta\right\}, \end{aligned} \tag{37}$$

и его поток через внутренность цилиндра длины l будет:

$$\underline{P}_a = l\int_0^{2\pi} \underline{S}_r\, a\, \mathrm{d}\theta =$$

(38)

$$= -\frac{\mathrm{j}\omega\mu l I^2}{\pi \underline{\gamma} a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{2n}\frac{\mathrm{J}_n(\underline{\gamma}a)}{\mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma}a)}\left[1-\frac{n}{\underline{\gamma}^* a}\cdot\frac{\mathrm{J}_n(\underline{\gamma}^* a)}{\mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma}^* a)}\right]$$

или:

$$\underline{P}_a = \frac{a}{\sigma}(1-\mathrm{j})\frac{lI^2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{2n}\frac{\mathrm{J}_n(\underline{\gamma}a)}{\mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma}a)}\left[1-\frac{n}{\underline{\gamma}^* a}\cdot\frac{\mathrm{J}_n(\underline{\gamma}^* a)}{\mathrm{J}_{n-1}(\underline{\gamma}^* a)}\right], \tag{39}$$

где $a = \mathcal{R}e\,\underline{\gamma} = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$.

5. *Частные случаи*

Для $a \ll r_0$, пренебрегая всеми слагающими серии (33) кроме первого, получаем:

$$\underline{A}_i = [\mu \underline{I}/(2\pi r_0)]\{2a\mathrm{J}_1(\underline{\gamma}r)/[\underline{\gamma}a\mathrm{J}_0(\underline{\gamma}a)]\}\cos\theta =$$

(40)

$$= \underline{B}_0\{2a\mathrm{J}_1(\underline{\gamma}r)/[\underline{\gamma}a\mathrm{J}_0(\underline{\gamma}a)]\}\cos\theta,$$

представляющие векторный потенциал в проводящем цилиндре находящемся в однородном переменном поле магнитной индукции $\underline{B}_0$ [4].

Соответствующая комплексная мощность:

$$\underline{P}_a = (a/\sigma)(1-\mathrm{j})[lI^2/(\pi a)](a/r_0)^2[\mathrm{J}_1(\underline{\gamma}a)/\mathrm{J}_0(\underline{\gamma}a)]\{1-[1/(\underline{\gamma}^* a)][\mathrm{J}_1(\underline{\gamma}^* a)/\mathrm{J}_0(\underline{\gamma}^* a)]\} =$$

(41)

$$= [4\pi a a/(\sigma\mu^2)](1-\mathrm{j})B_0^2[\mathrm{J}_1(\underline{\gamma}a)/\mathrm{J}_0(\underline{\gamma}a)]\{1-[1/(\underline{\gamma}^* a)][\mathrm{J}_1(\underline{\gamma}^* a)/\mathrm{J}_0(\underline{\gamma}^* a)]\}.$$

Для сильного поверхностного эффекта, $|\underline{\gamma}a| \gg 1$, имея в виду асимптотические разложения Бессельевых функций для больших аргументов, получаем:

$$\underline{P}_a = (4\pi/\sigma)H_0^2\{1+\mathrm{j}[1+1/(aa)]\}aa \cong (2\pi/\sigma)H_{0\,\max}^2(a/\delta)(1+\mathrm{j}), \tag{42}$$

где: $H_{0\,\max}$ — амплитудное значение напряженности внешнего магнитного поля, а $\delta = 1/a$ — эквивалентная глубина проникновения.

Для слабого поверхностного эффекта, $|\underline{\gamma}a| \ll 1$, или имея в виду асимптотические разложения функции Бесселя для малых аргументов, получается следующее выражение активной мощности:

$$P = \mathcal{R}e\,\underline{P}_a = (\pi/\sigma)H_0^2(a/\delta)^4 = [\pi/(2\sigma)]H_{0\,\max}^2(a/\delta)^4, \tag{41}$$

где применялось разложение:

$$J_1(x)/J_0(x) \cong (x/2)(1 + x^2/8 + \ldots) \tag{44}$$

для $|x| \ll 1$.

6. *Заключение*

Применяя метод разделения переменных, найдены точное решение квазистационарного электромагнитного поля и вихревые токи индуктируемые в прямом проводящем цилиндре переменным током текущим по прямолинейному параллельному проводнику.

Если к найденному решению прибавить знакомое решение поверхностного эффекта в цилиндрическом проводнике [5], получается решение задачи эффекта близости между цилиндром и прямолинейным проводником по которому текут переменные токи.

Бухарестский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Răduleţ R., *Curs de Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. IV, Lit. Înv., Buc., 1957.
2. Smythe W., *Static and dynamic electricity*, Sec. edition, N. Y.-Toronto-London, 1950.
3. Янке Ф., Эмде Ф., *Таблицы функций*, ГИФМЛ, М., 1959, (перев. с нем.).
4. Кaден Г., *Электромагнитные экраны*, ГЭИ, М.-Л., 1957, (перев. с. нем).
5. Neiman L. R., Kalantarov P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. III, Ed. Tehn., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).

LES COURANTS TOURBILLONAIRS INDUITS PAR UN FIL RECTILIGNE TRAVERSÉ PAR UN COURANT ALTERNATIF, DANS UN CONDUCTEUR CYLINDRIQUE PARALLÈLE AU FIL

(Résumé)

On détermine, en utilisant la méthode de la séparation des variables, l'expression du potentiel vecteur du champ électromagnétique quasistationaire induit dans un conducteur cylindrique par un fil rectiligne extérieur, parallèle au conducteur, traversé par un courant alternatif.

À l'aide du potentiel vecteur on calcule les intensités des champs électrique et magnétique, le vecteur Poynting et la puissance apparente complexe dans le cylindre.

On analyse, enfin, quelques cas particuliers.

Explication des figures

Fig. 1. — Conducteur cylindrique de rayon a situé dans le champ d'un fil parallèle traversé par un courant alternatif.

CURENŢII TURBIONARI INDUŞI DE UN FIR RECTILINIU PARCURS DE CURENT ALTERNATIV, ÎNTR-UN CILINDRU CONDUCTOR PARALEL CU FIRUL

(Rezumat)

Utilizînd metoda separării variabilelor se determină potenţialul vector al cîmpului electromagnetic cuasistaţionar indus într-un conductor cilindric de un fir rectiliniu exterior paralel cu conductorul, parcurs de curent alternativ.

Cu ajutorul potenţialului vector se calculează cîmpurile electric şi magnetic, vectorul Poynting şi puterea aparentă complexă absorbită de cilindru.

Se analizează cîteva cazuri particulare.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Conductor cilindric de rază *a* situat în cîmpul unui fir paralel parcurs de curent alternativ.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 621.392.5

ASUPRA TRANSMISIEI CU FACTOR DE PUTERE OPTIM A ENERGIEI ACTIVE PRIN SISTEME ELECTRICE (III)

DE

HUGO ROSMAN şi ALFRED BRAIER

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Transmisia energiei printr-un sistem electric de tip cuadripol reciproc se poate efectua cu un factor de putere primar (la perechea de borne primare a cuadripolului) egal cu unitatea, numai în cazul cînd coeficienţii acestuia satisfac dubla inegalitate [1]:

$$-1 \leqslant \mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) \leqslant 1, \tag{1}$$

sarcina cuadripolului considerat fiind pasivă. În acest caz o serie de mărimi importante ca: randamentul, puterea activă furnizată receptorului, puterea activă absorbită de cuadripol, puterea reactivă schimbată cu receptorul pe la perechea de borne secundare, coeficientul de transmisie a tensiunii şi coeficientul de transmisie a curentului pot lua valori numai în anumite domenii determinate [2]. Pentru valori ale acestor mărimi situate în exteriorul domeniilor respective, transmisia energiei prin cuadripol nu se mai poate realiza cu un factor de putere primar egal cu unitatea şi scopul acestei Note este de a determina valoarea optimă a acestuia atunci cînd este impusă valoarea uneia din mărimile susmenţionate. Se va avea în vedere că domeniul în interiorul şi pe frontiera căruia poate lua efectiv valori impedanţa de intrare a unui cuadripol reciproc avînd o sarcină pasivă este delimitat de cercul [3]:

$$r_1^2 + x_1^2 - [\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})/\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})]\,r_1 - [\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})/\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})]\,x_1 + \tag{2}$$
$$+ \mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})/\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}}) = 0.$$

2. Într-o lucrare anterioară [4] am arătat că pentru valori constante ale randamentului η al transmisiei energiei active printr-un cuadripol reciproc, impedanţa de intrare a cuadripolului descrie fasciculul de cercuri:

$$r_1^2 + x_1^2 + \{[\eta - \mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]/\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})\}\, r_1 - \tag{3}$$

$$- [\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})/\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})]\, x_1 + \mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})/\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}}) = 0.$$

Acest fascicul de cercuri fiind obţinut în ipoteza $r_2 \geqslant 0$ (receptor pasiv), rezultă că este situat în întregime în interiorul (sau pe frontiera) domeniului (2).

Dacă coeficienţii cuadripolului satisfac dubla inegalitate (1), atunci pentru valori ale randamentului cuprinse în intervalul [1]:

$$0 \leqslant \eta \leqslant \eta^*_{max} = \mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - 2\sqrt{\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})\,\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})}, \tag{4}$$

factorul de putere primar al cuadripolului poate fi, în anumite condiţii, egal cu unitatea, iar pentru valorile cuprinse în intervalul:

$$\eta^*_{max} < \eta \leqslant \eta_{max} = \mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - \sqrt{[\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2 - 1} \tag{5}$$

este totdeauna subunitar.

Ţinînd seama de identitatea [4]:

$$[\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2 - 4\,\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})\,\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}}) + [\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2 = 1, \tag{6}$$

valabilă pentru orice cuadripol reciproc, din (4) şi (5) rezultă că dacă:

$$\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) = 0 \tag{7}$$

atunci $\eta^*_{max} = \eta_{max}$ şi deci se poate realiza transmisia energiei prin cuadripol cu factor de putere primar egal cu unitatea, pentru orice valoare a randamentului.

Evident, dacă coeficienţii cuadripolului nu satisfac dubla inegalitate (1), factorul de putere primar al cuadripolului este totdeauna subunitar, oricare ar fi valoarea randamentului η. În acest ultim caz valoarea maximă a factorului de putere primar este dată de [1]:

$$\cos\varphi^*_1 = \{1 - [\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^2\}/\Big[\lambda\,\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - \tag{8}$$

$$- 2\,\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})\sqrt{\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})\,\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})}\Big],$$

unde:

$$\lambda = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) > 0, \\ -1 \text{ pentru } \mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) < 0, \end{cases} \tag{9}$$

randamentul corespunzător fiind nul, deoarece punctul de funcţionare este situat pe cercul (2).

Determinarea factorului de putere primar optim în cazul cînd randamentul are valori cuprinse în intervalul (5) se reduce în fond la determinarea, pe cercul corespunzător din fasciculul (3), a punctului de tangenţă cu o dreaptă care trece prin origine, astfel încît valoarea absolută a pantei acestei drepte să fie minimă. Se obţine, pentru această pantă, expresia:

$$\operatorname{tg}\varphi^{*}_{1\eta}=\frac{[\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})-\eta]\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})}{[\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^{2}-1}-$$

$$-\frac{2\lambda\sqrt{\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})\,[\eta^{2}-2\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})\eta+1]}}{[\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})]^{2}-1}, \tag{10}$$

de unde se poate deduce factorul de putere primar $\cos\varphi^{*}_{1\eta}=1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^{2}\varphi^{*}_{1\eta}}$.

Este uşor de constatat că pentru valori ale randamentului η cuprinse în intervalul (5), $\operatorname{tg}\varphi^{*}_{1\eta}=f(\eta)$ reprezintă, pentru un cuadripol reciproc dat, un arc de elipsă.

Parametrii echivalenţi la perechea de borne primare ale cuadripolului sînt în acest caz:

$$\begin{cases} r^{*}_{1\eta}=[\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})\operatorname{tg}\varphi^{*}_{1\eta}-\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})-\eta]/[\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})(1+\operatorname{tg}^{2}\varphi^{*}_{1\eta})], \\ x^{*}_{1\eta}=r^{*}_{1\eta}\operatorname{tg}\varphi^{*}_{1\eta}, \end{cases} \tag{11}$$

iar parametrii corespunzători ai receptorului sînt daţi de [5]:

$$\begin{cases} r_{2}=\dfrac{-(r_{1}^{2}+x_{1}^{2})\mathcal{R}e(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})+r_{1}\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})-x_{1}\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}-\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})-\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})}{C^{2}(r_{1}^{2}+x_{1}^{2})-2r_{1}\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})-2x_{1}\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})+A^{2}}, \\ x_{2}=\dfrac{-(r_{1}^{2}+x_{1}^{2})\mathcal{I}m(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})+r_{1}\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}+\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})+x_{1}\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}}-\underline{B}\overset{*}{\underline{C}})-\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})}{C^{2}(r_{1}^{2}+x_{1}^{2})-2r_{1}\mathcal{R}e(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})-2x_{1}\mathcal{I}m(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})+A^{2}}, \end{cases} \tag{12}$$

în care se substituie r_1, x_1 cu expresiile (11).

3. În mod similar se soluţionează problema determinării factorului de putere primar în cazul cînd, pentru un cuadripol reciproc dat, este impusă valoarea puterii active P_2, furnizată receptorului. În acest scop se are în vedere că pentru valori constante ale lui P_2, impedanţa la perechea de borne primare ale cuadripolului descrie fasciculul de cercuri [4]:

$$r_1^2 + x_1^2 - \{\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}} + \underline{B}\underline{\dot{C}})/[P_2/U_1^2 + \mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})]\}\, r_1 -$$

(13)

$$-\{\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})/[P_2/U_1^2+\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\dot{D}})]\}x_1+\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\dot{B}})\ [P_2/U_1^2+\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\dot{D}})]=0.$$

Deoarece şi acest fascicul este obţinut în ipoteza $r_2 \geqslant 0$, rezultă că este situat în întregime în interiorul domeniului (3) sau coincide cu frontiera sa.

În ipoteza satisfacerii dublei inegalităţi (1) de către coeficienţii cuadripolului, atunci pentru valori ale puterii active P_2, cuprinse în intervalul [1]:

$$0 \leqslant P_2 \leqslant P^*_{2\max} = U_1^2[1 - \mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}} + \underline{B}\underline{\dot{C}})]^2/[4\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\dot{B}})] \tag{14}$$

factorul de putere primar al cuadripolului poate fi, în anumite condiţii, egal cu unitatea, iar pentru valorile situate în intervalul:

$$P^*_{2\max} < P_2 \leqslant P_{2\max} = U_1^2/[4\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{B}})] \tag{15}$$

este totdeauna subunitar.

Dacă coeficienţii cuadripolului satisfac relaţia (7), atunci rezultă că $P^*_{2\max} = P_{2\max}$ şi, în consecinţă, pentru orice valoare a puterii active P_2 furnizate receptorului este posibil de realizat un factor de putere primar egal cu unitatea.

Procedînd ca în paragraful precedent se poate determina expresia factorului de putere primar optim (subunitar), pentru o valoare dată a puterii P_2, cuprinsă în intervalul (15); se obţine:

$$\operatorname{tg}\varphi^*_{1P_2} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})-\lambda\sqrt{(1-p)[1+4\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\dot{B}})\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\dot{D}})+p]}}{-1+[\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})]^2+p}, \tag{16}$$

unde:

$$p = P_2/P_{2\max} = [4\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{B}})/U_1^2]\,P_2\,. \tag{17}$$

Pentru factorul de putere primar rezultă $\cos\varphi^*_{1P_2} = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi^*_{1P_2}}$.

Din relaţia (16) se constată că pentru valori ale puterii P_2 cuprinse în intervalul (15), $\operatorname{tg}\varphi^*_{1P_2} = f(p)$ reprezintă, pentru un cuadripol reciproc dat, un arc de cuartică.

Parametrii echivalenţi la perechea de borne primare ale cuadripolului sînt:

$$r^*_{1P_2} = [\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})+\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})\operatorname{tg}\varphi^*_{1P_2}]/\{[P_2/U_1^2+\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\dot{D}})]\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi^*_{1P_2})\},$$

(18)

$$x^*_{1P_2} = r^*_{1P_2}\operatorname{tg}\varphi^*_{1P_2}\,,$$

iar parametrii corespunzători ai receptorului se pot determina cu ajutorul relaţiilor (12), în care r_1 şi x_1 se substituie cu expresiile (18).

4. Problema analogă, în cazul cînd este impusă valoarea puterii active P_1 absorbită de cuadripol pe la perechea de borne primare, necesită un studiu suplimentar. Anume, avînd în vedere că $P_1 = r_1 I_1^2 = r_1 U_1^2/(r_1^2 + x_1^2)$, rezultă că pentru valori constante ale puterii P_1, impedanţa de intrare a cuadripolului descrie fasciculul de cercuri:

$$r_1^2 + x_1^2 - (U_1^2/P_1)\, r_1 = 0. \tag{19}$$

Or, numai pentru anumite valori ale puterii P_1, situate într-un interval determinat, cercurile din fasciculul (19) intersectează cercul (2) sau sînt cel puţin tangente acestuia. Pentru a determina limitele $P_{1\min}$ $P_{1\max}$ între care poate varia puterea P_1 absorbită de un cuadripol reciproc avînd o sarcină pasivă, se impune condiţia ca atît pentru $P_1 = P_{1\min}$, cît şi pentru $P_1 = P_{1\max}$ cercurile corespunzătoare din fasciculul (19) să fie tangente cercului (2). Ţinînd seama de identitatea (6) se obţine:

$$\begin{cases} P_{1\min} = U_1^2 [\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - 1]/[2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})], \\ P_{1\max} = U_1^2 [\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) + 1]/[2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})]. \end{cases} \tag{20}$$

Aceste expresii se pot predetermina experimental; într-adevăr [3]:

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) = (\varrho + 1)/(\varrho - 1), \tag{21}$$

unde $\varrho = r_{1\max}^{(12)}/r_{1\min}^{(12)}$, $r_{1\max}^{(12)}$, $r_{1\min}^{(12)}$ reprezentînd valorile limită ale rezistenţei de intrare [3], iar:

$$U_1^2/[2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})] = 2P_{2\max} = U_1^2 I_1^2/(2P_{2sc}), \tag{22}$$

cu U_1, I_1 — valorile nominale ale tensiunii şi curentului la perechea de borne primare ale cuadripolului. Or, cercul (2) poate fi construit numai cu ajutorul încercărilor la gol şi în scurtcircuit ale cuadripolului [3], de unde rezultă că:

$$P_{1\min} = (U_1^2 I_1^2/P_{2sc})\,[1/(\varrho - 1)], \quad P_{1\max} = (U_1^2 I_1^2/P_{2sc})\,[\varrho/(\varrho - 1)] \tag{23}$$

se pot predetermina experimental cu ajutorul încercărilor cuadripolului la gol şi în scurtcircuit.

Este posibil de imaginat un procedeu geometric de determinare a mărimilor puterilor limită $P_{1\min}$, $P_{1\max}$. Anume, în [3] am arătat că:

$$\begin{cases} r_{1\min}^{(12)} = [\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) - 1]/[2\,\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})], \\ r_{1\max}^{(12)} = [\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) + 1]/[2\,\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})]. \end{cases} \tag{24}$$

Din (20) şi (24) rezultă:

$$P_{1\min} = U_1^2 [\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})/\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})]\, r_{1\min}^{(12)}, \quad P_{1\max} = U_1^2 [\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})/\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})]\, r_{1\max}^{(12)}. \tag{25}$$

Dar raza cercului (2) este:

$$r = 1/[2\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})], \tag{26}$$

iar distanţa de la originea sistemului de coordonate r_1Ox_1 pînă la centrul cercului (2) este dată de:

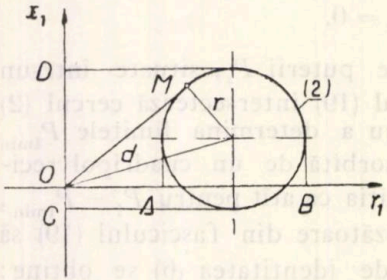


Fig. 1

$$d = \sqrt{1 + 4\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})\,\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}/[2\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})]. \tag{27}$$

Din (26) şi (27) rezultă (fig. 1):

$$\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})/\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}}) = 1/(d^2 - r^2) = 1/\overline{OM}^2 \tag{28}$$

şi deci

$$\begin{cases} P_{1\min} = U_1^2\, r_{1\min}^{(12)}/(d^2 - r^2) = U_1^2\,(\overline{OA}/\overline{OM})^2, \\ P_{1\max} = U_1^2\, r_{1\max}^{(12)}/(d^2 - r^2) = U_1^2\,(\overline{OB}/\overline{OM}^2). \end{cases} \tag{29}$$

Aşadar măsurînd raza cercului (2), abscisele extremităţilor diametrului paralel cu axa absciselor şi distanţa de la originea sistemului de coordonate r_1Ox_1 pînă la centrul cercului (2), se pot predetermina experimental puterile limită $P_{1\min}$, $P_{1\max}$.

În concluzie, *puterea activă absorbită pe la perechea de borne primare de către un cuadripol reciproc dat, avînd o sarcină pasivă, poate lua valori numai în domeniul* $[P_{1\min}, P_{1\max}]$ *determinat de relaţiile* (20); *limitele acestui domeniu se pot determina experimental cu ajutorul încercărilor cuadripolului la gol şi în scurtcircuit.*

Observaţii. 1° Din relaţiile (20) rezultă:

$$P_{1\max} - P_{1\min} = 4P_{2\max}, \tag{30}$$

valabilă pentru orice cuadripol reciproc.

2° Mărimea impedanţei de intrare a unui cuadripol reciproc, în cazul transmisiei energiei active cu randament maxim, este dată de [4]:

$$Z_{1\eta}^{(12)} = \sqrt{\mathcal{R}e\,(\underline{A\dot{B}})/\mathcal{R}e\,(\underline{C\dot{D}})}\,. \tag{31}$$

Ţinînd seama de (28) rezultă că:

$$Z_{1\eta}^{(12)} = \sqrt{d^2 - r^2} = \overline{OM}, \tag{32}$$

ceea ce poate constitui un procedeu grafic de predeterminare experimentală a mărimii impedanţei $Z_{1\eta}^{(12)}$.

Dacă coeficienţii cuadripolului satisfac dubla inegalitate (1), atunci pentru valori ale puterii P_1 cuprinse în intervalul [2]:

$$P_{1\min}^{*} \leqslant P_1 \leqslant P_{1\max}^{*}, \tag{33}$$

unde:

$$(34)\quad \begin{cases} P^{*}_{1\min} = 2U_1^2\,\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\dot{D}}) \Big/ \left\{\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) + \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})]^2}\right\}, \\ P_{1\max} = 2U_1^2\,\mathcal{R}e(\underline{C}\underline{\dot{D}}) \Big/ \left\{\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) - \sqrt{1-[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}})]^2}\right\}, \end{cases}$$

este posibil, în anumite condiţii, să se efectueze transmisia energiei prin cuadripol, cu factor de putere primar egal cu unitatea. Cercurile din fasciculul (19), corespunzătoare valorilor puterii P_1 satisfăcînd dubla inegalitate (33), intersectează axa $x_1 = 0$ într-un punct G situat pe segmentul EF (fig. 2).

Pentru valori ale puterii P_1 cuprinse în intervalele :

$$(35)\quad \begin{cases} P_{1\min} \leqslant P_1 < P^{*}_{1\min}, \\ P^{*}_{1\max} < P_1 \leqslant P_{1\max}, \end{cases}$$

transmisia energiei prin cuadripol se poate efectua cu un factor de primar optim dar subunitar. Regimurile corespunzătoare de funcţionare sînt reprezentate în fig. 2 prin punctele U, V.

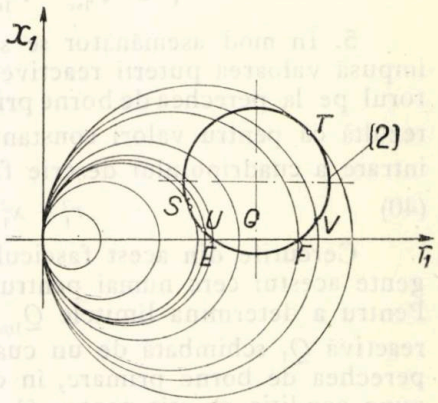


Fig. 2

Cunoscînd coordonatele punctului respectiv, obţinute prin soluţionarea sistemului de ecuaţii (2), (19) în raport cu r_1, x_1, se poate determina, pentru o valoare a puterii P_1 satisfăcînd inegalităţile (35), factorul de putere primar optim $\cos\varphi^{*}_{1P_1}$. Punctele S, T (fig. 2) corespund regimurilor de funcţionare caracterizate prin $P_{1\min}$, respectiv $P_{1\max}$. În mod analog se soluţionează problema în cazul cînd coeficienţii cuadripolului nu satisfac inegalitatea (1); în această situaţie se poate determina factorul de putere primar optim (subunitar) pentru orice valoare a puterii P_1 satisfăcînd inegalitatea :

$$(36)\qquad P_{1\min} \leqslant P_1 \leqslant P_{1\max},$$

deoarece în acest caz $P^{*}_{1\min} = P_{1\min}$, $P^{*}_{1\max} = P_{1\max}$.

Dacă coeficienţii cuadripolului verifică relaţia (7) atunci pentru orice putere P_1 satisfăcînd inegalitatea (36) este posibil de realizat transmisia energiei prin cuadripol cu factor de putere primar egal cu unitatea.

În general, pentru un cuadripol reciproc alimentînd o sarcină pasivă :

$$(37)\qquad P_{1\min} \leqslant P_{10} \leqslant P_{1\max}, \qquad P_{1\min} \leqslant P_{1sc} \leqslant P_{1\max}.$$

Este util de găsit condiţiile în care puterea activă absorbită de cuadripol la gol (P_{10}) sau în scurtcircuit (P_{1sc}) coincide cu una din puterile active limită ($P_{1\min}$, $P_{1\max}$). Avînd în vedere că :

$$(38)\qquad P_{10} = U_1^2[\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{C}})/A^2],\quad P_{1sc} = U_1^2[\mathcal{R}e(\underline{B}\underline{\overset{*}{D}})/B^2],$$

şi ţinînd seama de expresiile (20) ale puterilor active limită, rezultă că:

$$(39)\qquad \begin{cases} \text{a) } P_{10} = P_{1\min} & \text{dacă } \mathcal{I}m(\underline{A}) = 0; \\ \text{b) } P_{10} = P_{1\max} & \text{dacă } \mathcal{R}e(\underline{A}) = 0; \\ \text{c) } P_{1sc} = P_{1\min} & \text{dacă } \mathcal{R}e(\underline{B}) = 0; \\ \text{d) } P_{1sc} = P_{1\max} & \text{dacă } \mathcal{I}m(\underline{B}) = 0. \end{cases}$$

5. În mod asemănător se soluţionează problema în cazul cînd este impusă valoarea puterii reactive Q_1 schimbată de cuadripol cu generatorul pe la perechea de borne primare. Deoarece $Q_1 = x_1 I_1^2 = x_1 U_1^2/(r_1^2+x_1^2)$ rezultă că pentru valori constante ale puterii reactive Q_1, impedanţa de intrare a cuadripolului descrie fasciculul de cercuri:

$$(40)\qquad r_1^2 + x_1^2 - (U_1^2/Q_1)x_1 = 0.$$

Cercurile din acest fascicul intersectează cercul (2) sau sînt tangente acestui cerc numai pentru anumite valori ale puterii reactive Q_1. Pentru a determina limitele $Q_{1\min}$, $Q_{1\max}$ între care poate varia puterea reactivă Q_1 schimbată de un cuadripol reciproc cu generatorul, pe la perechea de borne primare, în cazul cînd sarcina sa este pasivă, se impune condiţia ca atît pentru $Q_1 = Q_{1\min}$ cît şi pentru $Q_1 = Q_{1\max}$ cercurile corespunzătoare din fasciculul (40) să fie tangente cercului (2). Se obţine:

$$(41)\qquad \begin{cases} Q_{1\min} = U_1^2[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) - 1]/[2\,\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{B}})], \\ Q_{1\max} = U_1^2[\mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) + 1]/[2\,\mathcal{R}e(\underline{A}\underline{\overset{*}{B}})]. \end{cases}$$

Ca şi în cazul din paragraful precedent, expresiile (41) se pot predetermina experimental. În acest scop se are în vedere că [3]:

$$(42)\qquad \mathcal{I}m(\underline{A}\underline{\overset{*}{D}} + \underline{B}\underline{\overset{*}{C}}) = (\xi' + 1)/(\xi' - 1),$$

unde $\xi' = x_{1\max}^{(12)}/x_{1\min}^{(12)}$, $x_{1\max}^{(12)}$, $x_{1\min}^{(12)}$ reprezentînd valorile limită ale reactanţelor de intrare [3], care se pot determina experimental cu ajutorul încercărilor cuadripolului la gol şi în scurtcircuit. Ţinînd seama şi de (22) rezultă:

$$(43)\quad Q_{1\min} = [U_1^2 I_1^2/(2P_{2sc})]\,[1/(\xi'-1)],\quad Q_{1\max} = [U_1^2 I_1^2/(2P_{2sc})]\,[\xi'/(\xi'-1)].$$

Din relaţiile (43) rezultă că puterile reactive limită $Q_{1\min}$, $Q_{1\max}$ se pot predetermina experimental cu ajutorul încercărilor cuadripolului la gol şi în scurtcircuit.

De asemenea, este posibil de utilizat şi de data aceasta, analog cazului studiat în paragraful precedent, un procedeu geometric de determinare a mărimilor puterilor reactive limită $Q_{1\min}$, $Q_{1\max}$. Ţinînd seama că [3]:

$$(44)\qquad \begin{cases} x^{(12)}_{1\min} = [\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) - 1]/[2\,\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})], \\ x^{(12)}_{1\max} = [\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}}+\underline{B}\underline{\dot{C}}) + 1]/[2\,\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})], \end{cases}$$

expresiile (41) devin:

$$(45)\qquad \begin{cases} Q^{(12)}_{1\min} = U_1^2\,[\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})/\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{B}})]\,x^{(12)}_{1\min}, \\ Q^{(12)}_{1\max} = U_1^2\,[\mathcal{R}e\,(\underline{C}\underline{\dot{D}})/\mathcal{R}e\,(\underline{A}\underline{\dot{B}})]\,x^{(12)}_{1\max}. \end{cases}$$

Avînd în vedere relaţia (28) se obţine în definitiv (v. fig. 1):

$$(46)\qquad \begin{cases} |Q_{1\min}| = U_1^2\,|x^{(12)}_{1\min}|/(d^2 - r^2) = U_1^2\,(\overline{OC}/\overline{OM}^2), \\ |Q_{1\max}| = U_1^2\,|x^{(12)}_{1\max}|/(d^2 - r^2) = U_1^2\,\overline{OD}/\overline{OM}), \end{cases}$$

semnele acestor puteri corespunzînd celor ale reactanţelor de intrare limită.

Deci măsurînd raza cercului (2), ordonatele extremităţilor diametrului paralel cu axa ordonatelor şi distanţa de la originea sistemului de coordonate r_1Ox_1 pînă la centrul cercului (2), se pot determina puterile limită $Q_{1\min}$, $Q_{1\max}$.

În concluzie, *puterea reactivă schimbată pe la perechea de borne primare de către un cuadripol reciproc dat cu generatorul, în cazul cînd receptorul este pasiv, poate lua valori numai în domeniul* $[Q_{1\min}, Q_{1\max}]$ *determinat de relaţiile* (41); *limitele acestui domeniu se pot determina experimental cu ajutorul încercărilor cuadripolului la gol şi în scurtcircuit.*

Observaţie. Din relaţiile (41) şi (20) rezultă:

$$(47)\qquad Q_{1\max} - Q_{1\min} = P_{1\max} - P_{1\min}.$$

Pentru orice valoare a puterii reactive Q_1 cuprinsă în intervalul:

$$(48)\qquad Q_{1\min} \leqslant Q_1 \leqslant Q_{1\max}$$

transmisia energiei prin cuadripol se poate efectua cu un factor de putere primar optim, evident, subunitar. Punctele J şi K, reprezentate în fig. 3, caracterizează aceste regimuri de funcţionare. Cunoscînd coordonatele punctului respectiv, care se obţin rezolvînd sistemul de ecuaţii (2), (40) în raport cu r_1, x_1, se poate determina, pentru o valoare a puterii reactive Q_1 satisfăcînd inegalitatea (35), factorul de putere primar optim $\cos\varphi^*_{1Q_1}$. Punctele H, I corespund regimurilor de funcţionare caracterizate prin $Q_{1\max}$, respectiv $Q_{1\min}$.

Semnalăm, în sfîrşit, următoarele cazuri posibile: a) coeficienţii cuadripolului satisfac inegalitatea (1), în acest caz $Q_{1\min} \leqslant 0$ şi $Q_{1\max} \geqslant 0$, deci $Q_1 \gtrless 0$; în particular dacă este satisfăcută egalitatea (7) atunci $Q_{1\min} = -Q_{1\max}$; b) $\mathcal{I}m\,(\underline{A}\underline{\dot{D}} + \underline{B}\underline{\dot{C}}) > 1$, în consecinţă $Q_{1\min} > 0$,

$Q_{1max} > 0$; c) $\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}}) < -1$, aşadar $Q_{1min} < 0$, $Q_{1max} < 0$, deci $Q_1 < 0$.

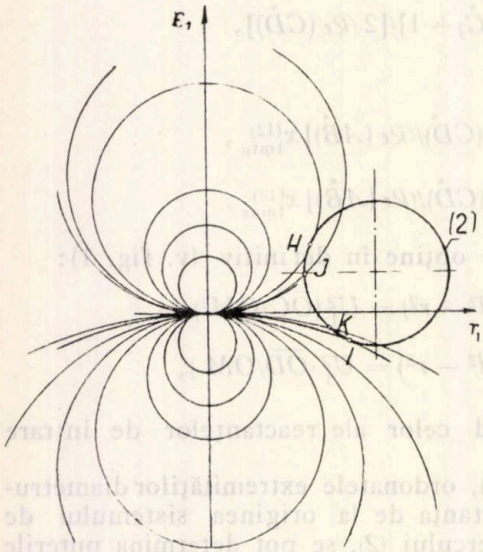


Fig 3

Pentru un cuadripol reciproc alimentînd o sarcină pasivă:

$$(49)\quad \begin{cases} Q_{1min} \leqslant Q_{10} \leqslant Q_{1max}, \\ Q_{1min} \leqslant Q_{1sc} \leqslant Q_{1max}. \end{cases}$$

Procedînd analog ca în paragraful precedent se pot determina condiţiile în care puterea reactivă schimbată de cuadripol cu generatorul pe la perechea de borne primare, la gol (Q_{10}) sau în scurtcircuit (Q_{1sc}) coincide cu una din puterile reactive limită (Q_{1min}, Q_{1max}). Ţinînd seama că:

$$(50)\quad \begin{cases} Q_{10} = U_1^2\,[\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})/A^2], \\ Q_{1sc} = U_1^2\,[\mathcal{I}m\,(\underline{B}\overset{*}{\underline{D}})/B^2], \end{cases}$$

şi avînd în vedere expresiile (41) ale puterilor reactive limită, se obţine:

$$(51)\quad \begin{cases} \text{a) } Q_{10} = Q_{1min} & \text{dacă } \mathcal{R}e\,(A) = \mathcal{I}m\,(A); \\ \text{b) } Q_{10} = Q_{1max} & \text{dacă } \mathcal{R}e\,(A) = -\mathcal{I}m\,(A); \\ \text{c) } Q_{1sc} = Q_{1min} & \text{dacă } \mathcal{R}e\,(B) = -\mathcal{I}m\,(B); \\ \text{d) } Q_{1sc} = Q_{1max} & \text{dacă } \mathcal{R}e\,(B) = \mathcal{I}m\,(B). \end{cases}$$

Din examinarea relaţiilor (39) şi (51) rezultă că pentru un cuadripol reciproc alimentînd un receptor pasiv nu este posibil să se realizeze simultan niciuna din situaţiile: a) $P_{10} = P_{1min}$, $Q_{10} = Q_{1min}$; b) $P_{10} = P_{1max}$, $Q_{10} = Q_{1max}$; c) $P_{10} = P_{1min}$, $Q_{10} = Q_{1max}$; d) $P_{10} = P_{1max}$, $Q_{10} = Q_{1min}$; e) $P_{1sc} = P_{1min}$, $Q_{1sc} = Q_{1min}$; f) $P_{1sc} = P_{1max}$, $Q_{1sc} = Q_{1max}$; g) $P_{1sc} = P_{1min}$, $Q_{1sc} = Q_{1max}$; h) $P_{1sc} = P_{1max}$, $Q_{1sc} = Q_{1min}$.

6. Pentru valori constante ale puterii reactive Q_2, schimbată de cuadripol cu receptorul pe la perechea de borne secundare, impedanţa de intrare a cuadripolului descrie fasciculul de cercuri [4]:

$$(52)\quad r_1^2 + x_1^2 - \{\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})/[Q_2/U_1^2 + \mathcal{I}m\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})]\}\,r_1 + \\ + \{\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{D}} + \underline{B}\overset{*}{\underline{C}})/[Q_2/U_1^2 + \mathcal{I}m\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})]\}\,x_1 + \mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{B}})/[Q_2/U_1^2 + \mathcal{I}m\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})] = 0.$$

În [2] am arătat că pentru valori ale puterii reactive cuprinse în anumite intervale (v. [2], relaţiile (47)... (49)) şi dacă în plus coeficienţii cuadripolului satisfac anumite condiţii (precizate în lucrarea citată), transmisia energiei prin cuadripol se poate efectua cu un factor de putere primar optim, egal cu unitatea, sarcina cuadripolului reciproc considerat fiind pasivă.

Pentru valori ale puterii reactive Q_2 care nu sînt cuprinse în intervalele respective şi dacă coeficienţii cuadripolului nu satisfac condiţiile precizate, este posibil să se determine regimul de funcţionare al cuadripolului, astfel încît factorul de putere primar să fie optim, dar subunitar, receptorul fiind pasiv. În acest scop se determină coordonatele punctelor de intersecţie ale cercului corespunzător din fasciculul (52) cu cercul (2) precum şi coordonatele punctelor de intersecţie ale polarei originii sistemului de coordonate r_1Ox_1 în raport cu cercul considerat din fasciculul (52). Sînt posibile următoarele cazuri : a) ambele puncte de intersecţie ale polarei originii sistemului de coordonate r_1Ox_1 în raport cu cercul considerat din fasciculul (52) sînt situate în interiorul sau pe frontiera cercului (2), atunci unul din aceste puncte (cel care are valoarea absolută a ordonatei cea mai mică) corespunde regimului căutat ; b) numai unul din punctele considerate la a) este situat în interiorul sau pe frontiera cercului (2), caracterizînd însăşi regimul căutat ; c) niciunul din aceste puncte nu este situat în interiorul sau pe frontiera cercului (2), în acest ultim caz regimul de funcţionare căutat este caracterizat de unul din punctele de intersecţie ale cercului considerat din fasciculul (52), cu cercul (2), anume punctul care are valoarea absolută a ordonatei cea mai mică.

7. În mod analog se formulează şi se soluţionează problema în cazul cînd se urmăreşte determinarea regimului de funcţionare al cuadripolului, cu factor de putere primar optim, pentru valori impuse ale coeficientului de transmisie a tensiunii sau ale coeficientului de transmisie a curentului. În acest scop se are în vedere că pentru valori constante ale coeficientului de transmisie a tensiunii (k_U), impedanţa de intrare a cuadripolului descrie fasciculului de cercuri [6]:

$$r_1^2 + x_1^2 - [2\,\mathcal{R}e\,(\underline{C}\overset{*}{\underline{D}})/(D^2 - k_U^2)]\,r_1 - [2\,\mathcal{I}m\,(\underline{B}\overset{*}{\underline{D}})/(D^2 - k_U^2)]\,x_1 + \\ + B^2/(D^2 - k_U^2) = 0, \tag{53}$$

iar pentru valori constante ale coeficientului de transmisie a curentului (k_I). impedanţa de intrare a cuadripolului descrie fasciculul de cercuri [6]:

$$r_1^2 + x_1^2 - [2\mathcal{R}e\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})/C^2]\,r_1 - [2\mathcal{I}m\,(\underline{A}\overset{*}{\underline{C}})/C^2]\,x_1 + (A^2 - k_I^2)/C^2 = 0. \tag{54}$$

Pentru soluţionarea problemei, pe de-o parte se au în vedere rezultatele obţinute în [2] şi pe de altă parte se urmează în amănunt procedeul indicat în paragraful precedent.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Rosman H., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *3–4*, pp. 243—256.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2*, pp. 267-278.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *1—2*, pp. 129-136.
4. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **I (V)**, *1—2*, pp. 159-172
5. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, pp. 283-288.
6. Braier A., Rosman H., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3—4*, pp. 185-208.

О ПЕРЕДАЧИ С НАИЛУЧШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МОЩНОСТИ АКТИВНОЙ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ (III)

(Резюме)

Определяется оптимальная величина коэффициента мощности у пары первичных зажимов взаимного четырехполюсника, в случае когда дана одна из следующих величин: а) к. п. д. передачи, б) активная мощность передаваемая приемнику, в) активная мощность поглощаемая четырехполюсником, г) реактивная мощность обменивающаяся с приемником у пары вторичных зажимов, д) реактивная мощность обменивающаяся с генератором у пары первичных зажимов, е) коэффициент передачи напряжения, ж) коэффициент передачи тока.

Сделаны следующие наиболее важные выводы:

1° Величина активной мощности поглощенной у пары первичных зажимов данным взаимным четырехполюсником в случае пассивного приемника, может находиться только в области $[P_{1\min}, P_{1\max}]$, определенной отношениями (20); границы этой области могут быть определяемы экеспериментально, вводя четырехполюсник в холостой ход и в короткое замыкание.

2° Величина реактивной мощности обменивающейся с генератором у пары первичных зажимов данным взаимным четырехполюсником, в случае пассивного приемника, может находиться только в области $[Q_{1\min}, Q_{1\max}]$, определенной отношениями (41); границы этой области могут быть определяемы экеспериментально, вводя четырехполюсник в холостой ход и в короткое замыкание.

SUR LA TRANSMISSION À FACTEUR DE PUISSANCE OPTIMUM DE L'ÉNERGIE ACTIVE PAR DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES (III)

(Résumé)

On détermine la valeur optima du facteur de puissance à la paire de bornes primaires d'un quadripôle réciproque donné lorsqu'on impose la valeur d'une des grandeurs suivantes: a) le rendement, b) la puissance active fournie au récepteur, c) la puissance active fournie au quadripôle par le générateur, d) la puissance réactive échangée avec le récepteur par la paire de bornes secondaires, e) la puissance réactive échangée avec le générateur par la paire de bornes primaires, f) le coefficient de transmission de la tension, g) le coefficient de transmission du courant

Parmi les résultats acquis les plus importants sont les suivants:

1° La puissance active fournie par le générateur à un quadripôle réciproque donné, ayant une charge passive, peut avoir des valeurs situées seulement dans le domaine $[P_{1\min}, P_{1\max}]$ déterminé par les relations (20); les limites de ce domaine peuvent être déterminées par voie expérimentale à l'aide des essais du quadripôle à vide et en court-circuit.

2° La puissance réactive échangée par la paire de bornes primaires par un quadripôle réciproque donné avec le générateur, lorsque la charge du quadripôle est passive, peut avoir des valeurs situées seulement dans le domaine $[Q_{1\min}, Q_{1\max}]$ déterminé par les relations (41); les limites de ce domaine peuvent être déterminées par voie expérimentale à l'aide des essais du quadripôle à vide et en court-circuit.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 3—4, 1962

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. D. 531.314.2

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LES OPÉRATEURS GÉNÉRALISÉS D'EULER-LAGRANGE

PAR

D. MANGERON et V. V. TOPENTCHAROV

1. Dans une série de Notes [1], [2] le premier des Auteurs a établi nouvelles formes d'équations généralisées de la mécanique analytique relatives aux système à liaisons holonomes et non holonomes, telles, par exemple, les équations :

$$(1)\quad \begin{cases} (1/m)\,(\partial T^{(m)}/\partial q_j^{(m)}) - [(m+1)/m]\,(\partial T/\partial q_j) = Q_j,\ (j=1,2,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots); \\ T^{(m)} \equiv \mathrm{d}T^{(m-1)}/\mathrm{d}t, \qquad q_j^{(m)} \equiv \mathrm{d}q_j^{(m-1)}/\mathrm{d}t; \qquad T = T([q_i],[\dot{q}_i];t),\ (\dot{} \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t), \\ [q_i] \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_n);\ [\dot{q}_i] \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n), \end{cases}$$

tandis que tout les deux ont étudiés, seuls ou en collaboration [3]...[6], nombre de problèmes concernant certains invariants cinématiques d'ordre supérieur relatifs aux mouvements plans ou dans l'espace des chaînes cinématiques et ont élaborés quelques nouvelles méthodes d'étude des mécanismes et des machines, à savoir la *méthode des accélérations réduites d'ordre et d'espèce quelconque* et la *méthode tensorielle-matricielle.* La première des méthodes citées ci-dessus s'en est assurée un acqueil favorable dans le monde des spécialistes lors des conférences récentes de Moscou [7], [8], Rogów-Varsovie [9], Smolenice-Bratislava [10] et d'autres encore (11), tandis que la deuxième, élaborée plus récemment, fut l'origine des travaux d'autres chercheurs [12].

Dans ce qui suit les Auteurs, tout en s'appuyant sur leurs travaux récents [13], [14], établissent nombre d'opérateurs généralisés d'Euler-Lagrange et formulent quelques problèmes qui feront sujets de leurs travaux ultérieurs qui se rattachent surtout à la théorie des mécanismes et des machines.

2. Soit $\mathbf{r}$ le rayon vecteur d'un point mobile dans l'espace euclidien E_3 et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les paramètres lagrangiens relatifs au mouvement considéré. On a

$$(2)\qquad \partial\mathbf{r}/\partial s_i = \mathbf{e}_i,\ \mathrm{d}s_i = H_i \mathrm{d}q_i,\ \partial\mathbf{r}/\partial q_i = H_i\mathbf{e}_i,$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ et $H_i = H_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

On en déduit:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} H_i \mathbf{e}_i dq_i ,$$

(3)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H_i H_j (\mathbf{e}_i . \mathbf{e}_j)\, dq_i\, dq_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dq_i dq_i ,$$

où l'on a mis $H_i H_j (\mathbf{e}_i . \mathbf{e}_j) = a_{ij}$.

Si l'accélération d'ordre $m-1$, $\mathbf{w}^{(m-1)} = \mathbf{w}^{(m-1)}(q_1, q_2, ..., q_n; \dot{q}_1, ...)$, est supposée connue, on peut écrire:

$$w_i^{(m)} = \dot{\mathbf{w}}^{(m-1)} . \mathbf{e}_i = (\dot{\mathbf{w}}^{(m-1)}/H_i) . (\partial \mathbf{r}/\partial q_i). \tag{4}$$

Le second membre de la relation (4) peut-être mis sous la forme:

$$H_i w_i^{(m)} = d[\mathbf{w}^{(m-1)} . (\partial \mathbf{r}/\partial q_i)]/dt - \mathbf{w}^{(m-1)} [d(\partial \mathbf{r}/\partial q_i)/dt]. \tag{5}$$

Puisque l'on a, à la suite de la différentiation successive par rapport au temps t du vecteur vitesse, pour l'accélération d'ordre m la formule:

$$\mathbf{w}^{(m)} = (...) + m \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i\, \partial q_j} q_i^{(m)} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} q_i^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} q_i^{(m-1)}, \tag{6}$$

on parvient aux identités:

$$\partial \mathbf{v}/\partial q_i = (1/m)(\partial \mathbf{w}^{(m-1)}/\partial q_i^{(m-1)}),\ \partial \mathbf{r}/\partial q_i = \partial \mathbf{v}/\partial \dot{q}_i = \partial \mathbf{w}^{(m-1)}/\partial q_i^{(m)},\ (i = 1,2,...,n). \tag{7}$$

À la suite des substitutions, dans la relation (5), des égalités (7), on obtient:

$$H_i w_i^{(m)} = d[\mathbf{w}^{(m-1)} . (\partial \mathbf{w}^{(m-1)}/\partial q_i^{(m)})]/dt - \mathbf{w}^{(m-1)} . (\partial \mathbf{w}^{(m-1)}/\partial q_i^{(m-1)})/m, \tag{8}$$

d'où il en résulte en définitif:

$$H_i w_i^{(m)} = d(\partial W_{m-1}/\partial q_i^{(m)})/dt - (1/m)(\partial W_{m-1}/\partial q_i^{(m-1)}), \tag{9}$$

où l'on a mis W_{m-1} pour la fonction cinématique quadratique d'ordre $m-1$:

$$W_{m-1} = [\mathbf{w}^{(m-1)}]^2/2 = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, ..., q^{(m-1)}). \tag{10}$$

L'équation (9) se transforme pour $m = 1$ en égalité classique:

$$H_i w_i = \mathcal{E}_i T, \quad T = v^2/2; \quad \mathcal{E}_i \equiv d(\partial/\partial \dot{q}_i)/dt - \partial/\partial q_i . \tag{11}$$

L'opérateur différentiel

$$\mathcal{E}_i^{(m)} \equiv d(\partial/\partial q_i^{(m)})/dt - (1/m)(\partial/\partial q_i^{(m-1)}) \tag{12}$$

peut-être bien justement nommé l'opérateur généralisé d'Euler-Lagrange. Grâce à son introduction, on peut écrire l'équation (9) sous la forme assez compacte:

$$H_i w_i^{(m)} = \mathcal{E}_i^{(m)} W_{m-1} . \tag{13}$$

Le résultat acquis peut-être comparé avec la formule généralisée de Somoff concernant les accélérations d'ordre supérieur [15], appliquée ensuite à certains problèmes de la dynamique analytique.

La formule (13) conduit à la résolution par des méthodes analytiques du problème de la distribution des éléments cinématiques d'ordre m dans le mouvement d'un solide rigide E_k dans un espace euclidien E_k^* à k dimensions [16], d'un certains intérêt dans le problème de la gravitation [17].

Ce même résultat conduit, d'un autre point de vue, au système d'équations différentielles:

$$\mathcal{L}_i^{(m)} W_{m-1} = 0, \ (i = 1, 2,..., n), \tag{14}$$

qui décrit „des lignes géodésiques généralisées" que l'on obtient comme lieu géométrique des points où s'annule l'accélération d'ordre m.

3. L'accroissement rapide des prétentions concernant la construction des machines et mécanismes capables de satisfaire les nécessités d'automation des différents processus industriels a contribué sensiblement à la reprise d'un nombre de travaux classiques d'un point de vue plus général et a conduit, en particulier, à toute une série d'études systématiques qui se réfèrent à la cinématique des systèmes matériels où l'on considère différents problèmes de distribution des accélérations d'ordre quelconque.

Ici s'inquadre, par exemple, le problème de la distribution des accélérations „centripètes", „tangentielles" et „binormales" d'ordre quelconque, dans le cas des mouvements généraux dans l'espace des solides rigides [18].

En nous plaçant d'un point de vue plus général, les résultats acquis peuvent être étendus — si l'on tient compte de la série des théorèmes établit dans [19] — aux cas des „mouvements" dans certains espaces non euclidiens (nombre de résultats au sens bourbakiste nous semblent très intéressant dans cet égard) ou bien aux cas des mouvements des systèmes matériels déformables qui restent semblables à eux-mêmes ou se conservent affines unimodulaires ou affines tout simplement ou bien aux cas caractérisés par des transformations projectives et d'autres encore, dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions, de la forme:

$$x_i = a_i(t) + \sum a_{ij}(t)\, x_j']/[b_i(t) + \sum b_{ij}(t) x_j'], \ (i = 1, 2,..., n), \tag{15}$$

ou bien:

$$x_i = [a_i(t) + \sum a_{ij}(t)\, x_j' + \sum a_{ijk}\, x_j' x_k']/[b_i(t) + \sum b_{ijk}(t)\, x_j' x_k'], \ (i=1, 2,..., n), \tag{16}$$

où les matrices $[a_{ij}(t)]$, $[b_{ij}(t)]$,... peuvent avoir des propriétés assez diverses (être orthogonales ou non etc.).

Reçue le 23 VIII 1962

Institut polytechnique, Jassy,
et
Institut de Mécanique et
d'Électrotechnique, Sofia,
R. P. Bulgarie

BIBLIOGRAPHIE

1. Манжерон Д., Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 1962, *2*, стр. 128.
2. Mangeron D., Deleanu S., *A class of equations of analytical dynamics in the sense of Tzenov*, The Indian Society of theoretical and applied Mechanics, Seventh Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Bombay, 23 rd Dec. to 26 th Dec. 1961, pp. 3—4.
3. Topenciarov V. V., Cekankov B. I., St. şi cerc. mec. apl., 1962, **XIII**, *4*, pp. 1031—1034.
4. Константинов М. С., Топенчаров В. В., Генова П. Ж., Годишник на Машинноелектрот. инст., 1961, **IX**, *1*, стр. 23—35.
5. Mangeron D., An. şt. Univ. „Alex. I. Cuza", Iaşi, 1960, secţ. I, **VI**, *1*, pp. 739—745.

6. Mangeron D., Drăgan C., *Исследование механизмов методом приведенных ускорений.* Dans le vol. *Труды Второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов, Анализ и синтез механизмов,* Машгиз, М., 1960, стр. 111—122, 209—210.
7. Артоболевский И. И., *Современное состояние теории машин и механизмов.* Dans le vol. *Труды Второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов, Анализ и синтез механизмов,* Машгиз М., 1960, стр. 8, 195.
8. Левитский Н. И., *Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов.* Dans le vol. *Итоги Второго всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов,* АН СССР, Инст. Машиноведения, М., 1958, стр. 24—25.
9. * * * III. gesamtpolnische Konferenz zur Theorie der Maschinen und Getriebe, Rogów bei Warschau, Juni, 1961.
10. * * * II. Celoštátna Konferencia po Dinamike Strojov, Smolenice/Bratislava, Oct., 1961.
11. * * * IV. Polytechnische Tagung, Technische Universität Dresden, Nov., 1962.
12. Beggs J. S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *3—4*, pp. 315—322.
13. Topencharov V. V., Chekhankov B. I., Proc. London Math. Soc., 1962, (sous presse).
14. Тавхелидзе Д., Манжерон Д., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII** (**XI**), *3—4*, pp. 301—304.
15. Кройтору Е., Манжерон Д., Топенчаров В. В., Годишник на Машиноелектрот. инст., **XIII**, *1*, (sous presse).
16. Манжерон Д., Реф. Ж. Мех., 1962, реф. № А 75, стр. 14.
17. * * * *Новейшие проблемы гравитации,* ИИЛ, М., 1961 стр. 488.
18. Croitoru E., St. şi cerc. mec. apl., 1963, **XIV**, *1*, pp. 157—167.
19. Mangeron D., Ciobanu Gh., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II** (**VI**), *1*, pp. 29—37.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОТНОСЯЩИЕСЯ К ОБОБЩЕННЫМ ОПЕРАТОРАМ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

(Резюме)

В [1], [2] первый из авторов установил новые виды обобщенных уравнений аналитической динамики относящиеся к голономным и неголономным механическим системам. В настоящей заметке авторы приходят к дифференциальным операторам (12), могущими быть названными обобщенными операторами Эйлера-Лагранжа.

Уравнений (13), (14) схематизируют, соответственно, предельно лаконически, задачу распределения кинематических элементов m-го порядка в движении твердых жестких тел E_k в k-мерном эвклидовом пространстве E_k^* и обобщенную задачу геодезических линий.

Заметка заканчивается указаниями на последующие распространения полученных результатов.

UNELE PROBLEME RELATIVE LA OPERATORI GENERALIZAŢI AI LUI EULER-LAGRANGE

(Rezumat)

În [1], [2] primul dintre Autori a stabilit noi forme de ecuaţii generale de dinamică analitică relative la sisteme mecanice olonome sau neolonome. În această Notă, Autorii, luînd ca punct de plecare lucrările lor [13], [14], stabilesc un număr de operatori diferenţiali (de ex., (12)), ce pot fi numiţi operatori generalizaţi ai lui Euler-Lagrange. Ecuaţia (13) conduce la rezolvarea prin metode analitice a problemei de distribuţie a elementelor cinematice de ordin m în mişcarea unui solid rigid E_k într-un spaţiu euclidian E_k^* cu k dimensiuni, iar ecuaţia (14) schematizează sub o formă deosebit de concentrată problema generală a liniilor geodezice.

Nota se încheie cu indicarea unor extensiuni a rezultatelor obţinute, ce vor face obiectul publicaţiilor ulterioare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 539.4

SOLUŢIE ECONOMICĂ PENTRU DIMENSIONAREA BARELOR DIN TRONSOANE SUPUSE LA SOLICITĂRI AXIALE

DE
VICTOR BAUŞIC ŞI AL. CLIMESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Este binecunoscută problema solidului de egală rezistenţă la solicitări axiale (în cazul cînd se ţine seama şi de influenţa greutăţii proprii), precum şi realizarea sa practică dintr-o bară alcătuită din tronsoane, fiecare tronson avînd o formă prismatică (fig. 1).

Dacă bara are n tronsoane din acelaşi material, relaţia de calcul a unei secţiuni oarecare va fi [1]...[3]:

$$A_i = N\sigma_a^{i-1}/[(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)...(\sigma_a - \gamma l_n)], \tag{1}$$

unde: N — forţa axială, σ_a — rezistenţa admisibilă a materialului barei, γ — greutatea specifică a materialului barei.

În cele ce urmează ne propunem să găsim condiţiile în care dimensionarea se face în modul cel mai economic.

Volumul de material pentru o bară alcătuită din n tronsoane va fi:

$$V = N\{l_1/(\sigma_a - \gamma l_1) + l_2\sigma_a/[(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)] + \cdots + l_n\sigma_a^{n-1}/[(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)...(\sigma_a - \gamma l_n)]\}. \tag{2}$$

2. Vom determina condiţiile în care acest volum este minim. Se observă că sînt îndeplinite următoarele condiţii:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + \cdots + l_n = 1,\ l_i \geqslant 0,\ N > 0, \\ \sigma_a > 0,\ \gamma > 0,\ \sigma_a/\gamma > l, \end{cases} \tag{3}$$

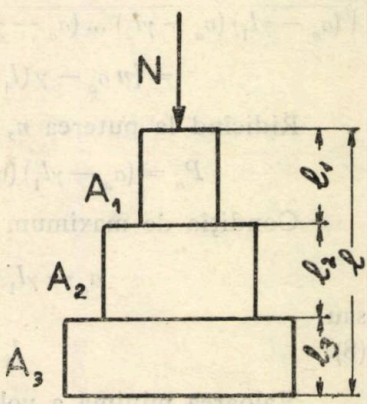


Fig. 1

(pentru a fi posibilă realizarea barei şi dintr-o singură bucată).

Considerînd primul termen din (2), pe care îl scriem sub forma echivalentă:

$$l_1/(\sigma_a - \gamma l_1) = -1/\gamma + \sigma_a/[\gamma(\sigma_a - \gamma l_1)]$$

şi adunîndu-l cu cel de al doilea termen obţinem:

$$-1/\gamma + \sigma_a/[\gamma(\sigma_a - \gamma l_1)] + l_2\,\sigma_a/[(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)] =$$
$$= -1/\gamma + \sigma_a^2/[\gamma(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)].$$

Adunînd, în continuare, termen cu termen, printr-un raţionament inductiv se constată că relaţia (2) se poate pune sub forma echivalentă:

$$V = (N/\gamma)\{\sigma_a^n/[(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)\ldots(\sigma_a - \gamma l_n)] - 1\}. \tag{4}$$

Volumul V va fi minim cînd produsul:

$$P_n = (\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)\ldots(\sigma_a - \gamma l_n)$$

va fi maxim.

Se observă că datorită condiţiilor (3) fiecare termen al produsului este pozitiv şi au loc inegalităţile:

$$\sigma_a \geqslant \sigma_a - \gamma l_i \geqslant \sigma_a - \gamma l > 0. \tag{5}$$

Folosind inegalitatea dintre medii, adică

$$\sqrt[n]{k_1 k_2 \ldots k_n} \leqslant (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)/n,\ (k_i \geqslant 0), \tag{6}$$

în care putem avea egalitate, deci maximum pentru membrul întîi, numai atunci cînd:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n, \tag{7}$$

obţinem:

$$\sqrt[n]{(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)\ldots(\sigma_a - \gamma l_n)} \leqslant [(\sigma_a - \gamma l_1) + (\sigma_a - \gamma l_2) + \ldots + (\sigma_a - \gamma l_n)]/n =$$
$$= [n\,\sigma_a - \gamma(l_1 + l_2 + \ldots + l_n)]/n = \sigma_a - \gamma\, l/n.$$

Ridicînd la puterea n, obţinem:

$$P_n = (\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)\ldots(\sigma_a - \gamma l_n) \leqslant (\sigma_a - \gamma l/n)^n.$$

Condiţia de maximum (7) pentru P_n, ne dă:

$$\sigma_a - \gamma l_1 = \sigma_a - \gamma l_2 = \ldots = \sigma_n - \gamma l_n$$

sau

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l/n. \tag{8}$$

Valoarea minimă a volumului va fi:

$$V_{\min} = (N/\gamma)[\sigma_a^n/(\sigma_a - \gamma l/n)^n - 1] = (N/\gamma)\{1/[1 - \gamma l/(\sigma_a n)]^n - 1\}. \tag{9}$$

La limită, cînd numărul de tronsoane creşte şi tinde către infinit, vom avea:

(10) $\min V_{\min} = \lim_{n\to\infty} (N/\gamma)\{1/[1-\gamma l/(\sigma_a n)]^n - 1\} = (N/\gamma)[\exp(\gamma l/\sigma_a) - 1]$,

adică volumul solidului de egală rezistenţă la eforturi axiale.

3. Funcţia V are o valoare maximă atunci cînd produsul P_n este minim.

Produsul P_n fiind o funcţie continuă în domeniul închis definit de condiţiile (3), $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = l$ îşi atinge marginile (valoarea maximă şi minimă).

Marginea inferioară (minimum) nu poate fi atinsă în interior fiindcă nu există în interior alt punct decît cel de maximum, găsit mai sus, deci trebuind să fie atinsă totuşi în domeniul închis, ea va fi atinsă pe frontieră, adică cel puţin un $l_i = 0$.

Efectuăm transformările:

$$y_i = \sigma_a - \gamma l_i, \quad \sigma_a - \gamma l = \alpha \text{ şi } \gamma l = \beta.$$

Se observă că în conformitate cu relaţia (5) avem:

(11) $$0 < \alpha \leqslant y_i \leqslant \alpha + \beta$$

şi

(12) $$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = n\sigma_a - \gamma l = n(\alpha + \beta) - \beta = n\alpha + (n-1)\beta.$$

Căutăm, în aceste condiţii, marginea inferioară a produsului $P_n = y_1 y_2 \cdots y_n$.

Pentru $n = 2$, avem: $y_1 + y_2 = 2\alpha + \beta$, $P_2 = y_1 y_2 = y_2(2\alpha + \beta - y_2)$.

Variaţia lui P_2 arată că marginea inferioară se atinge pentru $y_2 = \alpha$ sau $y_2 = \alpha + \beta$ şi ea este $P_{2\min} = \alpha(\alpha + \beta)$.

Pentru n variabile vom avea următoarele cazuri posibile:

1° Dacă $y_1 = \alpha$, din (12) rezultă:

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_n = (n-1)(\alpha + \beta).$$

Deoarece fiecare termen trebuie să satisfacă condiţia (5) iar suma lor avînd valoarea de mai sus, rezultă că este necesar ca:

$$y_2 = y_3 = \cdots = y_n = \alpha + \beta.$$

2° Dacă $y_1 = \alpha + \beta$, din (12) rezultă:

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_n = (n-1)\alpha + (n-2)\beta$$

şi produsul devine $P_n = (\alpha + \beta) y_2 y_3 \cdots y_n$, avînd o valoare minimă posibilă o dată cu produsul $y_2 y_3 \cdots y_n$, deci problema se reduce la $n - 1$ variabile.

Inductiv se observă că minimul produsului este obţinut pentru un $y_i = \alpha$, restul y-lor fiind egali cu $\alpha + \beta$. Rezultă că $\sigma_a - \gamma l_i = \alpha = \sigma_a - \gamma l$, adică $l_i = l$, restul lungimilor fiind nule, căci $\sigma_a - \gamma l_i = \alpha + \beta = \sigma_a$, deci $l_i = 0$.

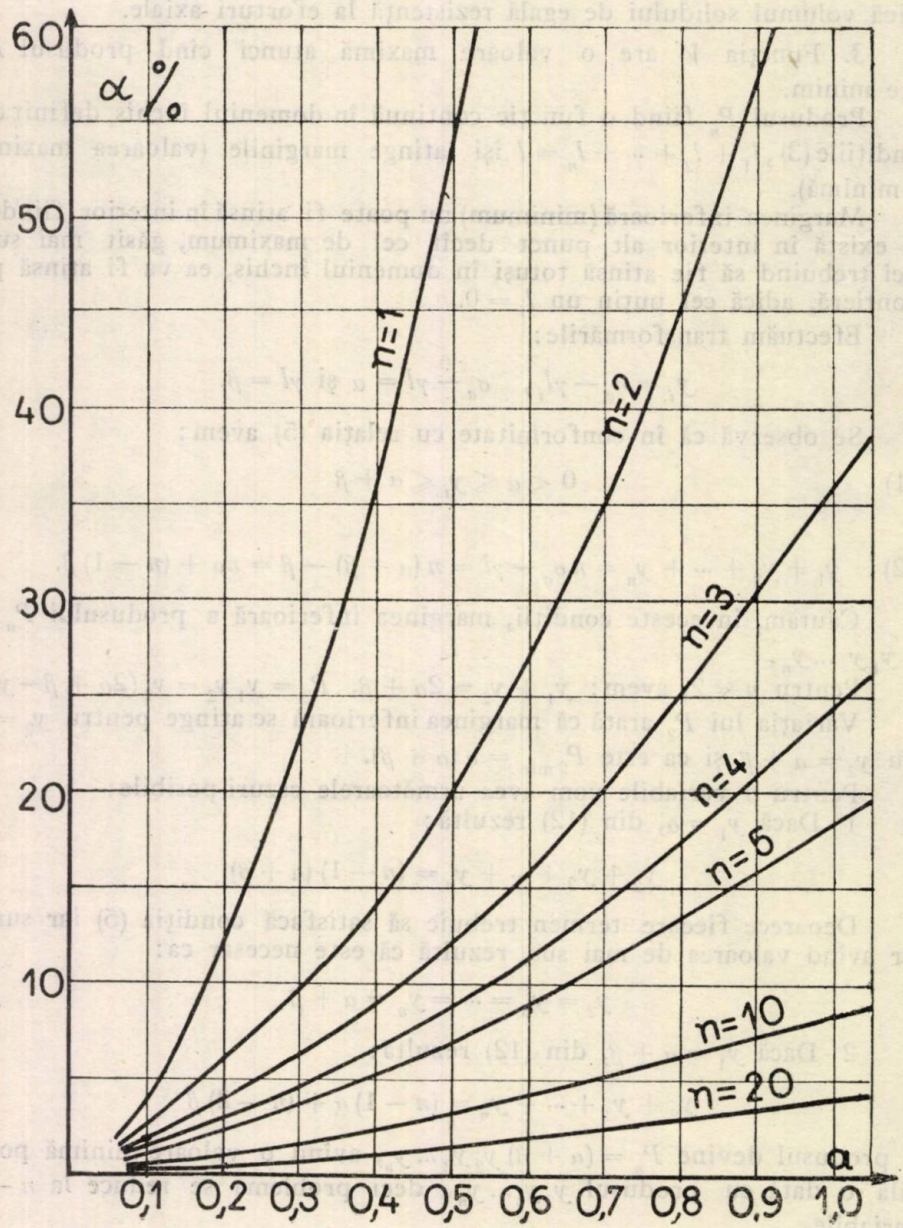

60
50
40
30
20
10
α %
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=10
n=20
a
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0

Fig. 2

Valoarea maximă a funcţiei V va fi deci:

$$V_{max} = (N/\gamma)\{\sigma_a^n/[(\sigma_a - \gamma l)\sigma_a^{n-1}] - 1\} = Nl/(\sigma_a - \gamma l), \tag{13}$$

care corespunde cazului cînd bara este alcătuită dintr-un singur tronson de formă prismatică.

4. Volumul barei variază deci între V_{max} dat de (13) şi $\min V_{min}$ dat de (10), funcţie de numărul de tronsoane din care este alcătuită bara, şi anume pentru $n = 1$ se obţine V_{max} iar pentru $n = \infty$ se obţine $\min V_{min}$.

În practică se pune problema ca în anumite condiţii date, deci pentru un $a = \gamma l/\sigma_a < 1$ dat, să se determine cel mai mic număr întreg n pentru care bara construită din tronsoane să aibe un volum mai mare decît cel al soluţiei ideale $\min V_{min}$ (bara de egală rezistenţă) cu un anumit procent admisibil:

$$\alpha = (V_n - \min V_{min})/\min V_{min} = V_n/\min V_{min} - 1.$$

Totul se reduce la rezolvarea ecuaţiei în n:

$$(1 - a/n)^n = 1/[1 + (\alpha + 1)(\exp a - 1)],$$

unde n este un număr întreg şi pozitiv.

Pentru rezolvarea practică s-au construit abacele din fig. 2. În abscisă sînt figurate valorile a, iar în ordonată valorile α, exprimate în procente. Pentru fiecare valoare întreagă a lui n se obţine astfel o curbă.

Concluzii

a) Soluţia economică (volum minim de material necesar) pentru o bară din tronsoane supusă la eforturi axiale, cînd se ţine seama şi de influenţa greutăţii proprii, se obţine, la un număr de tronsoane dat, atunci *cînd lungimile tronsoanelor sînt egale.*

b) În acest caz stabilirea numărului de tronsoane funcţie de pierderea de material (faţă de solidul de egală rezistenţă), pe care o admitem, se poate face uşor cu ajutorul abacelor date în lucrare (fig. 2).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de rezistenţa materialelor
şi
Catedra de matematici I

BIBLIOGRAFIE

1. Беляев Н. М., *Сопротивление материалов*, М.-Л., 1950, стр. 105.
2. Buzdugan Gh., *Rezistenţa materialelor*, vol. I, Buc., 1951, pp. 78 — 79.
3. Teodorescu C. C., *Curs de rezistenţa materialelor*, Buc., 1945, p. 44.

ЭКОНОМИЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ОТРЕЗКОВ БАЛОК, ПОДВЕРЖДЕННЫХ ОСЕВОЙ НАГРУЗКЕ

(Резюме)

Исследуется экономичное решение для определения размеров составленных из отрезков балок, при учитывании влияния собственного веса.

Исходя из условия минимального объема материала, доказывается, что экономичное решение при данном количестве отрезков получается в случае равных длин отрезков.

Установление числа отрезков можно производить в зависимости от допускаемой (по отношению к идеальному решению — твердое тело с одинаковым сопротивлениями) потерей материала.

В работе даны абаки облегчающие этот расчет.

SOLUTION ÉCONOMIQUE CONCERNANT LA DÉTERMINATION DES DIMENSIONS DES POUTRES À TRONÇONS SOUMIS À EFFORT AXIAL

(Résumé)

On étudie, tout en tenant compte du poids propre, la solution économique de détermination des dimensions des poutres à tronçons.

On démontre, lors de la conservation du volume minimal du matériel, que la solution économique réclame, pour un nombre de tronçons donné, que tout ces tronçons soient d'une même longueur.

Le nombre des tronçons peut-être établit en fonction de la perte admise du matériel (par rapport à la solution idéale, à savoir — corps solide rigide à résistances égales).

On a donné des abaques facilitant ce calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. K. 620.178.7

EINE NEUE MASCHINE ZUR SCHLAGPRÜFUNG IM VERDREHUNGSVERSUCH UND DIE ZÄHIGKEIT EINES WERKZEUGSTAHLS BEI SCHLAGARTIGER VERDREHUNG IN ABHÄNGIGKEIT VON DER ANLASSTEMPERATUR

VON

JAAKKO SALOKANGAS

1. Einleitung

Im statischen Verdrehungs- oder Torsionsversuch wird ein einendig eingespannter zylindrischer Probestab durch ein am freien Stabende angreifendes Moment verdreht. An der Oberfläche der Probe ergibt sich ein Spannungszustand mit den Hauptnormalspannungen unter 45° zu der Achse und den grössten Schubspannungen parallel bzw. senkrecht zu den Seitenlinien des Zylinders. Die Brüche im Torsionsversuch treten bei spröden Stoffen, z. B. beim Gusseisen im allgemeinen unter 45° zur Achse und bei kohlenstoffarmem Stahl senkrecht zur Achse ein. Bei zähen Stoffen findet der Bruch je nach der Länge und Stärke des Probestabs u. U. erst nach mehreren vollen Umdrehungen des freien Stabendes statt. Die Zahl der bis zum Bruch notwendingen Umdrehungen ist auch daher ein Mass der plastischen Eigenschaften des Stoffs.

Beim Vergleich der in Zugproben und in Schlagverdrehungsproben auftretenden Normal- und Schubspannungen finden wir, dass im Zugprobestab die höchste Schubspannung die Hälfte der wirksamen Zugspannung beträgt, während dagegen in der Verdrehungsprobe beide gleichgross sind. Der Biegeprobestab ist in diesem Sinn dem Zugprobestab vergleichbar. Aus den beschriebenen Umständen können wir folgern, dass der Zugschlag und Biegeschlag leichter spröden Bruch herbeiführen, da die bei ihnen entstehende Schubspannung so weit der Zugspannung „nacheilt", dass sich nicht immer vor dem endgültigen Bruch des Materials eine bleibende Verformung ergeben kann. Bei der Schlagverdrehung hingegen besteht eine grössere Möglichkeit zur Erzeugung eines von bleibender Verformung vorangegangenen Bruchs, insbesondere wenn der zylindrische Probestab geeignete Länge hat; man kann somit erwarten, dass es möglich sein sollte, durch den Schlagverdrehungsversuch auch solche Zähigkeitsunterschiede der Messung zugänglich zu machen, die bei den anderen erwähnten Arten der Schlagbeanspruchung nicht erfassbar sind. Auf andere, vielleicht etwas anschaulichere Weise ausgedrückt wäre dies so zu verstehen, dass die Schlagverdrehung gewissermassen das Verformungsvermögen des Stoffs „mehr restlos ausnutzt" als der Zug- und Biegeschlag, mit der Folge, dass selbst kleine Unterschiede der Schlagzähigkeit besser zutage treten. Voraussetzung ist selbstverständlich, dass hinreichend empfindliche Vorrichtungen zur Beobachtung dieser Unterschiede zur Verfügung stehen.

Die Konstruktionsgrundlagen der Maschinen zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch sind verhältnismässig alt. L u e r s e n und G r e e n e haben ihren Apparat derart entworfen, dass die zur Schlagverdrehung aufgewandte Energie an Hand der Abnahme der Winkelgeschwindigkeit einer umlaufenden Masse bestimmt wird [2].

Itihara wiederum hat seinen Apparat so gebaut, dass die Schlagverdrehung mittels einer rotierenden Masse erzeugt wird [2]. Das zur Verformung und zum Bruch benötigte Torsionsmoment M_v als Funktion des Verdrehungswinkels φ wird durch ein mit dem Probestab in Reihe geschaltetes Stabdynamometer gemessen, dessen Bewegung mittels Spiegels und Lichtstrahls auf einer photographischen Platte aufgezeichnet wird. Die Bruchenergie ergibt sich dann aus der Gleichung:

$$E = k \int_0^{\varphi} M_v \, d\varphi, \tag{1}$$

worin k ein Proportionalitätskoeffizient ist.

Der Amerikaner Paul de Koning hat im Jahre 1951 eine Maschine zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch ausgearbeitet, die dem in der vorliegenden Arbeit hergestellten Apparat ähnelt [1]. Angaben über die Einzelheiten fehlen jedoch gänzlich. Es ist nicht einmal eine Photographie oder Skizze und auch kein einziges Messergebnis dargestellt worden.

2. Eine Maschine neuer Bauart zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch

In unserem Apparat ist eine in erster Linie dem Schlagvedrehmechanismus von Itihara gleichende Kombination von Maschinenteilen vorgesehen worden, die jedoch in ihrer Konstruktion erheblich von dem Vorbild abweicht. Abb. 1 zeigt das Prinzipschema der Maschine.

In der Abb. 1 bezeichnet *a* die rotierende Masse, die vor Einleiten des Versuchs durch Ziehen an einer um die Scheibe *b* gewickelten Schnur in Drehung versetzt wird. Nachdem die Masse die gewünschte Drehzahl erreicht hat, wird der Schlagmechanismus ausgelöst. Hierbei treten die der rotierenden Masse gegenüberliegenden Mitnehmerzapfen *i* achsenparallel heraus und greifen in den Torsionsarm *e* ein. Der Probestab ist am einen Ende an der Achse *g* des Torsionsarms und am anderen Ende am Dynamometer *d* befestigt. Der Torsionsarm bewirkt nun den Bruch des Stabs, wobei das Torsionsmoment mittels Dehnungsmesstreifen aufgezeichnet wird, die am Dynamometerstab angeklebt sind. Aus Abb. 1 und 2 ist ersichtlich, dass der Scheibenrand der rotierenden Masse eine Zahnung trägt. Beim Umlauf werden hierdurch in der um einen Dauermagneten *p* gelegten Wicklung Spannungsimpulse erzeugt, und dies ermöglicht es, den Drehwinkel auf dem Bildschirm eines Kathodenstrahloszillographen sichtbar zu machen. Das Dynamometer *d* ist derart bemessen, dass es durch die Schlagverdrehung keine plastische Verformung erleidet. Die Messung des Torsionsmoments erfolgt mit Hilfe von zwei unter 45° zur Achse aufgeklebten Dehnungsmessstreifen, die somit in der Richtung der Hauptzugspannung bzw. der Hauptdruckspannung liegen. Torsionsmoment und Verdrehung werden gleichzeitig durch einen Doppelstrahl-Oszillographen auf einer photographischen Platte zur Aufzeichnung gebracht. Der Zahnkranz der Schwungmasse gestattet auch eine Bestimmung der Drehgeschwindigkeit durch Messung der induzierten Spannung mit dem Röhrenvoltmeter; in den hier ausgeführten Versuchen betrug die Umlaufgeschwindigkeit 500 1/min. Abb. 2 zeigt den Apparat komplett mit Kathodenstrahloszillograph und Röhrenvoltmeter, während in Abb. 3 der im Apparat zur Anwendung kommende Probestab dargestellt ist.

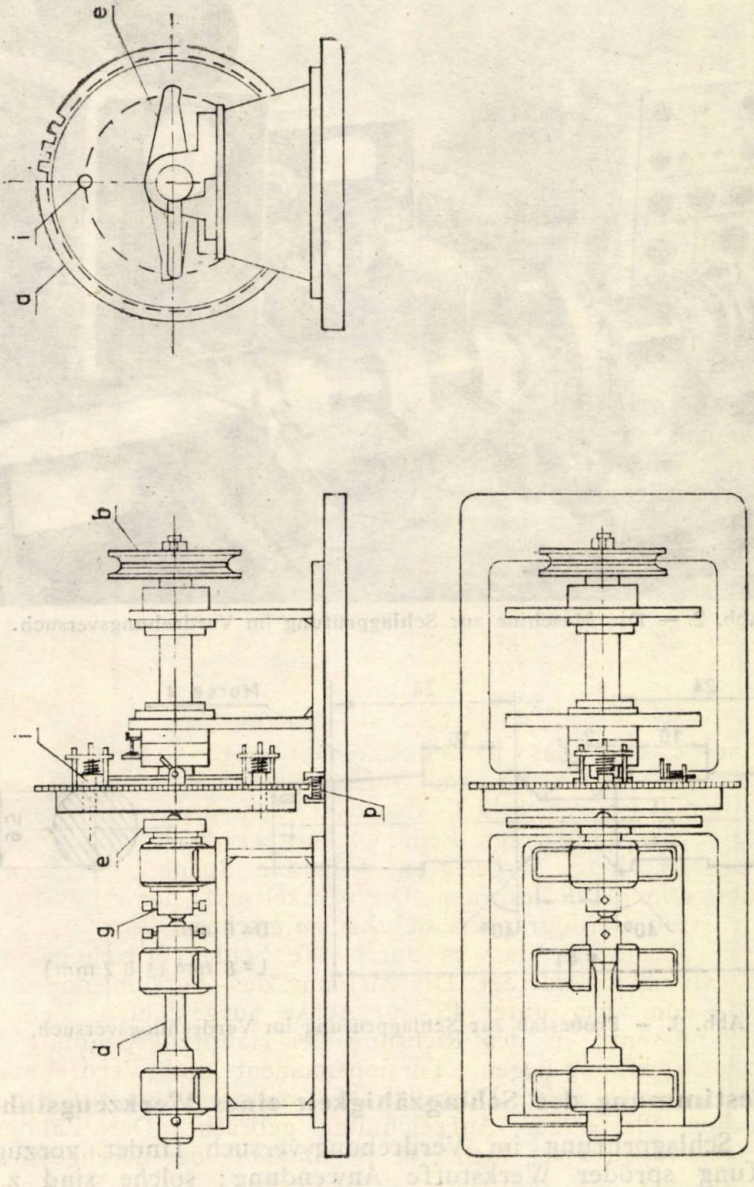


Abb. 1. — Prinzipschema der Maschine zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch.

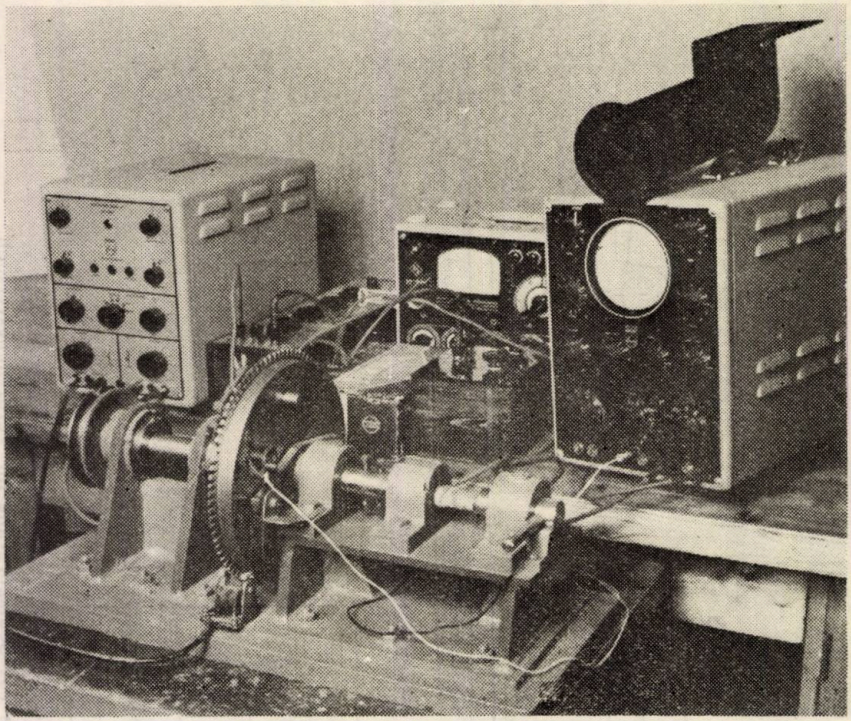


Abb. 2. — Die Maschine zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch.

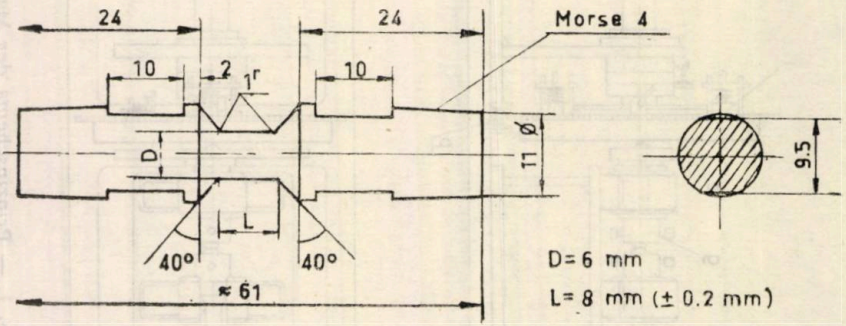
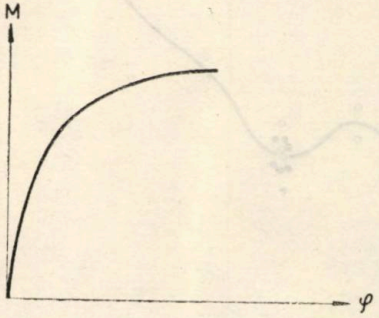


Abb. 3. — Probestab zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch.

3. Bestimmung der Schlagzähigkeit eines Werkzeugstahls

Die Schlagprüfung im Verdrehungsversuch findet vorzugsweise zur Prüfung spröder Werkstoffe Anwendung; solche sind z. B. die Werkzeugstähle, von denen man oft neben hoher Härte auch eine gewisse Zähigkeit verlangt. Es wurde mit der vorbeschriebenen Maschine die Schlagzähigkeit eines Werkzeugstahls mit der Analyse C = 1,0 %, Si = 1,5 %, Mn = 0,75 %, Cr = 1,0 %, P = 0,030 % und S = 0,020 % in

Abhängigkeit von der Anlasstemperatur bestimmt. In Abb. 4 ist eine typische Kurve des Moments im Schlagverdrehungsversuch in Abhängigkeit von dem Verdrehungswinkel als photographische Aufnahme des Oszillographenschirms wiedergegeben. Die Schlagzähigkeit wurde laut Gleichung (1) durch Planimetrieren bestimmt. Abb. 5 zeigt die Momentkurve, Abb.6 den Verlauf des Verdrehungswinkels und Abb. 7 die an Hand dieser errechnete Schlagzähigkeitskurve in Abhängigkeit von der Anlasstemperatur sowie zugleich die entsprechende Kurve für die RC-Härte.



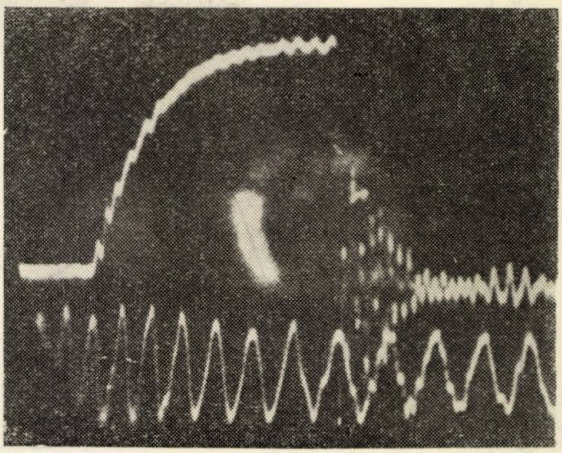


Abb. 4. — Eine typische Aufzeichnung des Torsiensmoments. Anlasstemperatur 200°C.

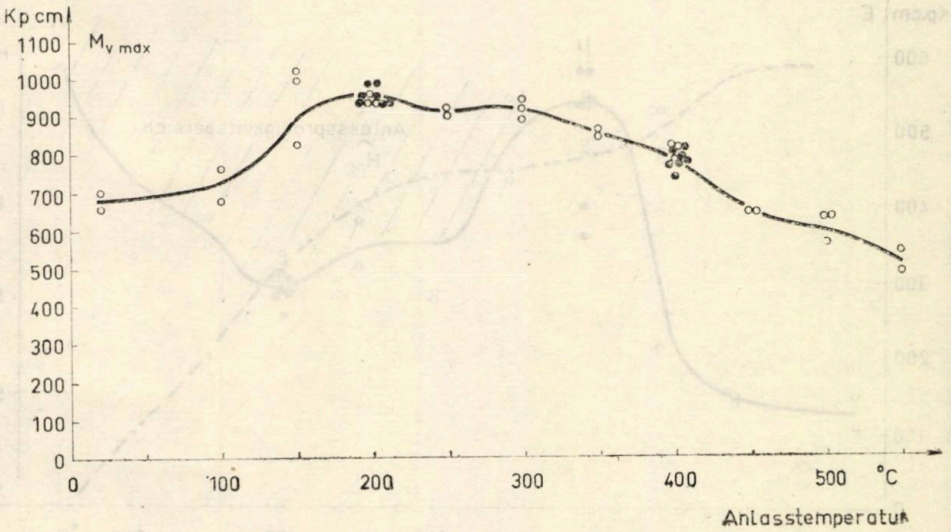


Abb. 5. — Verlauf des Torsionsmoments.

Man ersieht aus den Abbildungen dass die in der Schlagzähigkeitskurve zu beobachtende Streuung fast ausschliesslich auf die Streuung bezüglich des Verdrehungswinkels zurückzuführen ist. Die Schlag-

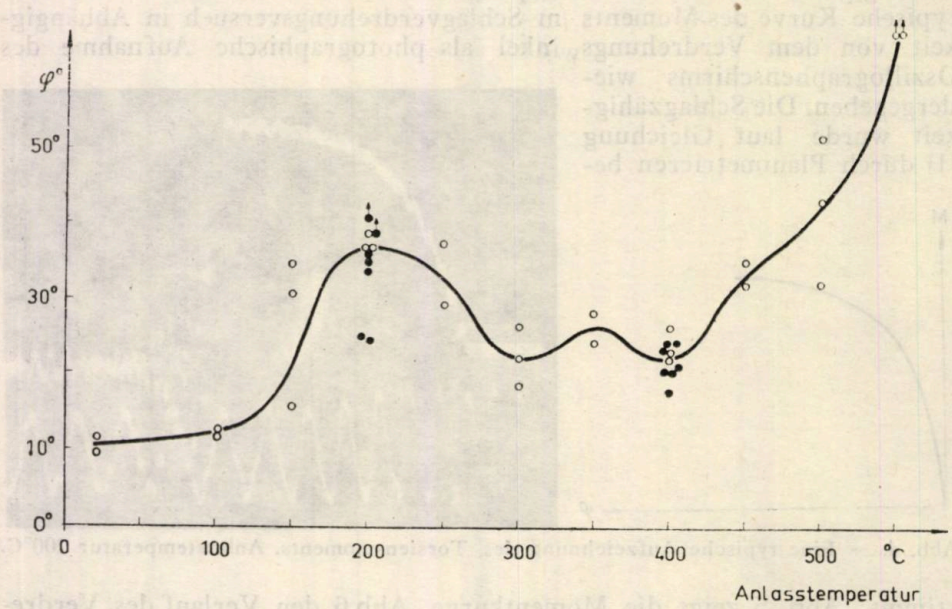


Abb. 6. — Verlauf des Verdrehungswinkels.

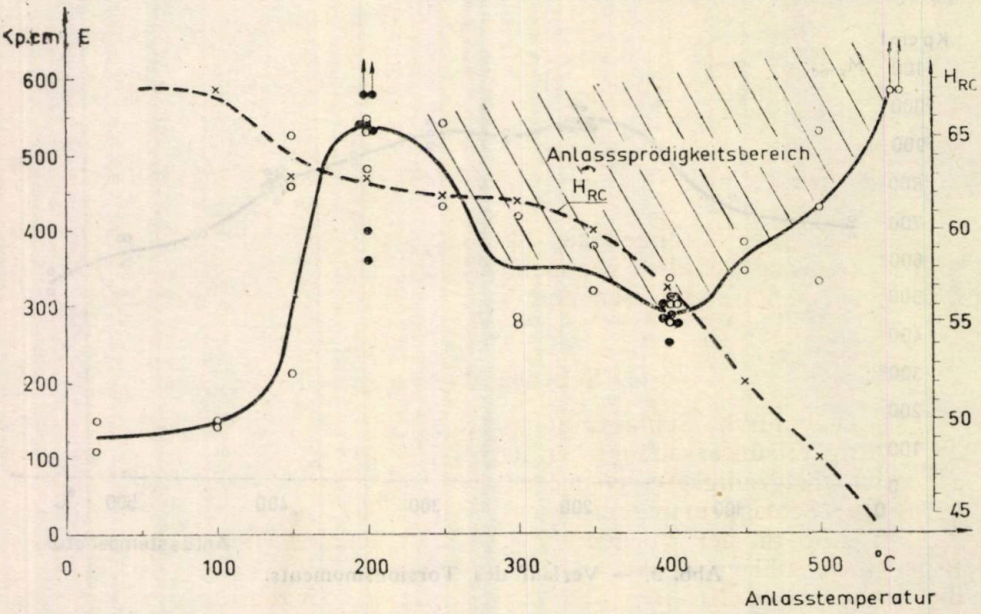


Abb. 7. — Schlagzähigkeit im Vedrehungsversuch in Abhängigkeit von der Anlasstemperatur sowie Kurve der RC-Härte für einen Werkzeugstahl (C =1,0%, Si= 1,5%, Mn=0,75%, Cr = 1,0%, P = 0,030%, S = 0,020%).

zähigkeit hat ihren Maximalwert bei einer Anlasstemperatur um 200°C. Der anschliessende Abfall der Zähigkeit auf ihr Minimum lässt Anlassprödigkeit erkennen. Vergleichshalber werden noch in Abb. 8 die für das gleiche Material mit dem Mesnager-Schlagprobestab erzielten üblichen Biege-Kerbschlagzähigkeitskurven gezeigt. Wie die Resultate

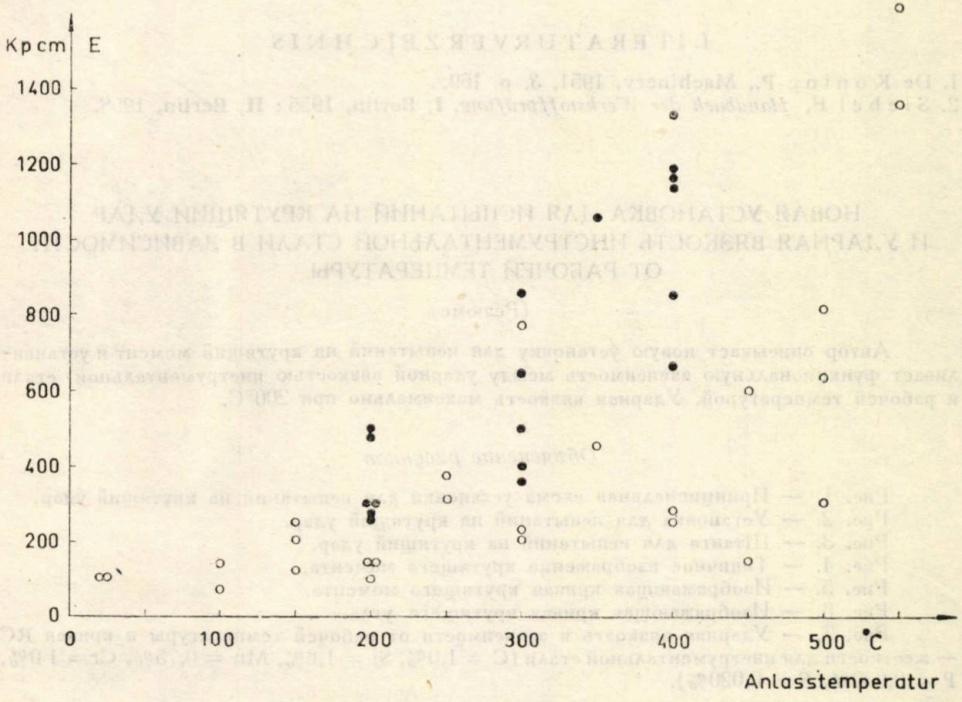


Abb. 8. — Biege-Kerbschlagfestigkeit in Abhängigkeit von der Anlasstemperatur.

zu erkennen geben, können aus Beobachtungen nach Art derjenigen in Abb. 8 keinerlei Schlüsse gezogen werden. Ähnliche Kurven wie hier in Abb. 7 haben auch Luersen und Greene mit ihrem Apparat erzielt [2].

4. Schlussfolgerungen

a) Die durch Schlagprüfung im Verdrehungsversuch hinsichtlich der Festigkeitsuntersuchung erzielbaren Vorteile im Vergleich mit den anderen Schlagzähigkeitsversuchen sowie die zuvor gebauten Maschinen für solche Schlagprüfungen werden beschrieben.

b) Eine in der vorliegenden Arbeit konstruierte Maschine neuer Bauart zur Schlagprüfung im Verdrehungsversuch wird beschrieben. Mit dieser Maschine ist die Schlagzähigkeit im Verdrehungsversuch für einen Werkzeugstahl als Funktion der Anlasstemperatur bestimmt worden.

c) Die Schlagzähigkeit im Verdrehungsversuch wies ein Maximum bei 200°C Anlasstemperatur auf.

d) Die Streuung in den Verdrehungsversuchen zur Bestimmung der Schlagzähigkeit ist zum grössten Teil auf die Streuung im Verdrehungswinkel zurückzuführen.

Eingegangen am 1 VIII 1961

Staatliche technische Forschungsanstalt, Helsinki, Finnland

LITERATURVERZEICHNIS

1. De Koning P., Machinery, 1951, *3*, p. 169.
2. Siebel E, *Handbuch der Werkstoffprüfung*, **I**, Berlin, 1955; **II**, Berlin, 1958.

НОВАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ НА КРУТЯЩИЙ УДАР И УДАРНАЯ ВЯЗКОСТЬ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ СТАЛИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАБОЧЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

(Резюме)

Автор описывает новую установку для испытаний на крутящий момент и устанавливает функциональную зависимость между ударной вязкостью инструментальной стали и рабочей температурой. Ударная вязкость максимально при 200°C.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Принципиальная схема установки для испытаний на крутящий удар.
Рис. 2. — Установка для испытаний на крутящий удар.
Рис. 3. — Штанга для испытаний на крутящий удар.
Рис. 4. — Типичное изображение крутящего момента.
Рис. 5. — Изображающая кривая крутящего момента.
Рис. 6. — Изображающая кривая крутящего угла.
Рис. 7. — Ударная вязкость в зависимости от рабочей температуры и кривая RC — жесткости для инструментальной стали (C = 1,0%, Si = 1,6%, Mn = 0,75%, Cr = 1 0%, P = 0,030%, S = 0,020%).

O NOUĂ MAŞINĂ DE ÎNCERCAT LA ŞOCURI DE RĂSUCIRE ŞI REZILIENŢA OŢELULUI DE SCULE ÎN FUNCŢIE DE TEMPERATURA DE LUCRU

(Rezumat)

Autorul descrie o nouă maşină de încercat la şocuri de răsucire, determinîndu-se rezilienţa oţelului de scule în funcţie de temperatura de lucru. Rezilienţa determinată prezintă un maximum la 200°C.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Schema de principiu a maşinii de încercat la şocuri de răsucire.
Fig. 2. — Maşina de încercat la şocuri de răsucire.
Fig. 3. — Bară de probă la încercări la şocuri de răsucire.
Fig. 4. — Alură tipică a momentului de torsiune. Temperatura de lucru 200°C.
Fig. 5. — Curba reprezentativă a momentului de torsiune.
Fig. 6. — Curba reprezentativă a unghiului de răsucire.
Fig. 7. — Rezilienţa în funcţie de temperatura de lucru şi curba de duritate RC pentru oţel de scule (C = 1,0%, Si = 1,5%, Mn = 0,75%, Cr = 1,0%, P = 0,030% S = 0,020%).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D.K. 621.822.7

BEITRAG ZUR UNTERSUCHUNG DER LAUFGERÄUSCHBESTIMMUNG AN WÄLZLAGERN

VON

N. G. POPINCEANU, D. NĂSTASE, M. D. GAFIȚEANU,
TRAIAN GIOSAN und M. PĂUN

Mitteilung an der wissenschaftlichen Jubiläumstagung der Technische Hochschule, Jassy, 9 — 11 November 1962

1. Grundlagen

Aus Forschung und längsjährigen Erfahrung geht hervor dass das Laufgeräusch an Wälzlagern in erster Reihe den Formabweichungen und in zweiter Reihe der Montage- und Betriebsbedingungen zuzuschreiben ist, meistens von den Welligkeiten der Rollbahn des beweglichen Ringes abhängig.

Die bisherigen Untersuchungen begrenzten sich nur auf Radialwälzlagern mit beweglichem Innenring; etwa 90% von Radialwäzlagern sind im Betrieb von dieser Art.

Man hat festgestellt dass das Wälzlagergeräusch durch den Angriff von Wächselkräften hervorgerufen wird, als Folge der unregelmässigen Rollbewegung mit wechselnder Geschwindigkeit der sich berührenden Körper der Wälzlager. Theoretische Untersuchungen zeigen dass diese Wechselkräfte meistenteils der Rollbewegung der Wälzkörper auf der Welligkeit der Rollbahn des beweglichen Ringes abhängen. Die Wälzkörper in ihrer Rollbewegung auf diesen Welligkeiten bekommen Radialbeschleunigungen die von der grösse der Welligkeiten abhängen. Wegen der grösse Massen, entstehen Wechselkräfte die mit den Beschleunigungen [1], [4], [5] proportionel sind, als Anregungskräfte benannt. Sie können beinache die ganze Leiter der Lautfrequenzen erzeugen.

Im Wälzlager und im gesamten Lager gibt es zahlreiche Teile die schwingen und unter dem Einfluss der Anregungskräfte im Rezonanz treten können, und dadurch das Geräusch vergrössern. Solche Teile sind Aussenring wie eine Klingel, Lagerdeckel u. a. [2], [3].

Der Zusammenhang zwischen den charakteristischen Grössen der Welligkeiten und die Grösstbeschleunigung der Rollkörper in ihrer Bewegung über die Welligkeit (Abb. 1) wurde theoretisch [4], [6] festgestellt in der Annahme dass die Welligkeiten von rein sinusoidaler Form sind und zwar:

$$b_{max} = b = 4\pi^2 c^2 a / [\lambda^2 (1 - 4\pi^2 ar/\lambda^2)], \tag{1}$$

wobei: $b_{max} = b$ — die maximale Beschleunigung (m/Sek^2); $c = \pi D_i n / (2.60)$ — die relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Rollkörpers auf den inneren beweglichen Ring bezogen (m/Sek); D_i — Durchmesser der Rollbahn des inneren beweglichen Ringes (m); n — Drehzahl des inneren Ringes (U/Min); a — Amplitude der Welligkeiten der

Rollbahn für den inneren beweglichen Ring (m). Bei normaler Qualität der Wälzlager $a = 10^{-6} \ldots 2.10^{-6}$ m; λ—Wellenlänge der Welligkeit, gewöhnlich $\lambda = 2.10^{-3} \ldots 5.10^{-3}$ m; r — Radius der Wälzkörper (m).

Die wechselnder Massenkräfte, die als Folge der Bewegung der Rollkörper auf den Welligkeiten erscheinen, erzeugen Schwingungen von mehreren Frequenzen, im allgemein 1 000...5 000 Hz.

Bei korrekten Betriebsbedingungen und Montage, würde das vom Wälzlager erzeugte Geräusch meistenteils von der Welligkeitsgrösse der Rollbahn des inneren be-

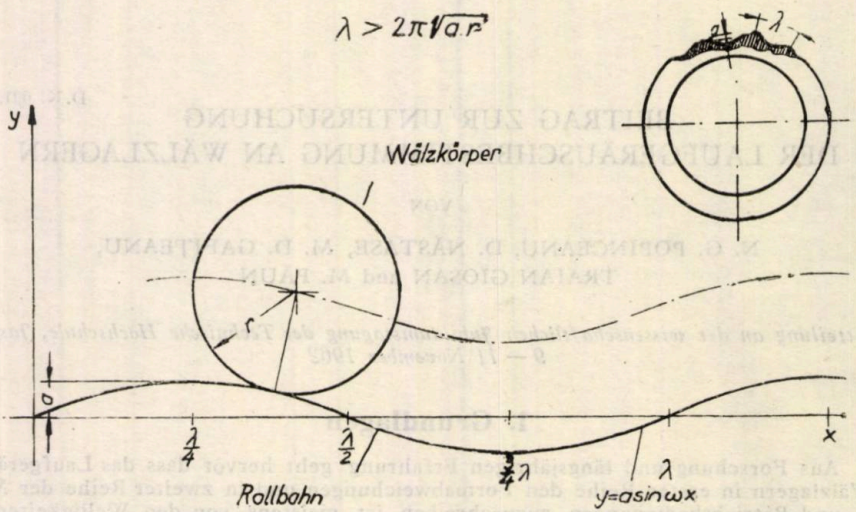


Abb. 1. — Bahnkurve des Wälzkörperschwerpunktes für den Fall $\lambda > 2\pi\sqrt{ar}$ [4], [6].

weglichen Ringes abhängen, sowie auch dasein einer Lagerteile die in Resonanz treten könnten. Eine steife Lagerkonstruktion würde von diesem Standpunkt vorteilhaft sein.

Die zu unternehmenden Versuche müssen in zwei Direktionen gerichtet werden. Einerseits muss man auf Versuchswege bestimmt werden in welchem Masse es eine Zusammenhängigkeit zwischen der Welligkeit des inneren beweglichen Ringes und dem Geräusch gibt; andererseits Untersuchung der Gründe die im tehnologischen Prozess Welligkeiten mit ungünstigen charachteristischen Grössen erzeugen um sie zu verbessern oder beseitigen.

In vorstehender Arbeit wird Abhängigkeit des Geräusches von der Welligkeit und, ebenfals, werden auch andere mögliche Abhängigkeiten untersucht.

2. Apparatur, Arbeitsweise und Versuchsergebnisse

Apparatur. Für die Bestimmung der vom Wälzlager erzeugten Geräusche wurde folgende Apparatur gebraucht:

a) Piesoelektrischer Korperschalltraductor mit Kristall in Supraphonfassung VK5 (Grösstabweichung 10 dB im Zwischenraum 60...10^4 Hz) der durch einem Palpator mit dem äusseren Ring des Wälzlagers in Kontakt wurde (Abb. 2).

b) Elektronischer Verstärker (Abb. 3) mit einem Grösstversterkungskoeffizient (etwa 3000) und mit einer Frequenzcharakteristik mit Abweichungen von 10 dB im Zwischenraum 50...12 000 Hz und 5 dB in Zwi-

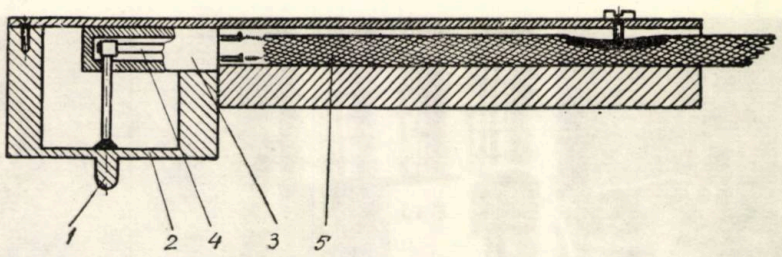


Abb. 2. — Piesoelektrischer Körperschalltraductor.
1 — Körperschalltaster : *2* — Membrane ; *3* — Kristallfassung ; *4* —Kristall ; *5* — Panzerkabel.

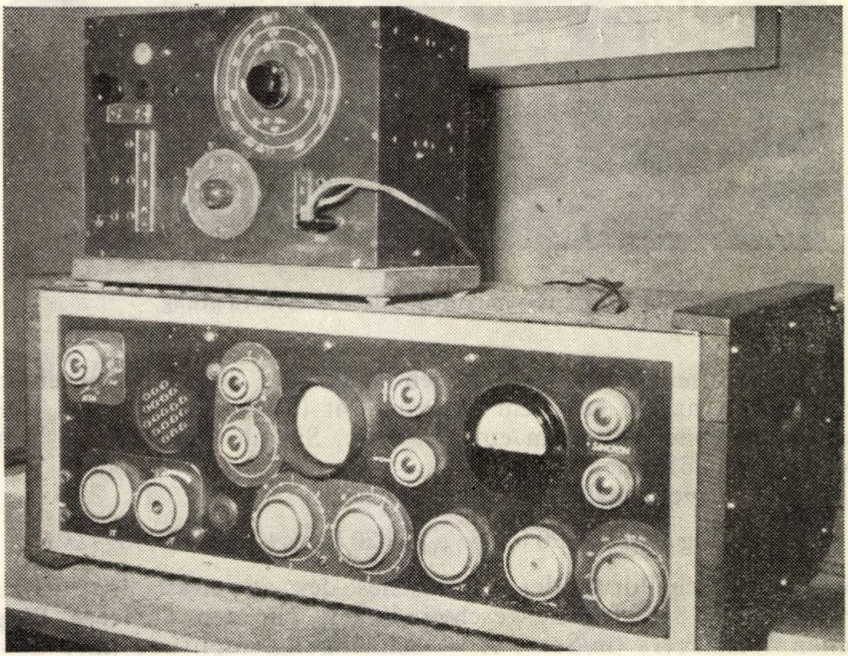


Abb. 3. — Elektronischer Versterker. Aussenansicht.

schenraum 50...5000 Hz. Die Anzeigungen des Messapparates des Verstärkers waren direkt proportionel mit dem empfangenen Zeichen.

c) Mechanische Einrichtung für Antrieb und konstantes Belasten (Abb. 4), die aus einer Spindel mit Gleitlagern in elasticher Kuplungsverbindung mit einem Geräuscharmen Elektromotoren zusammengesetzt

ist ($n = 2\,880$ U/Min). Bei dem zu mässende Wälzlager drehte sich der innere Ring zusammen mit der Spindel, der äussere Ring wurde festgehalten und mit einer Last von 2 Kg durch den Taster gedrükt [6].

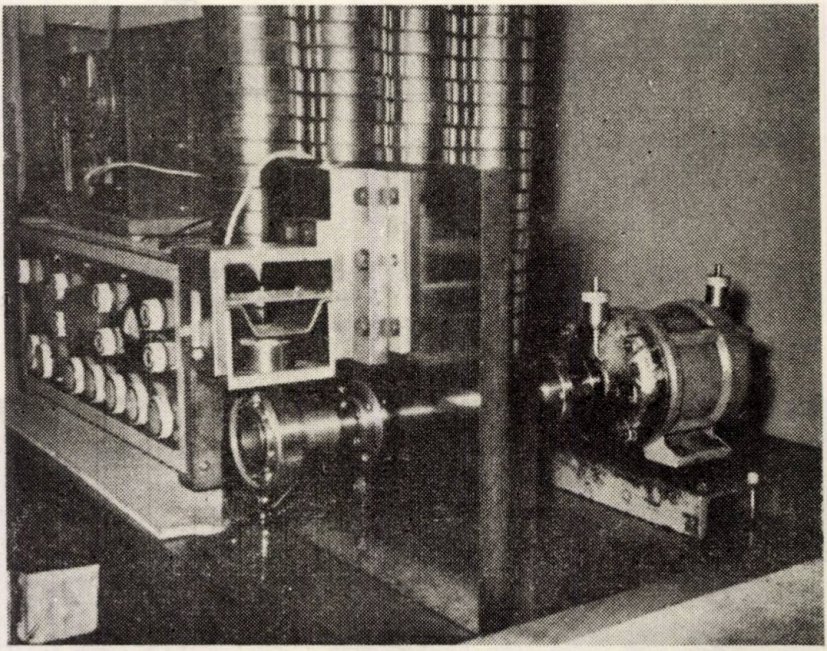


Abb. 4. — Gesamtansicht der Messvorrichtung.

Arbeitsweise. Jedem gemessenen Wälzlager (Symb. 308) entsprach eine gewisse Anzeige auf dem Messapparat (Milivoltmeter) des Verstärkers, proportionel mit dem empfangenen Signal und folglich mit der Schwingungsamplitude.

Das relative Schallniveau (in dB) ist:

$$(2) \qquad M = 20 \log (p/p_0) = 20 \log (v/v_0) = 20 \log (A/A_0) = 20 \log (U/U_0),$$

wobei: p — Schalldruk des Geräusches des zu messenden Wälzlagers (Barrye); v — Schwingungsgeschwindigkeit für den äusseren Ring des gleichen Wälzlagers (m/Sek); A — Schwingungsamplitude (m); U — Anzeigung des Messapparates (mV); p_0, v_0, A_0 und U_0 — die gleichen Grössen für den als etalon angenommenen Wälzlager.

Die für die Messung vorbereiteten Wälzlager wurden wie in der Literatur [4], [6] angegeben ist behandelt. Die Prüfungszeit war 10...15 Sek.

Einzeln für jedes Wälzlager das Profilogram wie in Abb. 5 dargestellt und den Radialschlag, Ovalität und Rauhigkeit der Rollbahn des inneren Ringes sowie auch das Radialspiel bestimmt.

Mit Hilfe der Profilogramme wurde für jeden der auf Geräusch versuchten Wälzlager folgendes festgestellt:

a) Mittelamplitude der Welligkeiten:

$$a = \sum a_i / N_1 ; \tag{3}$$

b) Equivalente Wellenlänge:

$$\lambda = \sqrt{\sum \lambda_i / N_1} , \tag{4}$$

für N_1 — Gesammtzahl der Welligkeiten des Innenringes eines Wälzlagers.

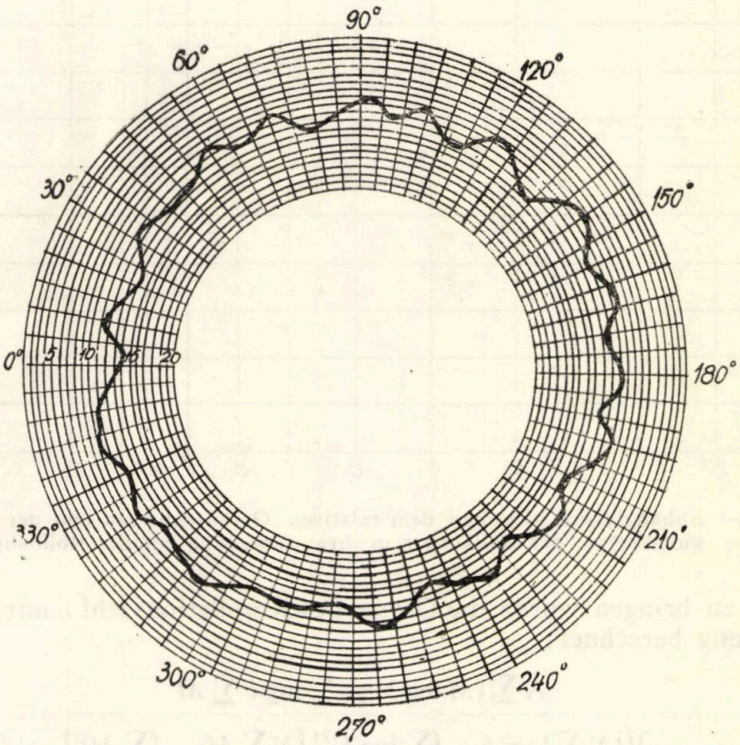


Abb. 5. — Aussehen einer Profilogramme für die Rollbahn des Innenringes.

Die Ergebnisse der Prüfungen wurden in Abb. 6 dargestellt, in der Koordinaten M und $\log b$, wie bekannt:

$$b_{\max} = b = 4\pi^2 c^2 a/[\lambda^2 (1 - 4\pi^2 ar/\lambda^2)] ;$$

aber

$$4\pi^2 ar/\lambda^2 \ll 1 \quad \text{und demnach} \quad b \cong 4\pi^2 c^2 a/\lambda^2. \tag{5}$$

Auf Grund der Werte aus Abb. 6, kann die Annahme gemacht werden das der Zusammenhang zwischen dem relativen Geräuschniveau M und Beschleunigung ($\log b$), die eine Funktion der charakteristischen Grössen der Schwingungen ist, von der Form:

$$(6)\quad U/U_0 = Kb^x \cong K(a/\lambda^2)^x,\ M = 20\log(U/U_0) = 20(\log K + x\log b),\ [\mathrm{dB}],$$

wobei K — eine Proportionalitetskonstante.

Um die Abhängikeit zwischen Welligkeit und Geräusch zum Vor-

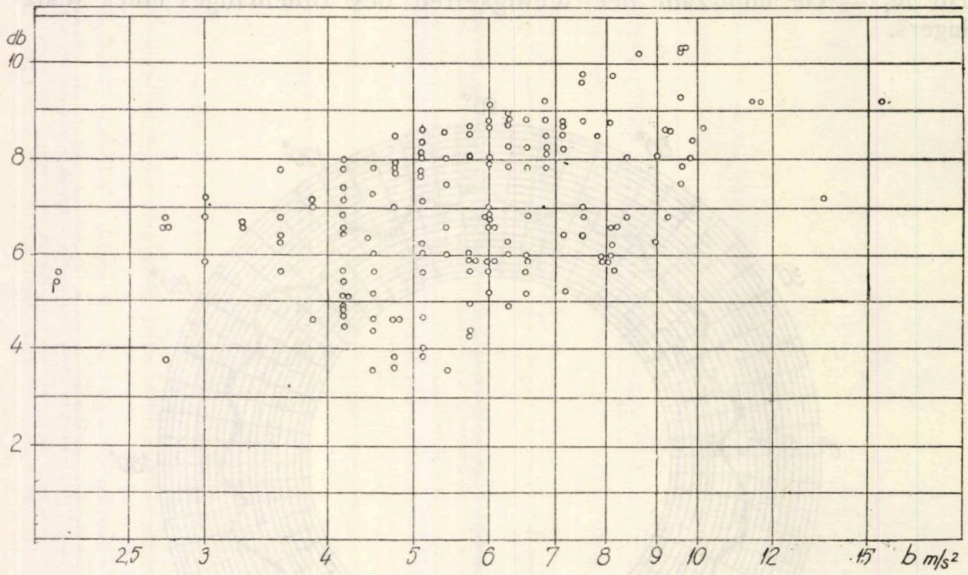


Abb. 6. — Abhängigkeit zwischen dem relativen Geräuschniveau und der Beschleunigungsgrösse der Rollkörper in ihrer Bewegung auf der Rollbahn.

schein zu bringen wurde die Grösse des Korellationszahl ϱ mit folgender Beziehung berechnet:

$$(7)\quad \varrho = \frac{N\sum(M\log b) - \sum\log b\sum M}{\sqrt{[N\sum\log^2 b - (\sum\log b)^2]\,[N\sum M^2 - (\sum M)^2]}}$$

wobei: N — die Zahl der geprüften Wälzlager.

Es ergab sich $\varrho = 0{,}673$.

Fölglich kann man schreiben:

$$(8)\quad M_1 \cong \log b \cong \log(a/\lambda^2) \text{ für } M_1 = M - 20\log K,\ [\mathrm{dB}].$$

Der Exponent x kann mit Hilfe der unten angegebenen Beziehung bestimmt werden [8]:

$$(9)\quad x = [\sum(M\log b) - \sum\log b\sum(M/N)]/[\sum\log^2 b - (\sum\log b)^2/N] = 0{,}25.$$

In normaler Qualität der Wälzlager werden keine Abhängigkeit zwischen relativem Geräuschniveau und Radialschlag, Ovalität und die Rauhigkeit der Rollbahn des beweglichen Innenringes festgestellt.

Im Bereich der versuchten Umdrehungsgrössen der Werkstücke im Schleifprozess konnte nicht eine Abhängigkeit zwischen dem Geräuschniveau und dieser Umdrehungsgrösse festgestellt werden.

3. Schlussvolgerungen

1°. Bei den gemessenen Wälzlagern (Symb. 308) wurde folgendes festgestellt:

a) Mittelwert der Amplitude des Welligkeiten: $a = 0{,}4.10^{-6}...2{,}5.10^{-6}$ m.
b) Equivalente Wellenlänge: $\lambda = 5.10^{-3}...17.10^{-3}$ m.
c) Relative Schallniveau: $M = 3{,}5...10{,}5$ dB.
d) Radialschlag der Rollbahn des Innenringes: $e = 2...15$ μ.
e) Ovalität der Rollbahn des Innenringes: $S = 2...7$ μ.
f) Radialspiel: $j = 10...20$ μ.
g) Rauhigkeit der Rollbahn des Innenringes: $R_z = 0{,}25...2$ μ.

2°. Das relative Geräuschniveau der Wälzlager hängt meistenteils (bei korrekten Montage- und Betriebsbediengungen) von der charakteristischen Grösse der Welligkeit des beweglichen Innenringes ab, so wie es in der Beziehung (6) gezeigt wird.

Dem grössten Einfluss hat dabei die Wellenlänge λ.

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Getriebe und Maschinenelemente

LITERATURVERZEICHNIS

1. Tallian T., CEP, 1956, *8*, pp. 281—284.
2. Lohmann G., Konstruktion, 1953, *2*, S. 38—46; Ibid., 1953, *3*, S. 85—90.
3. Unterberger M., VDI, 1956, *6*, S. 209—214.
4. Kühnlenz K., Die Technik, 1956, *10*, S. 709—716.
5. Крючков И. С., Вестник Машиностроения, 1959, *8*, стр. 10—14.
6. Kühnlenz K., Steger A., Fritsch S., *Untersuchungen über das Laufgeräusch an Wälzlagern*, Technische Informationen herausgegeben von Zentrallinstitut für Lagertechnik, Leipzig, 1958, *1*.
7. Worthing A. G., Geffner J., *Prelucrarea datelor experimentale*, Ed. Tehn., Buc, 1959, (aus englisch übersetzt).
8. Jost M., Schmidt W., Werkstattstechnik u. Maschinenbau, 1956, *46*, S. 187—192.

ИСПЫТАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ШУМА ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

(Резюме)

Предлагаются аппаратура и испытания для определения зависимости между волнистостьтю и шумом подшипников.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Траектория центра тяжести тела качения для $\lambda \quad 2\pi\sqrt{ar}$.

Рис. 2. — Пьезоэлектрический традуктор. *1* — приемник вибраций; *2* — мембрана; *3* — держатель кристалла; *4* — кристалл; *5* — внутренний кабель.

Рис. 3. — Электронное приспособление; общий вид.
Рис. 4. — Измерительный прибор; общий вид.
Рис. 5. — Профилограмма дороги качения внутреннего кольца подшипника.
Рис. 6. — Зависимость между относительных уровнем шума и ускорением движения тел качения по дороге качения.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL PROBLEMEI ÎNCERCĂRILOR PENTRU DETERMINAREA ZGOMOTULUI LA RULMENŢI

(Rezumat)

Se prezintă aparatura şi încercările întreprinse pentru determinarea dependenţei dintre ondulaţii şi zgomotul produs de rulmenţi.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Traiectoria centrului de greutate al unui corp de rostogolire pentru $\lambda > 2\pi\sqrt{ar}$.
Fig. 2. — Traductor piezoelectric. *1* — captator de vibraţii; *2* — membrană; *3* — suport pentru cristalul piezoelectric; *4* — cristal; *5* — cablu interior.
Fig. 3. — Vedere generală a dispozitivului electronic.
Fig. 4. — Vedere generală a dispozitivului de măsură.
Fig. 5. — Aspectul unei profilograme pentru calea de rulare a inelului interior.
Fig. 6. — Dependenţa dintre nivelul relativ de zgomot şi acceleraţia corpurilor de rulare în deplasarea lor pe calea de rostogolire a inelului interior al rulmentului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 531.32; 621.81

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН, СЖАТЫХ ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

М. В. ХВИНГИЯ

1. *Введение*

Поперечные колебания винтовых цилиндрических пружин рассматривались несколькими авторами. Интерес к этому вопросу вызван в основном двумя причинами:

а) Практически с поперечными колебаниями винтовых пружин встречаемся в самых различных конструкциях — в амортизаторах, в вибраторах и др., для правильного расчета которых необходимо знать собственную частоту пружины.

б) При теоретическом вычислении частоты приходится преодолевать определенные трудности, которые иногда весьма велики и создают много неприятностей расчетчику. Эти трудности вызваны следующими причинами: во-первых пружина, как правило, всегда сжата или растянута и под действием осевой силы, ее длина существенно меняется; во-вторых, пружина представляет собой короткий брус, для которого влияние инерции вращения и сдвига иногда весьма значительно.

Краткий обзор работ в этой области ясно показывает общую тенденцию — уточнить влияние дополнительных факторов, к которым относятся продольная сила, сдвиг и инерция вращения и собрать их в одну общую формулу.

В 1925 г. Бирнбаум [1] вывел простую зависимость для определения частоты, но без учета сдвига и вращения, влияние продольной силы учитывалось приближенно, а решение характеристического уравнения частоты было справедливо только в определенных узких границах. Свою формулу Бирнбаум проверил экспериментально и несмотря на хорошее качественное совпадение результатов, получил значительную количественную разницу. Таким образом формула Бирнбаума имеет весьма узкие границы применимости.

Дик [2] изучил простейший случай колебаний продольно несжатой пружины и по существу только В. М. Макушин [3] достаточно полно рассмотрел влияние продольной силы и инерции вращения на частоту для самых различных случаев крепления торцов пружины. Путем использования энергетического метода удалось получить сравнительно простую расчетную формулу частоты, которая однако также имеет ограничение потому, что не учитывает инерцию сдвига.

В. Л. Бидерман [4] проанализировал два дифференциальных уравнения колебаний — для среднего угла поворота и поперечного смещения витка. В отличие от работы [3], дополнительно учитывается сдвиг сечения и таким образом дифференциальные уравнения В. Л. Бидермана в принципе наиболее полно отражают влияние всех факторов на колебания.

Однако при практической реализации этой схемы получаются настолько сложные характеристические уравнения (исключение составляет только простейшее шарнирное крепление концов), что их решение проводится только численным методом, путем подбора корней и частот в каждом конкретном случае расчета. При таком методе решения невозможно получить формулу для определения частоты.

В работе [5] уточнена расчетная схема Бирнбаума за счет более строгого учета продольной силы, но не учитывается влияние сдвига и вращения. Поэтому полученная

в этой работе формула частоты также имеет ограниченную область применения — она дает удовлетворительные результаты для сравнительно длинных пружин.

Во всех упомянутых работах, также как и в настоящей работе, использован метод эквивалентного бруса, т. е. реальная пружина заменяется приведенным брусом, имеющим одинаковые с пружиной жесткостные характеристики.

2. *Постановка задачи*

Ниже приводится решение, справедливое для сжатой пружины с жесткой заделкой торцевых витков. Этот случай для практики представляет, повидимому, наибольший интерес потому, что встречается при расчете амортизаторов. Дифференциальное уравнение колебаний составлено с учетом всех дополнительных факторов — сжимающей силы, сдвига и вращения. Полученная формула частоты, справедливая для первой (основной) гармоники, дает возможность проанализировать зависимость собственной частоты от изменения длины пружины при статическом сжатии, совместно с влиянием дополнительных факторов.

Решение основано на одном свойстве характеристического уравнения, которое удалось получить в результате математической обработки корней этого уравнения. Вычислительная часть работы выполнена в вычислительной лаборатории Грузинского политехнического института им. В. И. Ленина.

3. *Принятые обозначения* (рис. 1)

D — средний диаметр пружины, (см);
d — диаметр проволоки, (см);
$c = D/d$ — индекс пружины;
i — число рабочих витков;
H_0 — высота пружины в свободном состоянии, (см);
H — высота пружины в сжатом состоянии, (см);
$I_0 = \pi d^4/64$ — момент инерции сечения проволоки, (см^4);

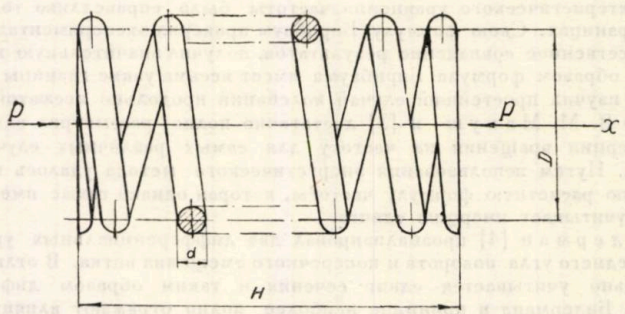


Рис. 1

$E = 2.1.10^5$ кг/см^2 — модуль упругости материала проволоки;
$G = 8.10^5$ кг/см^2 — модуль сдвига;
$\mu = 0{,}3$ — коэффициент Пуассона;
P — продольная сила, сжимающая пружину, (кг);
$\lambda = 8PD^3i/(Gd^4)$ — продольное сжатие пружины, (см);

$m = \lambda/H_0$ — коэффициент предварительного поджатия;
$\alpha = \operatorname{arctg}[H/(\pi Di)]$ — угол подъема витка в сжатом состоянии;
$\gamma = 7{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/см^3 — удельный вес материала проволоки;
ω — частота собственных поперечных колебаний пружины, (2π сек);
$g = 981$ см/сек^2 — ускорение силы тяжести;
Q — поперечная сила в сечении, (кг);
x — координата длины;
t — время.

4. *Исходные соотношения*

Основные характеристики эквивалентного бруса определяются следующими известными формулами [4]:

а) жесткость на сдвиг:

$$B_1 = 8EI_0 H/(\pi i D^3); \tag{4.1}$$

б) жесткость на изгиб:

$$B_2 = 2EI_0 H/[\pi i D(2+\mu)]; \tag{4.2}$$

в) площадь эквивалентного бруса:

$$A = \pi^2 Dd^2 i/(4H). \tag{4.3}$$

Если принять виток пружины за тор, но повернутый на угол α относительно плоскости, перпендикулярной оси пружины, то момент инерции витка относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости колебаний, равен:

$$I' = A\gamma D^2[1 + \sin^2\alpha + 5/(4c^2)]/(8g). \tag{4.4}$$

Когда $\alpha \leqslant 6°$, $c \geqslant 5$, момент инерции можно определять по упрощенной формуле:

$$I = A\gamma D^2/(8g) = \pi^2 d^2 D^3 i\gamma/(32gH), \tag{4.5}$$

погрешность которой не превышает $+3\,\%$-ов. Ординату изогнутой оси пружины определим как сумму двух прогибов:

$$y = y_M + y_Q, \tag{4.6}$$

где y_M и y_Q — соответственно перемещения, связанные только с изгибающим моментом и поперечной силой. Поперечная сила сдвига Q связана с продольной силой P соотношением:

$$Q = -B_1(1 + P/B_1)(\partial y_Q/\partial x). \tag{4.6}$$

Изгибающий момент, согласно элементарной теории изгиба, равен:

$$M_I = B_2(\partial^2 y_M/\partial x^2). \tag{4.8}$$

5. *Основные уравнения*

Рассмотрение проекции сил на вертикальное направление дает:

$$-\partial Q/\partial x = (\gamma A/g)(\partial^2 y/\partial t^2) + P(\partial^2 y/\partial x^2). \tag{5.1}$$

Уравнение вращения сечения будет:

$$-Q+\partial M/\partial x=(I\gamma/g)\left[\partial^3 y/(\partial x\,\partial t^2)\right]. \tag{5.2}$$

Вывод уравнений (5.1) и (5.2) можно найти упомянутой работе В. Л. Бидермана (*op. cit.*). Объединив эти уравнения, получим полное дифференциальное уравнение поперечных колебаний пружины:

$$\begin{aligned}&\partial^4 y/\partial x^4-\left[\gamma A/(gB_1)+\gamma I/(gB_2)\right]\left[\partial^4 y/(\partial x^2\,\partial t^2)\right]+\\&+\left[\gamma A/(gB_2)\right](1+P/B_1)(\partial^2 y/\partial t^2)+(P/B_2)(1+P/B_1)(\partial^2 y/\partial x^2)+\\&+\left[\gamma I/(gB_2)\right]\left[\gamma A/(gB_1)\right](\partial^4 y/\partial t^4)=0.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Решение этого дифференциального уравнения ищем в форме:

$$\eta=Y(\xi)(D_1\cos\omega t+D_2\sin\omega t)=Y(\xi)\,T(t), \tag{5.4}$$

где $\eta=y/H$, $\xi=x/H$ — безразмерные координаты.

После подстановки (5.4) в (5.3) получим дифференциальное уравнение для определения основной функции $Y(\xi)$:

$$Y^{IV}+2pY^{II}-q^2Y=0, \tag{5.5}$$

где:

$$p=\left[\gamma AH^2/(gB_1)+\gamma IH^2/(gB_2)\right](\omega^2/2)+\left[PH^2/(2B_2)\right](1+P/B_1)=p_1+p_2,$$

$$q^2=\left[\gamma AH^4/(gB_2)\right](1+P/B_1)\omega^2-\left[\gamma I/(gB_2)\right]\left[\gamma A/(gB_1)\right]H^4\omega^4.$$

Общий интеграл уравнения (5.5) будет:

$$Y(\xi)=C_1\operatorname{ch}\beta_1\xi+C_2\operatorname{sh}\beta_1\xi+C_3\cos\beta_2\xi+C_4\sin\beta_2\xi, \tag{5.6}$$

где: $C_1,\ldots,C_4$ — постоянные интегрирования, а β_1, β_2 являются корнями алгебраического уравнения $\beta^4+2p\beta^2-q^2=0$ и равны $\beta_1^2=-p+\sqrt{p^2+q^2}$, $\beta_2^2=p+\sqrt{p^2+q^2}$.

Два последних соотношения эквивалентны следующим выражениям:

$$\beta_1^2\beta_2^2=q^2,\quad \beta_2^2-\beta_1^2=2p,\quad q^2=\beta_2^4-2p\beta_2^2; \tag{5.7}$$

сжатому стержню, очевидно, соответствует $\beta_2>\beta_1$.

Граничные условия для жесткого крепления торцов пишутся следующим образом: в точках заделки прогиб и угол поворота сечения равны нулю. Итак, при $x=0$, $(\xi=0)$ и $x=H$, $(\xi=1)$, имеем $y=0$, $\partial y_M/\partial x=0$. Используя соотношения (4.6), (4.7) и (5.1), получим дифференциальную зависимость для y_M:

$$\frac{\partial y_M}{\partial x}=\frac{1}{1+P/B_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\gamma A}{gB_1}\int\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx\right), \tag{5.8}$$

которое после ряда преобразований приводится к следующему окончательному виду:

$$\partial y_M/\partial x = [T(t)/(1+P/B_1)]\{[(\beta_1^2+\alpha^2)/\beta_1](C_1 \operatorname{sh}\beta_1\xi + C_2 \operatorname{ch}\beta_1\xi) - \\ - [(\beta_2^2-\alpha^2)/\beta_2](C_3 \sin\beta_2\xi - C_4\cos\beta_2\xi)\}, \tag{5.9}$$

где $\alpha^2 = \gamma AH^2\omega^2/(gB_1)$.

Выражения (5.6) и (5.9) совместно с граничными условиями дают следующие 4 однородных уравнения относительно постоянных интегрирования:

1°. $\xi = 0,\ y = 0;\ C_1 + C_3 = 0.$

2°. $\xi = 1,\ y = 0;\ C_1 \operatorname{ch}\beta_1 + C_2 \operatorname{sh}\beta_1 + C_3\cos\beta_2 + C_4\sin\beta_2 = 0.$

3°. $\xi = 0,\ \partial y_M/\partial x = 0;\ [(\beta_1^2+\alpha^2)/\beta_1]C_2 + [(\beta_2^2-\alpha^2)/\beta_2]C_4 = 0.$

4°. $\xi = 1,\ \partial y_M/\partial x = 0;\ [(\beta_1^2+\alpha^2)/\beta_1](C_1 \operatorname{sh}\beta_1 + C_2 \operatorname{ch}\beta_1) -$

$$- [(\beta_2^2-\alpha^2)/\beta_2](C_3\sin\beta_2 - C_4\cos\beta_2) = 0.$$

Введем обозначения:

$$K_1 = (\beta_1^2+\alpha^2)/\beta_1, \quad K_2 = (\beta_2^2-\alpha^2)/\beta_2,$$

и приравняем определитель системы к нулю. Получим следующее характеристическое уравнение:

$$1 - \operatorname{ch}\beta_1\cos\beta_2 - [(K_2^2-K_1^2)/(2K_1K_2)]\operatorname{sh}\beta_1\sin\beta_2 = 0. \tag{5.10}$$

Преобразуем величины K_1 и K_2 так, чтобы они не содержали частоту ω в явном виде. Предварительно можем написать, что:

$$\alpha^2 = [2\pi^2\gamma/(gE)](CiD)^2\omega^2,$$

$$p = p_1 + p_2 = [\gamma\pi^2/(gE)](CiD)^2[(4+\mu)/2]\omega^2 + p_2 = [(4+\mu)/4]\alpha^2 + p_2.$$

Величина p_1 выражает влияние сдвига и центробежной силы и поскольку она зависит от частоты ω, заранее неизвестна. Величина p_2 зависит только от статической сжимающей силы P; обычно эта сила заранее задана и величина p_2 всегда известна.

Итак

$$K = [(K_2^2-K_1^2)/(2K_1K_2)] =$$

$$= \frac{\beta_1^2\left(\frac{4+2\mu}{4+\mu}p + \frac{4}{4+\mu}p_2 + \beta_1^2\right)^2 - (2p+\beta_1^2)\left[\beta_1^2 + \frac{4}{4+\mu}(p-p_2)\right]^2}{2\beta_1\sqrt{2p+\beta_1^2}\left(\frac{4+2\mu}{4+\mu}p + \frac{4}{4+\mu}p_2 + \beta_1^2\right)\left[\beta_1^2 + \frac{4}{4+\mu}(p-p_2)\right]}, \tag{5.11}$$

и характеристическое уравнение $1 - \operatorname{ch}\beta_1\cos\beta_2 - K\operatorname{sh}\beta_1\sin\beta_2 = 0$, совместно с зависимостью $\beta_2^2 - \beta_1^2 = 2p$, можно решить относительно корней β_1 и β_2.

6. *Анализ и решение характеристического уравнения*

Уравнение (5.10) является общим, т. е. оно составлено с учетом всех дополнительных факторов. Поэтому из него можно получить все частные случаи без учета тех или иных факторов. Разберем эти случаи.

1°. Не учитывается сдвиг и вращение ($p_1=0$), а также сжимающая сила ($p_2=0$). Тогда $p=p_1+p_2=0$ т. е. $\beta_1=\beta_2=\beta$ и $K=0$. Характеристическое уравнение максимально упрощается и принимает вид:

$$1-\operatorname{ch}\beta\cos\beta=0, \tag{6.1}$$

первые шесть корней которого равны:

$$\beta=4{,}730;\quad 7{,}853;\quad 10{,}996;\quad 14{,}137;\quad 17{,}279;\quad 20{,}420.$$

2°. Не учитывается сдвиг и вращение ($p_1=0$); учитывается сжимающая сила ($p_2\neq 0$). Такая постановка вопроса справедлива для длинных пружин, в которых влияние сдвига и вращения незначительно:

$$p=p_1+p_2=p_2,\quad K_1=\beta_1,\quad K_2=\beta_2,\quad K=[(\beta_2^2-\beta_1^2)/(2\beta_1\beta_2)].$$

Характеристическое уравнение будет:

$$1-\operatorname{ch}\beta_1\cos\beta_2-[(\beta_2^2-\beta_1^2)/(2\beta_1\beta_2)]\operatorname{sh}\beta_1\sin\beta_2=0. \tag{6.2}$$

Совместно с выражением $\beta_2^2-\beta_1^2=2p$, уравнение (6.2) позволяет точно установить границы изменения корней β_1 и β_2. Когда $\beta_1=\beta_2=\beta_{2\,\min}$, то $p_2=p_{2\,\min}=0$, $q=q_{\max}=\beta_{2\,\min}^2$ и приходим к известному характеристическому уравнению (6.1), но относительно корня $\beta_{2\,\min}$. Когда $\beta_1=0$, тогда $\beta_2=\beta_{2\,\max}$ и $p_2=p_{2\,\max}=\beta_{2\,\max}^2/2$, $q=q_{\min}=0$. Уравнение (6.2) переходит в следующее:

$$1-\cos\beta_{2\,\max}-(\beta_{2\,\max}/2)\sin\beta_{2\,\max}=0,$$

которое в свою очередь разбивается на два уравнения:

$$\sin(\beta_{2\,\max}/2)=0,\qquad \operatorname{tg}(\beta_{2\,\max}/2)=\beta_{2\,\max}/2. \tag{6.3}$$

В таблице 1 приведены первые шесть пар корней уравнений (6.3).

Общее уравнение (6.2) этого случая решаем численным методом

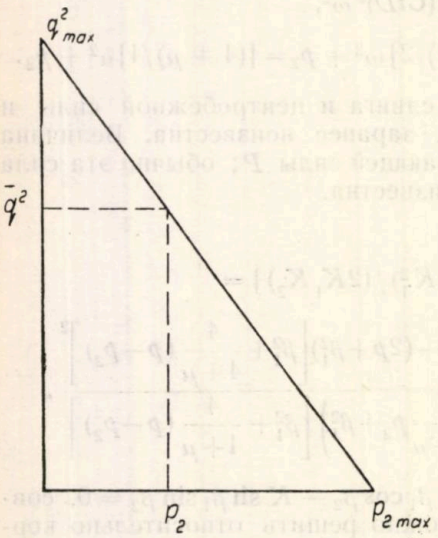


Рис. 2

Таблица 1

n	$\beta_{2\,\min}$	$\beta_{2\,\max}$
1	4,730	6,283
2	7,853	8,987
3	10,996	12,561
4	14,137	15,458
5	17,279	18,850
6	20,420	21,806

для следующих значений параметра p_2:

$$p_2 = 0\,(0{,}5)\,19;\ 19{,}4.$$

Полученная таким способом пара корней β_1 и β_2 для $n = 1$ дает возможность вычислить в каждом конкретном случае соответствующие величины q^2 и p_2 и обработать затем их способом наименьших квадратов. Зависимость $q^2 = q^2(p)$ практически получилась прямолинейная (рис. 2) и поэтому может быть представлена функцией:

$$\bar{q}^2 = \beta^4_{2\,\min} - 2\,(\beta^4_{2\,\min}/\beta^2_{2\,\max})\,p_2 = q^2_{\max}\,(1 - p_2/p_{2\,\max}), \tag{6.4}$$

которая точно удовлетворяет предельным значениям p_2 и q^2; как это будет показано ниже, в п. **7,** в реальной пружине предельные значения указанных параметров имеют место, только в исключительных случаях. Погрешность $\Delta q^2 = |(q^2 - \bar{q}^2)/q^2|\,100\,\%$ приближенного выражения (6.4) лежит в пределах 0,1 %...3,7 %, что для инженерных вычислений вполне достататочно, тем более, что в пересчете на частоту погрешность значительно меньше 3,7 %-ов.

3°. Отсутствует сжимающая сила ($p_2 = 0$); учитывается сдвиг и вращение ($p_1 \neq 0$); $p = p_1 + p_2 = p_1$.

Характеристическое уравнение будет:

$$1 - \operatorname{ch}\beta_1 \cos\beta_2 - \frac{\beta_1^2\left(\frac{4+2\mu}{4+\mu}p_1 + \beta_1^2\right)^2 - (2p_1 + \beta_1^2)\left(\beta_1^2 + \frac{4}{4+\mu}p_1\right)^2}{2\beta_1\sqrt{2p_1 + \beta_1^2}\left(\frac{4+2\mu}{4+\mu}p_1 + \beta_1^2\right)\left(\beta_1^2 + \frac{4}{4+\mu}p_1\right)} \operatorname{sh}\beta_1 \sin\beta_2 = 0, \tag{6.5}$$

которое решается совместно с уравнением $\beta_2^2 - \beta_1^2 = 2p_1$.

Границы изменения корней β_1 и β_2 устанавливаются аналогично предыдущему случаю. Когда $\beta_1 = \beta_2 = \beta_{2\,\max}$, то $p_1 = p_{1\,\min} = 0$, $q = q_{\max} = \beta^2_{2\,\max}$ и приходим к уравнению (6.1), но относительно корня $\beta_{2\,\max}$. Когда $\beta_1 = 0$, тогда $\beta_2 = \beta_{2\,\min}$ и $p_1 = p_{1\,\max} = \beta^2_{2\,\min}/2$, $q = q_{\min} = 0$.

Таблица 2

n	$\beta_{2\,\min}$	$\beta_{2\,\max}$
1	4,154	4,730
2	6,283	7,853
3	9,882	10,996
4	12,566	14,137
5	15,994	17,279
6	18,850	20,420

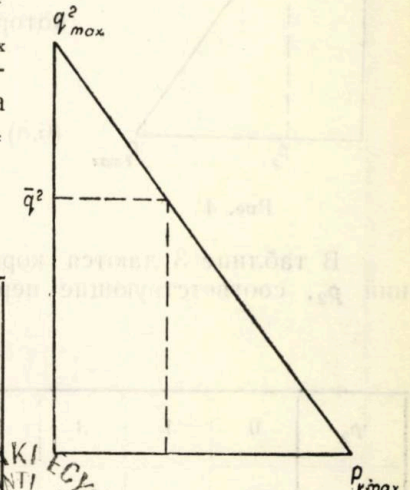


Рис. 3

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

Уравнение (6.5) переходит в следующее:

$$1-\cos\beta_{\min}+[\beta_{2\min}/(2+\mu)]\sin\beta_{2\min}=0,$$

которое разбивается на два уравнения:

$$(6.6)\qquad \sin(\beta_{2\min}/2)=0,\quad \operatorname{tg}(\beta_{2\min}/2)+[2/(2+\mu)](\beta_{2\min}/2)=0.$$

В таблице 2 даются первые шесть пар корней уравнений (6.6), когда $\mu=0{,}3$.

Общее уравнение (6.5) этого случая решаем численным методом для $p_1=0(1)8;\ 8{,}5$. Обработка результатов методом наименьших квадратов дает линейную зависимость (рис. 3):

$$(6.7)\qquad \bar{q}^2=\beta_{2\max}^4-2(\beta_{2\max}^4/\beta_{2\min}^2)p_1=q_{\max}^2(1-p_1/p_{1\max}),$$

которая точно удовлетворяет предельным знаечниям p_1 и q^2.

Точность линейной зависимости (6.7) для $n=1$ также вполне удовлетворительна, т. к. $\Delta q^2\leqslant 4\,\%$-ов.

4°. В наиболее общем случае справедливо уравнение (5.11), в котором учитывается как сжимающая сила ($p_2\neq 0$), так и сдвиг и вращение витка ($p_1\neq 0$).

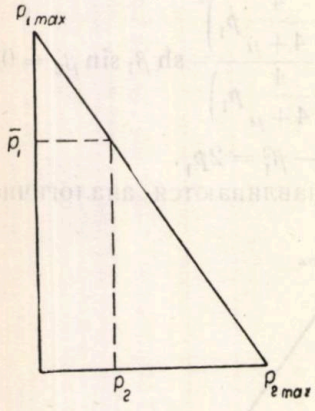


Рис. 4

Рассмотрим пределы изменения корней этого уравнения. Здесь, также как и в предыдущих случаях, когда $\beta_1=0$ и $q_{\min}=0$, от $\beta_2=\beta_{2\max}$ и $p=p_{\max}=\beta_{2\max}^2/2$. Предельное уравнение имеет вид:

$$1-\cos\beta_{2\max}+\frac{\beta_{2\max}(p_{\max}-p_2)}{(2+\mu)p_{\max}+2p_2}\sin\beta_{2\max}=0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$(6.8)\qquad \begin{cases}\sin(\beta_{2\max}/2)=0,\\ \operatorname{tg}(\beta_{2\max}/2)+(\beta_{2\max}/2)\times\\ \times\dfrac{2(\beta_{2\max}/2)^2-p_2}{(\beta_{2\max}/2)^2(2+\mu)+p_2}=0.\end{cases}$$

В таблице 3 даются корни этой системы для различных значений p_2, соответствующие первой гармонике ($n=1$), когда $\mu=0{,}3$.

Таблица 3

p_2	0	1	3	5	7	9	12	15	18	$2\pi^2$
$\beta_{2\max}$	4,154	4,302	4,582	4,840	5,080	5,304	5,612	5,892	6,143	2π

По известным значениям $\beta_{2\,max}$ определяем p_{max}, а затем и соответствующие значения p_1, $(p_1 = p - p_2)$, после чего методом наименьших квадратов устанавливаем приближенную линейную зависимость p_1 и p_2 (рис. 4):

$$\bar{p}_1 = p_{1\,max}(1 - p_2/p_{2\,max}). \tag{6.9}$$

Корни уравнения (5.11) были вычислены для двух независимых переменных p и p_2 или p_1 и p_2, $p = 0(1)18$ для каждого $p_2 = 0,1(2)9\,(3)18$. Во всех случаях зависимости $q^2 = q^2(p)$ для фиксированных значений p_2 практически оказались линейными и таким образом вся совокупность значений q^2 как функция двух переменных — p_1 и p_2 (рис. 5), может быть вычислена следующей упрощенной формулой:

$$\bar{q}^2 = q^2_{max}(1 - p_1/p_{1\,max} - p_2/p_{2\,max}) = \\ = \beta_2^4(1 - 2p_1/\beta^2_{2\,min} - 2p_2/\beta^2_{2\,max}), \tag{6.10}$$

погрешность которой Δq^2 не превышает 4 %-ов.

В таблице 4 даются значения β_2, $\beta_{2\,max}$ и $\beta_{2\,min}$ для первых трех гармоник.

Таблица 4

n	β_2	$\beta_{2\,max}$	$\beta_{2\,min}$
1	4,730	4,154	6,283
2	7,853	6,283	8,987
3	10,996	9,882	12,566

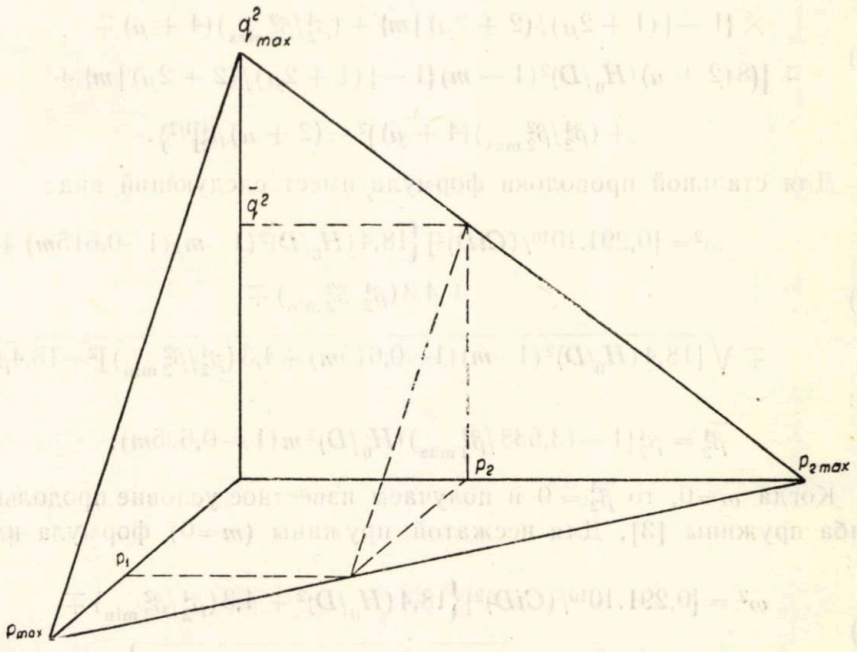


Рис. 5

7. *Определение частоты*

Для получения рабочей формулы частоты используем уравнение (6.10) и соответствующие значения параметров q^2, p_1 и p_2, которые в свою очередь зависят от частоты. Итак

$$q^2 = -[2\gamma^2\pi^4/(g^2E^2)](2+\mu)(CiD)^4\omega^4 +$$
$$+[8\gamma\pi^2/(gE)](2+\mu)(CiD)^2(H_0/D)^2(1-m)\left(1-\{(1+2\mu)/[2(1+\mu)]\}m\right)\omega^2,$$
$$p_1 = [\gamma\pi^2/(gE)][(CiD)^2[(4+\mu)/2]\omega^2,$$
$$p_2 = [(2+\mu)/(1+\mu)](H_0/D)^2 m\left(1-\{(1+2\mu)/[2(1+\mu)]\}m\right).$$

После подстановки в (6.10) получим следующее биквадратное уравнение относительно частоты:

$$\omega^4[2\gamma\pi^2/(gE)](CiD)^2-$$
$$(8.1)\qquad -\omega^2[8(2+\mu)(H_0/D)^2(1-m)\{1-[(1+2\mu)/(2+2\mu)]m\}+$$
$$+(\beta_2^4/\beta_{2\,\max}^2)(4+\mu)] + \bar{\beta}_2^4 gE/[\gamma\pi^2(CiD)^2] = 0,$$

где

$$\bar{\beta}_2^4 = \beta_2^4\left(1-\{2(2+\mu)/[\beta_{2\,\max}^2(1+\mu)]\}(H_0/D)^2 m\{1-[(1+2\mu)/(2+2\mu)]m\}\right).$$

Частота равна:

$$\omega^2 = \{gE/[4\gamma\pi^2(2+\mu)(CiD)^2]\}\{8(2+\mu)(H_0/D)^2(1-m)\times$$
$$\times\{1-[(1+2\mu)/(2+2\mu)]m\}+(\beta_2^4/\beta_{2\,\max}^2)(4+\mu)\mp$$
$$(7.2)\qquad \mp[(8(2+\mu)(H_0/D)^2(1-m)\{1-[(1+2\mu)/(2+2\mu)]m\}+$$
$$+(\beta_2^4/\beta_{2\,\max}^2)(4+\mu))^2-(2+\mu)\bar{\beta}_2^4]^{1/2}\}.$$

Для стальной проволоки формула имеет следующий вид:

$$\omega^2 = [0{,}291.10^{10}/(CiD)^2]\Big\{18{,}4(H_0/D)^2(1-m)(1-0{,}615m)+$$
$$(7.3)\qquad +4{,}3(\beta_2^4/\beta_{2\,\min}^2)\mp$$
$$\mp\sqrt{[18{,}4(H_0/D)^2(1-m)(1-0{,}615m)+4{,}3(\beta_2^4/\beta_{2\,\min}^2)]^2-18{,}4\bar{\beta}_2^4}\Big\},$$

где:

$$\bar{\beta}_2^4 = \beta_2^4[1-(3{,}538/\beta_{2\,\max}^2)(H_0/D)^2 m(1-0{,}615m).$$

Когда $\omega=0$, то $\bar{\beta}_2^4 = 0$ и получаем известное условие продольного изгиба пружины [3]. Для несжатой пружины ($m=0$) формула имеет вид:

$$\omega^2 = [0{,}291.10^{10}/(CiD)^2]\Big\{18{,}4(H_0/D)^2+4{,}3(\beta_2^4/\beta_{2\,\min}^2)\mp$$
$$(7.4)\qquad \mp\sqrt{[18{,}4(H_0/D)^2+4{,}3(\beta_2^4/\beta_{2\,\min}^2)]-18{,}4\beta_2^4}\Big\}.$$

Если взять $\beta_2 = \beta_{2\,max} = \beta_{2\,min} = n\pi$, то формулы (7.3) и (7.4) будут справедливы и для шарнирного крепления концов, но уже для любой гармоники, т. к. линейное соотношение (6.10) точно выполняется для этого случая граничных условий.

Исследование подкоренного выражения формулы (7.3) показывает, что оно всегда >0, т. е. частота не имеет мнимых значений. Действительно:

$$[18{,}4(H_0/D)^2(1-m)(1-0{,}615m)+4{,}3(\beta_2^4/\beta_{2\,min}^2)]^2-18{,}4\bar{\beta}_2^4>$$

$$>[4{,}3(\beta_2^4/\beta_{2\,min}^2)]^2-18{,}4\beta_2^4=18{,}4\beta_2^4[(\beta_2^4/\beta_{2\,min}^4)(4{,}3^2/18{,}4)-1]>0.$$

Поясним физический смысл нулевых значений параметров p и q^2. Когда $p=0$ и $q=q_{max}$, это значит, что не учитывается сдвиг, вращение и сжимающая сила; частота в этом случае получается максимальная, т. е.:

$$(7.5)\qquad \omega_0=\omega_{max}=\beta_2^4\,gB_2/(\gamma AH_0^4)=\{\beta_2^4\,gE/[8(2+\mu)\gamma\pi^2(CiD)^2]\}(D/H_0)^2,$$

или:

$$\omega_0=[0{,}875.10^6/(CiD)](D/H_0).$$

Этот случай в реальных пружинах не имеет места. Когда $q=0$ и $p=p_{max}$, влияние сдвигов и инерции максимальное, но частота не равняется нулю.

Свяжем параметры p и q^2 при $m=0$, когда:

$$p=p_{max}=[\gamma\pi^2/(gE)](CiD)^2[(4+\mu)/2]\omega^2,$$

откуда:

$$p_{max}[2/(4+\mu)]=[\gamma\pi^2/(gE)](CiD)^2\omega^2.$$

Но

$$q^2=8(2+\mu)(H_0/D)^2[\gamma\pi^2/(gE)](CiD)^2\omega^2-[2(2+\mu)\gamma^2\pi^4/(g^2E^2)](CiD)^4\omega^4=$$

$$=2(H_0/D)^2-p_{1\,max}/[2(4+\mu)]=0,$$

$$(H_0/D)^2=p_{1\,max}/[4(2+\mu)]=\beta_{2\,min}^2/[8(2+\mu)]=18{,}49/18{,}4\simeq 1.$$

Таким образом при $H_0/D=1$ влияние сдвига и вращения на основную частоту максимальное и это имеет место только в исключительных случаях. Как уже отмечалось, точность линейного соотношения (6.10) практически вполне удовлетворительна на всем интервале изменения p_1 и p_2 для первой частоты ($n=1$), т. е. от $\omega=\omega_0$ до $\omega\simeq 0$. Для высших гармоник, например $n=2;3$ вычисления показают, что соотношение (6.10) справедливо в более узких границах изменения p_1 и p_2, а именно $p_1/p_{1\,max}\leqslant 0{,}7$, $p_2/p_{2\,max}\leqslant 0{,}7$.

Поэтому оценим эти величины; трудность оценки состоит в том, что p_1 зависит от частоты, которая заранее неизвестна. Итак:

$$p_1 = \{(4+\mu)/[16(2+\mu)]\}\beta_2^4 (D/H_0)^2 z^2,$$

где $z = \omega/\omega_0 < 1$.

Известно, что влияние сдвига и вращения на частоту для шарнирного крепления меньше, чем для жесткого и поэтому $z_ш > z$. $z_ш$ легко определяется по формулам (7.3) или (7.4) (см. примечание к ним) и равно:

$$z_ш^2 = [2/(n\pi)^4](H_0/D)^2\{(n\pi)^2(4+\mu) + 18{,}4(H_0/D)^2(1-m)(1-0{,}615\,m) \mp$$
$$\mp \{[(n\pi)^2(4+\mu) + 18{,}4(H_0/D)^2(1-m)(1-0{,}615\,m)]^2 -$$
$$- 18{,}4(n\pi)^4\{1-[3{,}538/(n\pi)^2](H_0/D)^2 m(1-0{,}615\,m)\}\}^{1/2}\}.$$

Зная $z_ш^2$, находим оценку для p_1:

$$p_1/p_{1\max} < 0{,}239(\beta_2^4/\beta_{2\max}^2)(D/H_0)z_ш^2. \tag{7.6}$$

Оценка для P_2 не представляет особых трудностей, т. к.:

$$p_2/p_{2\max} = (3{,}538/\beta_{2\max}^2)(H_0/D)^2 m(1-0{,}615\,m). \tag{7.7}$$

На рис. 6 приведены графики изменения частоты в зависимости от величины предварительного поджатия m. Кривые *1* соответствуют частотам без учета сдвига и инерции вращения и вычислены по формуле:

$$\omega^2 = \{\beta_2^4 gE/[18{,}4\gamma\pi^2(CiD)^2(1-m)(1-0{,}615\,m)]\}(D/H_0)^2.$$

Кривые *2* вычислены с учетом вращения по формуле:

$$\omega^2 = [\beta_2^4 gE/(18{,}4\gamma\pi^2(CiD)^2\{(1-m)(1-0{,}615\,m) +$$
$$+ (D/H_0)^2[\beta_2^4/(8\beta_{2\max}^2)]\})](D/H_0)^2.$$

Кривые *3* соответствуют частотам с учетом сдвига и вращения по формуле (7.3). Графики ясно показывают, что только для достаточно длинных пружин можно пользоваться приближенными формулами.

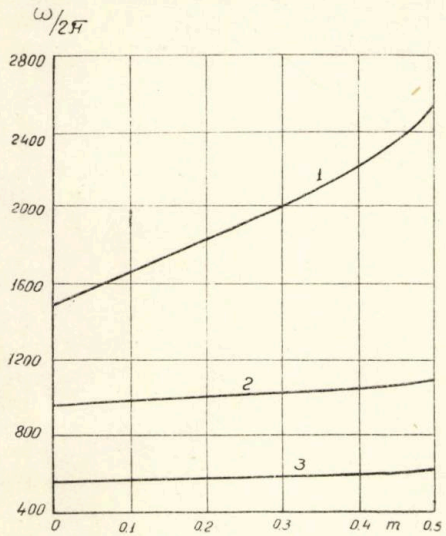
8. *Замечание*

Приближенное уравнение (6.10) можно получить разложением функции $q^2 = q^2(p)$ по степеням параметра $p/p_{\max}$.

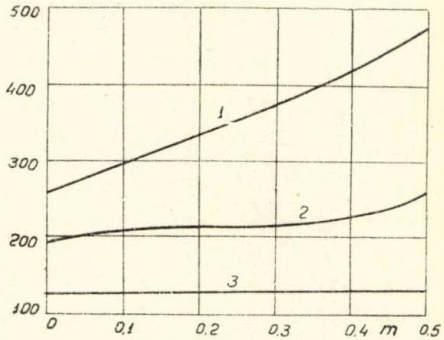
Действительно, согласно (5.7) можем написать:

$$q^2 = \beta_2^4 - 2(p_1 + p_2)\beta_2, \tag{8.1}$$

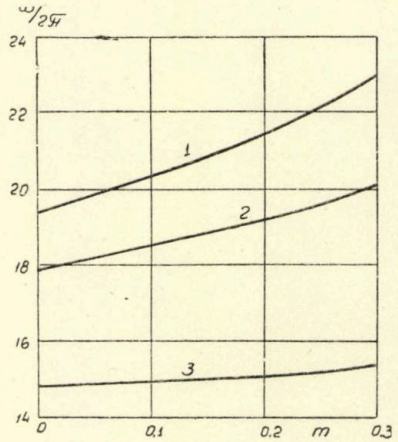
в котором p_1 и p_2 — независимые переменные. Воспользуемся правилом дифференцирования функции от двух переменных и найдем коэффициент разложения при первой степени независимых переменных. Получим:



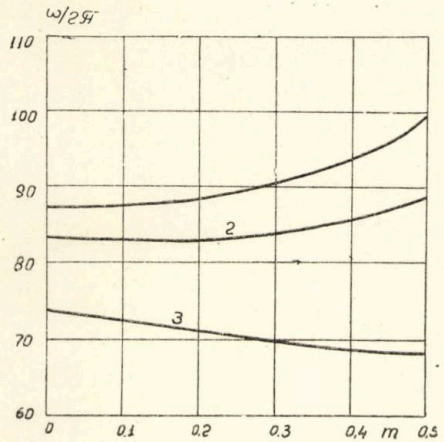
а) $D=5$, $C=6$, $i=3$, $H_0/D=1$.



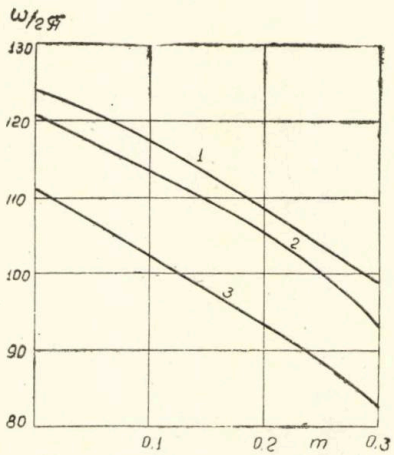
б) $D=10$, $C=8$, $i=5$, $H_0/D=1{,}2$.



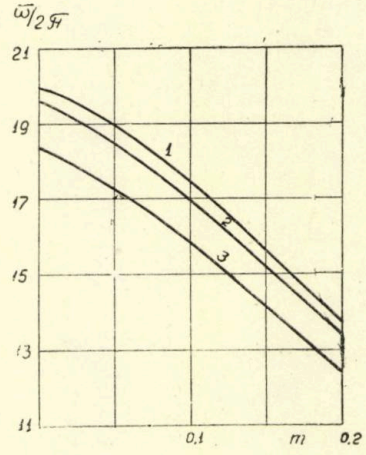
в) $D=6{,}8$, $C=17$, $i=20$, $H_0/D=3{,}65$.



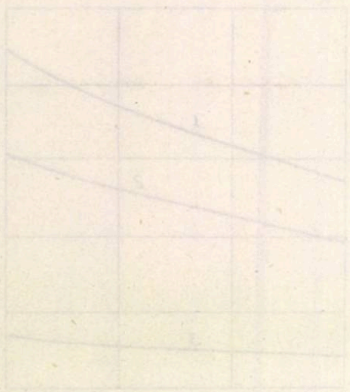
г) $D=6{,}25$, $i=12$, $H_0/D=4{,}2$,



д) $D=3{,}47$, $C=63$, $i=12$, $H_0/D=5{,}41$



е) $D=4{,}6$, $C=9{,}2$, $i=25$, $H_0/D=6{,}52$.



$$q^2(p_1, p_2) = q^2(0,0) + [(\partial q^2/\partial p_1)_0 p_{1\max a}(p_1/p_{1\max}) + \\ + (\partial q^2/\partial p_2)_0 p_{2\max}(p_2/p_{2\max})] + \cdots \tag{8.2}$$

Производные, входящие в последнее выражение, равны:

$$\partial q^2/\partial p_1 = 4\beta_2^3(\partial\beta_2/\partial p_1) - 4\beta_2(\partial\beta_2/\partial p_1)(p_1 + p_2) - 2\beta_2^2,$$

$$\partial q^2/\partial p_2 = 4\beta_2^3(\partial\beta_2/\partial p_2) - 4\beta_2(\partial\beta_2/\partial p_2)(p_1 + p_2) - 2\beta_2^2.$$

Для определения вспомогательных производных $\partial\beta_2/\partial p_1$ и $\partial\beta_2/\partial p_2$ используем основное характеристическое уравнение (5.10), в котором вместо p подставим $p_1 + p_2$.

Кроме того, введем обозначение $2/(2+\mu) = a$. Тогда:

$$K = (\beta_1^2[\beta_2^2 - (2/a)p_1]^2 - \beta_2^2\{\beta_2^2 - [(a-1)/a]2p_1 + 2p_2\}^2)/(2\beta_1\beta_2[\beta_2^2 - \\ - (2/a)p_1]\{\beta_2^2 - [(a-1)/a]2p_1 + 2p_2\}^2)$$

и если

$$f = 1 - \operatorname{ch}\beta_1 \cos\beta_2 - K \operatorname{sh}\beta_1 \sin\beta_2,$$

то соответствующие вспомогательные производные равны:

$$\partial\beta_2/\partial p_1 = -f'_{p_1}/f'_\beta = -\{\beta \operatorname{th}\beta \operatorname{ctg}\beta + [(4-a)/a]\operatorname{th}\beta\}/[\beta^2(-\operatorname{th}\beta\operatorname{ctg}\beta + 1)],$$

$$\partial\beta_2/\partial p_2 = -f'_{p_2}/f'_\beta = -(\beta \operatorname{th}\beta \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{th}\beta)/[\beta^2(-\operatorname{th}\beta\operatorname{ctg}\beta + 1)].$$

Принимая $\beta = 4{,}73 \cong 3\pi/2$, $\operatorname{th}\beta = 1$, $\operatorname{ctg}\beta = 0$, получим:

$$(1/\beta^4)(\partial q^2/\partial p_1)_0 p_{1\max} = -[2\beta(4+\beta)/\beta^4]/p_{1\max} \cong 1,$$

$$(1/\beta^4)(\partial q^2/\partial p_2)_0 p_{2\max} = -[2\beta(\beta-2)/\beta^4]p_{2\max} \cong 1.$$

Подставляя полученные значения в (8.1), учитывая, что $q^2(0,0) = \beta^4$, окончательно (8.1) можем записать в виде (6.10).

При желании уравнение (6.10) можно еще более уточнить, если в ряде (8.2) оставить члены с квадратами независимых переменных; однако расчеты показывают, что для первых трех гармоник поправка незначительна и ее можно не учитывать.

Поступила 23 XI 1961 г.

Грузинский политехнический институт им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Birnbaum W., Ztschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt, 1925, *3*.
2. Dick I., Phil. Mag. a. J. of Sci., 1942, **33**, 222.
3. Макушин В. М., *Поперечные колебания и устойчивость цилиндрических витых пружин*, Сб. *Динамика и прочность пружин*, АН СССР, М., 1950.
4. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., *Расчеты на мощность в машиностроении*, т. **III**, Машгиз, М., 1959.
5. Хвингия М. В., Тр. Груз. полит. ин-та им. С. М. Кирова, 1956, 7 *(48)*.

OSCILLAZIONI TRASVERSALI DELLE MOLLE SPIRALI CILINDRICHE SOTTOPOSTI ALLE FORZE ASSIALI

(Sunto)

L'Autore, prendendo le mosse dall'uno dei suoi studi anteriori [5] spettante allo studio delle autooscillazioni delle molle spirali cilindriche, consegue la risoluzione del problema di calcolo delle oscillazioni trasversali delle suddette molle sottoposte all'azione delle forze assiali, nel caso dell'incastro delle spire estreme.

Nella deduzione delle equazioni differenziali delle oscilazioni si è tenuto conto delle forze di compressione e di taglio e di torsione. La formola (6.10), valida per la prima armonica (fondamentale), permette l'analisi della dipendenza tra l'autooscillazione e la variazione della lunghezza della molle sottoposta alla compressione statica, pur tenendovisi conto degli altri fattori. Il calcolo si è eseguito al centro di calcolo dell'Istituto politecnico „V. I. Lenin" di Tbilisi (URSS).

OSCILAŢII TRANSVERSALE ALE RESORTURILOR SPIRALE CILINDRICE COMPRIMATE PRIN FORŢE AXIALE

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare una din lucrările sale anterioare [5] relativă la adîncirea studiului oscilaţiilor proprii ale resorturilor spirale cilindrice, iniţiat de W. Birnbaum [1], rezolvă problema, interesînd îndeosebi calculul amortizorilor, relativă la oscilaţiile transversale ale resorturilor menţionate supuse la acţiunea forţelor axiale, în cazul încastrării rigide la ambele capete.

În stabilirea ecuaţiilor diferenţiale a oscilaţiilor s-a ţinut seama de forţele de compresiune şi tăietoare, precum şi de torsiune. Formula (6.10), valabilă pentru armonica întîia (fundamentală), permite analizarea dependenţei între frecvenţa proprie şi variaţia lungimii resortului supus la compresie statică, ţinîndu-se seama de influenţa factorilor complimentari. Soluţia a fost obţinută pe baza unei proprietăţi a ecuaţiei caracteristice, complicată şi în toate cazurile similare studiate pînă acum [4], stabilită cu ajutorul laboratorului de calcul al Institutului politehnic „V. I. Lenin", Tbilisi, (URSS).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 517.934

METODĂ GRAFICĂ PENTRU STUDIUL MIŞCĂRII UNOR SISTEME NELINIARE NEAUTONOME DE TIP GENERAL, CU UN GRAD DE LIBERTATE

DE

ALFRED BRAIER

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Pentru studiul mişcării sistemelor neliniare cu un grad de libertate se utilizează frecvent metoda planului de fază [1], care permite şi construcţia grafică a soluţiei ecuaţiei diferenţiale ce descrie mişcarea. Atunci cînd sistemul este neautonom, descris de ecuaţii de forma:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t), \tag{1}$$

se pot utiliza metodele grafice date în [2] şi [3]. În [4], la § 2, s-a indicat procedeul de studiu a sistemelor neautonome de tipurile:

$$\begin{cases} \ddot{x} + f(x, t) = F(t), & \ddot{x} + \dot{x} + f(x, t) = F(t), \\ \ddot{x} + f(\dot{x}, t) = F(t), & \ddot{x} + f(\dot{x}, t) + x = F(t). \end{cases} \tag{2}$$

În lucrarea de faţă se propune un procedeu grafic pentru studiul mişcării a trei clase foarte generale de sisteme neliniare cu un grad de libertate, descrise de ecuaţii de forma:

$$\ddot{x} + f[A(x, \dot{x}), B(x, t)] = 0, \quad \ddot{x} + f[A(x, \dot{x}), C(\dot{x}, t)] = 0, \tag{3}$$

$$\ddot{x} + f[B(x, t), C(\dot{x}, t)] = 0,$$

în care A, B, C şi f reprezintă funcţii date analitic sau grafic.

2. Fie la momentul t_k starea sistemului caracterizată prin mărimile $x_k, \dot{x}_k$ şi $\ddot{x}_k$ şi reprezentată prin punctele $P'_k(\dot{x}_k, \ddot{x}_k)$ şi $P_k(x_k, \dot{x}_k)$ respectiv din planele de fază $(O', \dot{x}, \ddot{x})$ şi $(O, x, \dot{x})$ (fig. 1). Construcţia grafică care se propune utilizează în primul rînd faptul că

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \ddot{x}_k / \dot{x}_k = (\mathrm{d}\dot{x}/\mathrm{d}x)_k, \tag{4}$$

adică panta dreptei $O'P'_k$ din planul $(O', \dot{x}, \ddot{x})$ este egală cu cea a tangentei la traiectoria de fază ce trece prin punctul figurativ P_k al planului $(O, x, \dot{x})$. După construcţia lui $P_k P_{k+1} \| O'P'_k$ se obţine un alt punct al traiectoriei, anume P_{k+1}, şi ţinînd seama că

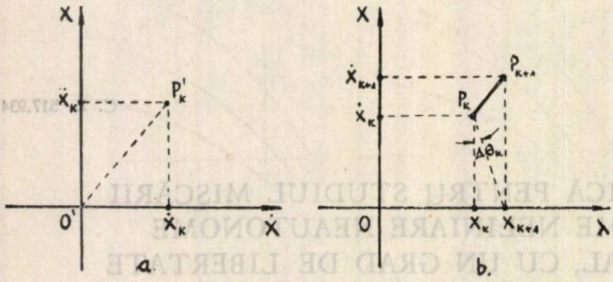


Fig. 1

(7) $\Delta t_k = \Delta x_k / \dot{x}_k = \operatorname{tg} \Delta\theta_k$,

în care $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k$, precum şi de faptul că în decursul construcţiei grafice Δx_k se păstrează suficient de mic,

(7′) $\Delta t_k = \Delta\theta_k$.

3. Dacă se introduc notaţiile:

(8) $\lambda = A(x, \dot{x}), \quad \mu = B(x, t), \quad \nu = C(\dot{x}, t),$

atunci ecuaţiile (3) care se studiază devin:

(3′) $\ddot{x} + f(\lambda, \mu) = 0, \quad \ddot{x} + f(\lambda, \nu) = 0$ şi $\ddot{x} + f(\mu, \nu) = 0.$

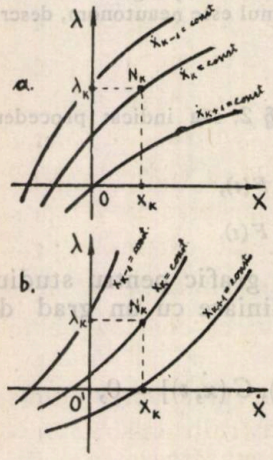


Fig. 2

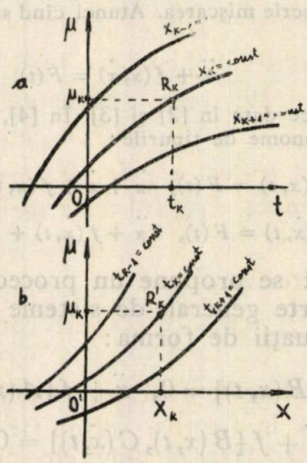


Fig. 3

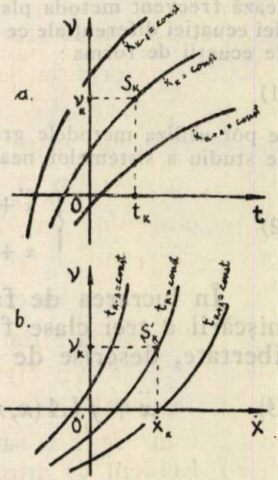


Fig. 4

Reprezentînd grafic dependenţele (8) şi (3′) pot apărea situaţiile indicate în fig. 2...7.

4. Fie acum prima ecuaţie (3′), adică

(3′ a) $\ddot{x} + f(\lambda, \mu) = 0.$

Pentru construcţia grafică este necesar de utilizat planele din fig. 1 şi cîte unul din planele reprezentate în fig. 2, 3 şi 5; se va alege planul în care construcţia curbelor este mai uşor de realizat.

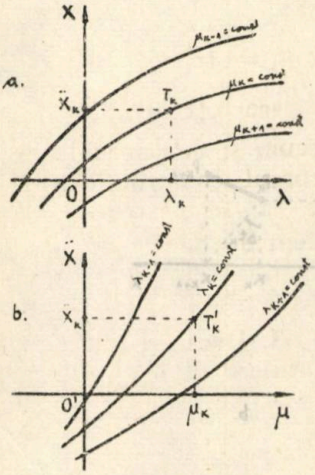


Fig. 5

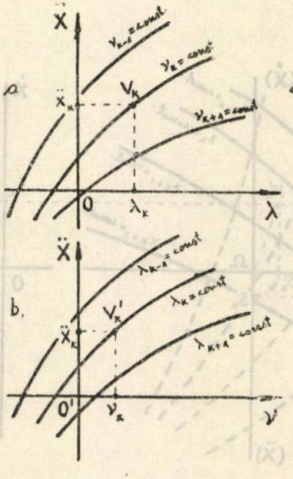
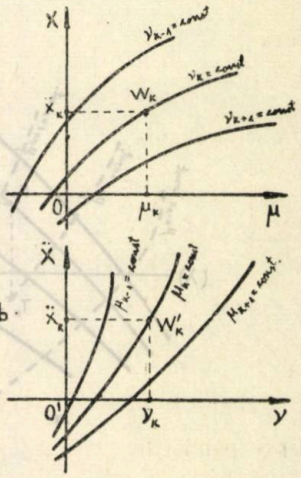


Fig. 6



F ig. 7

Plecînd de la starea sistemului la momentul t_k, caracterizată prin $x_k, \dot{x}_k$, se determină cu ajutorul fig. 2 valoarea λ_k, cu ajutorul fig. 3 valoarea μ_k şi apoi, cu ajutorul fig. 5, valoarea $\ddot{x}_k$. Dispunînd acum de coordonatele punctului P'_k din fig. 1 a, se poate construi în planul $(O, x, \dot{x})$ tangenta $P_k P_{k+1}$ la traiectoria de fază, paralelă cu $O'P'_k$. În acest mod se determină un alt punct, P_{k+1}, al traiectoriei, apropiat de P_k, precum şi intervalul de timp $\Delta t_k = \Delta\theta_k$ (v. fig. 1 b), necesar sistemului pentru a trece în starea caracterizată prin $x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}$. Revenind la fig. 2, 3 şi 5, se determină final $\ddot{x}_{k+1}$, ceea ce permite continuarea construcţiei în planele de fază din fig. 1.

În decursul construcţiei este foarte probabil ca pentru unele valori (de ex. $\dot{x}$ în fig. 2 a, sau μ în fig. 5 a) să nu fie construite curbele respective. Evident că atunci se fixează punctele corespunzătoare prin interpolare, între cele două curbe caracterizate prin valori ce încadrează pe cea necesară.

5. Construcţia grafică se simplifică sensibil dacă se alege reprezentarea grafică din fig. 2 b şi fig. 5 a, suprapunîndu-se şi axele λ ale planelor, ca în fig. 8. Atunci dispare şi necesitatea construcţiei separate a planului $(O', \dot{x}, \ddot{x})$, rămînînd numai de utilizat în plus unul din graficele din fig. 3. După alegerea scărilor pentru axele planului de fază $(O', x, \dot{x})$, scara lui $\ddot{x}$ din fig. 8 a apare determinată.

În concluzie, procedeul grafic simplificat se reduce la următoarele operaţii grafice: paralela la Ox dusă prin P_k şi prelungită în fig. 8 a, întîlneşte curba $x_k = \text{const.}$ în punctul N_k; perpendiculara ridicată în

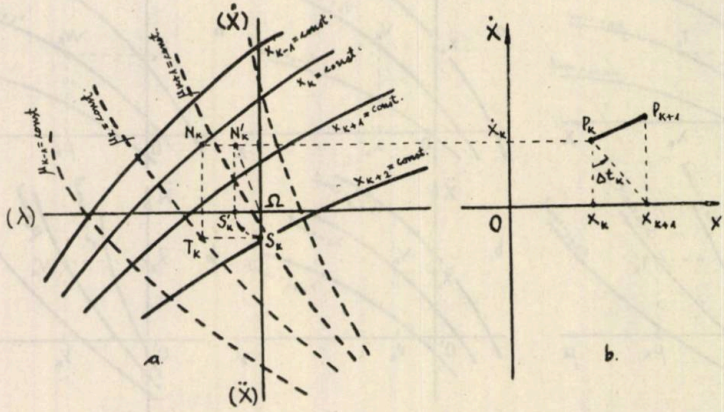


Fig. 8

N_k pe $P_k N_k$ întîlneşte curba $\mu_k = \text{const.}$ în punctul T_k (mărimea μ_k fiind determinată în prealabil cu ajutorul uneia din construcţiile din fig. 3). Paralela la Ox din T_k permite determinarea lui S_k (adică a lui $\ddot{x}_k$) care se rabate în S'_k prin rotaţia lui ΩS_k în jurul lui Ω, în sens trigonometric negativ. Se obţine atunci punctul N'_k, la intersecţia lui $S'_k N'_k \| Ox$ cu $P_k N_k$; perpendiculara dusă în P_k pe direcţia $\Omega N'_k$ furnizează direcţia tangentă la traiectoria de fază prin punctul P_k ($P_k P_{k+1}$ trebuie dusă perpendicular pe $\Omega N'_k$ pentru că planul $(\Omega, \dot{x}, \ddot{x})$, care se reconstituie în fig. 8 a, este rotit cu $\pi/2$ în raport cu poziţia din fig. 1 a). Dispunînd acum de $x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}$ şi $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$, cu ajutorul fig. 3 se determină noua valoare a lui μ, adică μ_{k+1}, şi se continuă procedeul indicat.

Trebuie observat că pentru construcţia simplificată nu este necesar să fie citite sau reţinute valorile mărimilor intermediare $\dot{x}, \lambda$ şi $\ddot{x}$, singura care interesează explicit fiind numai μ.

6. Oscilatorul descris de ecuaţia:

$$\ddot{x} + f(\lambda, \nu) = 0 \tag{3' b}$$

se tratează în mod analog. Pentru construcţia simplificată (fig. 9) trebuie folosite reprezentările grafice din fig. 2 b, fig 6 a, precum şi unul din graficele din fig. 4.

Procedeul de construcţie a traiectoriei de fază în planul $(O, x, \dot{x})$ este absolut analog cu cel descris pentru ecuaţia (3′ a), putînd fi urmărit pe fig. 9.

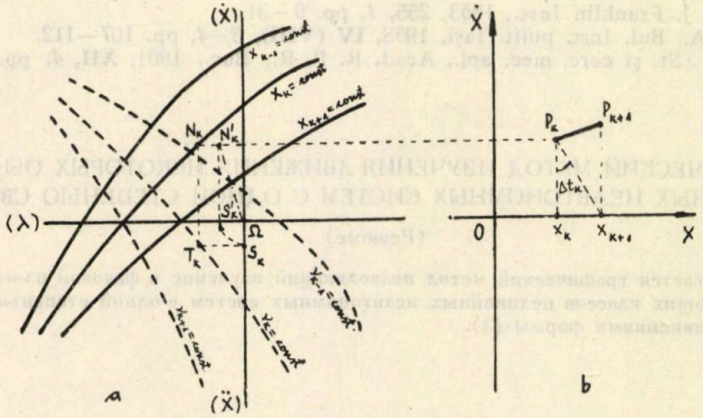


Fig. 9

7. Pentru studiul oscilatorului neliniar descris de ecuaţia:

$$\ddot{x} + f(\mu, \nu) = 0 \tag{3′ c}$$

este util de folosit graficele din fig. 4 b şi fig. 7 b, împreună cu una

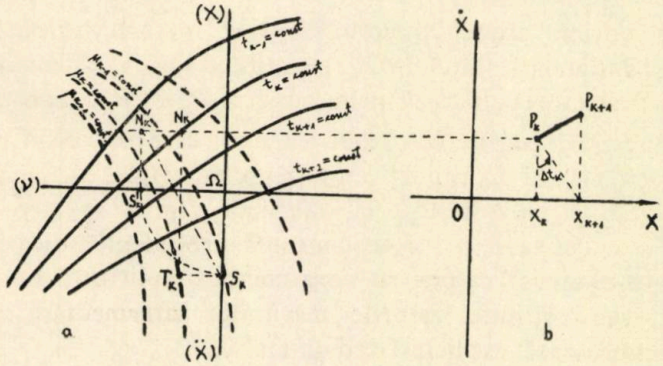


Fig. 10

din reprezentările grafice indicate în fig. 3. Construcţia simplificată se efectuează în conformitate cu fig. 10, pe care se pot urmări cu uşurinţă operaţiile necesare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanică teoretică

BIBLIOGRAFIE

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, М., 1958.
2. Ku Y. H., J. Franklin Inst., 1953, **255**, *1*, pp. 9—31.
3. Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 107—112.
4. — St. şi cerc. mec. apl., Acad. R. P. R., Buc., 1961, **XII**, *4*, pp. 883—897.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

(Резюме)

Предлагается графический метод позволяющий изучение в фазовой плоскости движения трех общих классов нелинейных неавтономных систем с одной степенью свободы, описанных уравнениями формы (3).

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR L'ÉTUDE DU MOUVEMENT DE CERTAINS SYSTÈMES NON-LINÉAIRES, NON-AUTONOMES, D'UN TYPE GÉNÉRAL, À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

(Résumé)

On présente une méthode graphique qui permet l'étude dans le plan des phases, du mouvement de trois classes très générales de systèmes non-linéaires, non-autonomes, à un degré de liberté, décrites par des équations du type (3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 620.193.4

COMPORTAREA LA COROZIUNE A OŢELURILOR CARBON DE CALITATE STAS 880 - 49

DE

TIBERIU GOLGOŢIU, TOMA FĂRCAŞ, GH. AILINCĂI, C. CIOCHINĂ, EMIL ANDREI, BOGDAN GHEORGHIU şi I. HOPULELE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

Într-o serie de lucrări anterioare privind coroziunea metalelor [1] ... [3] s-au stabilit metodele de încercare la coroziune, s-a propus un anumit mod de exprimare a rezistenţei la coroziune şi s-a arătat modul de comportare la coroziune a oţelurilor obişnuite STAS 500-49.

Pentru realizarea ciclului de lucrări propuse, în continuare s-a studiat comportarea la coroziune a oţelurilor carbon de calitate STAS 880-49.

Pentru a se putea face o comparaţie între oţelurile carbon obişnuite şi cele de calitate s-au folosit aceleaşi condiţii de lucru.

Ca metode s-au folosit: a) metoda imersiei succesive lente (*D*), b) metoda statică (*S*) şi c) metoda statică aerată prin barbotare (*B*), iar pentru urmărirea comportării la coroziune s-au luat în considerare următorii factori: a) mediile agresive: a_1) neutru, a_2) acid şi a_3) oxidant, precum şi b) variaţia concentraţiei mediilor agresive.

Ca medii agresive s-au utilizat soluţii de NaCl (mediu neutru), H_2SO_4 (mediu acid), NaOCl (mediu oxidant), în concentraţii de 1%; 3%; 5%, iar pentru NaCl şi concentraţiile de 10% şi 15%, pentru a ne situa în limitele condiţiilor practice mai frecvente. În mediu bazic (Na_2CO_3) nu s-au mai făcut încercări deoarece într-o lucrare anterioară [3] s-a dovedit că în acest caz nu se pun în evidenţă efecte corozive.

Determinările au fost efectuate la temperatura mediului ambiant.

Experienţele s-au întreprins pe probe cilindrice cu dimensiunile de 40×10 mm, corespunzătoare greutăţii medii de 25 g, din oţel laminat la diametre apropiate şi livrate cu buletin de analiză; perioada de încercare a fost de 10 zile.

Aprecierea gradului de corodare s-a făcut prin cîntărire, determinîndu-se pierderile de greutate cu precizia de 0,01 gf. Valoarea pierde-

rilor în greutate reprezintă, pentru fiecare caz în parte, media a 6...8 epruvete și sînt date în g%, precum și în „cori", unitate de măsură a gradului de corodare propusă de noi într-o lucrare anterioară [2].

Datele experimentale obținute sînt redate în tabelele 1, 2, 3.

Tabelul 1

Pierderile oțelului carbon de calitate (STAS 880–49) în mediu de NaCl

Nr. crt.	Metoda	Concentrația soluției de NaCl %	Oțelul											
			OLC 10		OLC 16		OLC 25		OLC 35		OLC 45		OLC 60	
			g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori
1		1	0,86	0,080	0,88	0,080	1,04	0,105	1,12	0,105	1,32	0,120	1,26	0,110
2		3	0,76	0,070	0,64	0,060	0,74	0,070	0,76	0,070	0,78	0,070	0,82	0,070
3	*D*	5	0,68	0,060	0,68	0,060	0,74	0,080	0,94	0,080	1,00	0,090	1,04	0,090
4		10	0,84	0,080	0,66	0,060	0,60	0,060	0,70	0,060	0,60	0,050	0,62	0,050
5		15	0,48	0,040	0,36	0,030	0,46	0,040	0,48	0,040	0,50	0,040	0,52	0,040
6		1	0,16	0,015	0,13	0,013	0,10	0,009	0,12	0,011	0,13	0,013	0,13	0,013
7		3	0,13	0,013	0,13	0,013	0,16	0,015	0,12	0,011	0,13	0,013	0,12	0,011
8	*S*	5	0,12	0,011	0,12	0,011	0,12	0,011	0,12	0,011	0,13	0,013	0,13	0,013
9		10	0,10	0,009	0,10	0,009	0,10	0,009	0,10	0,009	0,12	0,011	0,10	0,009
10		15	0,06	0,005	0,08	0,007	0,06	0,007	0,06	0,005	0,08	0,007	0,04	0,003
11		1	1,58	0,140	1,74	0,160	1,96	0,120	1,96	0,280	1,78	0,160	1,74	0,140
12		3	1,74	0,180	1,72	0,160	1,42	0,130	1,66	0,150	1,80	0,160	1,28	0,120
13	*B*	5	1,02	0,090	0,94	0,080	1,19	0,101	1,18	0,109	1,08	0,101	0,88	0,080
14		10	0,32	0,030	0,68	0,060	0,94	0,080	0,94	0,080	0,98	0,090	1,04	0,090
15		15	0,70	0,060	0,72	0,060	0,70	0,060	0,94	0,080	0,78	0,070	0,80	0,070

Tabelul 2

Pierderile oțelului carbon de calitate (STAS 880–49) în mediu de H_2SO_4

Nr. crt.	Metoda	Concentrația soluției de H_2SO_4 %	Oțelul											
			OLC 10		OLC 16		OLC 25		OLC 35		OLC 45		OLC 60	
			g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori
1		1	30,46	2,86	28,24	2,66	29,02	2,72	30,88	2,91	13,50	1,36	26,96	2,53
2	*D*	3	24,74	2,42	26,20	2,46	47,20	4,43	28,82	2,72	80,40	7,56	61,30	5,76
3		5	25,26	2,46	23,72	2,22	51,16	4,80	69,56	6,55	81,20	7,63	68,02	6,40
4		1	1,64	0,15	0,62	0,05	4,74	0,44	3,68	0,34	2,60	0,24	2,46	0,22
5	*S*	3	6,18	0,58	1,96	0,18	12,28	1,15	12,70	1,19	21,20	1,99	19,76	1,85
6		5	3,04	0,28	1,72	0,16	12,53	1,18	12,04	1,13	27,78	2,60	31,80	2,99
7		1	2,18	0,20	4,92	0,46	5,96	0,56	5,90	0,55	6,20	0,58	5,96	0,56
8	*B*	3	7,86	0,73	5,82	0,54	18,00	1,69	25,02	2,41	8,40	0,79	8,00	0,75
9		5	6,32	0,59	4,72	0,44	20,20	1,90	42,78	4,01	57,18	5,36	54,44	5,14

Tabelul 3

Pierderile oțelului carbon de calitate (STAS 880-49) în mediu de NaOCl

Nr. crt.	Metoda	Concentrația soluției de NaOCl %	Oțelul											
			OLC 10		OLC 16		OLC 25		OLC 35		OLC 45		OLC 60	
			g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori
1		1	5,24	0,49	5,90	0,55	5,30	0,49	5,94	0,55	4,86	0,45	3,06	0,28
2	*D*	3	6,84	0,64	6,04	0,56	7,48	0,70	7,32	0,68	6,56	0,61	6,80	0,64
3		5	5,08	0,47	6,28	0,59	6,10	0,57	5,46	0,51	5,10	0,47	4,54	0,42
4		1	2,08	0,18	2,20	0,19	1,34	0,12	2,26	0,21	2,08	0,19	2,54	0,23
5	*S*	3	6,58	0,61	5,80	0,54	7,82	0,73	6,76	0,63	7,06	0,66	7,24	0,68
6		5	2,76	0,25	0,98	0,09	1,82	0,16	1,02	0,09	0,50	0,04	1,06	0,09
7		1	2,22	0,20	1,52	0,14	1,98	0,17	2,32	0,22	1,72	0,16	1,65	0,15
8	*B*	3	7,46	0,69	7,64	0,71	6,64	0,62	7,86	0,73	6,62	0,62	6,46	0,60
9		5	5,14	0,48	5,18	0,48	5,22	0,48	4,84	0,45	4,28	0,40	3,10	0,29

Urmărind aceste date în funcție de metodă, mediu și concentrația mediului, pentru fiecare sort de oțel carbon de calitate, se observă următoarele:

1. La metoda imersiei succesive (*D*) oțelurile studiate se comportă astfel: a) în mediu neutru (NaCl), la toate sorturile de oțel, pierderile în greutate scad cu concentrația soluției; b) în mediu acid (H_2SO_4), la sorturile de oțel de îmbunătățire (OLC 25 ... OLC 60), pierderile în greutate cresc cu concentrația soluției, iar pentru oțelurile de cementare (OLC 10, OLC 16) scad; c) în mediu oxidant (NaOCl), la toate sorturile de oțel pierderile în greutate cresc pentru concentrațiile soluției de 1% și 3%, și scad pentru concentrația de 5%; atacul este mai puțin accentuat decît în mediul acid.

2. La metoda statică (*S*) aceste oțeluri se comportă după cum urmează: a) în mediu neutru (NaCl), la toate sorturile de oțel pierderile în greutate scad cu concentrația soluției; b) în mediu acid (H_2SO_4), la toate sorturile de oțel pierderile în greutate cresc cu concentrația soluției, pentru oțelurile de îmbunătățire creșterile fiind foarte pronunțate; c) în mediu oxidant (NaOCl), la toate sorturile de oțel pierderile în greutate cresc cu concentrația soluției pînă la o concentrație 3% și scad pentru concentrații mai mari; atacul este mai puțin accentuat decît în mediu acid.

3. În cazul metodei statice aerate prin barbotare (*B*), oțelurile studiate se comportă astfel: a) în mediu neutru (NaCl), la toate sorturile de oțel pierderile în greutate scad cu concentrația soluției; b) în mediu acid (H_2SO_4), la toate sorturile de oțel pierderile în greutate cresc cu concentrația soluției, pentru oțelurile de îmbunătățire creșterile fiind foarte pronunțate; c) în mediu oxidant (NaOCl), la toate sorturile de oțel pierderile în greutate cresc cu concentrația soluției pînă la o

concentrație de 3% și scad pentru concentrații mai mari; atacul este mai puțin accentuat decît în mediu acid.

Scăderea pierderilor în greutate pentru concentrații mai mari decît 3%, în cazul mediilor oxidante (NaOCl), se explică prin formarea unui strat protector de oxid de fier.

Din tabelele 1...3 se remarcă unele abateri de la linia generală indicată, fapt ce se poate explica prin existența impurităților în masa metalului supus încercărilor; abaterile reprezintă totodată o consecință a neomogenității metalului ca structură și compoziție chimică și a aglomerării repartiției impurităților etc.

Urmărind rezistența la coroziune a sorturilor de oțel studiate, în condițiile de experimentare folosite, și exprimînd această rezistență în „cori", se pot face următoarele constatări:

a) *În mediu neutru* (NaCl).

În cazul metodei imersiei succesive (*D*), pentru toate concentrațiile soluției, toate sorturile de oțel de calitate se încadrează în grupa 2 — rezistente (0,01 ... 0,1 cori).

La metoda statică (*S*), pentru concentrațiile soluției de 1%; 3%; 5%, toate sorturile de oțel se încadrează în grupa 2 — rezistente (0,01...0,1 cori) iar pentru concentrațiile soluției de 10% și 15%, în grupa 1 — foarte rezistente (sub 0,01 cori).

La metoda statică aerată prin barbotare (*B*), pentru concentrațiile soluției de 1%; 3% și 5% toate sorturile de oțel se încadrează în grupa 3 — puțin rezistente (0,1 ... 1 cori), iar pentru concentrațiile soluției de 10% și 15%, în grupa 2 — rezistente (0,01 ... 0,1 cori).

b) *În mediu acid* (H_2SO_4).

În cazul metodei imersiei succesive (*D*), pentru toate concentrațiile soluției, oțelurile carbon de calitate se încadrează în grupa 4 — foarte puțin rezistente (1 ... 10 cori).

La metoda statică (*S*), pentru toate concentrațiile soluției, oțelurile de cementare se încadrează în grupa 3 — puțin rezistente (0,1 ... 1 cori), iar oțelurile de îmbunătățire în grupa 4 — foarte puțin rezistente (1 ... 10 cori).

La metoda statică aerată prin barbotare (*B*), pentru concentrațiile soluției de 1%, toate sorturile de oțel se încadrează în grupa 3 — puțin rezistente (0,1 ... 1 cori); tot din această grupă fac parte oțelurile de cementare și pentru concentrațiile de 3% și 5%. Oțelurile de îmbunătățire, pentru concentrațiile soluției de 3% și 5%, se situează în grupa 4 — foarte puțin rezistente (1 ... 10 cori).

3. *În mediu oxidant* (NaOCl).

Pentru toate metodele folosite (imersie succesivă (*D*), statică (*S*), statică cu aerare prin barbotare (*B*)) și pentru toate concentrațiile soluției, oțelurile carbon de calitate se încadrează în grupa 3 — puțin rezistente (0,1 ... 1 cori).

Concluzii

Pe baza rezultatelor experimentale s-a ajuns la următoarele concluzii:

a) În soluțiile neutre (NaCl) se observă o descreștere a pierderilor de greutate, în cadrul aceleiași metode, pe măsura creșterii concentrației soluției. Pierderile sînt de același ordin de mărime la toate sorturile de

oțel de calitate, pentru o aceeași concentrație a soluției și o aceeași metodă utilizată, încît situează sorturile de oțel, din punct de vedere al rezistenței la coroziune, în aceeași grupă (grupa 2). Se observă un atac uniform.

b) În soluțiile acide (H_2SO_4) se observă, în general, că atacul crește cu concentrația la toate metodele. Pierderile sînt accentuate, ele variind între limite largi, în cadrul aceleiași concentrații și aceleiași metode întrebuințate. Atacul este puternic, general și uniform, orientîndu-se în sensul laminajului, ceea ce duce la o reducere accentuată a lungimii probei, în urma distrugerii capetelor epruvetelor. Aspectul suprafeței probei variază de la fin la rugos, în funcție de sortul de oțel. După clasificarea indicată, la corodarea în acest mediu oțelurile carbon de calitate se încadrează în grupa 3 și 4 de rezistență (puțin și foarte puțin rezistent).

c) În soluțiile oxidante (NaOCl) se observă, în general, că pentru toate metodele, atacul crește cu concentrația soluției pînă la o concentrație de 3% și scade la concentrația de 5%. Pierderile sînt de același ordin de mărime la toate sorturile de oțel, pentru o aceeași concentrație și o aceeași metodă folosită. La metoda prin imersie succesivă atacul este cu aspect neuniform, buretos, iar la metoda statică și statică aerată prin barbotare, atacul neuniform are loc sub forma unor insule mari, părțile neatacate rămînînd lucioase. Față de aceste medii, în toate condițiile folosite, oțelurile carbon de calitate se situează în grupa 3 de rezistență (puțin rezistente).

d) În comparație cu oțelurile carbon obișnuite (STAS 500-49), oțelurile carbon de calitate (STAS 880-49), se comportă la coroziune, în condițiile de lucru folosite, după aceleași reguli. Dispersia valorilor măsurate pentru aceeași condiție, este mult mai restrînsă decît pentru oțelurile carbon obișnuite, datorită unei purități și omogenități mai mari a acestor oțeluri.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie analitică
și
Catedra de tehnologia metalelor

BIBLIOGRAFIE

1. Fărcaș T. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *1—2*, pp. 337-340.
2. Golgoțiu T. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 289-292.
3 Golgoțiu T. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 293-300.

КОРРОЗИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ STAS 880-49

(Резюме)

Используя предложенные три лабораторных метода: а) метод последовательных медленных погружений, б) статический метод и в) статический метод аэрирования, авторы изучают коррозионную характеристику качественных углеродистых сталей (STAS 880-49), учитывая следующие факторы:

1. Коррозионная среда (нейтральная, кислотная, окисляющая);
2. Изменение концентраций коррозионной среды.

На основании полученных результатов выводятся следующие заключения:

а) В нейтральной среде (NaCl) констатируется уменьшение весовых потерь в рамках того же метода, по мере увеличения концентрации раствора. Потери одинаковы для всех сортов качественной стали, при одной и той же концентрации раствора и одного и того же метода. Следовательно все сорта стали, с точки зрения коррозионной устойчивости, принадлежат к одинаковой группе (2-ой группе устойчивости).

б) В кислотных растворах (H_2SO_4) вообще замечается, что атака увеличивается с увеличением концентрации раствора, при всех методах. Потери значительны; они варьируют в широких пределах в рамках тех же метода и концентрации. С точки зрения коррозионной устойчивости в этих средах качественные углеродистые стали принадлежат к 3-й и 4-ой группам устойчивости (мало устойчивы, очень мало устойчивы).

в) В окисляющих средах (NaOCl) вообще замечается, что при всех методах атака увеличивается с концентрацией раствора до 3% и уменьшается выше этой концентрации. Потери одинаковы для всех сортов стали, при тех же методе и концентрации. С точки зрения коррозионной устойчивости в этих средах качественные углеродистые стали принадлежат к 3-ьей группе коррозионной устойчивости (мало устойчивы).

г) По сравнению с обыкновенными углеродистыми сталями (STAS 500-49) поведение при коррозии качественных углеродистых сталей (STAS 880-49) проходит по тем же законам в используемых рабочих условиях. Рассеивание измеренных значений значительно ограничено по сравнению с обыкновенными углеродистыми сталями, вследствие большей однородности и чистоты качественных углеродистых сталей.

COMPORTEMENT À LA CORROSION DES ACIERS-CARBON DE QUALITÉ STAS 880-49.

(Résumé)

En utilisant les trois méthodes de laboratoire proposées: méthode de l'immersion succésive lente, méthode statique, méthode statique aérée par barbotage, les Auteurs ont étudié le comportement à la corrosion des aciers-carbon de qualité (STAS 880-49); en tenant compte des facteurs suivants: a) milieux agressifs (neutre, acide, oxydant), b) variation des concentrations des milieux agressifs.

On aboutit aux conclusions suivantes:

a) Chez les solutions de NaCl on constate une diminution des pertes pour une même méthode utilisée, au fur et à mesure que la concentration de la solution augmente. Les pertes sont du même degré de grandeur chez toutes les sortes d'acier expérimentées, pour une concentration donnée et à une même méthode utilisée, de sorte que ces aciers appartiennent à la 2-ième classe (résistants à la corrosion).

b) Chez les solutions de H_2SO_4 on observe, en général, que l'attaque s'intensifie au fur et à mesure que la concentration de la solution augmente, pour toutes les méthodes utilisées. Les pertes sont accentuées, en variant entre des limites larges, pour une concentration donnée de la solution et à une même méthode utilisée, de sorte que ces aciers appartiennent à la 3-ième et 4-ième (classe peu résistants et nonrésistants à la corossion).

c) Chez les solutions de NaOCl on observe, en général, que l'attaque s'intensifie au fur et à mesure que la concentration de la solution augmente jusqu'à la valeur de 3% et on observe une diminution des pertes pour les concentrations au dessus de 3%, pour toutes les méthodes. Les pertes sont du même degré de grandeur à toutes les sortes d'aciers expérimentées, pour une concentration donnée et à une même méthode utilisée, de sorte que ces aciers appartiennent à la 3-ième classe (peu résistans à la corosion).

d) Le comportement à la corrosion des aciers-carbon de qualité (STAS 880-49), par rapport aux aciers-carbon usuels (STAS 500-49), se déroule d'après les mêmes règles; on constate toutefois une dispersion plus étroite des valeurs determinées, compte tenu de la pureté plus élevée de ces aciers.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 536 41, 621.432

INFLUENŢA COEFICIENTULUI DE DILATARE LINIARĂ ASUPRA MĂRIMII DESCHIDERII SEGMENTULUI LA MONTAJ

DE

C. PICOŞ, BOGDAN GHEORGHIU şi VLADIMIR BURGARD

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

Mărimea deschiderii segmentului introdus în cilindru la montaj, se determină utilizînd relaţia:

$$f_c = f'_c + [\pi d \alpha_s (t_s - t_0) - \pi d \alpha_c (t_c - t_0)] , \tag{1}$$

în care: f_c — deschiderea segmentului introdus în cilindru la montaj, f'_c — deschiderea segmentului introdus în cilindru, în timpul funcţionării maşinii, α_c, α_s — coeficienţii de dilatare liniară pentru materialul cilindrului şi respectiv pentru materialul segmentului, t_c, t_s — temperatura cilindrului, respectiv a segmentului, în timpul funcţionării motorului, t_0 — temperatura la montaj.

În calculul deschiderii segmentului la montaj, utilizîndu-se expresia (1) se foloseşte următoarea aproximaţie: $\alpha_c = \alpha_s = 11.10^{-6}$. Această aproximare, privind coeficienţii de dilatare liniară, pentru segmenţii şi bucelele cilindrilor, poate duce adesea la o funcţionare necorespunzătoare a segmenţilor, care se poate manifesta printr-o înţepenire şi gripare a acestora, sau printr-o neetanşeitate între piston şi cilindru.

Cazurile practice confirmă necesitatea determinării separate a valorilor coeficienţilor de dilatare liniară pentru materialul segmenţilor şi bucelelor de cilindri.

În cele ce urmează vom determina experimental valorile coeficienţilor α_c şi α_s, ţinînd seama de următorii factori: a) natura materialului din care sînt confecţionaţi segmenţii şi bucelele de cilindri; b) structura metalografică a acestora, ca urmare a unor tratamente termice suferite; c) intervalul temperaturilor de lucru pentru segmenţi şi bucelele de cilindru.

În acest scop s-au folosit pentru confecţionarea de segmenţi şi bucele de cilindri, materialele indicate de literarura de specialitate, adoptînd de la început ipoteza practică a utilizării de materiale pentru segmenţi şi bucele de cilindri de compoziţie şi structuri diferite. Materialele utilizate sînt specificate în tabelul 1.

Pentru segmenţi s-a considerat cazul cel mai general al fontei cenuşii obişnuite, Fc-24 STAS 568-52, cu bază perlitică, cu grafit lamelar fin şi eutectic fosforos în reţea, de compoziţie: C = 3,23 % ; Si = 1,72 %; P = 0,42 %; S = 0,09 %; Mn = 0,74 %.

Pentru bucele de cilindri s-au considerat trei cazuri distincte, diferenţiate prin natura materialului utilizat şi prin structura metalografică, şi anume: a) fontă cenuşie superioară, cu elemente de aliere, Fc-28 STAS 568-52, cu bază perlito-sorbitică, cu grafit lamelar şi eutectic fosforos, de compoziţie: C = 3,14 %; Si = 2,11 %; Mn = 0,92 %; Ni = 0,58 %; Cr = 0,65 %; P = 0,18 %; S = 0,10 %; b) fonta menţionată la pct. a) însă tratată termic pentru mărirea rezistenţei la uzură, prin călire şi revenire. Baza obţinută a fost troostitică, cu grafit lamelar fin şi cu eutectic fosforos; c) oţel crom-molibden, pentru cementare (15 MoC 12, STAS 792-49) cu următoarea compoziţie: C = 0,14 %; Si = 0,32 % ; Mn = 0,93 %; Cr = 1,24 %; Mo = 0,27 %; P = 0,04 %; S = 0,028 %. Acest oţel se foloseşte la turnarea bucelelor de cilindri pentru motoarele cu ardere internă, care lucrează în regim forţat. Tratamentul termochimic şi termic aplicat acestui oţel a urmărit obţinerea unei durităţi superficiale mari, cu deformări cît mai mici după tratamentul termic.

Regimurile de lucru pentru tratamentele efectuate, indicate în tabelul 1, precum şi duratele de menţinere la diverse temperaturi, s-au ales în conformitate cu prevederile standardelor în vigoare.

Structurile metalografice efectuate au arătat atît reuşita tratamentelor aplicate, cît şi alegerea corectă a materialelor utilizate pentru fabricarea segmenţilor şi bucelelor de cilindri. Astfel, în fig. 1 se observă forma, mărimea şi repartiţia grafitului, la probele din fontă, şlefuite şi neatacate. Probele atacate au pus în evidenţă baza perlitică sau perlito-sorbitică a fontelor, cu repartiţia continuă în reţea a eutecticului fosforos (fig. 2).

Oţelul de cementare 15 MoC 12, după carburare timp de 8 ore cu un amestec format din: 13% $CaCO_3$, 7% NaCl şi 80% cărbuni de lemn, a fost călit şi revenit. Datele practice referitoare la carburare şi tratamentele termice sînt redate în tabelul 1.

Microstructura efectuată asupra oţelului 15 MoC 12, după carburare, scoate în evidenţă eficacitatea tratamentului termochimic aplicat, prin cei doi parametri: a) adîncimea stratului cementat (1,2 mm), b) gradul de cementare, care arată o concentrare a carbonului peste eutectoid. Microstructura este prezentată în fig. 3.

Tratamentele termice şi termochimice pentru materialele studiate au fost efectuate pe probe cilindrice ∅ 12 mm şi lungi de 65 mm. Aceste dimensiuni au fost impuse de folosirea dilatometrului sistem „Bauart Weiss", la care s-au determinat variaţiile lungimii probelor încălzite, variaţii care au intrat în calculul coeficienţilor de dilatare liniară.

Fig. 1. — Structura metalografică a fontei Fc-24, neatacată; ×300.

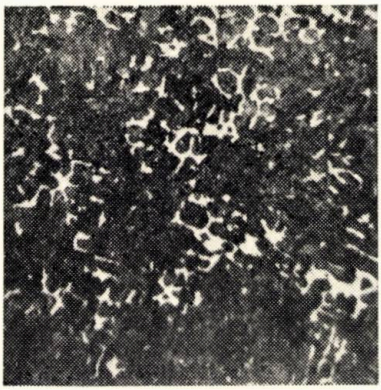


Fig. 2. — Structura metalografică a fontei Fc-24 atacată; ×300, atac nital 4%.

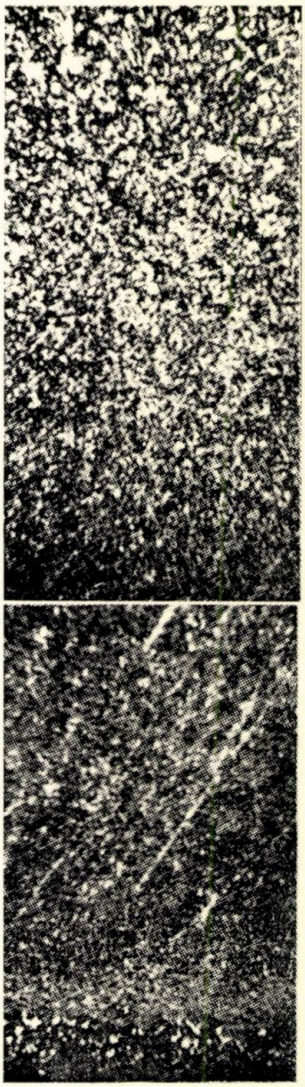


Fig. 3. — Structura metalografică a oţelului 15 MoC 12 cementat, călit şi revenit; ×150, atac nital 4%.

Tabelul 1

Caracteristicile fizico-chimice ale materialelor experimentate

Notaţia	Natura materialului şi destinaţia sa	Compoziţia chimică %								Carburare		Tratament termic						Structura	H_B kgf/cm²
												Recoacere		Călire		Revenire			
		C	Si	Mn	Ni	Cr	Mo	P	S	Încălzire °C	Răcire ° C	Încălz. °C	Răcire în	Încălz. °C	Răcire în	Încălz. °C	Răcire în		
A	Fontă cenuşie superioară pentru segmenţi (Fc-24)	3,23	1,72	0,74	—	—	—	0,42	0,09	—	—	—	—	—	—	—	—	Bază perlitică cu grafit fin lamelar şi cu eutectic fosforos în reţea	215
B	Fontă cenuşie specială, slab aliată, pentru cămăşi de cilindri (Fc-28)	3,14	2,11	0,92	0,58	0,65	—	0,18	0,10	—	—	570	cuptor	—	—	—	—	Bază perlito-sorbitică cu grafit fin lamelar şi cu eutectic fosforos în reţea	225
B_1	Fontă cenuşie specială, tratată termic, pentru cămăşi de cilindri	3,14	2,11	0,92	0,58	0,65	—	0,18	0,10	—	—	570	cuptor	840	ulei	300	aer	Bază troostitică cu grafit fin lamelar	380
C	Oţel crom—molibden pentru cementare 15 MoC 12	0,14	0,32	0,93	—	1,24	0,27	0,04	0,028	860	oală	660	cuptor	820	ulei	350	aer	Bază troostitică în stratul carburat	580

Alegerea domeniului de temperaturi, pentru stabilirea dilatării probelor, a fost determinată de regimurile de lucru ale segmenţilor şi bucelelor de cilindri, confecţionate din materialele menţionate mai sus.

Tabelul 2

Valorile coeficientului a *pentru materialele experimentate la anumite temperaturi*

Notaţia materialului	Temperatura °C	a, 10^{-6}		
		I	II	III
C	100	9,75	9,88	9,90
	120	10,15	10,20	10,08
	140	10,47	10,40	10,55
	160	11,17	11,25	11,35
	180	11,93	11,75	11,84
	200	12,03	11,95	12,14
	220	12,05	12,08	12,20
	240	12,07	12,15	12,30
	260	12,23	12,16	12,35
	280	12,43	12,25	12,37
	300	12,55	12,34	12,40
A	300	11,45	11,37	11,39
	320	11,63	11,72	11,69
	340	11,91	11,96	11,98
	360	12,33	12,22	12,30
	380	12,57	12,61	12,64
	400	12,83	12,79	12,74
B	100	7,80	7,75	7,71
	120	8,19	8,35	8,24
	140	9,17	9,28	9,13
	160	10,15	10,10	10,18
	180	10,70	10,55	10,63
	200	10,77	10,86	10,69
B_1	100	8,84	8,76	8,70
	120	9,34	9,40	9,21
	140	10,07	9,94	10,13
	160	10,61	10,79	10,71
	180	11,29	11,40	11,46
	200	11,74	11,82	11,87

Astfel, s-au considerat drept limite de temperaturi: a) 300...400°C pentru segmenţii confecţionaţi prin turnare, din fontă cenuşie normală (Fc-24); b) 100...200°C pentru bucelele de cilindri din fontă cenuşie superioară (Fc-28), folosite la motoarele cu solicitări termice normale, şi c) 100...300°C pentru bucelele de cilindri folosite la motoarele ce funcţionează cu un regim termic forţat.

Cercetarea s-a întreprins, pentru fiecare caz în parte, pe cîte trei probe identice tratate şi făcînd parte din aceeaşi şarjă. Datele numerice obţinute relative la dilatare sînt trecute în tabelul 2, iar pe baza lor s-au trasat curbele ce reprezintă variaţia coeficientului α cu temperatura, la materialele studiate.

Concluzii

a) Valorile cele mai coborîte ale coeficienţilor de dilatare s-au constatat la fontele netratate utilizate la bucelele de cilindri, iar valorile cele mai ridicate le prezintă oţelul de cementare. Variaţiile coeficienţilor de dilatare, determinate experimental, sînt reprezentate în fig. 4 şi 5.

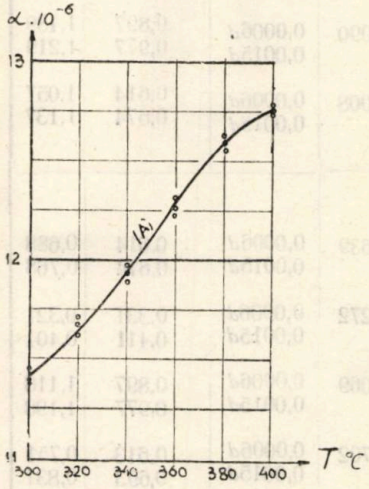


Fig. 4.—Variaţiile coeficienţilor de dilatare liniară funcţie de temperatură pentru Fc-24.

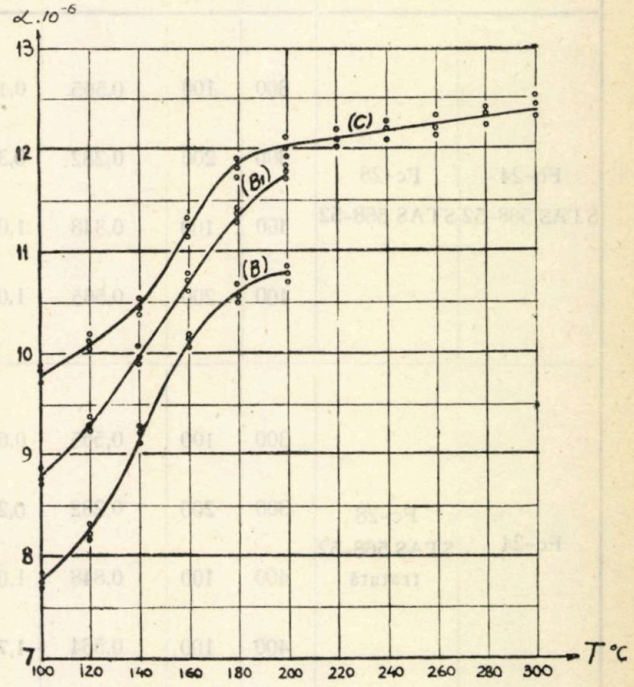


Fig. 5. —Variaţiile coeficienţilor de dilatare liniară funcţie de temperatură pentru : a) C — 15 MoC 12 ; b) B_1 — Fc-28 tratată ; c) B — Fc-28 netratată.

b) Pe baza valorilor obţinute experimental, pentru coeficienţii de dilatare, se pot aduce corecţiile corespunzătoare deschiderii segmentului la montaj în cilindru, corecţii ce pot avea valori importante în unele cazuri.

Pentru a evidenţia acest lucru s-a întocmit un tabel comparativ (tabelul 3) între valorile deschiderii segmentului la montarea lui, obţinute în următoarele două situaţii : a) cînd se folosesc valorile experi-

Tabelul 3

Comparație între valorile f_c *ale deschiderii segmentului la montaj folosind pentru* α *mărimea aproximativă* 11.10^{-6} *și datele experimentale (pentru motorul Gaz-51)*

Materialul segmentului	Materialul bucelei cilindrului	Temperatura de lucru °C		Valoarea $f_c - f_c'$		Valoarea f_c		
		a segmentului	a bucelei	$\alpha = 11.10^{-6}$	$\alpha_{exp.}$	Valoarea f_c'	$\alpha = 11,10^{-6}$	$\alpha_{exp.}$
Fc-24 STAS 568-52	Fc-28 STAS 568-52	300	100	0,565	0,146	0,0006*d* 0,0015*d*	0,614 0,694	0,195 0,275
		300	200	0,282	0,321	0,0006*d* 0,0015*d*	0,331 0,411	0,370 0,450
		400	100	0,848	1,090	0,0006*d* 0,0015*d*	0,897 0,977	1,139 1,219
		400	200	0,565	1,008	0,0006*d* 0,0015*d*	0,614 0,674	1,057 1,137
Fc-24	Fc-28 STAS 568-52 tratată	300	100	0,565	0,639	0,0006*d* 0,0015*d*	0,614 0,674	0,688 0,768
		300	200	0,282	0,272	0,0006*d* 0,0015*d*	0,331 0,411	0,321 0,401
		400	100	0,848	1,069	0,0006*d* 0,0015*d*	0,897 0,977	1,118 1,198
		400	100	0,564	1,702	0,0006*d* 0,0015*d*	0,613 0,693	0,751 0,831
Fc-24	Oțel 15 MoC 12 STAS 792-49 tratat	300	100	0,565	0,668	0,0006*d* 0,0015*d*	0,614 0,674	0,717 0,797
		300	300	0	0,08	0,0006*d* 0,0015*d*	0,049 0,129	0,041 0,121
		400	100	0,848	1,046	0,0006*d* 0,0015*d*	0,897 0,977	1,095 1,175
		400	300	0,282	0,342	0,0006*d* 0,0015*d*	0,331 0,411	0,391 0,471

mentale ale coeficienţilor α_c şi α_s; b) cînd se utilizează aproximaţia $\alpha_c = \alpha_s = 11.10^{-6}$.

Calculele s-au efectuat pentru motorul GAZ-51. Valorile temperaturilor de lucru pentru segmenţi şi bucele, folosite în calculele comparative, au fost cele extreme, indicate de literatura de specialitate.

După cum rezultă din datele tabelului 3, valorile deschiderii segmentului la montarea lui în cilindru, determinate pe cele două căi menţionate, diferă foarte mult, raportul acestor valori ajungînd uneori la valoarea 3.

Rezultă că determinarea valorilor reale pentru coeficienţii de dilatare liniară contribuie la calculul precis al deschiderii de montaj a segmenţilor şi la asigurarea bunei lor funcţionări.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia metalelor

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Segmenţi pentru pistoane,* Ed. Tehn., Buc., 1959.
2. Dumitrescu Tr., Popescu P., Com. Acad. R. P. R., 1956, VI, *12.*
3. Dumitrescu Tr. şi colab., St. şi cerc. metal., 1960, *4.*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ У ЧУГУНА ДЛЯ ПОРШНЕВЫХ КОЛЕЦ И ВТУЛОК ЦИЛИНДРОВ

(Резюме)

Даются опытные значения коэффициентов теплового расширения для поршневых колец и втулок цилиндров двигателей внутреннего сгорания, необходимые для расчета замка поршневых колец в рабочем состоянии.

Определяются опытные значения коэффициентов теплового расширения для поршневых колец и втулок цилиндров исполненых из наиболее пользуемых для этой цели материалов и при температурах вокруг среднего режимного значения.

На основание проведенных опытов выводится заключение, что природа материала металлографическая структура и температуры рабочего режима поршневых колец и втулок влияют в большей степени на значение коэффициента теплового расширителя.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Металлографическая структура нетравленного чугуна Fc-24; ×300.

Рис. 2. — Металлографическая структура травленного чугуна Fc-24; ×300. Атака нитал 4%.

Рис. 3. — Металлографическая структура цементированной закаленной и отпущенной стали 15 MoC 12; × 150. Атака нитал 4%.

Рис. 4. — Изменение коэффициентов теплового расширения в зависимости от температуры для Fc-24.

Рис. 5. — Изменение коэффициентов теплового расширения, в зависимости от температуры, для: а) *C* — 15 MoC 12; б) B_1 — Fc-28, обработанного термически; в) *B* — Fc-28, не обработанного термически.

DIE EINFLUSS DES ABSTANDES DER KOLBERINGE BEI DER MONTAGE, DURCH DEREN LÄNGEAUSDEHNUNGSKOEFFIZIENTEN

(Zusammenfassung)

Die vorliegende Arbeit enthält die experimentellen Werte der Längenausdehnungskoeffizienten für Kolbenringe und Zylinderbüchsen der Verbrennungsmaschinen, welche für Berechnung des Abstandes der montierten Kolbenringe benötigt werden.

Die experimentellen Werte der Längenausdehnungskoeffizienten für Kolbenringe und Zylinderbüchsen wurden für die gebräuchlichsten Werkstoffe und für eine Reihe die dem Mittelwert der Betriebsbedingungen nahestehen Temperaturen, ermittelt.

Die angestellten Versuche zeigten dass der Werkstoff, seine metallographische Strucktur und die Betriebstemperaturen für Kolbenringe und Zylinderbüchsen, den Wert des Längeausdehnungskoeffizienten ausschlaggebend bestimmen.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1.—Die metallographische Struktur eines nichtgeätzten Graugusses Fc-24 ; × 300.

Abb. 2.—Die metallographische Struktur eines geätzten Graugusses Fc-24 ; × 300. Ätze Nital 4%.

Abb. 3.—Die metallographische Struktur eines zementierten, geharteten und angelassenen Stahls, 15 MoC 12 ; × 150. Ätze Nital 4%.

Abb. 4.—Die Änderungen der Längeausdehnungskoeffizienten mit der Temperatur für Fc-24.

Abb. 5.—Die Änderungen der Längeausdehnungskoeffizienten mit der Temperatur, für : a) C — 15 MoC 12 ; b) B_1 — Fc-28 wärmebehandelt und c) B — Fc-28 nicht wärmebehandelt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 621.7.01

DETERMINAREA CONSTANTELOR ŞI EXPONENŢILOR DIN RELAŢIILE MOMENTULUI DE TORSIUNE ŞI A FORŢEI AXIALE, LA BURGHIEREA OŢELURILOR ROMÎNEŞTI

NOTA I

OŢELURILE STAS 793-53

DE

GH. CAŞLER şi AL. RENER

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

Catedra de maşini unelte, scule şi utilaj, a Institutului politehnic din Iaşi, a inclus de mai mulţi ani în preocupările sale ştiinţifice cercetarea experimentală a unor proprietăţi fizico-mecanice ale oţelurilor romîneşti în procesele de aşchiere. Pe această linie membrii catedrei au definitivat deja cercetările referitoare la stabilirea constantelor şi exponenţilor din relaţia forţei principale de aşchiere la strunjire, pentru toate oţelurile standardizate din R. P. R. Continuînd seria lucrărilor experimentale pentru aceleaşi materiale, membrii catedrei au trecut în ultimul timp la determinarea parametrilor în procesele de burghiere, folosind burghiile romîneşti fabricate la Fabrica de scule, Rîşnov.

Autorii, în lucrarea de faţă, s-au ocupat, în cadrul tematicii generale mai sus amintite, de problema determinării experimentale a constantelor şi exponenţilor din relaţiile forţei axiale:

$$P = C_P d^{x_P} s^{y_P} \tag{1}$$

şi a momentului de torsiune:

$$M_t = C_M d^{x_M} s^{y_M} \tag{2}$$

în procesele de burghiere la grupa oţelurilor cuprinse în STAS 793-53 şi anume: 13 N 15, 13 CN 25, 13 CN 35, 13 CN 45, 35 CN 15, 35 CN 25, 30 CN 35, 35 CN 45, 40 CN 12, 40 CN 17.

Datele experimentale s-au obţinut folosind un dinamometru tip Paramonov modificat, proiectat şi executat în laborator. Acest dinamometru funcţionează după următorul principiu (fig. 1):

Axul *1* al dinamometrului preia atît forţa axială *P* cît şi momentul de torsiune M_t, deoarece de el se fixează, printr-un dispozitiv, materialul de încercat. Axul *1* este sudat la plăcile *2* şi *2'* care, la rîndul lor fiind sudate la plăcile *3* şi *3'*, crează o legătură elastică a axului cu manşonul *4*, care este sudat prin patru aripi la corpul *6* al dispozitivului. În acest mod deformaţiile pe direcţia forţei axiale *P* se înregistrează la comparatorul cu cadran *7*, iar cele produse de momentul de torsiune M_t vor fi înregistrate la comparatorul cu cadran *10*, fiind transmise prin amortizorul hidraulic *11* de tija *12*, cu care este articulat. Construcţia dinamometrului permite să se măsoare forţe axiale pînă la circa 1 500 kgf şi momente de torsiune pînă la 800 kgf cm. Etalonarea dinamometrului a stabilit o sensibilitate pentru scara forţelor de 4,25 kgf pe o diviziune a comparatorului şi 4,22 kgf cm pentru o diviziune a comparatorului în cazul momentului de torsiune. Curba de etalonare a aparatului a stabilit de asemenea că deformaţiile variază liniar cu forţa axială şi cu momentul de torsiune.

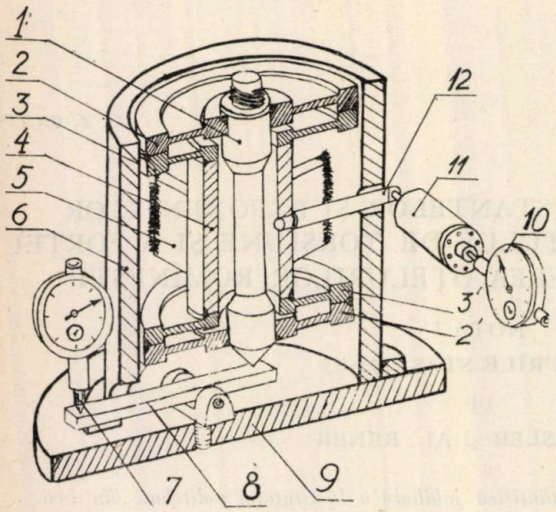


Fig. 1

Încercările experimentale s-au întreprins pe o maşină de găurit cu coloană, tip A2 „Înfrăţirea"—Oradea, care a permis să se lucreze cu patru avansuri şi anume: $s_1 = 0{,}08$ mm/rot, $s_2 = 0{,}13$ mm/rot, $s_3 = 0{,}2$ mm/rot, $s_4 = 0{,}31$ mm/rot. Burghiile ce s-au folosit sînt produse ale Fabricii de scule, Rîşnov, şi au următoarele caracteristici: a) materialul — oţel rapid, b) canale lustruite, c) raportul dintre grosimea miezului şi diametru $\eta = d_m/d = 0{,}15$ — constant pentru toate burghiile, d) unghiul $\omega = 30°$, e) metoda de ascuţire — conică (procedeul Whashborne), realizată cu ajutorul unui dispozitiv Kellenberger, adaptat pe maşina de rectificat universală KU 250 (R. P. U.). Ascuţirile s-au făcut la următoarea geometrie: $\alpha_{ex} = 12°$, $\psi = 55°$, $2\varkappa = 120°$ (valori ce se încadrează în prescripţiile STAS. Încercările s-au întreprins folosind lichid de răcire-ungere (5% emulsie).

Ca metodică, pentru fiecare oţel cercetat, s-au trasat două rînduri de drepte în diagrame dublulogaritmice, la $s = \text{const.}$ şi $d = \text{const.}$, atît pentru forţa axială *P* cît şi pentru momentul de torsiune M_t. Fiecare dreaptă $P = f_1(s)$, la $d = \text{const.}$, $P = f_2(d)$, la $s = \text{const.}$, $M_t = \varphi_1(s)$, la $d = \text{const.}$ şi $M_t = \varphi_2(d)$, la $s = \text{const.}$, în conformitate cu relaţiile (1)

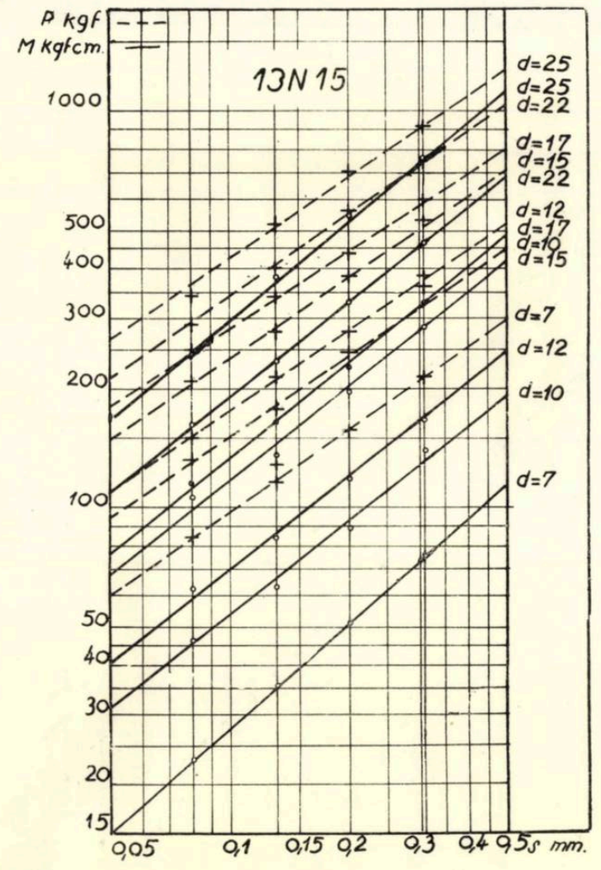


Fig. 2

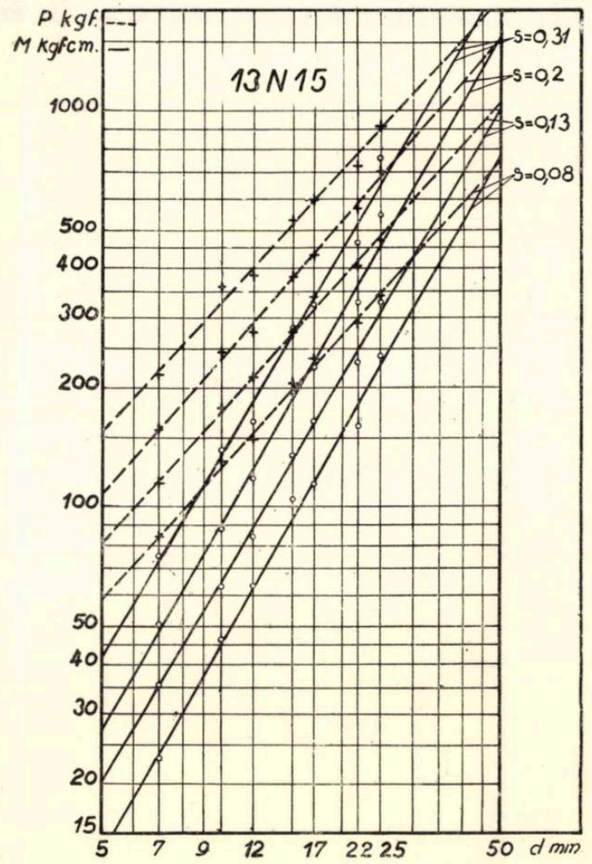


Fig. 3

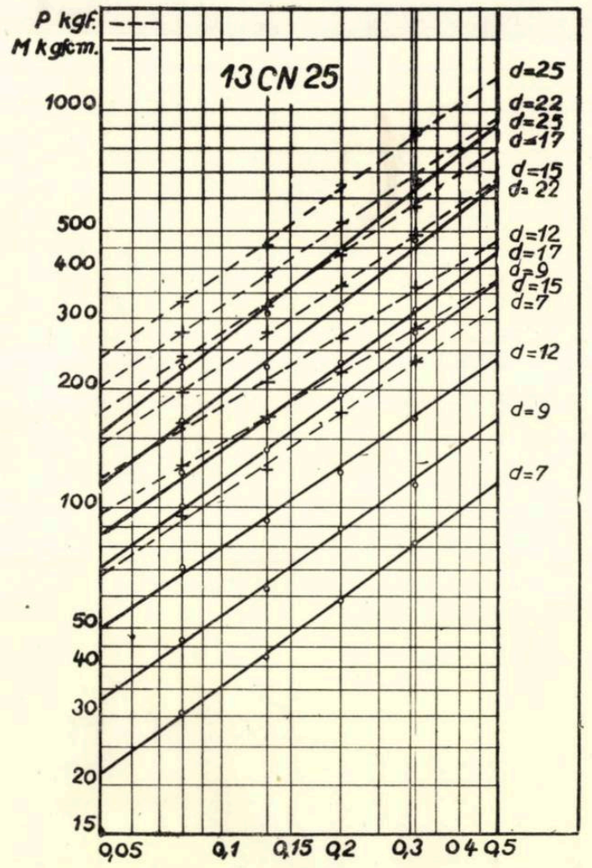


Fig. 4

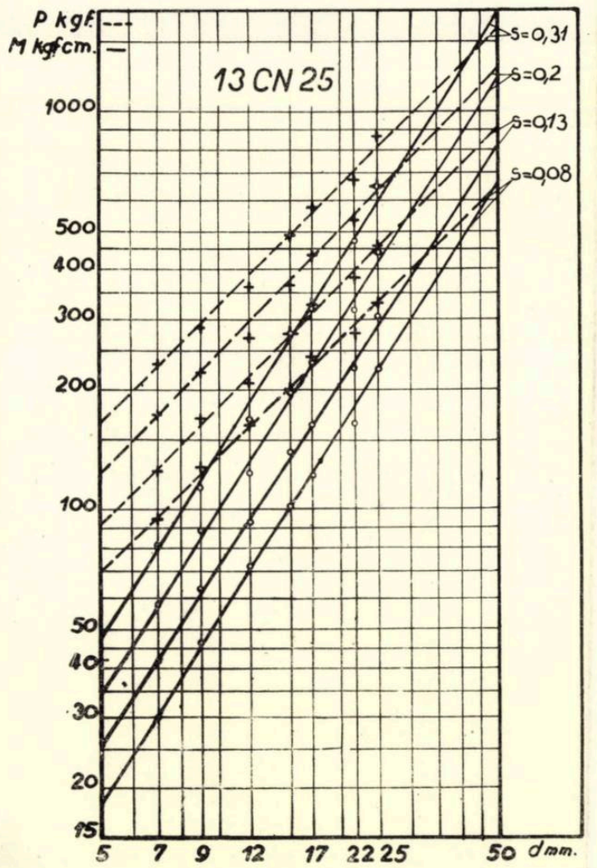


Fig. 5

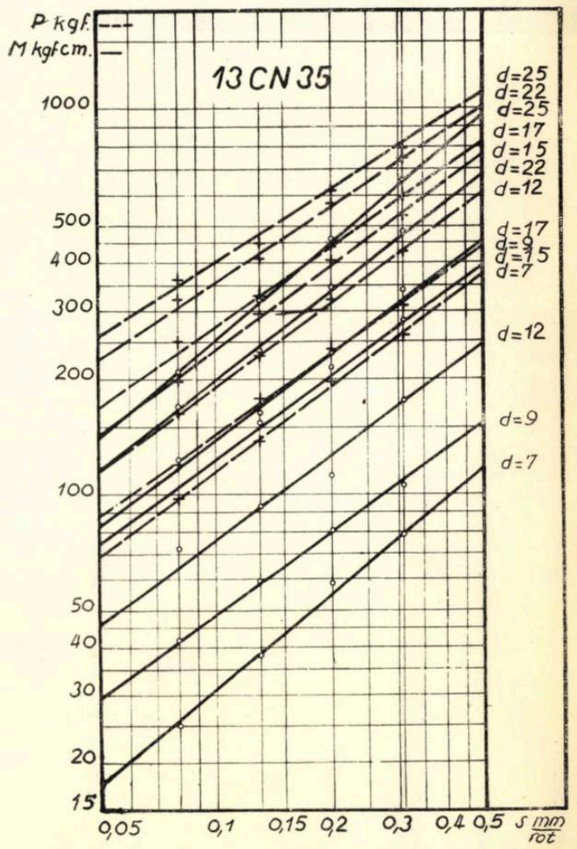


Fig. 6

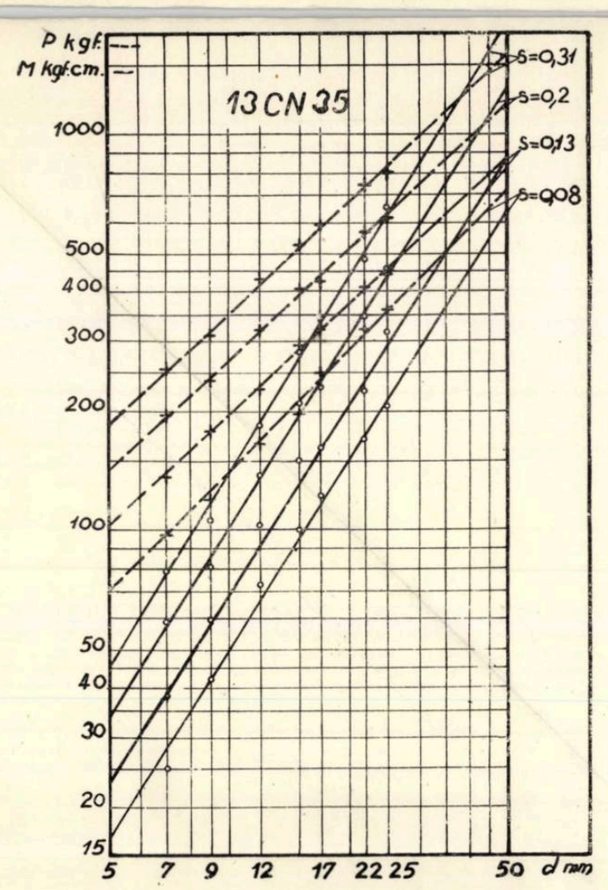


Fig. 7

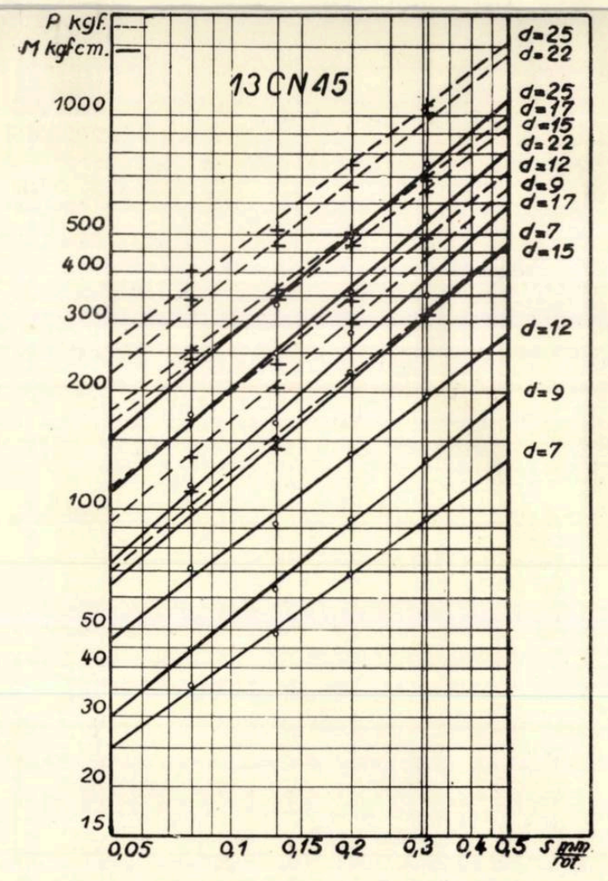


Fig. 8

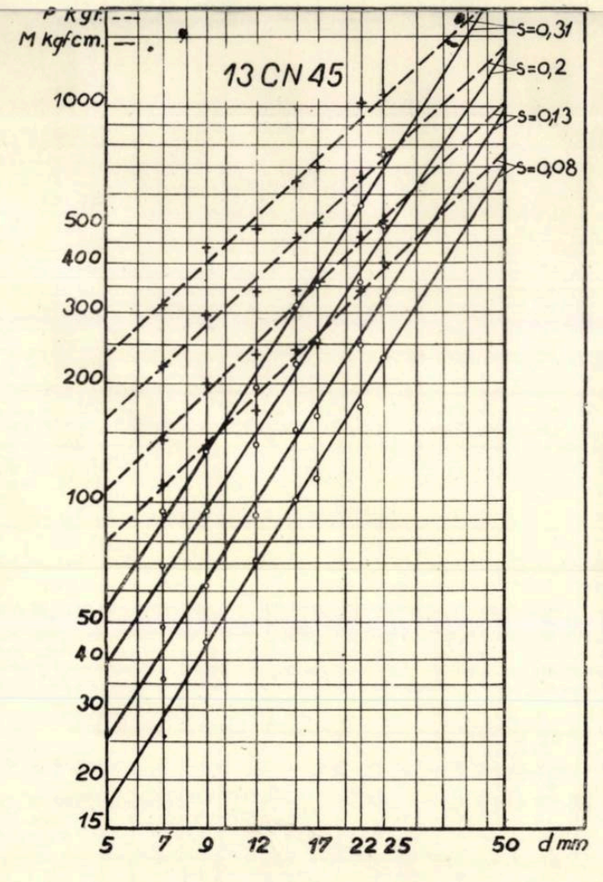


Fig. 9

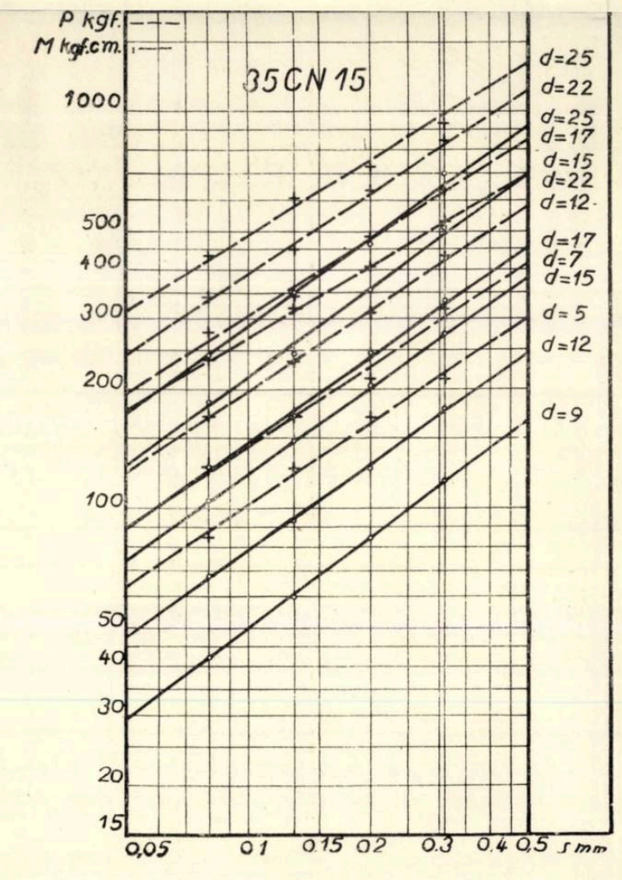


Fig. 10

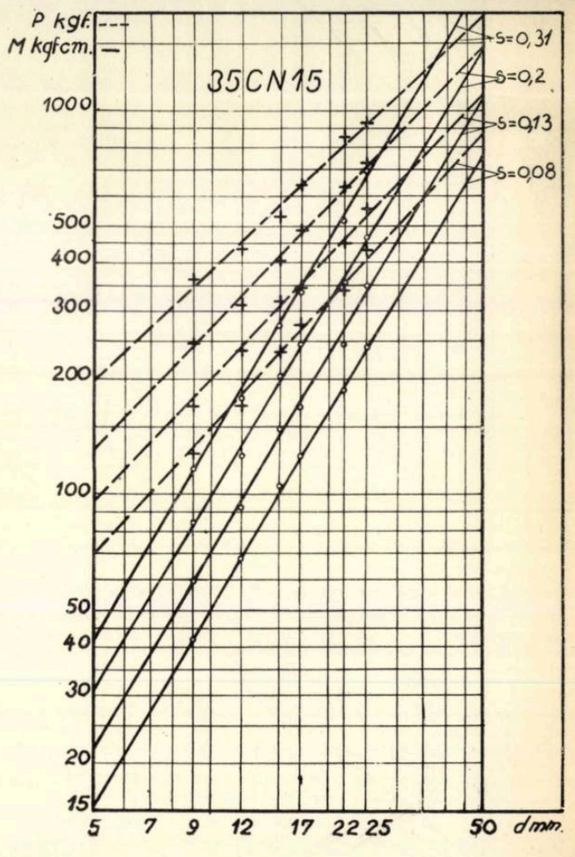


Fig. 11

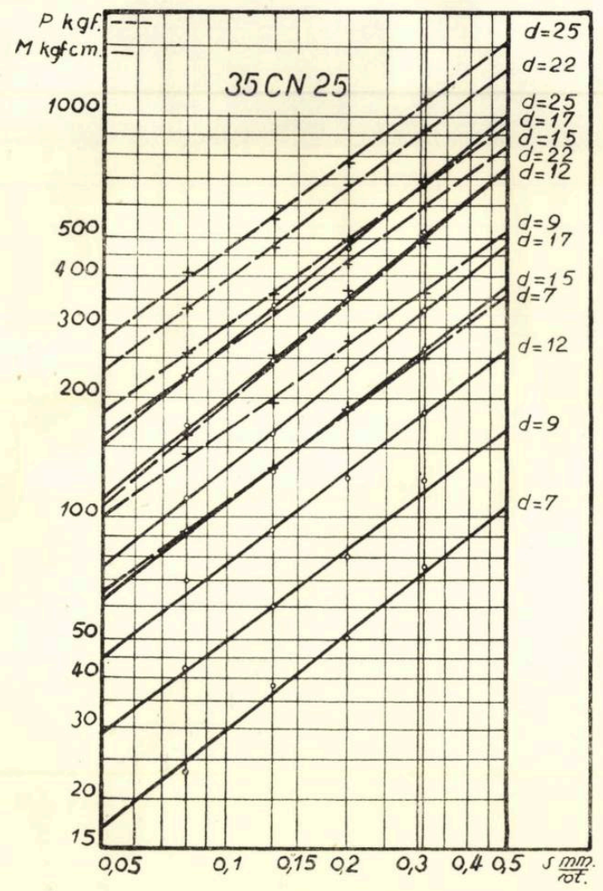


Fig. 12

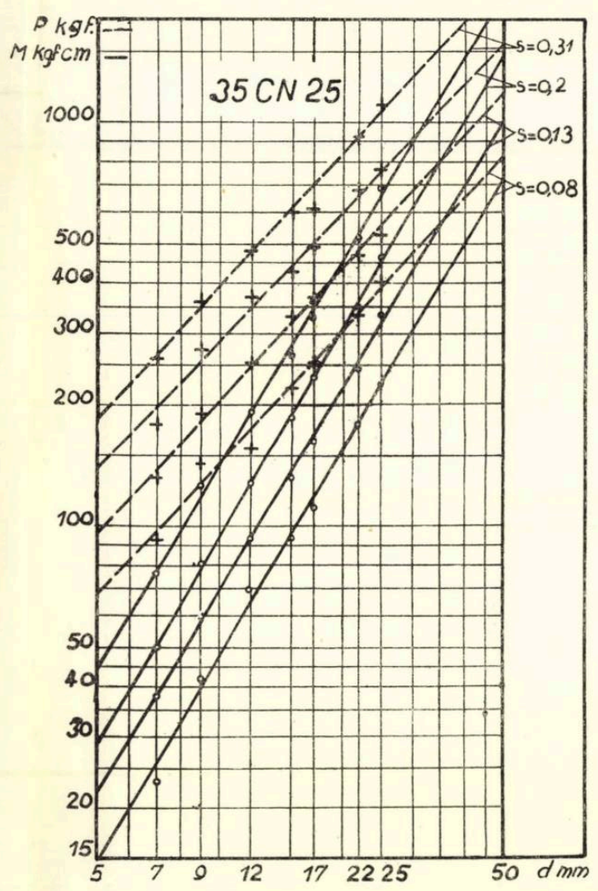


Fig. 13

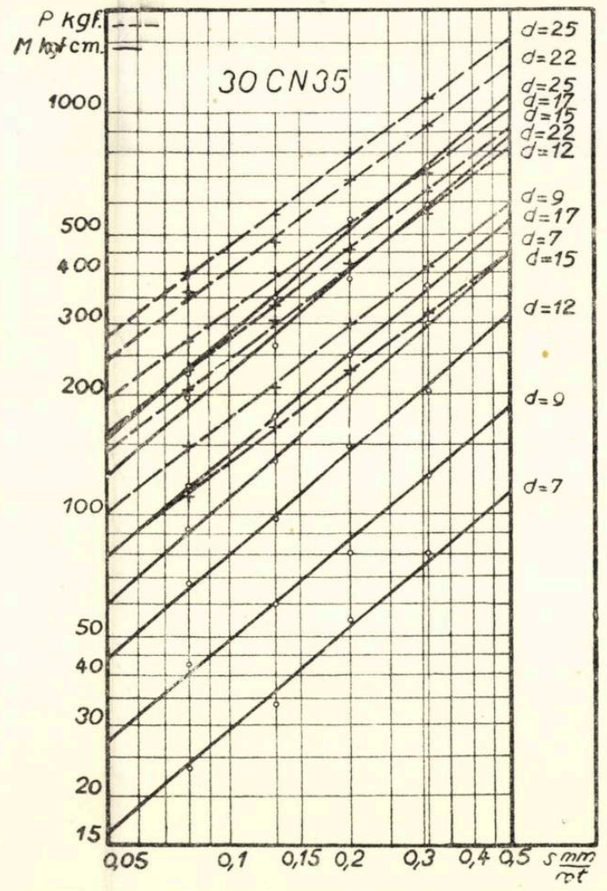


Fig. 14

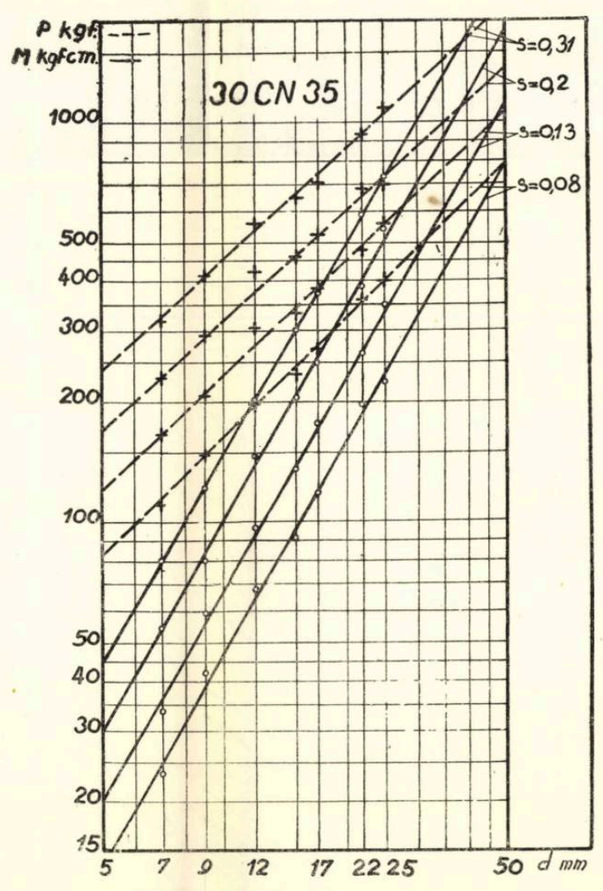


Fig. 15

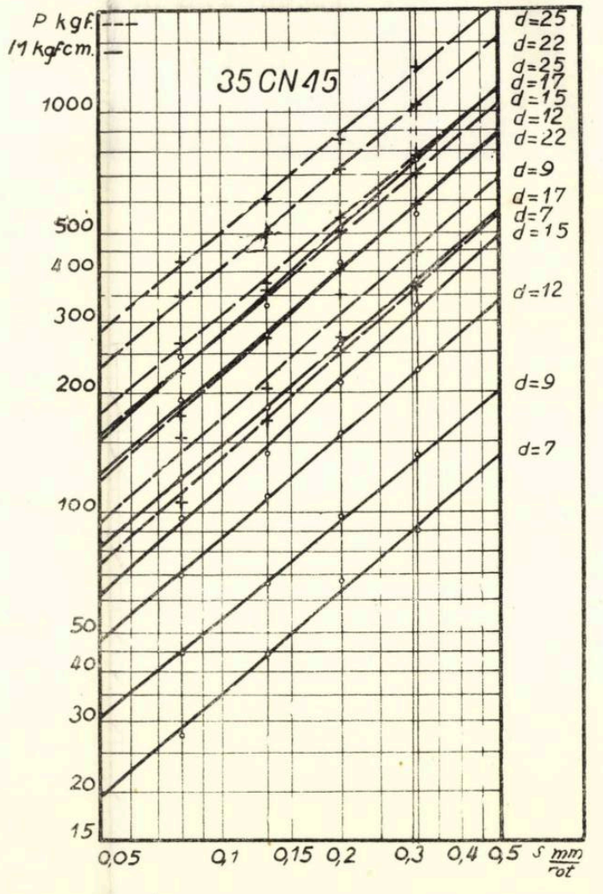


Fig. 16

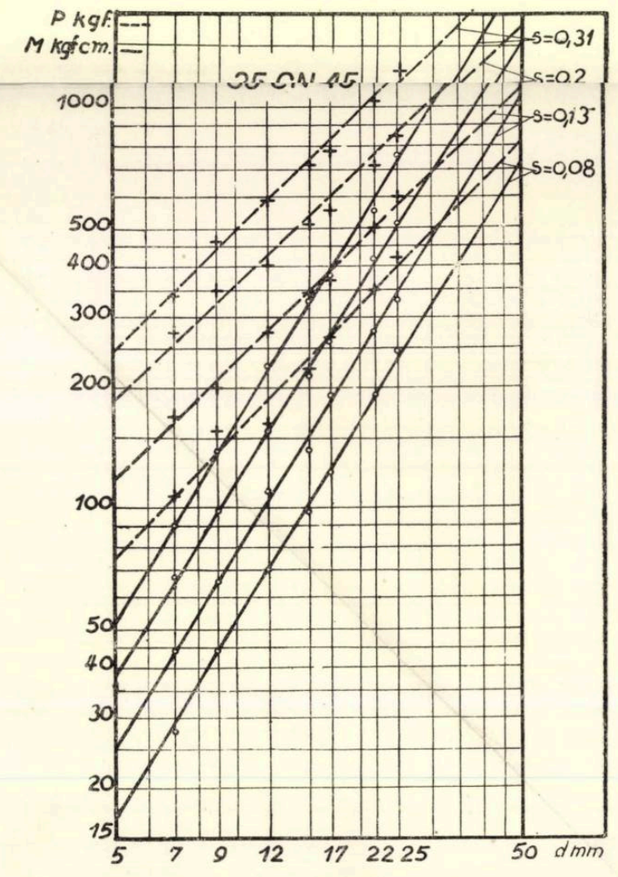


Fig. 17

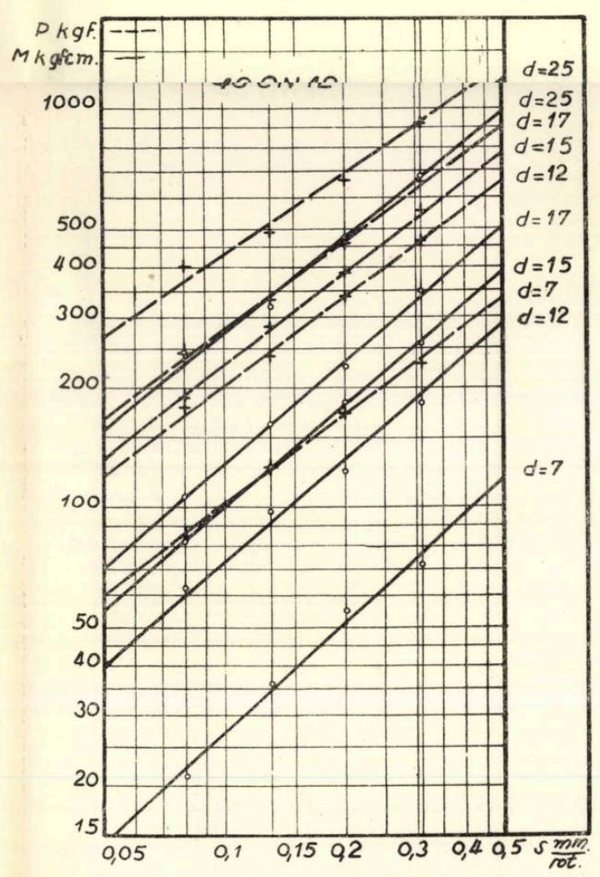


Fig. 18

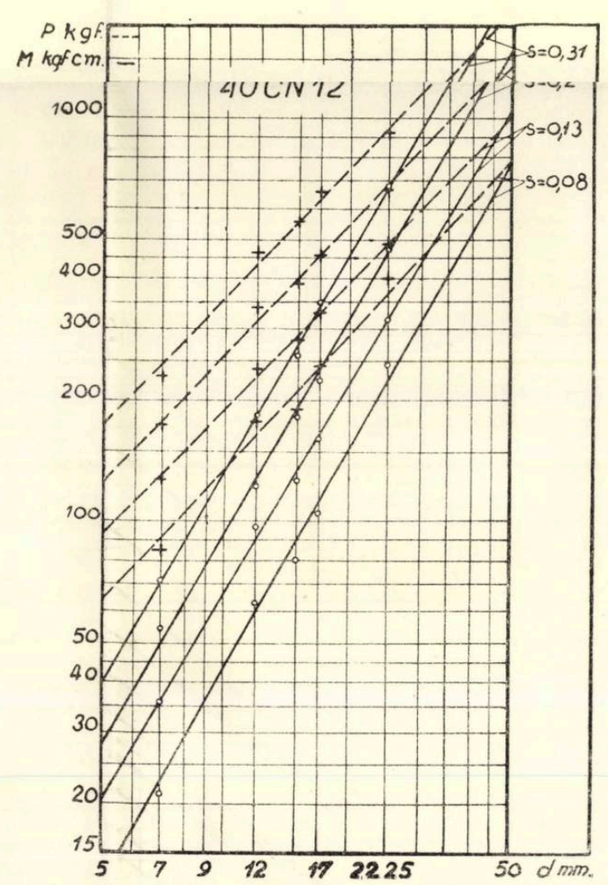


Fig 19

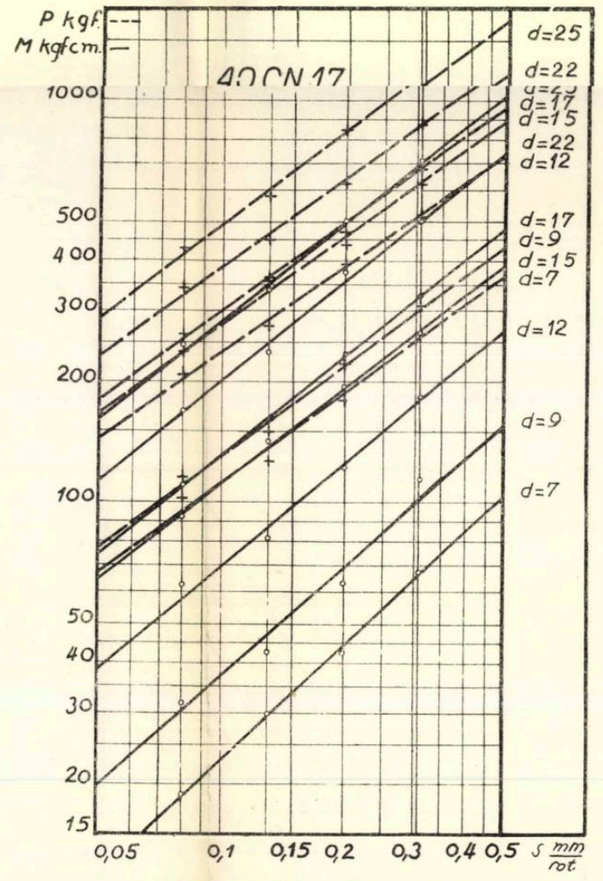


Fig. 20

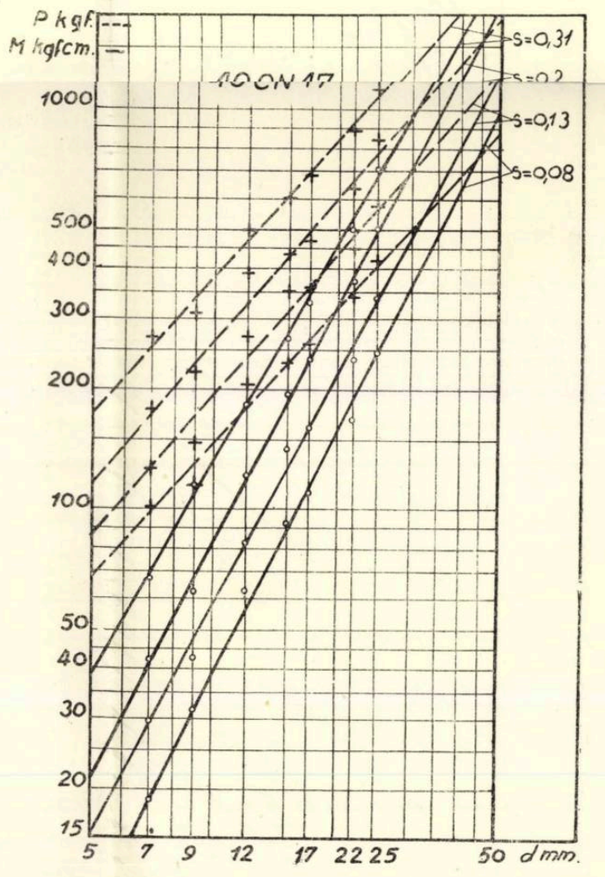


Fig. 21

și (2), s-a trasat la viteze de așchiere apropiate, acționîndu-se în acest scop, convenabil, asupra gamei turațiilor mișcării principale. Viteza de lucru s-a păstrat între limitele de 7 și 10 m/min.

Datele experimentale se pot urmări cu ușurință pe diagramele din fig. 2...21. Pentru fiecare material din grupă s-au obținut astfel cîte două diagrame, reprezentînd variațiile forței și ale momentului.

Datele experimentale cuprinse în diagrame, la cele patru valori ale avansului s și la diverse valori d (s-a lucrat cu șapte diametre de burghie), au fost folosite pentru determinarea exponenților x_P, y_P, x_M, y_M și a constantelor C_P și C_M după următoarea metodică:

Dreptele reprezentînd variația forței P funcție de avansul s la un diametru de burghiu anumit, permit să se determine exponentul y_P, dacă se iau în mod convenabil două puncte extreme, de exemplu $s_1 = 0{,}1$ mm/rot și $s_2 = 1$ mm/rot; astfel, din relația (1) se obține: $P_1 = C_P d^{x_P} s_1^{y_P}$, $P_2 = C_P d^{x_P} s_2^{y_P}$, sau $P_2/P_1 = (s_2/s_1)^{y_P}$ și prin logaritmare:

$$y_P = (\log P_2 - \log P_1)/(\log s_2 - \log s_1). \tag{3}$$

În mod analog se determină x_P folosind datele corespunzătoare, unde forța axială P este funcție de d la diversele valori ale avansului s = const. Rezultă:

$$x_P = (\log P'_2 - \log P'_1)/(\log d_2 - \log d_1). \tag{4}$$

Analog s-a procedat pentru exponenții din relația (2) a momentului de torsiune, obținîndu-se expresiile:

$$y_M = (\log M_2 - \log M_1)/(\log s_2 - \log s_1), \tag{5}$$

$$x_M = (\log M'_2 - \log M'_1)/(\log d_2 - \log d_1). \tag{6}$$

Cum fiecare dreaptă din diagramele unui material a permis să se cunoască fie valorile x_P, y_P, fie valorile x_M, y_M, s-a procedat apoi la determinarea mediilor pentru valorile exponenților (tabelele 1 și 2).

Tabelul 1

Nr. crt.	Oțel STAS 793–53	H_B kgf/cm²	x_{P_m}	y_{P_m}	C_{P_m}
1	13 N 15	156	1,25	0,67	42,0
2	13 CN 25	207	1,00	0,66	70,1
3	13 CN 35	207	0,96	0,69	88,2
4	13 CN 45	229	0,95	0,79	126,3
5	35 CN 15	207	1,03	0,66	74,1
6	35 CN 25	229	1,08	0,73	75,7
7	30 CN 35	255	0,94	0,75	123,7
8	35 CN 45	269	1,00	0,84	132,6
9	40 CN 12	217	1,07	0,74	73,2
10	40 CN 17	229	1,15	0,73	61,0

Tabelul 2

Nr. crt.	Oţel STAS 793–53	H_B kgf/cm²	x_{M_m}	y_{M_m}	C_{M_m}
1	13 N 15	156	1,74	0,79	6,22
2	13 CN 25	207	1,56	0,73	9,09
3	13 CN 35	207	1,60	0,76	8,52
4	13 CN 45	229	1,60	0,83	10,50
5	35 CN 15	207	1,70	0,73	6,24
6	35 CN 25	229	1,69	0,77	6,50
7	30 CN 35	255	1,74	0,85	7,28
8	35 CN 45	269	1,63	0,85	10,50
9	40 CN 12	217	1,76	0,85	6,40
10	40 CN 17	229	1,93	0,84	3,88

Valorile medii ale constantei C_{P_m} s-au determinat folosind relaţiile:

(7) $$C_{P_m} = P/(d^{x_{P_m}} s^{y_P}),$$ (8) $$C^{P_m} = P/(d^{x_{P_S}} {}^{y_{P_m}}).$$

Fiecare relaţie a furnizat pentru un anumit material o valoare medie C_{P_m}; media acestor valori este cuprinsă în tabelul 1. Fiecare valoare C_{P_m} s-a calculat pentru un anumit material, introducînd în relaţii valorile P pentru $s = 1$ mm/rot, respectiv P pentru $d = 10$ mm.

Valorile C_{M_m} din tabelul 2 s-au determinat cu ajutorul relaţiilor:

(9) $$C_{M_m} = M_t/(d^{x_{M_m}} s^{y_M}),$$ (10) $$C_{M_m} = M_t/(d^{x_M} s^{y_{M_m}})$$

folosind aceeaşi metodică ca şi cea utilizată la stabilirea valorilor medii ale constantei forţei axiale C_{P_m}.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte, scule şi utilaje

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИЛ РЕЗАНИЯ И КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ СВЕРЛЕНИЯ РУМЫНСКИХ СТАЛЕЙ

Заметка I

Стали группы STAS 793–53

(Резюме)

Определяются значения C_P, x_P, y_P и C_M, x_M, y_M, по формулам (1) и (2), для следующих сортов сталей: 13 N 15, 13 CN 25, 13 CN 35, 13 CN 45, 35 CN 15, 35 CN 25, 30 CN 35, 35 CN 45, 40 CN 12, 40 CN 17.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE ET DES MOMENTS CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS SOMIS AU PERÇAGE

Note I

Les aciers standardisés STAS 793–53

(Résumé)

On détermine les valeurs des paramètres: C_P, x_P, y_P et C_M, x_M, y_M, définis par les relations (1) et (2), pour les suivantes sortes d'acier: 13 N 15, 13 CN 25, 13 CN 35, 13 CN 45, 35 CN 15, 35 CN 25, 30 CN 35, 35 CN 45, 40 CN 12, 40 CN 17.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 621.7.01

DETERMINAREA CONSTANTELOR ŞI EXPONENŢILOR DIN RELAŢIILE MOMENTULUI DE TORSIUNE ŞI A FORŢEI AXIALE, LA BURGHIEREA OŢELURILOR ROMÎNEŞTI

NOTA II

OŢELURILE STAS 880-49

DE

GH. CAŞLER, AL. RENER şi D. ZETU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

Folosind aparatura şi metodica prezentată în [1] se stabilesc valorile exponenţilor x_P, y_P, x_M, y_M, precum şi a constantelor C_P şi C_M pentru materialele cuprinse în STAS 880-49, adică: OLC 10, OLC 16, OLC 25, OLC 35, OLC 45, OLC 60.

Condiţiile în care s-au efectuat determinările sînt următoarele:

S-a lucrat pe o maşină de găurit cu coloană tip A 2 „Infrăţirea" — Oradea, care a permis să se lucreze cu patru avansuri şi anume: $s_1 = 0{,}08$ mm/rot, $s_2 = 0{,}13$ mm/rot, $s_3 = 0{,}2$ mm/rot, $s_4 = 0{,}31$ mm/rot.

Burghiile folosite sînt produsele Fabricii de scule, Rîşnov, cu următoarele caracteristici: a) materialul — oţel rapid, b) canale lustruite, c) raportul dintre grosimea miezului şi diametru $\eta = d_m/d = 0{,}15$, constant pentru toate burghiile, d) unghiul $\omega = 30°$, e) metoda de ascuţire conică (procedeul Whashborne), realizată cu un dispozitiv Kellenberger adaptat pe maşina de rectificat universală KU 250 (R.P.U.). Ascuţirile s-au efectuat la următoarea geometrie: $\alpha_{ex} = 12°$, $\psi = 55°$, $2\varkappa = 120°$ (valori ce se încadrează în prescripţiile STAS).

Încercările s-au întreprins folosind lichid de răcire-ungere (5% emulsie).

Pe baza determinărilor efectuate s-au întocmit diagramele dublulogaritmice (fig. 1...12), cu ajutorul cărora s-au obţinut valorile exponenţilor şi ale constantelor redate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

Nr. crt.	Oţel STAS 880–49	H_B kgf/cm²	x^P_m	y_{P_m}	C_{P_m}
1	OI C 10	111	1,13	0,81	57,50
2	OLC 16	111	1,04	0,81	72,20
3	OLC 25	131	1,03	0,73	71,80
4	OLC 35	140	1,04	0,67	67,00
5	OLC 45	207	1,07	0,72	62,50
6	OLC 60	255	0,97	0,72	90,90

Tabelul 2

Nr. crt.	Oţel STAS 880–49	H_B kgf/cm²	x_{M_m}	y_{M_m}	C_{M_m}
1	OLC 10	111	1,73	0,83	6,06
2	OLC 16	111	1,64	0,80	7,36
3	OLC 25	131	1,79	0 81	5,34
4	OLC 35	140	1,65	0,79	7,44
5	OLC 45	207	1,71	0,84	6,68
6	OLC 60	255	1,82	0,79	5,30

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte, scule şi utilaje

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh., Rener Al., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3—4*, pp. 345—348

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИЛ РЕЗАНИЯ И КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ СВЕРЛЕНИЯ РУМЫНСКИХ СТАЛЕЙ

Заметка II

Стали группы STAS 880–49

(Резюме)

Определяются значения C_P, x_P y_P и C_M, x_M, y_M, для следующих сортов сталей: OLC 10, OLC 16, OLC 22, OLC 35, OLC 45, OLC 60.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE ET DES MOMENTS CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS SOUMIS AU PERÇAGE

Note II

Les aciers standardisés STAS 880–49

(Résumé)

On établit les valeurs des paramétres C_P, x_P, y_P et C_M, x_M, y_M, pour les suivantes sortes d'aciers: OLC 10, OLC 16, OLC 25, OLC 35, OLC 45, OLC 60.

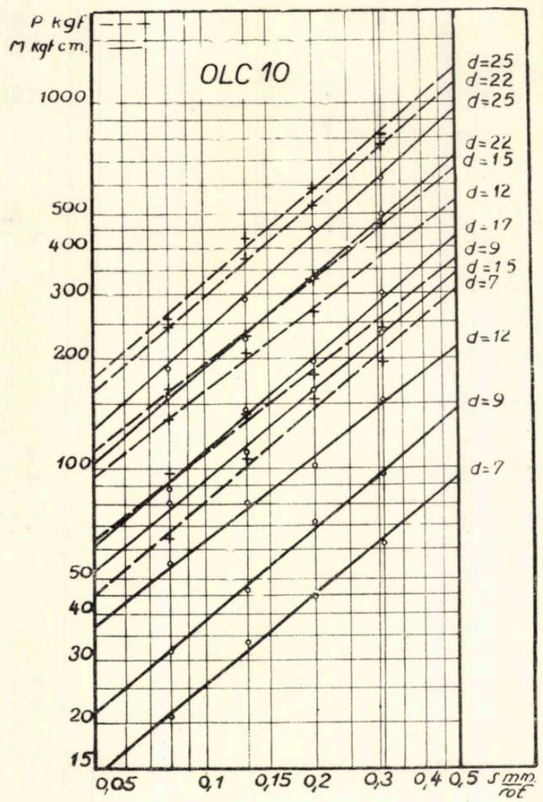


Fig. 1

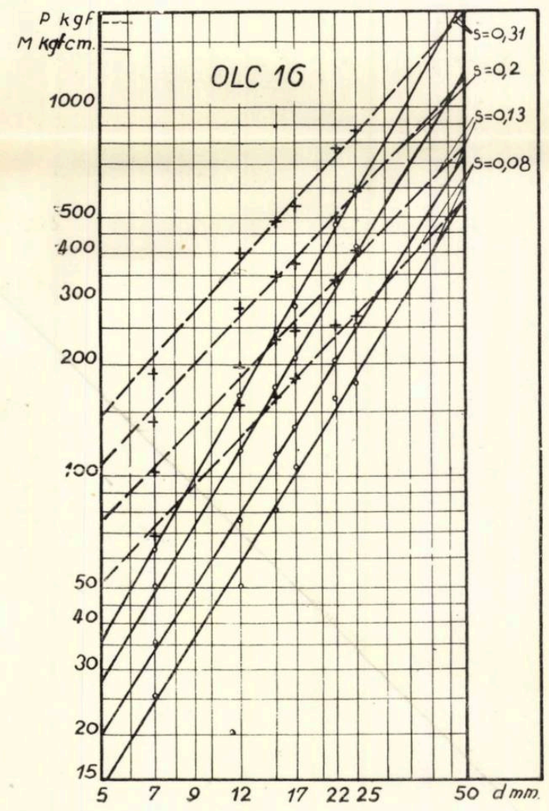


Fig. 4

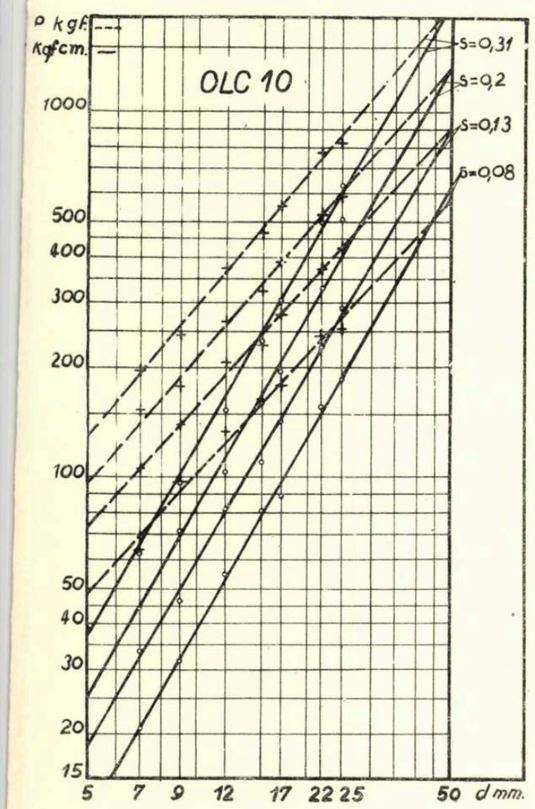


Fig. 2

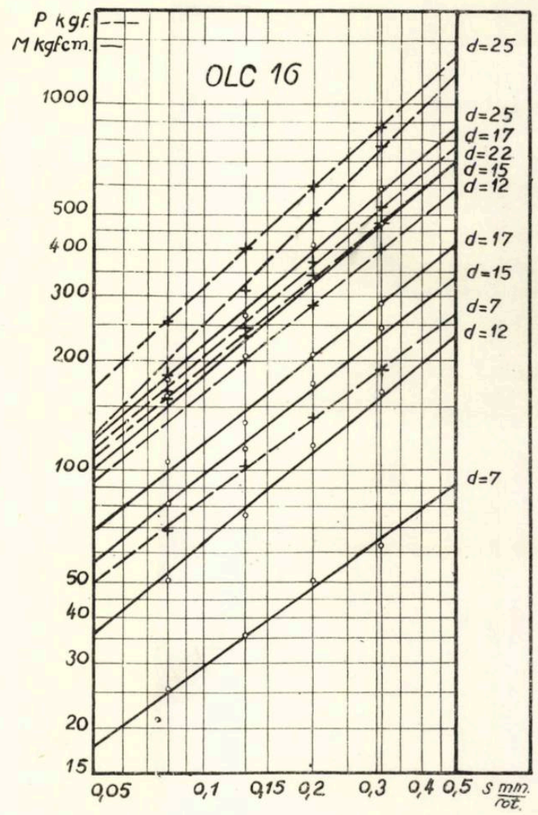


Fig. 3

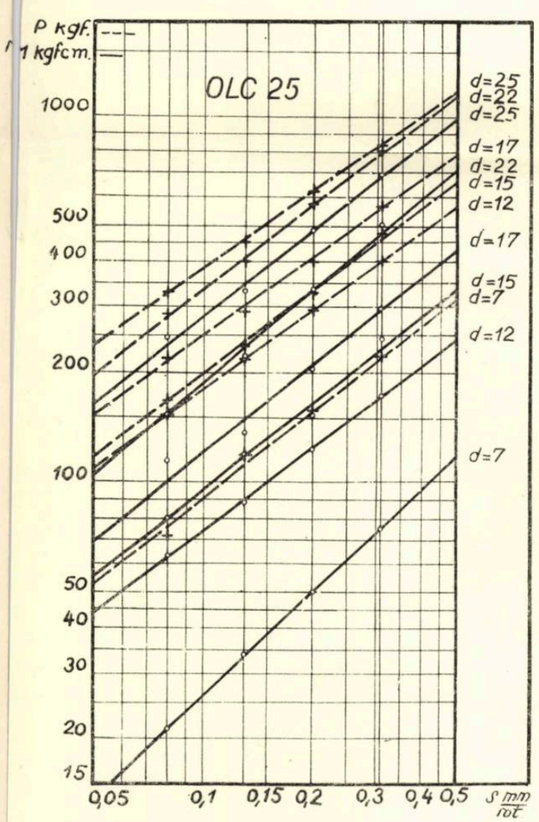


Fig. 5

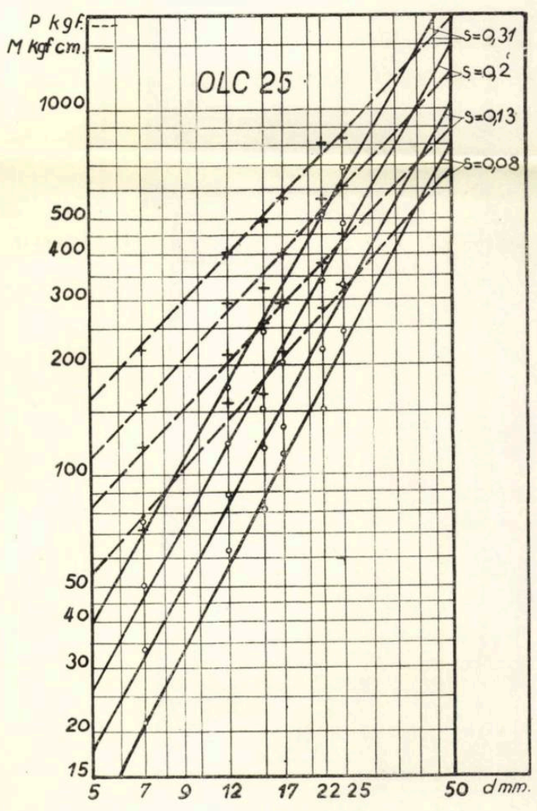


Fig. 6

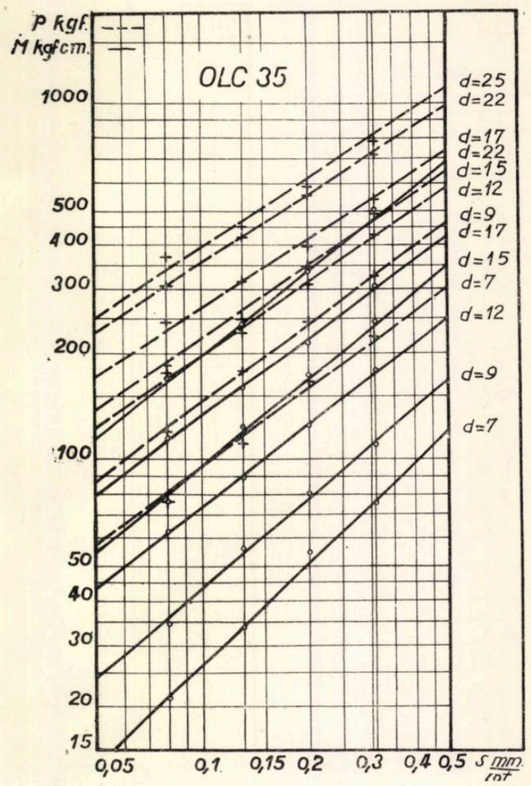


Fig. 7

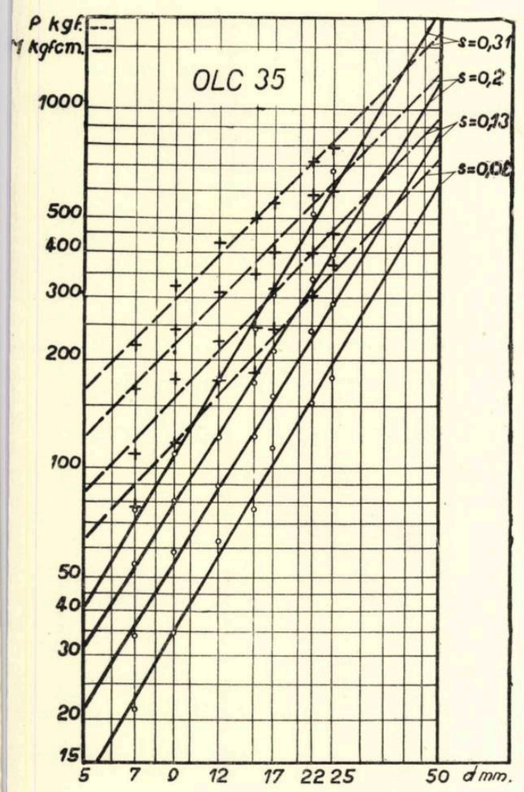


Fig. 8

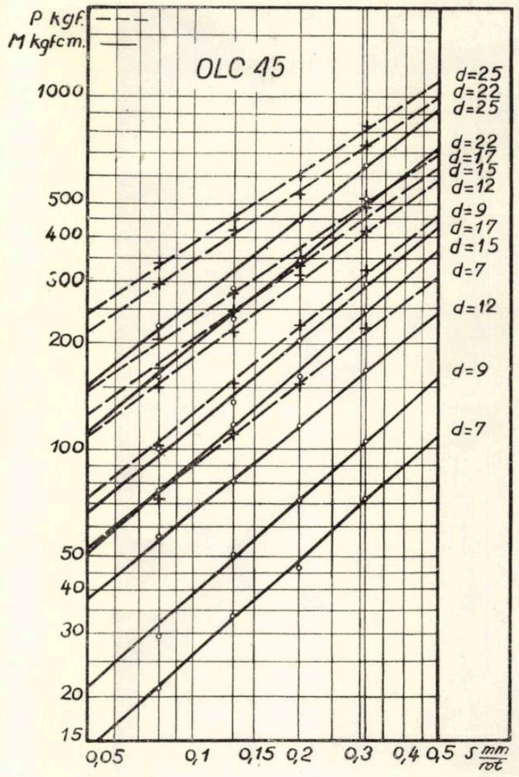


Fig. 9

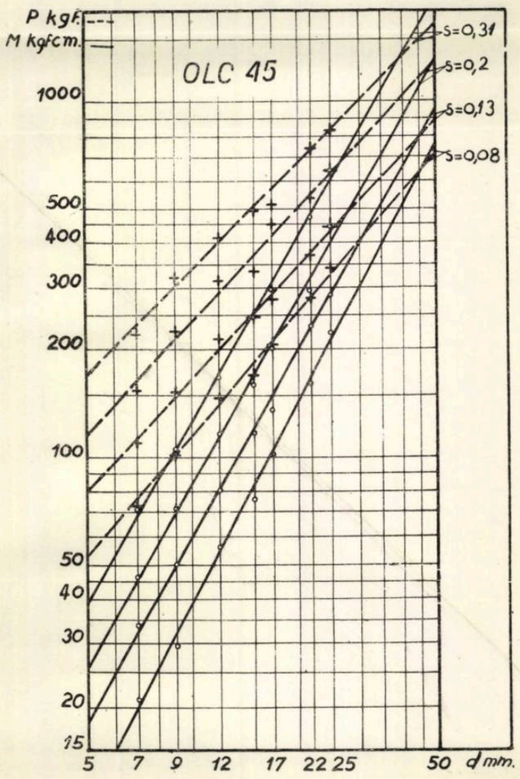


Fig. 10

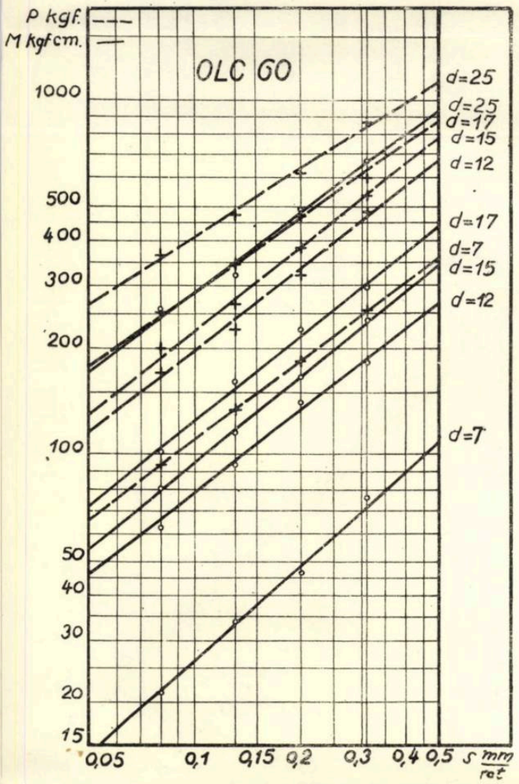


Fig. 11

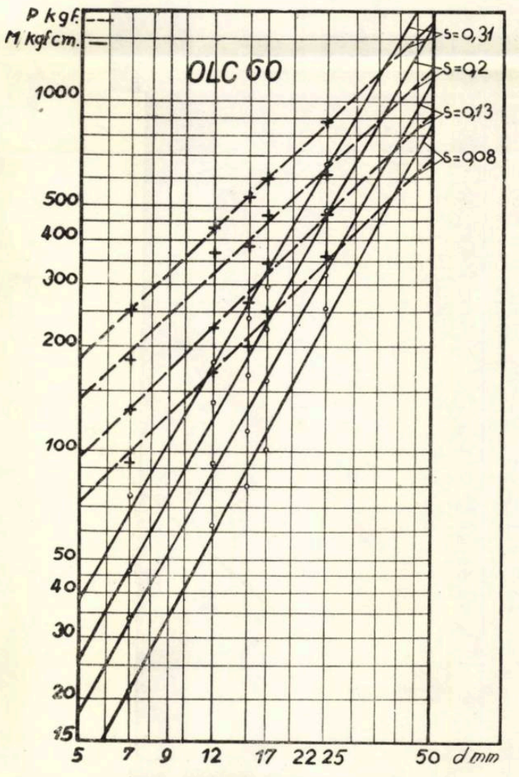


Fig. 12

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. C. 536.24 : 621.64

LAMINAR NONISOTHERMAL PIPE FLOW WITH COOLANT INJECTION AT WALL

BY

S. W. YUAN and Y. PENG

Paper presented at the International Heat Transfer Conference, Boulder, Colorado, September 1961

1. Introduction

The problem of heat transfer in a steady laminar flow in a circular pipe with impermeable wall has been studied by Graetz [3] and Nusselt [4] since the latter part of the last century. In these studies it was assumed that the wall temperature is constant and changes discontinuously at $x = 0$ (Fig. 1), that the physical properties of the fluid are independent of temperature, and that the Poiseuille velocity distribution is maintained throughout the motion.

The transpiration cooling problem has been solved in the case of a laminar flow through a porous-wall pipe with uniform coolant injection at the wall [2]. In this investigation an exact solution of the energy equation in cylindrical coordinates was obtained in which the velocity component terms used were taken from the solution of laminar pipe flow with constant fluid properties [1]. The solution gives the temperature distribution as functions of coordinate axes, Péclet number, the diameter of the pipe and the rate of coolant injection. Since in most heat transfer problems the flow would be in nonisothermal state, it seemed desirable to investigate the pipe flow by taking into consideration the variation of the physical properties of the fluid.

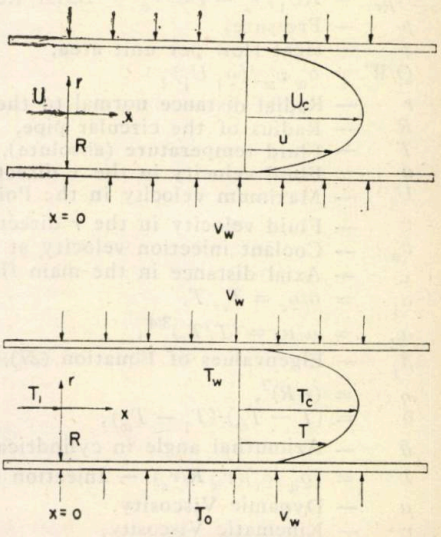


Fig. 1

In the present investigation the velocity profiles were first obtained from the solution of the Navier-Stokes equations and the continuity equation in which the variation of density and viscosity with the temperature was taken into consideration with the above velocity component terms, and the temperature profiles were then obtained from the solution of the energy equation. For a given entrance to wall temperature ratio, the solution gives the temperature distribution as a function of coordinate axes, Péclet number, the diameter of the pipe and the rate of coolant injection.

The assumptions made in the present study were: a) the free convection, radiation and dissipation are neglected; b) the molecular heat conduction in the axial direction can be neglected in comparison with that in the radial direction; c) the coolant flowing through the porous wall is uniform throughout; d) the wall temperature is constant and changes discontinuously at $x=0$; e) the thermal conductivity k is a constant; f) the ratio ϱ/ϱ_c is independent of the distance x. The last assumption is justified from the result that the difference between the ratio T/T_c at $x/R = 50$ and $x/R = 200$ is about 8%.

2. Nomenclature

c_p — Specific heat at constant pressure,
D — Diameter of the circular pipe,
h — Heat transfer coefficient,
k — Thermal conductivity,
l — Length of the pipe,
$N_{Nu} = hD/k$ — Local Nusselt number,
$N_{Pe} = N_{Pr} N_{Re}$ — Péclet number,
$N_{Pr} = \mu_c c_p/k$ — Prandtl number,
$N_{Re} = RU_1/\nu_c = D\bar{u}/\nu_c$ — Axial Reynolds Number,
p — Pressure,
q — Heat flow per unit area,
$Q/W = \varrho_w v_w/(\varrho_1 U_1)$,
r — Radial distance normal to the main flow direction,
R — Radius of the circular pipe,
T — Fluid temperature (absolute),
u — Fluid velocity in the x direction,
U_1 — Maximum velocity in the Poiseuille flow ($v_w = 0$),
v — Fluid velocity in the r direction,
v_w — Coolant injection velocity at the wall,
x — Axial distance in the main flow direction,
$\alpha_1 = \varrho/\varrho_c = T_c/T$,
$\alpha_2 = \mu/\mu_c = (T/T_c)^{3/4}$,
β_j — Eigenvalues of Equation (27),
$\eta = (r/R)^2$,
$\theta = (T - T_w)/(T_1 - T_w)$,
ϑ — Azimuthal angle in cylindrical coordinate system,
$\lambda = (\varrho_w/\varrho_c)(v_w R/\nu_c)$ — Injection Reynolds number,
μ — Dynamic Viscosity,
ν — Kinematic Viscosity,
$\xi = x/R$,

ϱ — Mass density of the fluid,
φ $= r/R$,
Φ — Dissipation function.

Subscripts
0 — Coolant fluid,
1 — Refers to plane $x = 0$,
w — Wall of pipe,
c — Centerline.

3. Fundamental Equations

If a curvilinear coordinate system is introduced with the origin at the center of the cross section where x is taken in the direction of the flow, r in the radial direction, and ϑ the azimuthal angle, then with axial symmetry of flow the Navier-Stokes equations of a viscous compressible fluid become:

$$\varrho u\,(\partial u/\partial x) + \varrho v\,(\partial u/\partial r) =$$

$$(1) \qquad = -\partial p/\partial x + \partial\left[\mu\left(2\,(\partial u/\partial x) - (2/3)\left\{(1/r)\left[\partial\,(rv)/\partial r\right] + \partial u/\partial x\right\}\right)\right]/\partial x +$$

$$+ (1/r)\left\{\partial\left[\mu r\,(\partial v/\partial x + \partial u/\partial r)\right]/\partial r\right\},$$

$$\varrho u\,(\partial v/\partial x) + \varrho v\,(\partial v/\partial r) =$$

$$(2) \qquad = -\partial p/\partial r + \partial\left[\mu\left(2\,(\partial v/\partial r) - (2/3)\left\{(1/r)\left[\partial\,(rv)/\partial r\right] + \partial u/\partial x\right\}\right)\right]/\partial r +$$

$$+ \partial\left[\mu\,(\partial v/\partial x)\right]/\partial x + \partial\left[\mu\,(\partial u/\partial r)\right]/\partial x + 2\,(\mu/r)\,(\partial v/\partial r - v/r).$$

The continuity equation is:

$$(3) \qquad \partial\,(\varrho ru)/\partial x + \partial\,(\varrho rv)/\partial r = 0.$$

The energy equation:

$$\varrho u c_p\,(\partial T/\partial x) + \varrho v c_p\,(\partial T/\partial r) =$$

$$(4) \qquad = -u\,(\partial p/\partial x) + (1/r)\,\partial\left[kr\,(\partial T/\partial r)\right]/\partial r + \partial\left[k\,(\partial T/\partial x)\right]/\partial x + \Phi.$$

The foregoing equations will be used to investigate the fluid flow in a circular pipe with a porous wall through which uniform fluid injection is applied. The boundary conditions are:

$$(5) \qquad v = \partial u/\partial r = 0 \text{ for } r = 0; \quad u = 0,\ v = -v_w = \text{const. for } r = R$$

and

$$(6) \qquad \theta = 0 \text{ for } x > 0,\ r = R; \quad \theta = 1 \text{ for } x = 0,\ r < R.$$

For a two-dimensional compressible flow a stream function exists such that

$$(7) \qquad ru = (\varrho_c/\varrho)(\partial\psi/\partial r), \quad -rv = (\varrho_c/\varrho)(\partial\psi/\partial x)$$

and the continuity Equation (3) is satisfied.

For a constant fluid injection or suction at the porous wall and the given boundary conditions, the following stream function is introduced:

$$\psi = (R^2/2)\,[U_1/f'(0) + 4v_w\,(\varrho_w/\varrho_c)\,(x/R)]\,f(\eta),$$

where $\eta = (r/R)^2$.

From Equations (7) and (8) the velocity components in the direction of flow and the radial direction are given by:

$$u = U_1(\varrho_c/\varrho)\,[1/f'(0) + 4\,(\lambda/N_{Re})(x/R)]\,f'(\eta), \tag{9}$$

$$v = -2v_w\,(\varrho_w/\varrho_c)(\varrho/\varrho_c)\,[f(\eta)/\sqrt{\eta}] = -2\,(\lambda/N_{Re})\,U_1\,(\varrho_c/\varrho)\,[f(\eta)/\sqrt{\eta}]. \tag{10}$$

The function $f(\eta)$ appearing in the foregoing equations is the only unknown yet to be determined in terms of the distance parameter η. Since the ratio ϱ_c/ϱ is assumed to be independent of the distance x, Equation (10) indicates that the radial velocity becomes a function of η only. This is in agreement with the assumption of constant velocity v_w at the wall.

By introducing the expressions for u and v from Equations (9) and (10) into Equations (1) and (2) there result:

$$-[R^2/(4\mu_c)]\,(\partial p/\partial x) =$$

$$= U_1\,[1/f'(0)+4\,(\lambda/N_{Re})\,(x/R)]\,\{\lambda\,[a_1^{-1}f'^2 - f\,(a_1^{-1}f')'] - [a_2\,\eta\,(a_1^{-1}f')']'\}, \tag{11}$$

$$\partial p/\partial\eta = 0\ \ (v/U_1), \tag{12}$$

where $a_1 = \varrho/\varrho_c$ and $a_2 = \mu/\mu_c$ are functions of η only.

Equation (12) was also found in the case of an incompressible fluid [1]. For small values of fluid injection at the wall it is reasonable to assume that the right side of Equation (12) becomes zero. Hence, equation (11) may be reduced to the form:

$$\mathrm{d}\,[a_2\,\eta(a_1^{-1}f')']/\mathrm{d}\eta - \lambda[a_1^{-1}f'^2 - f\,(a_1^{-1}f')'] = C, \tag{13}$$

where C is a constant of integration to be determined. The boundary conditions are obtained with the aid of Equations (5), (9) and (10). Thus:

$$f(0) = f'(1) = 0;\quad f(1) = 1/2;\quad \lim_{\eta\to 0}\sqrt{\eta}\,[a_1^{-1}f'(\eta)]' = 0. \tag{14}$$

Equation (13) is an ordinary nonlinear differential equation of the third order which resulted from the Navier-Stokes equations and continuity equation by the similarity transformation. With the aid of the four given boundary conditions an exact solution can be obtained and the constant of integration C determined.

4. Solution for Small λ

The solution for Equation (13) can be expressed for small value of λ, by a power series developed near $\lambda = 0$ as follows:

$$f = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \cdots + \lambda^n f_n + \cdots, \tag{15}$$

and

$$C = C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \cdots + \lambda^n C_n + \cdots, \tag{16}$$

where f_n's and C_n's are taken to the independent of λ. By substituting Equations (15) and (16) into Equation (13) and equating coefficients of like power of λ, one obtains the following set of equations:

$$\mathrm{d}\{a_2 \eta [\mathrm{d}(a_1^{-1} f_0')]/\mathrm{d}\eta\}/\mathrm{d}\eta = C_0, \tag{17}$$

$$\mathrm{d}\{a_2 \eta [\mathrm{d}(a_1^{-1} f_1')]/\mathrm{d}\eta]\}/\mathrm{d}\eta - (a_1^{-1} f_0'^2) + f_0 [\mathrm{d}(a_1^{-1} f_0')/\mathrm{d}\eta] = C_1, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\{a_2\eta [\mathrm{d}(a_1^{-1}f_2')/\mathrm{d}\eta]\}/\mathrm{d}\eta - 2a_1^{-1}f_0' f_1' + f_0 [\mathrm{d}(a_1^{-1}f_1')/\mathrm{d}\eta] + \\ &\quad + f_1 [\mathrm{d}(a_1^{-1}f_0')/\mathrm{d}\eta] = C_2. \end{aligned} \tag{19}$$

The boundary conditions to be satisfied by the f_n's are from Equations (14):

$$\begin{cases} f_n(0) = f_n'(1) = 0; \quad \lim\limits_{\eta \to 0} \sqrt{\eta}\, f_n''(\eta) = 0, \text{ for all } n \\ f_0(1) = 1/2; \quad f_n(1) = 0, \quad n \geqslant 1. \end{cases} \tag{20}$$

The first-order perturbation solution of Equation (13) obtained by solving Equations (17) and (18) is given as follows:

$$\begin{aligned} f &= C_0 \left[\left(\int a_1 \int a_2^{-1} \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\eta - \left(\int_0^1 a_2^{-1} \mathrm{d}\eta \right) \left(\int a_1 \mathrm{d}\eta \right) \right] + \\ &\quad + \lambda \left[C_1 \int a_1 \int a_2^{-1} \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\eta + \int a_1 \int a^{-1}{}_2 \eta^{-1} \int a_2^{-1} f_0'^2 \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\eta - \right. \\ &\quad \left. - C_0 \int a_1 \int a_2^{-1} \eta^{-1} \int a_2^{-1} f_0 \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\eta + k_5 \int a_1 \mathrm{d}\eta \right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f' &= C_0 \left[a_1 \int a_2^{-1} \mathrm{d}\eta - \left(\int_0^1 a_2^{-1} \mathrm{d}\eta \right) a_1 \right] + \\ &\quad + \lambda \left[C_1 a_1 \int a_2^{-1} \mathrm{d}\eta + a_1 \int a_2^{-1} \eta^{-1} \int a_1^{-1} f_0'^2 \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\eta - \right. \\ &\quad \left. - C_0 a_1 \int a_2^{-1} \eta^{-1} \int a_2^{-1} f_0 \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\eta + k_5 a_1 \right], \end{aligned} \tag{21}$$

where:

$$C_0 = \left[\int_0^1 \alpha_1 \int \alpha_2^{-1} \, d\eta \, d\eta - \left(\int_0^1 \alpha_2^{-1} \, d\eta \right) \left(\int_0^1 \alpha_1 \, d\eta \right) \right]^{-1} / 2,$$

$$k_5 = - C_1 \int_0^1 \alpha_2^{-1} d\eta + C_0 \int_0^1 \alpha_2^{-1} \eta^{-1} \int \alpha_2^{-1} f_0 \, d\eta \, d\eta - \int_0^1 \alpha_2^{-1} \eta^{-1} \int \alpha_1^{-1} f_0'^2 \, d\eta \, d\eta,$$

$$C_1 = \frac{1}{\left(\int_0^1 \alpha_1 \, d\eta \right) \left(\int_0^1 \alpha_2^{-1} \, d\eta \right) - \int_0^1 \alpha_1 \int \alpha_2^{-1} \, d\eta \, d\eta} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 \alpha_1 \int \alpha_2^{-1} \eta^{-1} \int \alpha_1^{-1} f_0'^2 \, d\eta \, d\eta \, d\eta - \left(\int_0^1 \alpha_1 \, d\eta \right) \left(\int_0^1 \alpha_2^{-1} \eta^{-1} \int \alpha_1^{-1} f_0'^2 \, d\eta \, d\eta \right) - \right.$$

$$\left. - C_0 \left[\int_0^1 \alpha_1 \int \alpha_2^{-1} \eta^{-1} \int \alpha_2^{-1} f_0 \, d\eta \, d\eta \, d\eta - \left(\int_0^1 \alpha_1 \, d\eta \right) \left(\int_0^1 \alpha_2^{-1} \eta^{-1} \int \alpha_2^{-1} f_0 \, d\eta \, d\eta \right) \right] \right\}.$$

The velocity components in the axial and radial directions are obtained by substituting Equations (21) into Equations (9) and (10) respectively.

From [2] the values for α_1 and α_2 can be expressed in terms of the non-dimensional distance η. Hence the velocity components given in Equations (9) and (10) can be calculated for the first approximation.

5. Solution of the Energy Equation

For a nonisothermal flow with low Mach number it can be shown that the terms in Equation (4) due to the pressure gradient and the dissipation can be neglected, and, furthermore, it is assumed that $\partial^2 T/\partial x^2$ may be neglected in comparison with $(1/r) \{\partial [r (\partial T/\partial r)]/\partial r\}$. Hence Equation (4) can be simplified in the non-dimensional form:

$$(\varrho/\varrho_1)(v/U_1)(\partial\theta/\partial\varphi) + (\varrho/\varrho_1)(u/U_1)(\partial\theta/\partial\xi) = \tag{22}$$
$$= [1/(N_{Pr} N_{Re})] \{(1/\varphi) \partial [\varphi (\partial\theta/\partial\varphi)]/\partial\varphi\},$$

where:

$$\theta = (T - T_w)/(T_1 - T_w), \quad \varphi = r/R, \quad \xi = x/R, \text{ and } N_{Pr} = (\mu_c C_p)/k.$$

The specific heat at constant pressure c_p and the thermal conductivity k are assumed to be constant in the present investigation.

The boundary conditions are:

$$\theta = 0 \quad \text{for} \quad \xi > 0, \quad \varphi = 1, \tag{23}$$

(24) $$\theta = 1 \quad \text{for} \quad \xi = 0, \quad \varphi < 1.$$

With the values for velocity components given in Equation (9) and (10) respectively, Equation (22) becomes:

(25) $$[1/f'(0) + 4(\lambda/N_{Re})\,\xi]\,[f'(\varphi)/(2\varphi)]\,(\partial\theta/\partial\xi) = \\ = 2(\lambda/N_{Re})\,[f(\varphi)/\varphi]\,(\partial\theta/\partial\varphi) + [1/(N_{Pr}\,N_{Re})]\,\{(1/\varphi)\,\partial[\varphi\,(\partial\theta/\partial\varphi)]/\partial\varphi\}.$$

Equation (25) can be solved by the method of separation which yields a solution in the form of an infinite series:

(26) $$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \left[1 + 4\frac{1}{N_{Re}} f'(0)\,\xi\right]^{-\beta_j^2/[4N_{Pr}\,\lambda f'(0)]} M_j(\varphi, \beta_j),$$

where $M_j(\varphi, \beta_j)$ are the solution of

(27) $$d^2M/d\varphi^2 + [1/\varphi + 2N_{Pr}\,\lambda\,(f/\varphi)]\,(dM/d\varphi) + [\beta^2/f'(0)]\,f'M = 0$$

and the β_j are eigenvalues of Equation (27) which correspond to the boundary condition $(\theta)_{\varphi=1} = 0$. The series solution of Equation (27) corresponding to the eigenvalue β_j, which is free from singularities at $\varphi = 0$, is:

(28) $$M_j = 1 - (\beta_j^2/4)\,\varphi^2 + g(\beta_j, N_{Pr}, \lambda)\,\varphi^4 + \cdots,$$

where $g(\beta_j, N_{Pr}, \lambda)$ can be determined from Equation (27) if f and f' are given in terms of φ.

The coefficient A_j in Equation (26) will be determined from Equations (26), (27) and (24). Multiplying both sides of Equation (27) by the appropriate factor, we can write it as the Sturm-Liouville equation:

(29) $$d[m(\varphi)\,M_j']/d\varphi + \beta_j^2\,p(\varphi)\,M_j = 0,$$

where:

$$m(\varphi) = \varphi \exp\left(2N_{Pr}\,\lambda \int \frac{f}{\varphi}\,d\varphi\right), \quad p(\varphi) = m(\varphi)\,f'/f'(0).$$

Hence $M_i(\varphi, \beta_i)$ anu $M_j(\varphi, \beta_j)$ for $i \neq j$ are orthogonal functions with respect to the weight function $p(\varphi)$; i. e.

(30) $$\int_0^1 p(\varphi)\,M_i\,M_j\,d\varphi = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j.$$

The coefficients of the series expansion (26), the A_j are determined from the boundary condition (24) applied to Equation (26), which is

(31) $$\sum_{j=1}^{\infty} A_j\,M_j(\varphi, \beta_j) = 1.$$

Then multiplying both sides of Equation (31) by $p(\varphi) M_j(\varphi, \beta_j)$ and integrating from 0 to 1:

$$A_j = \int_0^1 p(\varphi) M_j(\varphi, \beta_j) \, d\varphi \Big/ \int_0^1 p(\varphi) M_j^2(\varphi, \beta_j) \, d\varphi = \tag{32}$$

$$= -2/[\beta_j (\partial M/\partial \beta)_{\beta=\beta_j, \varphi=1}].$$

6. Numerical Calculations

The non-dimensional temperature profile given in Equation (26) contains the coefficients of the series expansion, A_j and the eigenvalues β_j. Theoretically, the infinite number of the eigenvalues, β_j can be calculated from Equation (28) corresponding to the boundary condition $(M_j)_{\varphi=1}=0$. However, the work involved in this calculation is tremendously tedious even for the first three roots. In order to overcome the difficulty the solution of Equation (27) for the eigenvalues, β_j were made with the aid of IBM 650 digital computer. The Runge-Kutta Numerical Method [5] was employed in the numerical solution of the differential equation.

The numerical values used for the physical constants and parameters are: $N_{Pr} = 0.74$, $N_{Re} = 10^3$, $\xi = x/R = 100$ and $\mu/\mu_c = (T/T_c)^{0.75}$, $T_1/T_w = 2.0$.

Table 1 gives the first five eigenvalues and coefficients A_j to eight significant digits for flow with constant fluid properties and Table 2 gives the first three eigenvalues and coefficients A_j for flow with variable fluid properties. The above calculations were made for three values of injection Reynold's Number.

Table 1

Eigenvalues β_j *and Coefficients of Series Expansion* A_j
For Flow with Constant Fluid Properties

Q/W	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	2.7043516	6.6785314	10.673532	14.672065	18.672065
6.0×10^{-4}	2.8213468	6.6659943	10.572338	—	—
1.2×10^{-3}	2.9436926	6.6984452	10.587543	—	—
Q/W	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	1.4764381	—.80614649	.58920945	—.47553716	—.40707646
6.0×10^{-4}	1.5382527	—.91663617	.67780922	—	—
1.2×10^{-3}	1.6014919	—1.0310558	.77000648	—	—

The temperature profiles as calculated in [2] were used, in connection with the fluid density and viscosity, to calculate the velocity profiles for the first successive approximation. The first successive approximation velocity profiles were then used to evaluate the temperature profiles for flow with variable fluid properties. Since the convergence of successive iterations is so rapid the difference between the first and second successive approximation is insignificant.

Table 2

Eigenvalues β_j *and Coefficients of Series Expansion* A_j
For Flow with Constant Fluid Properties

Q/W	β_1	β_2	β_3	A_1	A_2	A_3
0	2.4945474	5.9675655	9.5029996	1.5203877	—.88381066	—.6500011
6.0×10^{-4}	2.6318404	6.1244632	9.7175386	1.5624718	—.95837110	.7077778
1.2×10^{-3}	2.7148618	6.1004357	9.6263104	1.6235651	—1.0698116	.7988383

7. Heat Transfer Coefficient

The heat transfer coefficient for the flow in a pipe is usually calculated with the difference between the mean temperature of the fluid and the wall temperature. The mean temperature over the cross section considered, weighted with respect to the axial velocity, frequently referred to as the „mixed-mean" fluid temperature, may be defined by:

$$\theta_M = (T_M - T_w)/(T_1 - T_w) = \int_0^R \theta\, ur\, dr \Big/ \int_0^R ur\, dr. \tag{33}$$

The heat transfer coefficient h is then defined by:

$$q = h(T_M - T_w), \tag{34}$$

where the heat flow per unit area at the wall is:

$$q = -k(\partial T/\partial r)_{r=R} = -(k/R)(T_1 - T_w)(\partial\theta/\partial\varphi)_{\varphi=1}.$$

In non-dimensional form, the heat transfer coefficient, or local Nusselt number N_{Nu} is:

$$N_{Nu} = hD/k = -(2/\theta_M)(\partial\theta/\partial\varphi)_{\varphi=1} =$$

$$= -\frac{2}{\theta_M}\sum_{j=1}^{\infty} A_j \left[1 + 8 N_{Pr}\lambda f'(0)\left(\frac{1}{N_{Pr}N_{Re}}\frac{x}{D}\right)\right]^{-\beta_j^2/[4N\lambda_{Pr} f'(0)]} M_j'(1,\beta_j). \tag{36}$$

The temperature distribution given in Equation (26) may be used to determine the amount of coolant required to cool the wall to a predesignated temperature. From the condition of heat balance at the wall, one obtains:

$$\int_0^l k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} dx = -\varrho v_w c_p (T_w - T_0) l. \tag{37}$$

Using Equations (35) and (26) in conjunction with Equation (37), one obtains the temperature difference ratio as follows:

$$\frac{T_1 - T_w}{T_w - T_0} = 8 N_{Pr} \lambda \left(\frac{\varrho_w v_w l}{\varrho_c U_1 D} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j M_j'(1, \beta_j)}{1 - \beta_j^2/[4 N_{Pr} \lambda f'(0)]} \left\{ 1 - \right. \right.$$

(38)

$$\left. \left. - \left[1 + \frac{8 \varrho_w v_w}{\varrho_c} \frac{l}{U_1 D} f'(0) \right]^{1 - \beta_j^2/[4 N_{Pr} \lambda f'(0)]} \right\} \right)^{-1},$$

where:

$$M_j'(1, \beta_j) = [\partial M_j(\varphi, \beta_j)/\partial \varphi]_{\varphi=1} .$$

8. Discussion of the Results

The first five eigenvalues β_j for the case of isothermal flow with zero coolant injection and the corresponding coefficients of expansion A_j calculated in the present investigation were compared with previous calculations [6], [7]. Eight significant digits were obtained in the present calculation and four to seven significant digits were obtained in [7] and three to five in [6]. The maximum discrepancy between the present calculation and the one given in [7] is about 1/10 of one percent and it is believed that the present calculation by the digital computer is reliable.

For the case of flow with coolant injection only the first three eigenvalues β_j and the corresponding coefficients of expansion A_j were calculated.

The temperature profiles for flow with assumed constant fluid properties and with variable fluid properties in the present investigation are shown in Fig. 2, for $Q/W = 1.2 \times 10^{-3}$. The results indicate that the non-dimensional temperature profiles for flow with variable fluid properties have greater gradient at the wall than the flow with assumed constant fluid properties.

In Fig. 3 the axial velocity profiles were shown for both flow with constant fluid properties and with variable fluid properties. It was interesting to learn that for a given coolant injection the axial velocity distribution is larger for the flow with constant fluid properties than the flow with variable fluid properties. This phenomenon can be explained by the fact that the former case the flow was assumed to be isothermal and in the latter case the flow was retarded by the introduction of coolant mass from the wall. The above phenomenon was also obtained from the experiment on turbulent pipe flow with coolant injection [8].

The local Nusselt number for the flow of variable fluid properties is about 10% larger than the case with constant fluid properties. This comparison was calculated from Equation (36) and plotted in Fig. 4. The ratio of temperature difference, $(T_1 - T_w)/(T_w - T_0)$, was plotted against the coolant mass flow ratio $(Q/W)(l/D)$ in Fig. 5. For a predesignated wall temperature, the amount of coolant required per unit time for the flow of variable fluid properties is about 40% higher than the case of constant fluid properties. The above trend was also obtained in

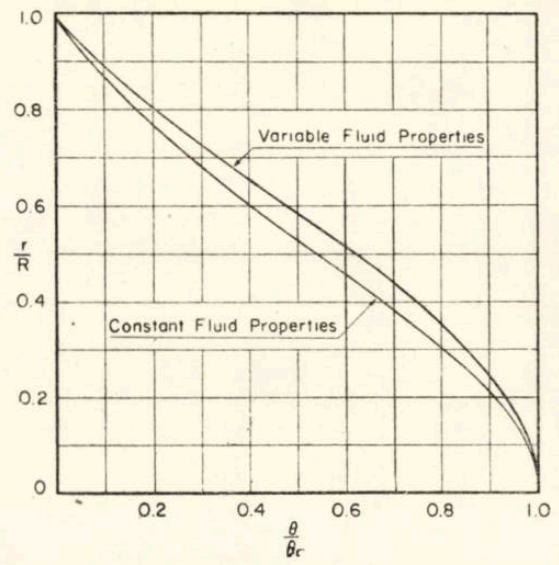


Fig. 2

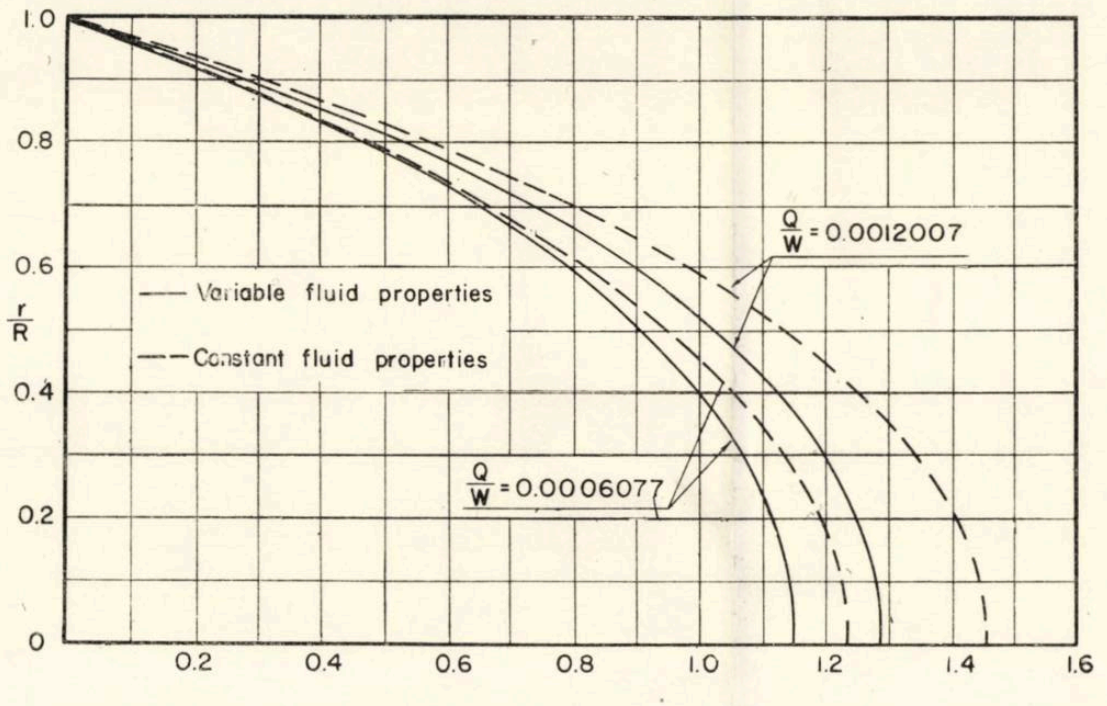


Fig. 3

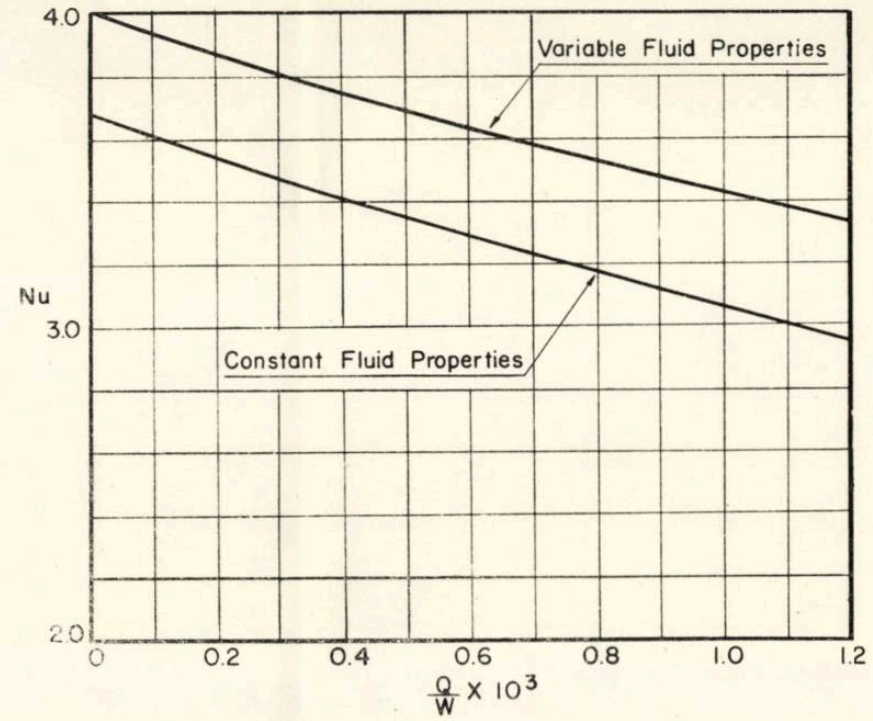


Fig. 4

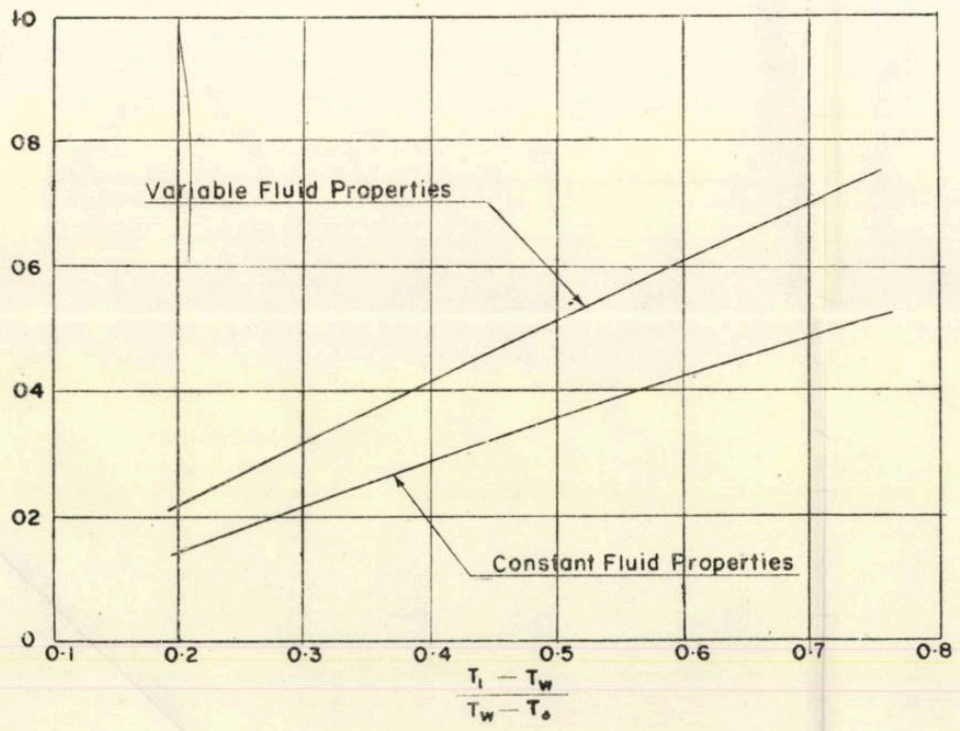


Fig. 5

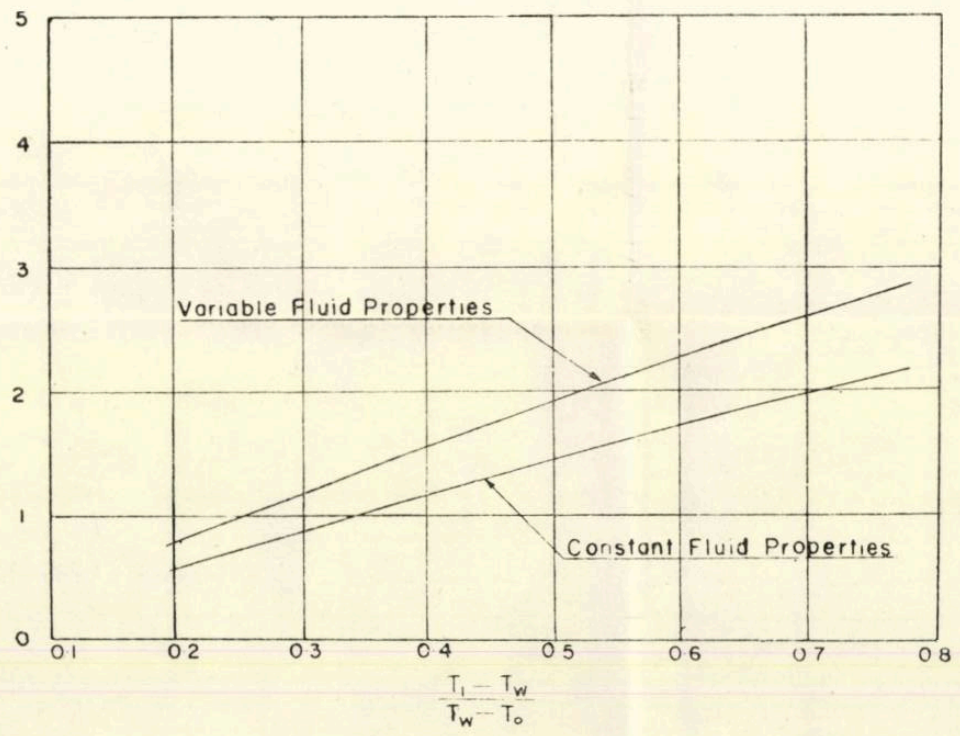


Fig. 6

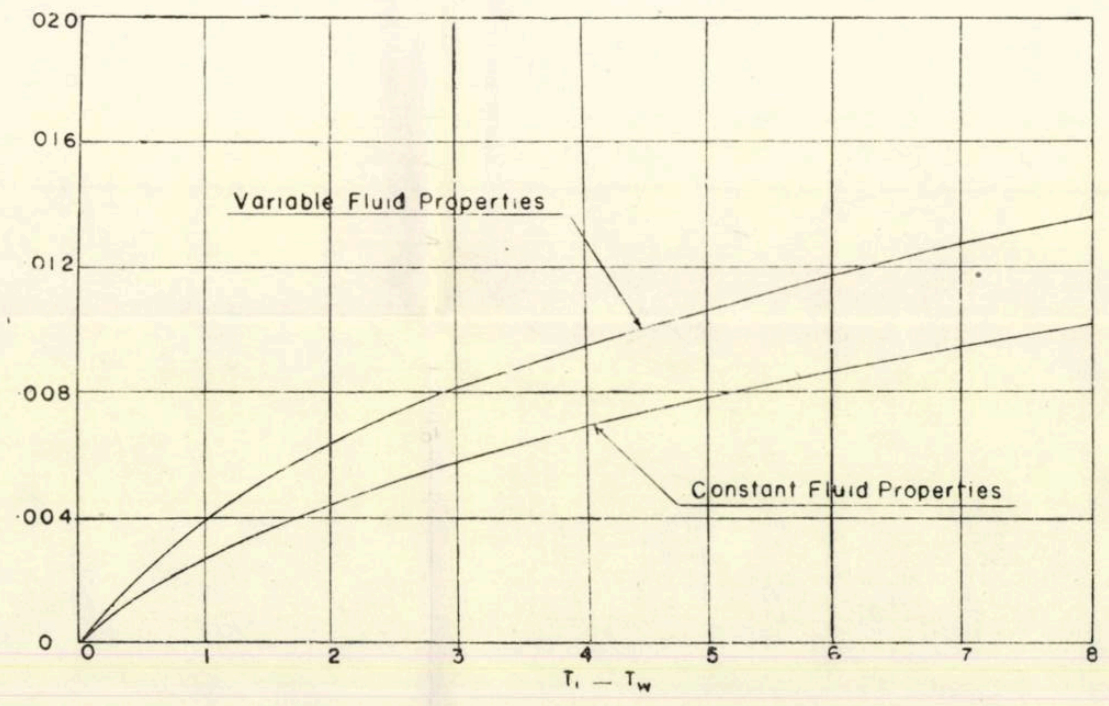
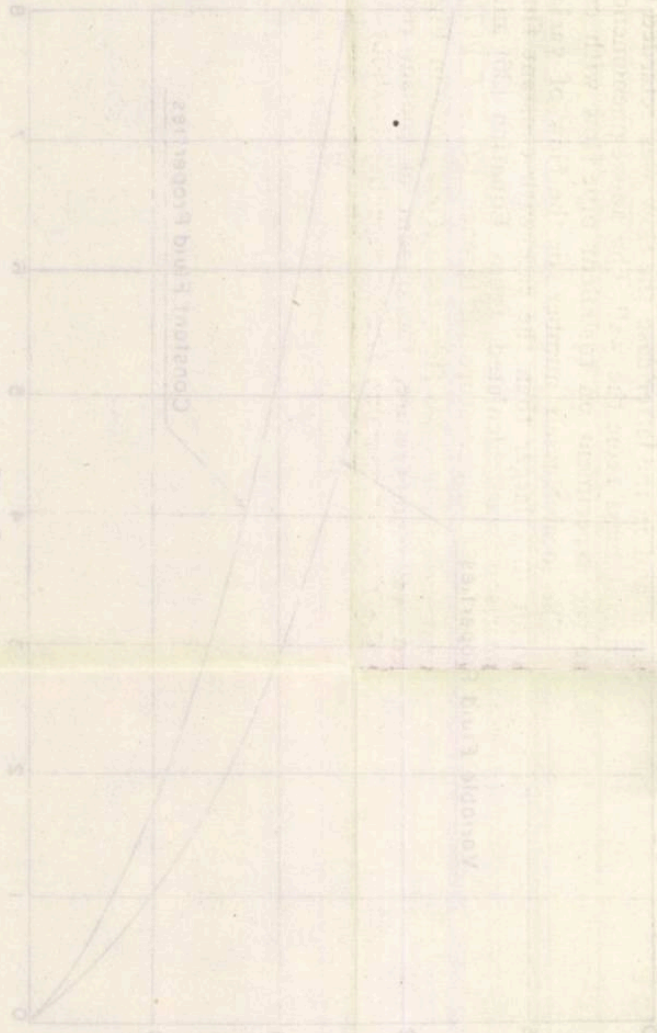
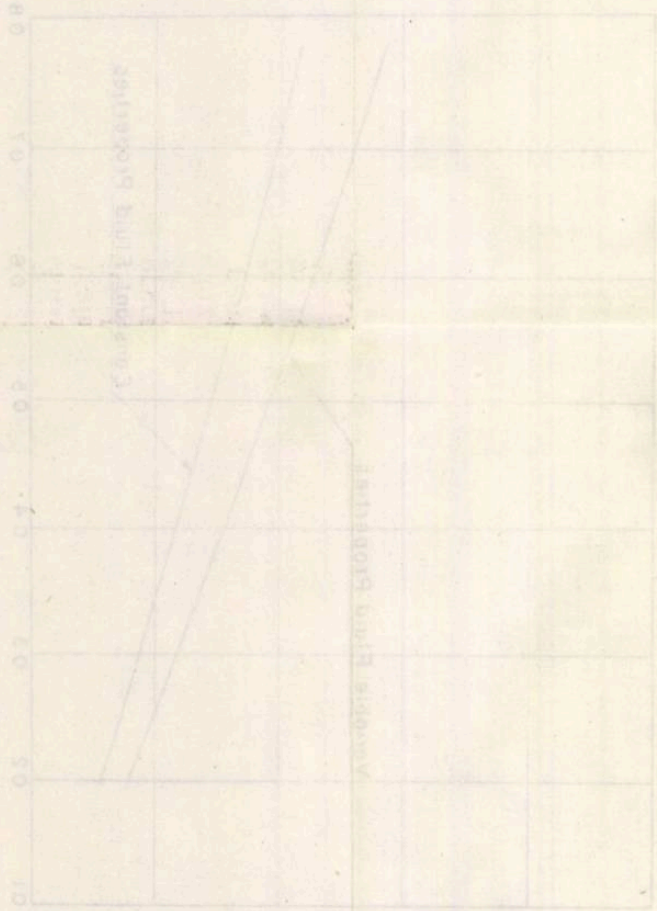
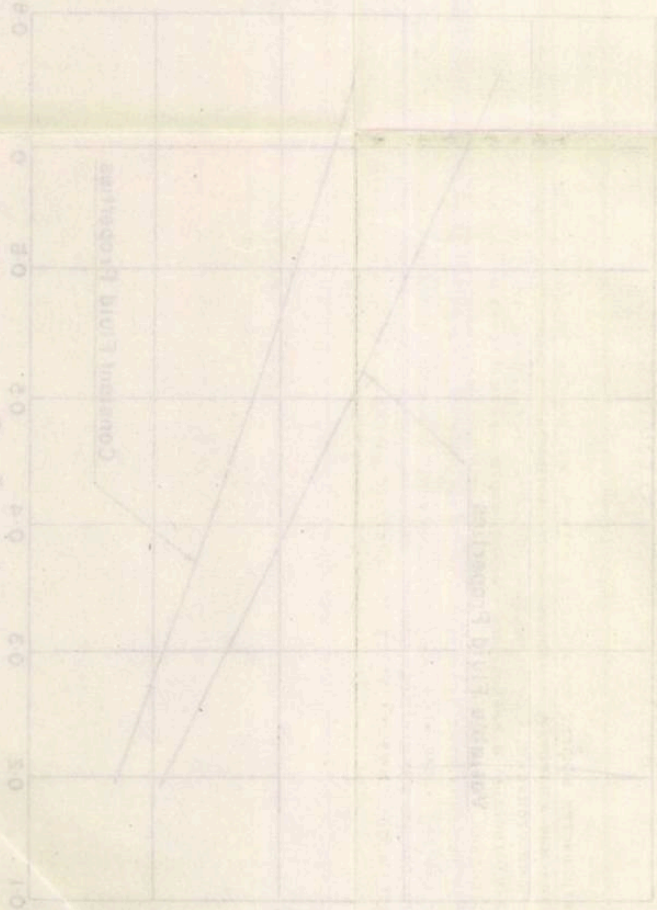
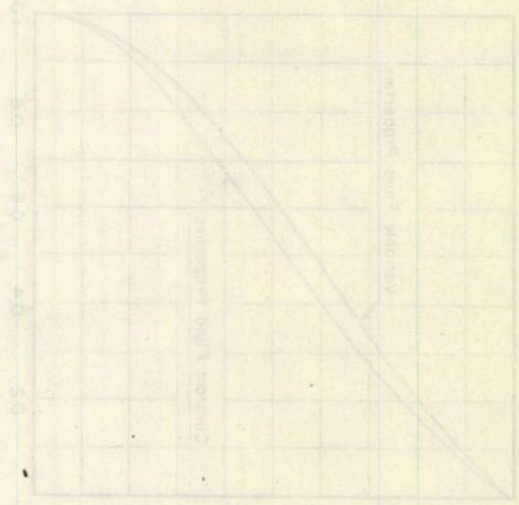


Fig. 7









the case of laminar boundary layer on a porous plate [9], [10] which is given in Fig. 7. In Fig. 6, the ratio of temperature difference, $(T_1 - T_w)/(T_w - T_0)$, was plotted against the coolant mass flow parameter, $Q/(WSt_0)$. In this case the coolant mass flow parameter for the flow of variable fluid properties is about 30% greater than the case of constant fluid properties.

The results obtained from the present study indicate that the heat transfer coefficient calculated in laminar pipe flow with assumed constant fluid properties is nonconservative.

Acknowledgment

This investigation was supported by the Excellence Program of The University of Texas.

Received the 11 I 1962

University of Texas, Austin, U.S.A

REFERENCES

1. Yuan S. W., Finkelstein A. B., Transactions ASME, 1956, **78**, *4*, pp. 719—724.
2. — Jet Propulsion, 1958, **28**, *3*, pp. 178—181.
3. Graetz L., Ann. der Phys. Chem., 1883, **18**, S. 79—94; Ibid., 1885, **25**, S. 337—357.
4. Nusselt W., Ztschr. des Ver. Deutscher Ing., 1910, **54**, S. 1154—1158.
5. Scarborough J. B., *Numerical Mathematical Analysis*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1958, p. 319.
6. Lee A., Nelson W. O., Cherry, V. H., Boelter L. M. K., *Pressure Drop and Velocity Distribution for Incompressible Viscous Nonisothermal Flow in the Steady State Through a Pipe*, Fifth Intern. Congress of Appl. Mech., Cambridge, Massachusetts, September 12—16, 1938, pp. 571—577.
7. Ohjo M., Rep. of Res. Inst. for Appl. Mech., Kyushu University, Fukuoka, Japan, 1952, **1**, *2*, pp. 23—38.
8. Yuan S. W., Barazotti A., *Experimental Investigation of Turbulent Pipe Flow with Coolant Injection*, 1958 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Berkeley, California, June 19—21, 1958, pp. 25 - 39.
9. Yuan S. W., *A Theoretical Investigation of the Temperature Field in the Laminar Boundary Layer on a Porous Flat Plate with Fluid Injection*, Project SQUID, Technical Report No. *4*, September, 1947.
10 Yuan S. W, JAS, 1949, **16**, *12*, pp. 741—748.

ЛАМИНАРНОЕ НЕИЗОТЕРМАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРУБОПРОВОДАХ В СЛУЧАЕ СТЕНОК СО СМАЗКОЙ

(Резюме)

Рассматривается эффект смазочности стенок на распространение температуры в ламинарном течение жидкости, с переменными плотностью и вязкостью, по трубопроводу с пористыми стенками. Составляющие скорости ламинарного течения жидкости, с переменными плотностью и вязкотсью, в зависимости от температуры, были получены решением уравнений Навье-Стокса и уравнения энергии. Был использован метод пертурбации ввиду решения этих уравнений для медленных течений по пористым стенкам и характеристические числа этих последних уравнений были вычислены при помощи счетноэлектронной машины IBM 650.

Результаты исследований отмечают заметные разницы, как в распределении скорости, так и в температуре между изученным случаем с переменными свойствами жидкости и случаем с ее постоянными свойствами [1], [2].

Полученные результаты указывают также, что коэффициент передачи тепла к стенкам является бо́льшим в случае переменных свойств жидкости по сравнению с случаем жидкости с постоянными свойствами.

Следовательно, расчет коэффициентов передачи тепла, при течении жидкости по трубопроводу, основанный на постоянных свойствах жидкости, не является консервативным.

SCURGERE LAMINARĂ NEIZOTERMĂ ÎN CONDUCTE CU PEREŢI LUBRIFIAŢI

(Rezumat)

Se studiază efectul lubrifierii pereţilor asupra distribuţiei de temperatură într-o scurgere laminară a unui fluid cu vîscozitate şi densitate variabilă într-o conductă cu pereţi poroşi. Componentele vitezei scurgerii laminare a fluidului cu densitate şi vîscozitate variabilă, ca funcţii de temperatură, s-au obţinut prin rezolvarea ecuaţiilor lui Navier-Stokes şi a ecuaţiei de energie. S-a folosit o metodă de perturbaţie în vederea rezolvării acestor ecuaţii pentru scurgeri încete prin pereţi poroşi şi valorile proprii ale acestei din urmă ecuaţii au fost calculate cu ajutorul maşinii electronice de calcul IBM 650.

Rezultatele cercetării marchează diferenţe sensibile atît în distribuţia de viteze cît şi în aceea de temperaturi între cazul studiat corespunzător proprietăţilor variabile ale fluidului şi cazul corespunzător proprietăţilor constante ale acestuia [1], [2]. Rezultatele obţinute arată totodată că coeficientul de transfer de căldură la perete este mai mare în cazul proprietăţilor variabile ale fluidului decît în acel corespunzător proprietăţilor constante ale acestuia. Prin urmare calculul coeficientului de transfer de căldură într-o scurgere prin conductă, bazat pe proprietăţile constante ale fluidului, nu este conservativ.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Construcţii. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 3—4, 1962

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

D. K. 624.07 ; 531.32

VIBRATIONS OF CONTINUOUS AND MULTISTOREY RIGID FRAMES

BY

VLADIMÍR KOLOUŠEK

1. The growing trend towards the use, in structural engineering, of precast elements resulted, of necessity, in structural systems built up of either individual repeated members or of repeated sections of the structural gridwork. In his previously published paper [6] the author has characterized such structures as *systems with repeated elements*, and he has shown that the mathematical investigation may be considerably simplified if specific properties of such systems are paid attention to. This pertains not only to statics, but, and the more so, to the dynamics of those structures as the nature of the problems encountered is, in general, more involved in dynamics than in statics.

In the present paper the method for investigating free vibrations of continuous and multistorey rigid frames will be discussed. The analysis as described below, is based on slope-deflection equations combined with the application of finite trigonometrical series. Besides its theoretical clarity, this method of approach enables tabulated values of the frequency functions [2] to be used, so that the numerical work is conveniently reduced. The working procedure is shown for undamped flexural vibrations only, but the method of analysis may be easily extended, should it be necessary to consider the effects of damping and shear. In the latter instance, however, the frequency functions depend on two parameters, which makes a tabulation of the functional values practically impossible, [1], [2].

Structural systems on isolated elastic supports or continuous elastic foundation may be treaded in a similar manner, [3]. Analoguous method of investigation may be applied also to spacial frames built up of repeated individual members or gridwork sections. The methods of analysis pertaining to spacial frames, continuous beams and continuous rigid arches, with various supporting conditions, were discussed by the author in his previous publications ([2], [4] and [5]).

2. In this paper we shall discuss the method for investigating free flexural vibrations of some types of continuous and multistorey frames.

For illustration we shall, as first example, investigate free flexural vibrations of the frame which is shown in Fig. 1.

From the equilibrium of moments acting on any isolated joint, we obtain, on writing down the equations of equilibrium for all joints of the system, the set of homogeneous equations given in Table 1.

The notations in Table 1 are: γ_k — amplitude of angle of rotation pertaining to joint k; a — amplitude of moments produced at ends k of the bars $k-i$ if joint k is rotated through the angle $\gamma_k = 1$. The bars, which intersect at joint k, are assumed to be fixed against rotation at

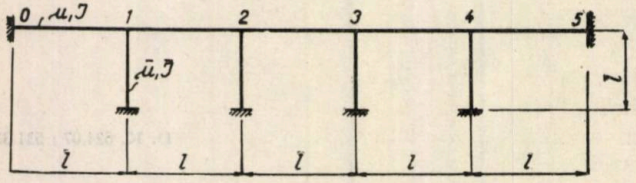


Fig. 1

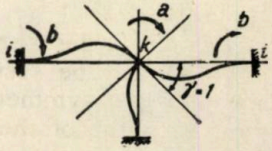


Fig. 2

their respective other ends i (fig. 2); b – amplitude of the moments produced by $\gamma_k = 1$ at the ends i of the respective bars.

Table 1

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	
a	b			$=0$
b	a	b		$=0$
	b	a	b	$=0$
		b	a	$=0$

Making use of the frequency functions $F(\lambda)$, which are tabulated, [2], the values of a and b may be expressed as follows:

$$a = (2\,EI/l)\,F_2(\lambda) + (E\bar{I}/\bar{l})\,F_2(\bar{\lambda}),$$

$$b = (EI/l)\,F_1(\lambda).$$

Here the notations are: E — modulus of elasticity; I — moment of inertia of cross section; l — length of bar; $\lambda = l\sqrt[4]{\mu\,\omega^2/(EI)}$; μ — uniformly distributed mass per unit of length of bar; ω — circular frequency;

$$F_1(\lambda) = -\lambda\,(\sinh\lambda - \sin\lambda)/(\cosh\lambda\cos\lambda - 1),$$

$$F_2(\lambda) = -\lambda\,(\cosh\lambda\sin\lambda - \sinh\lambda\cos\lambda)/(\cosh\lambda\cos\lambda - 1).$$

In the above expression for a the values that pertain to the columns are dashed (e. g. $\bar{I}$), while those for the horizontal beams are not (e. g. I).

The equations presented in Table 1 possess cyclic symmetry, and in such cases a convenient method of solution is to represent the unknowns γ in the form of the following finite trigonometrical series:

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \sin\frac{\pi j}{n} k. \tag{1}$$

The notation in equation (1) is: n — total number of spans of the system; j — integral numbers of the interval, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$; k — ordinal number pertaining to the respective joint, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Substituting for the rotations γ from equation (1) into Table 1, and rearranging, we obtain the frequency equations:

$$F_2(\lambda) + F_1(\lambda)\,\cos[(\pi/n)\,j] + [\bar{I}l/(2\,I\bar{l})]\,F_2(\lambda) = 0. \tag{2}$$

For each value of j, $(j=1,2,\ldots,n-1)$, we thus obtain an independent equation of the form of equation (2). On solving these equations by trial-and-error, using tabulated values for $F(\lambda)$, we obtain the $n-1$ natural circular frequencies ω_j of free flexural vibrations. From equation (1) we then calculate the values of the joint rotations $\gamma_{k(j)}$, pertaining to the j-th frequency. Having the values of $\gamma_{k(j)}$ (for $j=1,2,\ldots,n-1$, and $k=1,2,\ldots,n-1$) we easily find the shapes of the $n-1$ natural modes. The mode shapes for a five-span continuous frame are shown in Fig. 3, where it may be seen that of the total number of natural mode shapes one half are symmetrical and one half antisymmetrical, with respect to the mid-point of the system.

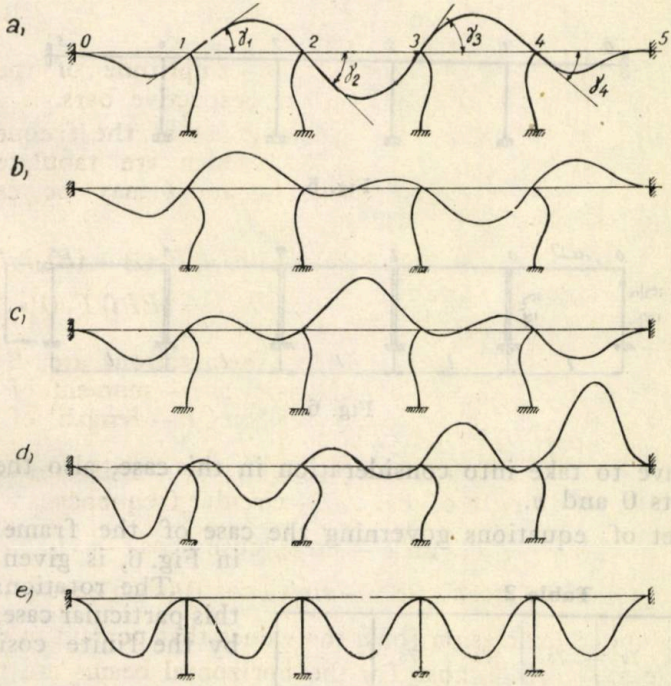


Fig. 3

The n-th natural frequency of the system considered as a whole, is identical with the fundamental frequency which would correspond to any of the individual, single-span beams, if they were taken to be isolated from the system, and rigidly fixed at both ends.

3. The frame as indicated in Fig. 4 can be treated in a manner similar in principle, but we have, in this case, to take into account the different boundary conditions. Instead of $F_2(\bar{\lambda})$ we have, in this instance, to use in equation (2) the function:

$$F_7(\bar{\lambda}) = F_2(\bar{\lambda}) - F_1^2(\bar{\lambda})/F_2(\bar{\lambda}) = (2\bar{\lambda}\sinh\bar{\lambda}\sin\bar{\lambda})/(\cosh\bar{\lambda}\sin\bar{\lambda} - \sinh\bar{\lambda}\cos\lambda).$$

For the frame shown in Fig. 5 we should have to replace $F_2(\bar{\lambda})$ in equation (2) by $[F_2(2\bar{\lambda}) - F_1(2\bar{\lambda})]/2$.

As second example we shall investigate the frame shown in Fig. 6. The cross sections of the end- and interior columns are in the ratio of

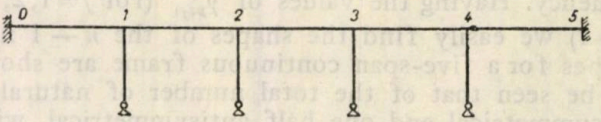


Fig. 4

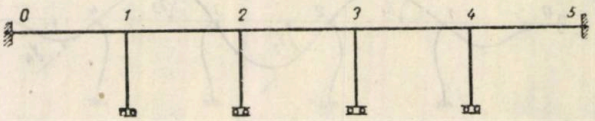


Fig. 5

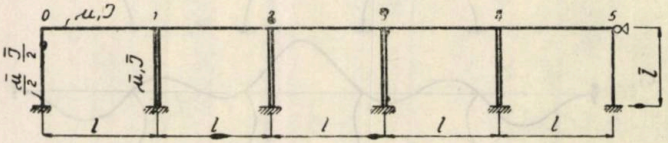


Fig. 6

1 : 2. We have to take into consideration in this case, also the rotations of the joints 0 and n.

The set of equations governing the case of the frame as shown in Fig. 6, is given in Table 2.

Table 2

γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	
$a/2$	b					$= 0$
b	a	b				$= 0$
	b	a	b			$= 0$
		b	a	b		$= 0$
			b	a	b	$= 0$
				b	$a/2$	$= 0$

The rotations γ are, in this particular case, expressed by the finite cosine series:

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{n} \xi_j \cos \frac{\pi j}{n} k \,. \tag{3}$$

Substituting the values of γ from equation (3), into Table 2 we obtain the frequency equations, on the pattern of equation (2), but now we have $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. The mode shapes for the frame indicated in Fig. 6 do not coincide with the shapes pertaining to the frame shown in Fig. 1, and even for identical values of j the particular shapes for the two types of frames show no accordance.

4. For further illustration we give, in Table 3, the set of equations pertaining to the frame as shown in Fig. 7.

Table 3

γ_1	γ_2	γ_3	
$F_2(\lambda) + F_7(\lambda) + [\bar{I}l/(I\bar{l})]\, F_2(\bar{\lambda})$	$F_1(\lambda)$		$=0$
$F_1(\lambda)$	$2F_2(\lambda) + [\bar{I}l/(I\bar{l})]\, F_2(\bar{\lambda})$	$F_1(\lambda)$	$=0$
	$F_1(\lambda)$	$F_2(\lambda) + [\bar{I}l/(I\bar{l})]\, F_2(\bar{\lambda})$	$=0$

Although the equations presented in Table 3 posses no true cyclic symmetry, the above described method of analysis may be still applied, as will be presently shown.

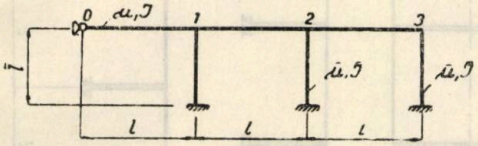


Fig. 7

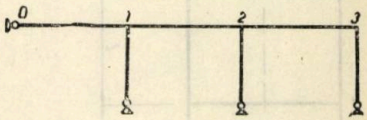


Fig. 8

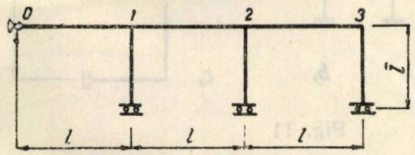


Fig. 9

Considering that

$$F_7(\lambda) = F_2(\lambda) - F_1^2(\lambda)/F_2(\lambda),$$

the determinant pertaining to the set of equations of Table 3 may be written as follows:

$$\begin{vmatrix} F_7(\lambda) + [\bar{I}l/(I\bar{l})]\, F_2(\bar{\lambda}) & 0 & 0 \\ 0 & 2F_2(\lambda) + [\bar{I}l/(I\bar{l})]\, F_2(\bar{\lambda}) & F_1(\lambda) \\ 0 & F_1(\lambda) & 2F_2(\lambda) + [\bar{I}l/(I\bar{l})]\, F_2(\bar{\lambda}) \end{vmatrix} = 0.$$

Hence we have:

$$2F_2(\lambda) + 2F_1(\lambda)\cos[(\pi/3)j] + [\bar{I}l/(I\bar{l})]\, F_2(\bar{\lambda}) = 0, \tag{4}$$

where $j = 1, 2$ and also

(5) $$F_7(\lambda) + [\bar{I}l/(Il)]\, F_2(\bar{\lambda}) = 0.$$

The frames shown in Fig. 8 and Fig. 9, where we have different end-conditions at the foots ot the columns, may be investigated analogically.

5. The multistorey frame as shown in Fig. 10, may be built up of the two frames as shown in Fig. 9; the method of investigation is thus indicated. The frame shown in Fig. 11 a may be built up of the two frames that are shown in Fig. 11 b. The symmetrical vibrations of the composite frame are identical with the symmetrical modes of

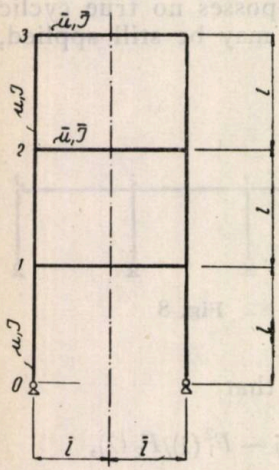


Fig. 10

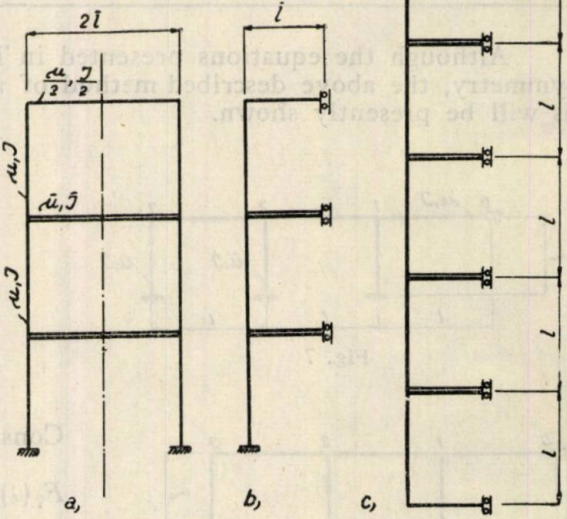


Fig. 11

vibration, that would pertain to the frame shown in Fig. 11 b, if the number of spans of the latter frame be doubled (Fig. 11 c).

6. As numerical example we shall now investigate the frame shown in Fig. 10. The constants for the frame, as shown in Fig. 10, are: $I = 1.10^{-4}\,\mathrm{m}^4$; $\mu = 0.2/9.81 = 0.0204\ \mathrm{tm}^{-2}\mathrm{s}^2$; $l = 6.0\,\mathrm{m}$; $\bar{I} = 2.10^{-4}\,\mathrm{m}^4$; $\bar{\mu} = 0.5/9.81 = 0.0510\ \mathrm{tm}^{-2}\mathrm{s}^2$; $\bar{l} = 2{,}5\,\mathrm{m}$.

We thus have:

$$\bar{I}l/(2\,I\bar{l}) = 2.4 \quad \text{and} \quad 2\bar{\lambda}/\lambda = 0.882.$$

We shall determine the natural frequencies and the corresponding mode shapes for free flexural vibrations. The calculations will be shown only for the modes that are symmetrical to the axis through the mid-point of the system.

The governing set of equations is given in Table 3 a.

Table 3 a

γ_1	γ_2	γ_3	
$F_2(\lambda)+F_7(\lambda)+$ $+[\bar{I}l/(2\,\bar{I}\bar{l})]\,[F_2(2\bar{\lambda})-F_1(2\bar{\lambda})]$	$F_1(\lambda)$		$=0$
$F_1(\lambda)$	$2\,F_2(\lambda)+$ $+[\bar{I}l/(2\,\bar{I}\bar{l})][F_2(2\bar{\lambda})-F_1(2\bar{\lambda})]$	$F_1(\lambda)$	$=0$
	$F_2(\lambda)$	$F_2(\lambda)+$ $+[\bar{I}l/(2\,\bar{I}\bar{l})][F_2(2\bar{\lambda})-F_1(2\bar{\lambda})]$	$=0$

Substituting the above given numerical values into Table 3 a, we obtain the frequency equations. The first equation (analoguous to equation (5)) is:

$$F_7(\lambda) + 2\,4\,[F_2(0.882\,\lambda) - F_1(0.882\,\lambda)] = 0.$$

The lowest value of the shape parameter λ, for which the equation holds true ist $\lambda = 3.32$.

The shape for the first mode is given by the ratios:

$$\gamma_0/\gamma_1 = \gamma_1/\gamma_2 = \gamma_2/\gamma_3 = -F_1(\lambda)/F_2(\lambda) = 1.26.$$

The deflection of the mid point of the beam is then calculated using the formula:

$$v = [\bar{l}\,F_3(\bar{\lambda})/F_6(\bar{\lambda})]\,\gamma \cong 0.6\,\bar{l}\,\gamma.$$

The frequency equation, pertaining to the second natural mode, is analoguous to equation (4) for $j = 2$, and we hawe:

$$2\,F_2(\lambda) - F_1(\lambda) + 2.4\,[F_2(0.882\,\lambda) - F_1(0.882\,\lambda)] = 0.$$

The shape parameter λ has in this case the value

$$\lambda = 3.56$$

The shape for the second natural mode is determined by the ratios:

$$\gamma_0/\gamma_1 = -F_1(\lambda)/F_2(\lambda), \quad \gamma_1/\gamma_2 = -F_1(\lambda)/[F_2(\lambda) - F_1(\lambda) - F_7(\lambda)],$$

$$\gamma_2/\gamma_3 = [F_2(\lambda) - F_1(\lambda)]/F_1(\lambda).$$

On inserting the numerical values we thus have:

$$\gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 \cong 1 : -0.5 : -0.5 : 1.$$

Finally, for $j = 1$ we obtain the frequency equation which corresponds to the third natural mode:

$$2\,F_2(\lambda) + F_1(\lambda) + 2.4\,[F_2(0.882\,\lambda) - F_1(0.882\,\lambda)] = 0.$$

The solution in this case is

$$\lambda = 4.03.$$

The shape for the third mode is given by the ratios:

$$\gamma_0/\gamma_1 = -F_1(\lambda)/F_2(\lambda), \quad \gamma_1/\gamma_2 = -F_1(\lambda)/[F_2(\lambda) + F_1(\lambda) - F_7(\lambda)],$$

$$\gamma_2/\gamma_3 = [F_2(\lambda) + F_1(\lambda)]/F_1(\lambda).$$

Substituting the numerical values we obtain:

$$\gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 \cong -1 : -0.14 : 0.85 : 1.$$

The shapes for the first three natural modes are shown in Fig. 12.

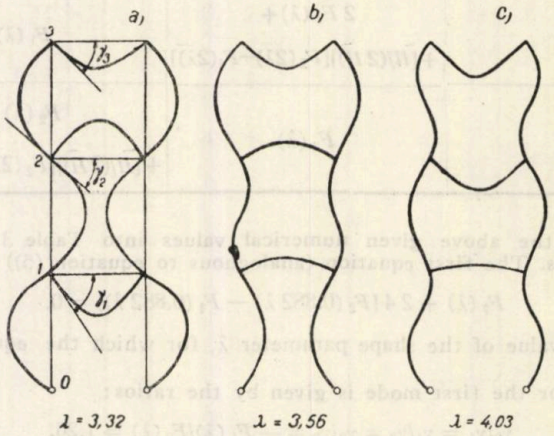


Fig. 12

7. Structural systems on the pattern which is shown in Fig. 13 have, of lately, found wide use in bridge construction. For investigating

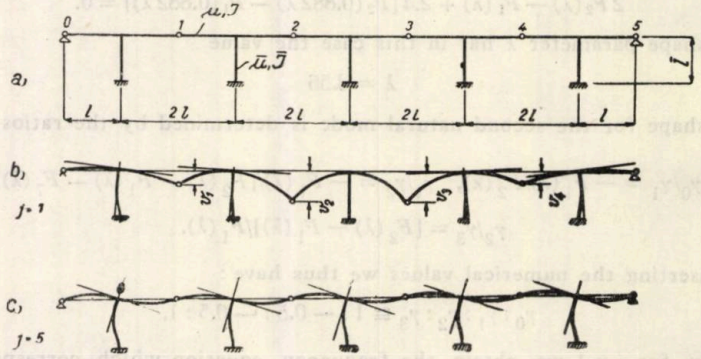


Fig. 13

the vibrations in the manner outlined above, it is convenient in this case to take for the unknowns the vertical deflections v_k of the joints.

From the equillibrium of vertical forces acting at the joints we obtain the set of homogeneous equations which is presented in Table 4.

The notations in Table 4 are: a — amplitude of periodic force which would produce forced vibrations of the system with a unit amplitude of deflection at the joint k; b — the amplitude of vertical reaction at the end i of the respective bar $i-k$, on the assumption that the respective bars are fixed at the joints i (Fig. 14).

Table 4

v_1	v_2	v_2	v_3	
a	b			$=0$
b	a	b		$=0$
	b	a	b	$=0$
		b	a	$=0$

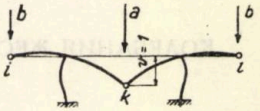


Fig. 14

The values of a and b are given by the relations:

$$a=2EI/[F_{12}(\lambda)-B]/l^3, \quad b=EIB/l^3,$$

where:

$$(6)\quad \begin{cases} B=F_8^2(\lambda)/\{2F_7(\lambda)+[\bar{I}l/(I\bar{l})]\,F_2(\lambda)\}, \\ F_{12}(\lambda)=\lambda^3(\cosh\lambda\cos\lambda+1)/(\cosh\lambda\sin\lambda-\sinh\lambda\cos\lambda). \end{cases}$$

The vertical deflections v_k of the joints we represent by the series:

$$(7)\quad v_k=\sum_{j=1}^{n-1} y_j \sin\frac{\pi j}{n}k.$$

Inserting these values of v_k into Table 4 we obtain the frequency equations:

$$(8)\quad F_{12}(\lambda)+B\{\cos[(\pi/n)j]-1\}=0.$$

We have further:

$$(9\,a)\quad 2F_7(\lambda)+[\bar{I}l/(I\bar{l})]\,F_2(\lambda)=0$$

and

$$(9\,b)\quad F_8(\lambda)=0.$$

The shapes for the first and the fifth modes pertaining to the system as indicated in Fig. 13, are schematically given in Fig. 13 b, c.

8. If the cross-section of the elements is not uniform, the most expedient method of analysis is a combination of the procedure outlined above with the method of successive approximation. A suitable working lay-out of the analysis for such cases has been given by the author of this paper in his previous publication [6], where also numerical illustrations may be found, which show the application of the procedure to practical examples encountered in engineering practice.

Reccived the 11 I 1962

Czechoslovak Academy of Sciences,
Prague, Czechoslovak Socialist Republic

REFERENCES

1. Kolousek V., *Vibrations amorties des portiques (Généralisation de la méthode de déformation)*, Final Report, 3rd Congress of the IABSE, Liège, 1948.
2. — *Calcul des efforts dynamiques dans les ossatures rigides*, Dunod, Paris, 1959.
3. Чудновский В. Г., *Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем*, Киев, 1952.
4. Kolousek V., *Statické řešení spojitých oblouků o stejných klenbách a na stejných pilířích*. Technickovedecké vydavatelství, Praha, 1952.
5. — *Dynamika stavebních konstrukcí*, III, díl, SNTL, Praha, 1961.
6. — *Dynamics of Continuous Structures with Repeated Elements*, Final Report, 6th Congress of the IABSE, Stockholm, 1960.

КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКИХ МНОГОЭТАЖНЫХ СПЛОШНЫХ РАМ

(Резюме)

Автор, на основание ряда предыдущих своих работ [4]...[6], дает метод изучения свободных изгибающих колебаний многоэтажных сплошных рам.

OSCILAŢII ALE CADRELOR RIGIDE CONTINUE, MULTIETAJATE

(Rezumat)

Autorul, plecînd de la o suită de lucrări proprii anterioare [4]...[6], expune o metodă de studiu a oscilaţiilor la încovoiere liberă ale unor cadre continue multietajate

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C.Z. 624.07 ; 539.4

UTILIZAREA MOMENTELOR ACTIVE GRUPATE LA REZOLVAREA CADRELOR CU LANŢURI CINEMATICE LEGATE

DE
N. ORLOVSCHI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică pe ţară în probleme rutiere, Iaşi, 21—23 decembrie 1961

Cadrele cu lanţuri cinematice legate sau dependente de tipul celui din fig. 1 a prezintă dificultăţi în rezolvarea lor prin procedee într-o singură treaptă, datorită influenţei reciproce dintre lanţurile cinematice, spre deosebire de cadrele cu lanţurile cinematice independente (fig. 1 b).

Folosind metoda momentelor active, ecuaţiile de condiţie pentru cele două tipuri de cadre sînt :

a) pentru cadrul din fig. 1 a :

$$(1)\begin{cases} -M_i + \sum \mu_{ik} M_k + \sum \mu_{iA} M_A + \mathfrak{R}_i = 0, \\ \sum \mu_{Ai} M_i - M_A + \sum \mu_{AB} M_B + \mathfrak{R}_A = 0; \end{cases}$$

b) pentru cadrul din fig. 1 b :

$$(2)\begin{cases} -M_i + \sum \mu_{ik} M_k + \sum \mu_{iA} M_A + \mathfrak{R}_i = 0, \\ \sum \mu_{Ai} M_i - M_A + \mathfrak{R}_A = 0, \end{cases}$$

$$(i = 1,\ldots,6\,;\ A = A, B, C).$$

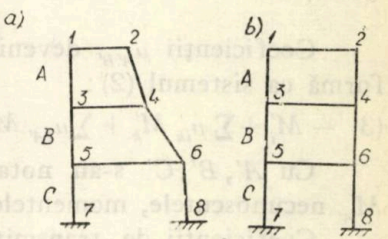


Fig. 1

Se observă că în sistemul de ecuaţii (2) coeficienţii μ_{AB} sînt nuli, în timp ce în sistemul de ecuaţii (1), μ_{AB} sînt diferiţi de zero, fapt care introduce unele dificultăţi în rezolvarea unor astfel de structuri.

Folosind o grupare convenabilă a momentelor active de noduri şi de lanţuri se poate obţine anularea coeficienţilor μ_{AB} astfel ca soluţionarea celor două tipuri de sisteme să se facă cu aceeaşi uşurinţă.

Barele ce fac lanţurile cinematice dependente sînt riglele, cum se observă în fig. 2, unde se dau deformatele sistemului de bază, pentru cele trei grade de libertate.

Eliminarea barelor comune dintre lanţuri se poate face acţionînd în plus, în nodurile riglelor, cu rotiri β_{ik}, egale cu coeficienţii de proporţionalitate ai rotirilor riglelor în lanţul cinematic considerat, aşa cum

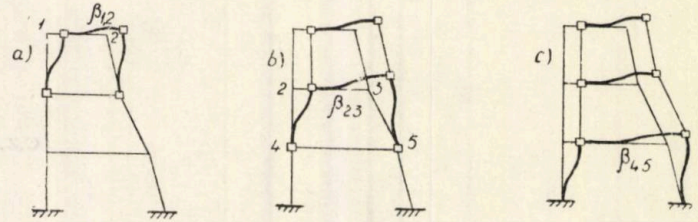


Fig. 2

se arată în fig. 3 a, b, c. În acest mod riglele nu se deformează, singurele bare ce fac parte din noile lanţuri cinematice (grupate) fiind stîlpii, caz similar sistemului din fig. 1 b.

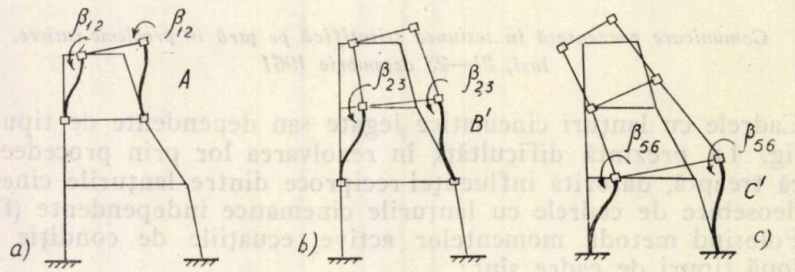


Fig. 3

Coeficienţii $\mu_{A'B'}$ devenind nuli, sistemul de ecuaţii va avea aceeaşi formă ca sistemul (2):

$$(3)\quad -M'_i+\sum \mu_{ik} M'_k+\sum \mu_{iA'} M'_{A'}+\mathfrak{M}_i=0\,,\quad -M'_A+\sum \mu_{A'K} M'_K+\mathfrak{M}_{A'}=0\,.$$

Cu A', B', C' s-au notat lanţurile cinematice grupate, iar cu M'_i, $M'_{A'}$ necunoscutele, momentele active grupate (de nod şi de lanţ).

Coeficienţii de transmitere dintre necunoscute capătă expresiile:

$$(4)\quad \mu_{ik}=-r_{ki}\gamma_{ki}\,,$$

$$(5)\quad \mu_{iA'}=\bar{\nu}'_{ik}=(\bar{K}'^{A}_{ik}+K_{ik}\beta^{A}_{im})/\bar{K}'_{A'},\quad \bar{\nu}'_{ki}=(\bar{K}'^{A}_{ki}+K_{ik}\gamma_{ik}\beta^{A}_{im})/\bar{K}'_{A'},$$

$$(6)\quad \begin{cases} \mu_{A'i}=\sum\limits_i r_{ik}(1+\gamma_{ik})\beta^{A}_{ik}/\beta_{A'}\,,\quad 1/\beta_{A'}=\bar{K}_{A'}/\bar{K}''_{A}\,, \\ \bar{K}''_{A'}=\sum\limits_{A'} \bar{K}'^{A'}_{ik}\beta^{A'}_{ik}\,,\quad \bar{K}'_{A'}=\sum\limits_{A'}[\bar{K}'^{A}_{ik}+\bar{K}'^{A}_{ki}+K_{ik}(1+\gamma_{ik})\beta_{im}]\,, \end{cases}$$

unde: $\bar{K}'_{A'}$ — rigiditatea la deplasare a lanţului grupat A', β^{A}_{im} — coeficientul de proporţionalitate al rotirii riglei comune lanţului A şi B.

Termenii liberi au expresiile:

(7) $$\mathfrak{M}_i = \sum \mathfrak{M}_{ik} \quad \text{şi} \quad \mathfrak{M}_{A'} = L_{A'} / \beta_{A'},$$

unde: $L_{A'}$ — lucrul mecanic al forțelor exterioare şi al momentelor de încastrare perfectă (în sistemul de bază), corespunzator lanțului cinematic grupat A'.

Determinarea momentelor active grupate se face fie rezolvînd sistemul de ecuații (3), fie rezolvînd cadrul pe un tabel de transmiteri. În cazul cînd convergența iterației este lentă, ceea ce se întîmplă de obicei cînd stîlpii au rigiditate mare, se poate folosi un procedeu de grăbire a convergenței, pornind inițial cu mărimile corectate $\mathfrak{M}_i^C$, $\mathfrak{M}_{A'}^C$, de forma:

(8) $$\mathfrak{M}_{A'}^C = \mathfrak{M}_{A'} + \varepsilon_{A'},$$

în care corecția $\varepsilon_{A'}$ se poate considera aproximativ:

(9) $$\varepsilon_{A'} = \mathfrak{M}_{A'} \sum \mu_{iA'} \sum \mu_{A'i}.$$

În cazul cînd avem lanțuri cinematice legate, adică $\mu_{AB} \neq 0$, aprecierea corecțiilor este practic imposibilă.

Folosind procedeul accelerat — operarea cu mărimile corectate — sînt necesare 3...4 cicluri de echilibrări pentru a se putea obține rezultate de o precizie practic suficientă, cum se va vedea în exemplul de calcul.

Trecerea la momentele din capetele barelor se face cu ajutorul relațiilor:

(10) $$\begin{cases} M_{ik} = M_i' r_{ik} + M_k' r_{ki} \gamma_{ki} + \overline{\nu_{ik}' M_A'} + \mathfrak{M}_{ik} & \text{— pentru stîlpi} \\ M_{ik} = M_i' r_{ik} + M_k' r_{ki} \gamma_{ki} + \mathfrak{M}_{ki} & \text{— pentru rigle.} \end{cases}$$

Exemplu de calcul

Se cere rezolvarea cadrului din fig. 4.

a) *Caracteristicile sistemului* se dau în tabelul 1. Lanțurile cinematice inițiale (negrupate) sînt redate în fig. 5.

Acționînd cu momente unitare în fiecare nod ($\mathfrak{M}_i = 1$) şi în fiecare lanț grupat ($\mathfrak{M}_{A'} = 1, \mathfrak{M}_{B'} = 1$) (în fig. 6 se arată deformatele corespunzătoare lanțurilor grupate A' şi B'), vom calcula coeficienții de transmitere între necunoscute.

Cu relația (4) găsim: $\mu_{12} = -0{,}12786$, $\mu_{13} = -0{,}2$, $\mu_{21} = -0{,}2$, $\mu_{24} = -0.2294$, $\mu_{31} = -0{,}3$, $\mu_{34} = -0{,}0591$, $\mu_{42} = -0{,}37213$, $\mu_{43} = -0{,}1$.

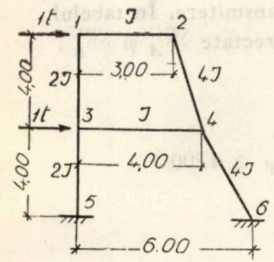


Fig. 4

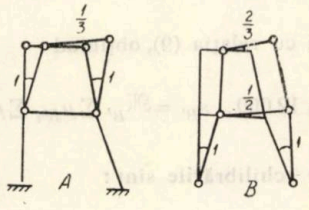


Fig. 5

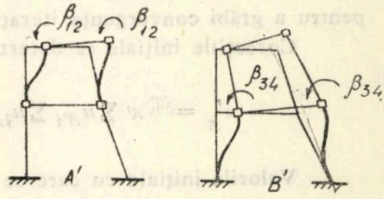


Fig. 6

Tabelul 1

Bara	l_{ik}	I	K_{ik}	β_{ik}^{A}	β_{ik}^{B}	$\bar{K}_{ik}$	$\bar{K}_{ik}^{\prime A}$	$\bar{K}_{ik}^{\prime B}$
1—2	3,00	I	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
3—4	4,00	I	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$
1—3	4,00	$2I$	2	1	0	3	3	0
3—5	4,00	$2I$	2	0	1	3	0	3
2—4	4,1231	$4I$	$\frac{16}{4,1231}$	1	0	$\frac{24}{4,1231}$	$\frac{24}{4,1231}$	0
4—6	4,1721	$4I$	$\frac{16}{4,4721}$	0	1	$\frac{24}{4,4721}$	0	$\frac{24}{4,4721}$

Cu relaţiile (5) găsim: $\mu_{1A'}=(\bar{K}_{13}^{\prime A}-\beta_{12}^{A}K_{13})/\bar{K}_{A'}^{\prime}=0,17815$ şi în mod analog $\mu_{3A'}=0,16195$, $\mu_{2A'}=0,34566$, $\mu_{4A'}=0,31424$, $\mu_{3B'}=(\bar{K}_{35}^{\prime B}-K_{53}\beta_{34}^{B})/\bar{K}_{B'}^{\prime}=0,19124$, $\mu_{4B'}=$ $=0,34210$, $\mu_{5B'}=(\bar{K}_{53}^{\prime B}-K_{35}\gamma_{35}\beta_{34}^{B})/\bar{K}_{B'}^{\prime}=0,16733$, $\mu_{6B'}=0,29933$.

Cu relaţia (6) găsim: $\mu_{A'1}=r_{13}(1+\gamma_{13})\,1-r_{12}(1+\gamma_{12})/3=0,7$, $\mu_{A'2}=0,98854$, $\mu_{A'3}=0.6$, $\mu_{A'4}=0,6832$, $\mu_{B'1}=-0,4$, $\mu_{B'2}=-0,25573$, $\mu_{B'3}=0,45$, $\mu_{B'4}=0,54385$.

Termenii liberi au valorile

$$\mathfrak{M}_{A'}=L_{A'}/\beta_{A'}=4P=4\,000\ \text{kgm},\quad \mathfrak{M}_{B'}=L_{B'}/\beta_{B'}=8P=8\,000\ \text{kgm},\quad (\beta_{A'}=\beta_{B'}=1).$$

Cu aceste valori urmează să se facă pe tabel operaţiile de transmitere. În tabelul 2 se indică operaţiile de transmitere operîndu-se cu valorile corectate $\mathfrak{M}_{A}^{C}$ şi $\mathfrak{M}_{B}^{C}$, pentru a grăbi convergenţa iteraţiei.

Corecţiile iniţiale se determină cu relaţia (9), obţinînd:

$$\varepsilon_{A}^{\prime}=\mathfrak{M}_{A'}\Sigma\mu_{A'i}\Sigma\mu_{iA'}\cong 12\,000,\quad \varepsilon_{B'}=\mathfrak{M}_{B'}\Sigma\mu_{B'i}\Sigma\mu_{iB'}\cong 4\,200.$$

Valorile iniţiale cu care se fac echilibrările sînt:

$$\mathfrak{M}_{A}^{C}=4\,000+12\,000=16\,000,\quad \mathfrak{M}_{B}^{C}=8\,000+4\,200=12\,200.$$

Tabelul 2

	1	2	3	4	A'	B'
	$\mu_{21}=-0,2$	$\mu_{12}=-0,128$	$\mu_{13}=-0.2$	$\mu_{24}=-0,229$	$\mu_{1A'}=0,178$	$\mu_{3B'}=0,191$
	$\mu_{31}=-0,3$	$\mu_{42}=-0,372$	$\mu_{43}=-0,1$	$\mu_{34}=-0,059$	$\mu_{2A'}=0,346$	$\mu_{4B'}=0,342$
	$\mu_{A'1}=0,7$	$\mu_{A'2}=0,989$	$\mu_{A'3}=0,6$	$\mu_{A'4}=0,688$	$\mu_{3A'}=0,162$	
	$\mu_{B'1}=-0,4$	$\mu_{B'2}=-0,256$	$\mu_{B'3}=0,45$	$\mu_{B'4}=0,546$	$\mu_{4A'}=0,314$	
$\mathfrak{M}_i$						
A	2 850	5 531	2 591	5 028	16 000	
B			2 333	4 174		12 200
4		−2 110	−544	9 202	6 333	5 023
3	− 876		4 380	−438	2 628	1 971
2	− 437	3 421		−1 273	3 382	−875
1	1 537	−307	−461		1 076	−615
4		392	101	−1 711	−1 177	−934
3	72		−360	36	−216	−162
2	− 11	85		−32	84	−22
1	61	−12	−18		43	−24
A	27	53	25	48	153	
B			31	55		162
4		−24	−6	107	74	58
A	13	26	12	20	74	58
B			11	23		
		−10	−3	43	30	23
⋮						
Σ	1 645	3 594	4 091	7 667	16 434	12 447

Se va avea grijă ca pe parcurs corecțiile introduse să se scadă, așa cum se poate urmări pe tabel în coloana lui A' unde la a doua echilibrare a lanțului A' s-a scăzut valoarea corecției (=12 000) rămînînd doar un moment de 153 kgm.

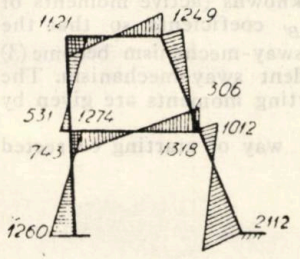


Fig. 6

Momentele din capetele barelor se determină cu relațiile (10), obținînd :

$$M_{12}=M_1' r_{12}+M_2' r_{21}\gamma_{21}+\mathfrak{M}_{12}=1118,\quad M_{13}=M_1' r_{13}+$$
$$+M_3' r_{31}\gamma_{31}+\bar{\nu}_{13}' M_A'+\mathfrak{M}_{13}=-1125 \quad \text{ş. a. m. d.}$$

Diagrama de momente este dată în fig. 7. În tabelul 3 se pot compara valorile momentelor obținute prin altă metodă. Se vede că diferența dintre cele două metode este practic neesențială.

Tabelul 3

Barele	1—2	5—3	2—1	2—4	3—1	3—4	3—5	4—2	4—3	4—6	6—4
Mom. act.	1 121	1 260	1 249	1 248	531	1 274	743	306	1 318	1 012	2 112
Cross	1 119	1 272	1 249	1 249	542	1 289	766	303	1 319	1 010	2 096

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și beton armat

BIBLIOGRAFIE

1. Maugh L. L., *Statically Indeterminate Structures*, John Willey, N. Y., 1948.
2. Şesan A., *Rezolvarea sistemelor static nedeterminate cu ajutorul momentelor active.* Comun. ses. şt. jubil., Inst. Mec. Apl. „Traian Vuia", Acad. R. P. R., 2—4 iulie 1961.
3. Şesan A., Orlovschi N., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III** (**VII**), *3—4*, pp. 245—250.
4. Mazilu P., *Statica construcţiilor*, vol. **II**, ESAC, Buc., 1959.

РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ РАМ МЕТОДОМ ГРУППОВЫХ АКТИВНЫХ МОМЕНТОВ

(Резюме)

Расчет иттеративными способами в одну фазу сложных рам, со связанными кинематическими цепями (рис. 1 а) представляет известные трудности по сравнению с рамами с вертикальными стойками.

Применение групповых неизвестных позволяет аннулировать коэффициенты выражающие влияние между степенями свободы рамы [3]. Используя метод групповых активных моментов, устанавливаются выражения коэффициентов передачи для неизвестных (активные моменты узлов и кинематических цепей)— уравнения (4), (5), (6). При этом расчет сложных рам, вида рис. 1 а, ведется так же, как и для обыкновенных рам с вертикальными стойками. Коэффициенты $\mu_{A'B'}$ равняются нулю и канонические уравнения (3) имеют тот же вид, что и уравнения (2).

В случае слабой сходимости иттерации, рекомендуется ускоренный способ, начиная расчеты с исправленными величинами, выражение которых дано уравнениями (7), (8).

Этим методом решается рама данная на рис. 4.

THE USE OF THE GROUPED ACTIVE MOMENTS FOR RESOLVING THE FRAMES WITH DEPENDENT SWAY-MECHANISM

(Summary)

The difficulties in resolving in a single phase of the frames with dependent sway-mechanism can be eliminated, if is used a suitable grouping of unkowns, as the influence factors among the sway-mechanism can be annulled, as is indicated in [3]. The use of active moments method with grouped unknowns (active moments of joints and sway-mechanisms) leads to the annulment of $\mu_{A'B'}$ coeficients, so that the set of equations for the case of frames with dependent sway-mechanism become (3) similar to (2), corresponding to the frames with independent sway-mechanism. The carry-over factors among the new unknowns and the starting moments are given by the relations (4) ... (7).

To accelerate the iteration convergence is used the way of starting corrected values, established with the relations (7) and (8).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C.Z. 624.02 ; 662.998

STUDIUL IZOLĂRII TERMICE A CLĂDIRILOR DE LOCUIT CU PEREŢI DIN ZIDĂRII EFICIENTE, PRIN ANALOGIE ELECTRICĂ

DE

VIRGIL FOCŞA, ADRIAN RADU şi ALEXANDRU VEREŞ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Studiul caracteristicilor termice ale elementelor de construcţie constituie o preocupare actuală a laboratorului de clădiri, legată în special de utilizarea materialelor şi structurilor noi : zidării eficiente, panouri mari, pereţi din beton, acoperişe terasă [1], [2].

În [3], studiind izolarea termică a clădirilor de locuit cu pereţi neomogeni, s-a arătat importanţa considerării transmisiei de căldură în toată complexitatea ei, după două şi trei direcţii, ţinînd seama de discontinuitatea izolaţiilor termice şi de formele specifice ale elementelor de construcţie (colţuri, ieşinduri etc.). În asemenea cazuri este necesar să se cunoască cîmpul termic al elementului studiat.

Din punct de vedere matematic cunoaşterea cîmpului termic echivalează cu determinarea funcţiei de potenţial $t(x, y)$ care satisface ecuaţia diferenţială de tip Laplace :

$$\partial[\lambda(\partial t/\partial x)]/\partial x + \partial[\lambda(\partial t/\partial y)]/\partial y = 0, \tag{1}$$

cu condiţii de contur de tip :

a) Fourier $\alpha(t_{i,e} - t_{si,se}) = -\lambda(\partial t/\partial n)$,

b) Neumann $\lambda(\partial t/\partial n) = 0$,

c) Dirichlet $t_{i,e} = C$,

unde : x, y — coordonatele unui punct oarecare din domeniul studiat (fig. 1) ; t_i, t_e — temperatura aerului (interior, exterior) ; $t_{si,se}$ — temperatura elementului de construcţie pe suprafaţa interioară sau exterioară ; $\lambda(x, y)$ — coeficientul de conductivitate termică, diferit pe zone (tencuială, cărămidă, beton etc.)

Ecuaţia (1) reprezintă particularizarea, pentru regimul termic staţionar, a ecuaţiei generale a conducţiei căldurii în cazul absenţei izvoarelor interioare de căldură :

$$\partial(c, \gamma, t)/\partial z = M + \partial[\lambda(\partial t/\partial x)]/\partial x + \partial[\lambda(\partial t/\partial y)]/\partial y . \tag{2}$$

Condiția de contur a) exprimă faptul că elementul studiat prezintă pe unele laturi schimb termic în zona de contact cu aerul aflat la temperatura constantă t_i și t_e. Condiția de contur b) arată că fluxul termic nu traversează frontiera, aceasta fiind identică cu linia de curent.

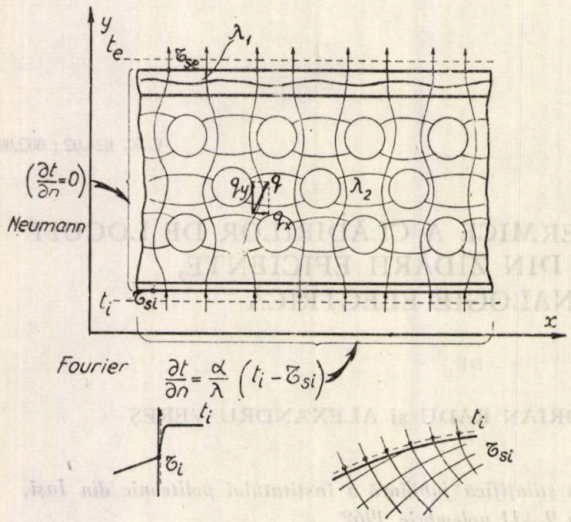


Fig. 1. — Cîmpul termic în cazul unui element de construcție neomogen, cu indicarea condițiilor de contur.

Principial problema s-ar putea rezolva analitic, prin calcul aproximativ sau prin încercări pe modele. În cazurile interesînd studiul termic al elementelor de construcții este practic imposibilă determinarea analitică a funcției de potențial. Calculul aproximativ, prin înlocuirea ecuației diferențiale prin ecuații cu diferențe finite, rezolvabile prin iterație, este extrem de laborios, numărul necunoscutelor fiind foarte mare. Rezultatul obținut fiind numeric nu permite generalizări și trebuie deci să fie repetat pentru toate cazurile studiate.

De asemenea sînt cunoscute dificultățile efectuării încercărilor pe modele termice și pe clădiri în exploatare. Prin aceste metode studiul caracteristicilor termice (determinarea cîmpului și rezistenței) este greu de abordat chiar în laboratoare bine utilate, dispunînd de personal numeros și aparatură adecvată.

Pentru a permite studiul caracteristicilor termice ale elementelor de construcție în numeroasele cazuri ridicate de proiectarea clădirilor ne-am propus aplicarea metodei analogiilor electrice, folosită cu mult succes în probleme de hidraulică, magnetism, electricitate statică, termică, acolo unde este necesar să se determine valorile unei funcții de potențial ce satisface ecuația Laplace [4].

2. Principiul metodei

Analogia între fenomenele electrice și termice rezultă pe baze matematice, ambele fenomene fiind reprezentate, în regim staționar, prin ecuații diferențiale similare:

Fenomene electrice	*Fenomene termice*
$\partial\left[c\left(\partial V/\partial x\right)\right]/\partial x+\partial\left[c\left(\partial V/\partial y\right)\right]/\partial y=0$	$\partial\left[\lambda\left(\partial t/\partial x\right)\right]/\partial x+\partial\left[\lambda\left(\partial t/\partial y\right)\right]/\partial y=0$
potențial electric V	potențial termic . . . . t
diferență de potențial . . V_1-V_2	diferență de temperatură . t_1-t_2
suprafață echipotențială . $V=$const.	suprafață izotermă . . . $t=$const.
gradient electric . . . . $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$	gradient termic . . . . $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$
conductivitate electrică . . c	conductivitate termică . . λ
curent electric . . . $\mathrm{d}i=c(\mathrm{d}V/\mathrm{d}x)\mathrm{d}s$	debit termic . . . $\mathrm{d}q=\lambda\left(\mathrm{d}t/\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s$

3. Dispozitivul experimental

Pe baza acestei analogii se pot realiza modele electrice, reprezentînd domeniul de transmisie termică. În modelele electrice curentul străbate o reţea de rezistenţe sau un conductor lichid (fig. 2). Rezistenţele electrice în jurul oricărui punct al modelului electric sînt în raport constant faţă de rezistenţele termice ale punctelor omoloage din domeniul termic modelat. În laboratorul de clădiri s-au executat astfel de modele (fig. 3).

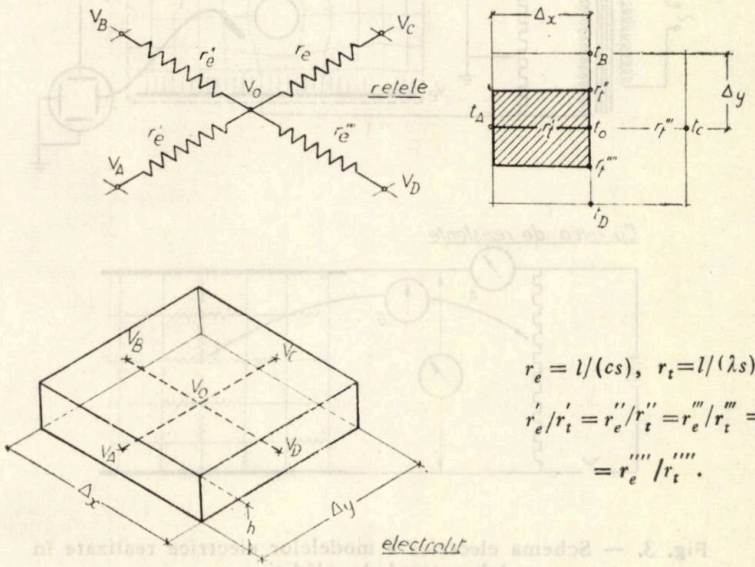


Fig. 2. — Elemente de bază pentru modelarea electrică a cîmpului termic: reţele electrice (*a*) şi conductor lichid (*b*).

În modelul electric, sub formă de reţea, rezistenţele necesare au fost realizate cu sîrme de manganin.

În modelul cu lichid zonele de conductivităţi diferite se obţin ceva mai dificil, variind adîncimea h a electrolitului. Se modelează astfel cîmpul termic (plan paralel), cu ajutorul unui cîmp electric în care valorile potenţialului electric variază local şi cu adîncimea, în vecinătatea schimbării grosimii păturii de electrolit (fig. 4). Erorile aferente au putut fi reduse suficient pentru a putea fi neglijate, adoptînd pentru model, în ansamblul său, dimensiuni mari în raport cu înălţimea electrolitului. De altfel există şi alte posibilităţi de a realiza uniformitatea potenţialului electric în adîncime în cazul cînd $h_1/h_2 > 1/5$ [5].

Modelul cu reţea este alimentat în curent continuu iar modelul cu electrolit este alimentat în curent alternativ, pentru evitarea fenomenelor de polarizare. În ambele cazuri determinarea valorii potenţialului se efectuează prin metoda de zero, cu o sondă mobilă. Trebuie de

remarcat că dacă în cazul modelelor cu rețele măsurarea potențialului este o operație simplă, în cazul modelelor cu electrolit trebuie luate precauții speciale. Schema electrică cea mai avantajoasă pare a fi cea cu osciloscop catodic și amplificator.

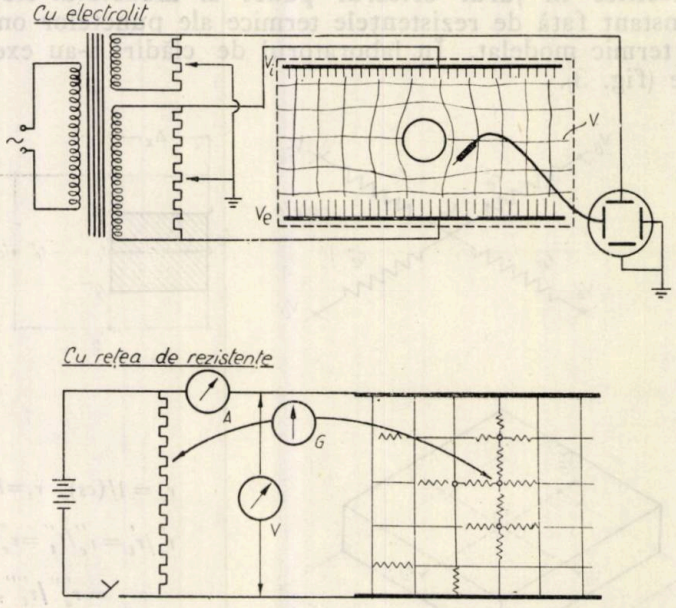


Fig. 3. — Schema electrică a modelelor electrice realizate în laboratorul de clădiri.

Valorile temperaturilor rezultă din expresia:

$$t = t_e + [(V_i - V)_e / 100]\, V, \tag{3}$$

făcînd să corespundă diferența totală de temperatură $t_i - t_e$ la diferența de potențial electric $V_i - V_e$.

Modelul cu electrolit are avantajul de a fi continuu și permite trasarea curbelor echipotențiale (izoterme), precum și variația comodă a mărimilor modelate. Condiția de contur a) a putut fi realizată prin introducerea unor pereți izolatori perpendiculari pe suprafața elementului de construcție aflată în contact cu aerul (fig. 5). Acest procedeu asigură direcția necesară a fluxului electric în zona ce realizează rezistența corespunzătoare mărimilor $1/\alpha_i$ și $1/\alpha_e$.

Modelarea electrică permite determinarea temperaturilor și rezistenței termice a elementului de construcție, oricîte materiale ar intra în componența sa și orice formă ar avea, dacă sînt cunoscute conductivitățile termice ale materialelor folosite: λ_b, λ_z etc.

Determinările efectuate în laborator au avut ca obiect: a) trasarea liniilor izoterme în cazul unor punţi termice la pereţi din zidărie eficientă, pentru stabilirea influenţei stîlpilor din beton; b) stabilirea influenţei pe care o prezintă volumul şi dispoziţia golurilor în blocurile de zidărie, asupra transmisiei termice prin conducţie, cu aplicare la zidăriile eficiente.

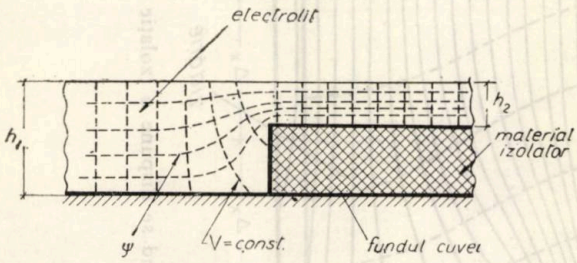


Fig. 4. — Variaţia potenţialului cu adîncimea în zona în care se modifică brusc adîncimea electrolitului.

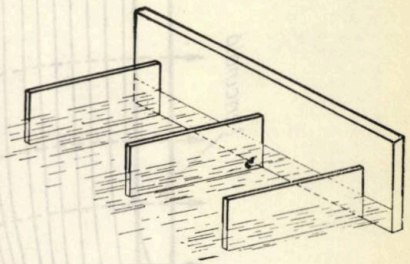


Fig. 5. - Realizarea condiţiei de contur Fourier cu ajutorul unor fişii izolatoare.

În fig. 6 se prezintă variaţia temperaturii pe faţa interioară a peretelui, pentru diferite lăţimi ale punţii. Se observă că temperatura cea mai scăzută pe faţa interioară a peretelui, în dreptul punţii termice,

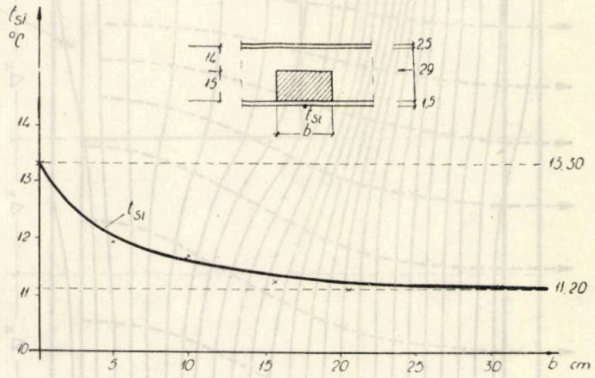


Fig. 6. — Variaţia temperaturii interioare t_{si} a peretelui din zidărie eficientă, în dreptul stîlpului de beton, pentru $\lambda_z = 0{,}57$ kcal/mh°C, $t_i = +20°C$, $t_e = -16°C$.

este o funcţie de lăţimea punţii. Pentru o lăţime a punţii de 40 cm se atinge practic temperatura cea mai scăzută.

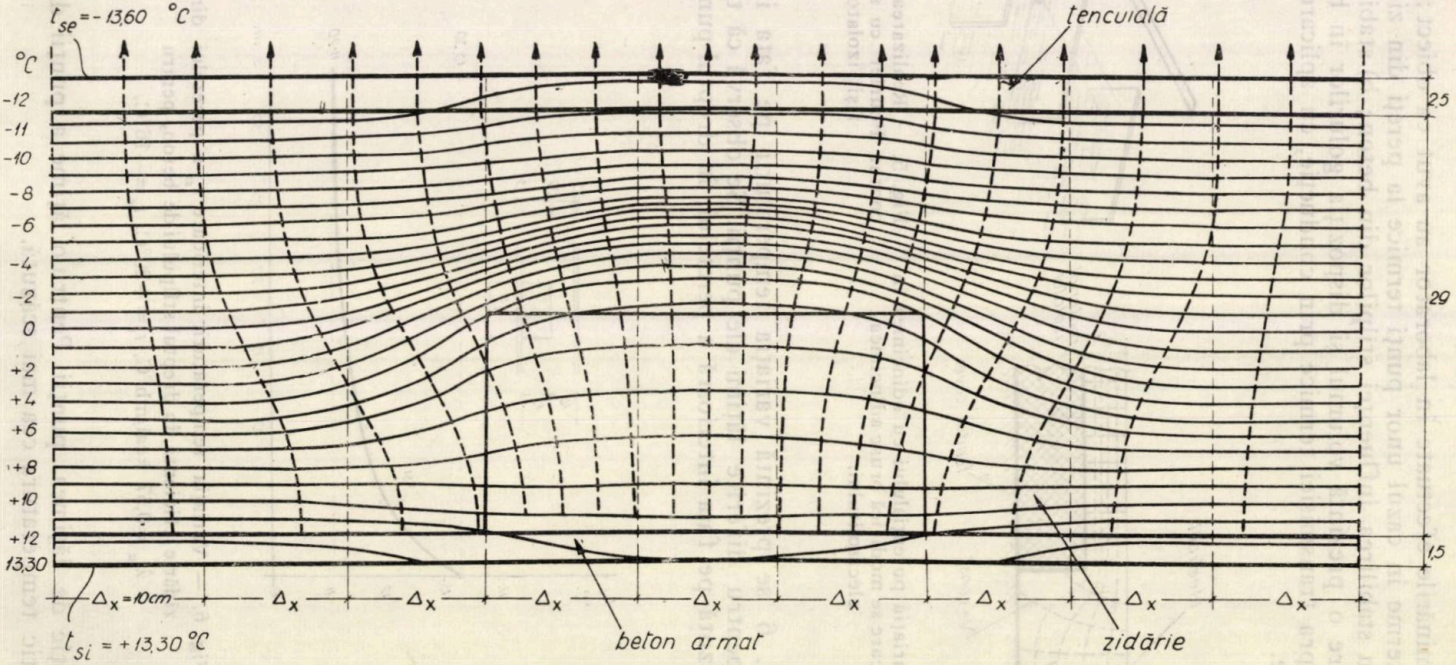


Fig. 7. — Cîmpul termic în regiunea stîlpului de beton armat, cînd se dispune o izolaţie la exterior.

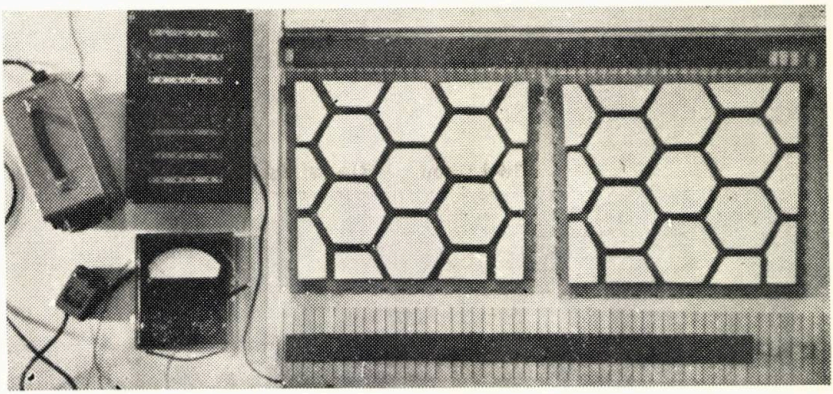


Fig. 9 — Ansamblul dispozitivului analogic pentru studiul zidăriilor cu corpuri ceramice

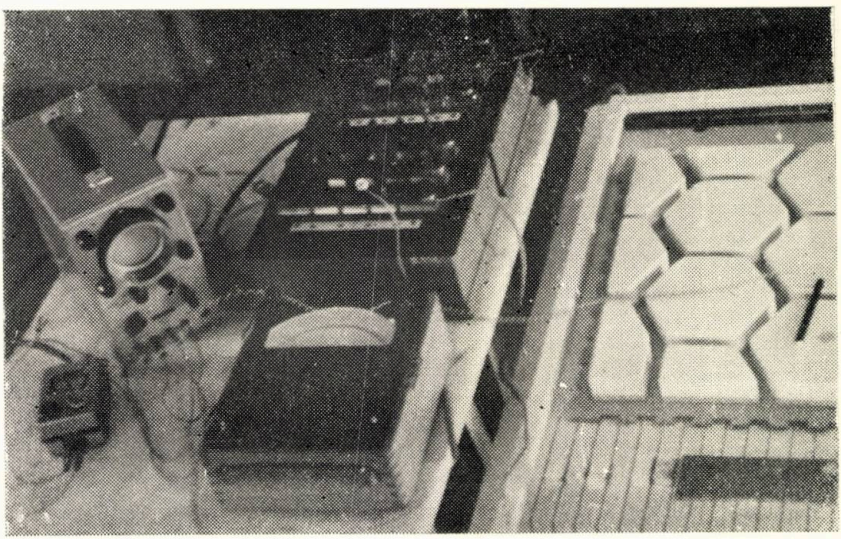


Fig. 10 — Aparate de măsură electrice utilizate în dispozitivul analogic.

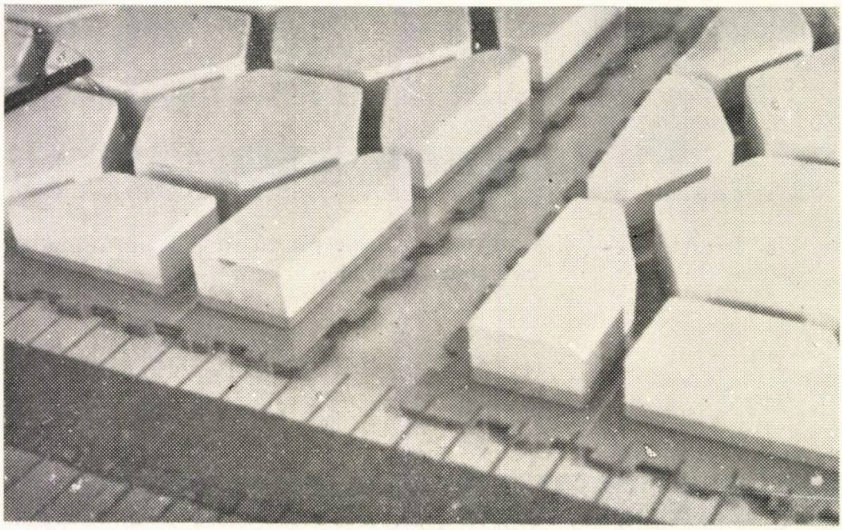


Fig. 11 — Detaliul regiunii de contur şi a lamelor izolatoare.

În vederea soluționării izolării termice în dreptul stîlpilor de beton, la zidăria eficientă, s-au stabilit liniile izoterme în cazul unei fîșii de

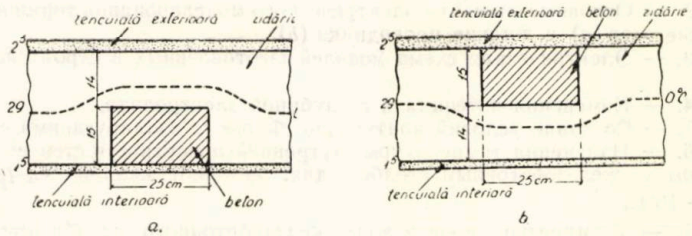


Fig. 8. — Poziția izotermei de 0° C cînd se dispune stratul de izolare termică la exterior (*a*) sau la interior (*b*)

zidărie de 14 cm dispusă spre interior sau la exterior (fig. 7 și 8).

În fig. 9...11 se prezintă imagini ale dispozitivului de modelare realizat.

Folosind metoda prezentată se vor determina în continuare caracteristicile termice ale materialelor ceramice cu goluri și ale elementelor de construcție realizate din aceste materiale sub formă de pereți portanți, pereți de umplutură și panouri mari.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de construcții și materiale
de construcții

BIBLIOGRAFIE

1. Focșa V., Radu A., Vereș Al., Rev. constr. și a mater. de constr., 1962, *10*, pp. 522—531.
2. Focșa V., Radu A., Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 360—370.
3. Focșa V., Radu A., Vereș Al., *Dimensionarea termică a clădirilor cu pereți din panouri mari cu punți termice.* Comun. ses. șt. jubil. Inst. polit. Iași, 9—11 XI 1962.
4. Mateescu Cr., *Hidraulica*, ESDP, Buc., 1962.
5. Malavard L., Actes du Congrès International de Calcul Analogique, Bruxelles, 1956, pp. 288—313.
6. Gutenmaher L. I., *Modelele electrice și aplicarea lor în fizică și tehnică*, Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1953, pp. 5—25, (trad. din l. rusă).
7. Focșa V., Radu A, Vereș Al., Bul. INCERC—ISCAS, 1962, *4*, pp. 127—134.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ТЕПЛОВОЙ ИЗОЛЯЦИИ ЖИЛИЩНЫХ ПОСТРОЕК С ОБЛЕГЧЕННЫМИ СТЕНКАМИ

(Резюме)

Предлагаются основы установления термического поля элементов конструкций по электрической аналогии и результаты некоторых относительных определений в зданиях с железобетонным каркасом и облегченными стенами.

Одъяснение рисунков

Рис. 1. — Термическое поле при случае одного элемента неоднородной конструкции с указанием условий контура.

Рис. 2. — Основные элементы электрического моделирования термического поля : электрические сети (*a*) и жидкие проводники (*b*).

Рис. 3. — Электрическая схема моделей изготовленных в строительной лаборатории.

Рис. 4. — Изменения потенциала с глубиной электролита.

Рис. 5. — Создание условий контура по Фурье с изолирующими слоями.

Рис. 6. — Изменения температуры внутренней поверхности стен из облегченной кладки рядом с железобетонным столбом для: $\lambda_2 = 0{,}57$ ккал/мч °С, $t_{внут} = 20°$ С, $t_{внешн} = -16°$С.

Рис. 7. — Термическое поле в зоне железобетонного столба при случае изоляции снаружи.

Рис. 8. — Изображение изотермы 0°С в случае изолирующего слоя установленного снаружи (*a*), или внутри (*b*).

Рис. 9. — Ансамбль аналогичной установки для изучения кладки из керамических камней.

Рис. 10. — Аппараты для электрического измерения использованные в аналогичной установке.

Рис. 11. — Деталь зоны контура и изолирующих слоев.

ÉTUDE DE L'ISOLATION THERMIQUE DES CONSTRUCTIONS AVEC PAROIS EN MAÇONNERIE, PAR ANALOGIES ÉLECTRIQUES

(Résumé)

On présente les principes qui permettent la détermination du champ thermique par analogie électrique et les résultats des déterminations concernant les constructions dont l'ossature est en béton armé et les parois en maçonneries, avec briques creuses.

Explication des figures

Fig. 1. — Élément de construction hétérogène : lignes isothermes, lignes de courant.

Fig. 2. — Éléments fondamentaux pour la représentation analogique du champ thermique : réseau de conductances (*a*) et électrolyte (*b*).

Fig. 3. — Schéma électrique des modèles analogiques utilisés au Laboratoire de Construction Civiles.

Fig. 4. — Variation du potentiel électrique dans la zône du changement de l'épaisseur du liquide.

Fig. 5. — Lames d'isolation disposées pour réaliser les conditions aux limites Fourier.

Fig. 6. — Variation de la température intérieure des parois pour différentes dimensions du pillier en béton et $\lambda_z = 0{,}57$ kcal/mh°C, $t_i = 20°$C, $t_e = -16°$C.

Fig. 7. — Champ thermique dans la région du pillier en béton losque l'isolation est disposée vers l'extérieur.

Fig. 8. — Position de l'isotherme de 0°C lorsq'on dispose l'isolation thermique vers l'extérieur (*a*) ou vers l'intérieur (*b*).

Fig. 9. — Vue d'ensemble du dispositif analogique pour l'étude des maçonneries avec corps céramiques creux.

Fig. 10. — Appareils électriques de mesure.

Fig. 11. — Détail de la région limite et des lamelles isolantes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 624 ; 621.791

STUDIUL UNEI ÎMBINĂRI PRIN SUPRAPUNERE, EXECUTATĂ CU O CUSĂTURĂ DE SUDURĂ UNILATERALĂ, SOLICITATĂ LA ÎNCOVOIERE PURĂ

DE

DAN MATEESCU ŞI LIVIU GĂDEANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Cunoaşterea distribuţiei solicitărilor într-o îmbinare sudată este foarte importantă pentru dimensionarea şi alcătuirea constructivă a unei construcţii metalice sudate. În cele mai multe cazuri cusăturile de sudură provoacă concentrări de eforturi care, în anumite puncte ale cusăturii, depăşesc cu mult eforturile unitare medii. Deşi aceste vîrfuri de solicitare nu influenţează în mare măsură siguranţa construcţiei, deoarece prin comportarea elastico-plastică a materialului sînt într-o oarecare măsură nivelate, cunoaşterea şi reducerea lor este necesară mai ales în cazul acţiunii încărcărilor repetate.

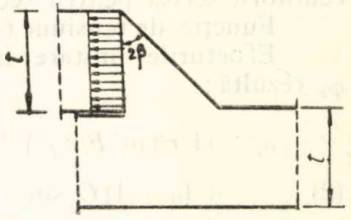


Fig. 1.—Diagramă de încărcare.

Îmbinările prin suprapunere executate cu o cusătură unilaterală sînt deseori folosite mai ales în construcţiile din tablă, ca de exemplu : funduri de rezervoare, plăci ortotrope la poduri de şosea etc. Aceste îmbinări solicitate la încovoiere sau la o încărcare axială cu luarea în considerare a excentricităţii, după cunoştinţele noastre, nu sînt studiate teoretic. În [1] sînt date repartiţiile eforturilor unitare într-o cusătură frontală pentru cazul unei repartiţii uniforme a încărcării pe muchia cusăturii (fig. 1).

În lucrarea de faţă, avîndu-se în vedere o repartiţie a încărcării pe muchia cusăturii, mai apropiată de cea reală (fig. 2), este dată soluţia teoretică şi verificarea experimentală, fotoelastică, a rezultatelor obţinute.

2. Studiul teoretic

Considerînd cusătura ca o placă triunghiulară supusă unei stări de tensiune plană, încărcată pe marginea $\varphi = \beta$ cu o sarcină a cărei repartizare este determinată prin cele două valori corespunzătoare nivelelor

$r = 0$ şi $r = k$ şi prin condiţii de echilibru, funcţia de tensiune Airy corespunzătoare acestui caz, stabilită de noi, este:

$$F = (r^{a+2}/k^a)(\sigma_1 + \sigma_2)(C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi) - \\ - \sigma_2 r^2 [1 + (\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\beta)/(\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta)]/4. \tag{1}$$

Această funcţie a fost determinată prin însumarea efectului celor două diagrame de încărcare (fig. 3) în care poate fi descompusă diagrama efectivă dată în fig. 2. Astfel, primul termen din ecuaţia (1) acoperă efectul încărcării din fig. 3 a, iar termenul al doilea — efectul încărcării uniform repartizate (fig. 3 b).

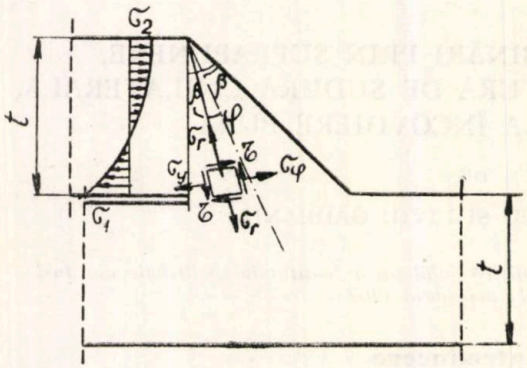


Fig. 2. — Schemă de calcul.

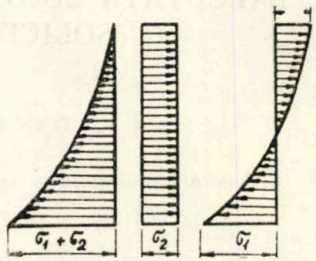


Fig. 3. — Diagramă de încărcare.

Valoarea exponentului a va fi determinată, aşa cum se va arăta mai departe, din condiţia ca diagrama încărcării să respecte condiţia de echilibru scrisă pentru secţiunea respectivă.

Funcţia de tensiune (1) satisface condiţia de compatibilitate $\Delta\Delta F = 0$.

Eforturile unitare într-un punct al cusăturii, de coordonate r şi φ, rezultă:

$$\sigma_r = (1/r^2)(\partial^2 F/\partial\varphi^2) + (1/r)(\partial F/\partial r) = (r^a/k^a)(\sigma_1 + \sigma_2)[(a+1) C_1 \cos\varphi + \\ + (a+1) C_2 \sin\varphi + (a-7) C_3 \cos 3\varphi + (a-7) C_4 \sin 3\varphi] - \\ - \sigma_2 [1 - (\sin 2\varphi + 2\varphi \cos 2\beta)/(\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta)]/2, \tag{2}$$

$$\sigma_\varphi = \partial^2 F/\partial r^2 = [(a+1)(a+2) r^a/k^a](\sigma_1 + \sigma_2)(C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + \\ + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi) - \\ - \sigma_2 [1 + (\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\beta)/(\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta)]/2, \tag{3}$$

$$\tau_{r\varphi} = -\partial[(1/r)(\partial F/\partial\varphi)]/\partial r = [(a+1) r^a/k^a](\sigma_1 + \sigma_2)(C_1 \sin\varphi - \\ - C_2 \cos\varphi + 3 C_3 \sin 3\varphi - 3 C_4 \cos 3\varphi) + \\ + \sigma_2 [(\cos 2\varphi - \cos 2\beta)/(\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta)]/2. \tag{4}$$

Cele patru constante rezultă din condiţiile scrise pentru cele două margini ale plăcii: a) pentru $\varphi = \beta$ avem: $\sigma_\varphi = (r^\alpha/k^\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2$ şi $\tau_{r\varphi} = 0$; b) pentru $\varphi = -\beta$ avem: $\sigma_\varphi = 0$ şi $\tau_{r\varphi} = 0$, de unde:

$$C_1 = 3 \sin 3\beta/[16(\alpha + 1)(\alpha + 2) \sin \beta \cos^3 \beta],$$

$$C_2 = -3 \cos 3\beta/[16(\alpha + 1)(\alpha + 2) \sin^3 \beta \cos \beta],$$

$$C_3 = -1/[16(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cos^3 \beta], \qquad C_4 = 1/[16(\alpha + 1)(\alpha + 2) \sin^3 \beta].$$

Particularizînd aceste relaţii pentru $2\beta = 45°$ se obţin următoarele expresii analitice ale eforturilor unitare:

$$\sigma_r = (r^\alpha/k^\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2)\{[0{,}57402/(\alpha + 2)] \cos \varphi - [1{,}38576/(\alpha + 2)] \sin \varphi -$$

$$(5) \quad - \{0{,}07926(\alpha - 7)/[(\alpha + 1)(\alpha + 2)]\} \cos 3\varphi + \{1{,}11516(\alpha - 7)/[(\alpha + 1)(\alpha + 2)]\} \sin 3\varphi) -$$

$$- \sigma_2 [1/2 - (\sin 2\varphi + 1{,}41422\varphi)/0{,}30350],$$

$$\sigma_\varphi = (r^\alpha/k^\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}57402 \cos \varphi - 1{,}38576 \sin \varphi -$$

$$(6) \quad - 0{,}07926 \cos 3\varphi + 1{,}11516 \sin 3\varphi) - \sigma_2 [1/2 + (\sin 2\varphi - 1{,}41422\varphi)/0{,}30350],$$

$$\tau_{r\varphi} = (r^\alpha/k^\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2)\{[0{,}57402/(\alpha + 2)] \sin \varphi + [1{,}38576(\alpha + 2)] \cos \varphi -$$

$$(7) \quad - [0{,}23778/(\alpha + 2)] \sin 3\varphi - [3{,}34548/(\alpha + 2)] \cos 3\varphi\} +$$

$$+ [(\cos 2\varphi - 0{,}70711)/0{,}30350] \sigma^2,$$

iar pentru $2\beta = 60°$ se obţine:

$$\sigma_r = (r^\alpha/k^\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2)\{[0{,}57734/(\alpha + 2)] \cos \varphi - \{0{,}09622(\alpha - 7)/[(\alpha + 1)(\alpha + 2)]\} \cos 3\varphi +$$

$$(8) \quad + \{0{,}50000(\alpha - 7)/[(\alpha + 1)(\alpha + 2)]\} \sin 3\varphi) - \sigma_2 [1/2 - (\sin 2\varphi + \varphi)/0{,}68488],$$

$$\sigma_\varphi = (r^\alpha/k^\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}57734 \cos \varphi - 0{,}09622 \cos 3\varphi +$$

$$(9) \quad + 0{,}50000 \sin 3\varphi) - \sigma_2 [1/2 + (\sin 2\varphi - \varphi)/0{,}68488],$$

$$\tau_{r\varphi} = (r^\alpha/k^\alpha)(\sigma_1 + \sigma_2)\{[0{,}57734/(\alpha + 2)] \sin \varphi - [0{,}28866/(\alpha + 2)] \sin 3\varphi -$$

$$(10) \quad - [1{,}50000/(\alpha + 2)] \cos 3\varphi\} + [(\cos 2\varphi - 0{,}50000)/0{,}68488] \sigma_2.$$

A. Îmbinare prin suprapunere solicitată la încovoiere pură

Pentru cazul încovoierii pure, cu notaţiile din fig. 4, se poate scrie:

$$(11) \qquad p = p_0 r^\alpha;$$

pentru $r = k$ avem: $\sigma_1 + \sigma_2 = p_0 k^\alpha$ şi $p_0 = (\sigma_1 + \sigma_2)/k^\alpha$ şi deci $p = (\sigma_1 + \sigma_2)(r^\alpha/k^\alpha)$.

Din condiţia de echilibru aria zonei întinse a diagramei eforturilor unitare trebuie să fie egală cu aria zonei comprimate:

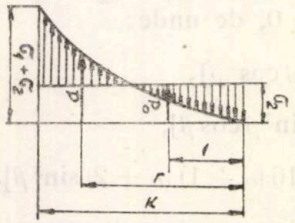


Fig. 4. — Diagrama eforturilor unitare pe muchia $\varphi = \beta$ pentru cazul încovoierii pure.

$$\int_0^k p\,dr = \sigma_2 k. \tag{12}$$

Efectuînd calculul rezultă:

$$\int_0^k p\,dr = \int_0^k (\sigma_1 + \sigma_2)(r^\alpha/k^\alpha)\,dr = [(\sigma_1 + \sigma_2)/(\alpha + 1)]\,k$$

şi deci $[(\sigma_1 + \sigma_2)/(\alpha + 1)]\,k = \sigma_2 k$, de unde:

$$\alpha = \sigma_1/\sigma_2. \tag{13}$$

Pentru o variaţie liniară avem condiţia $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ şi deci $\alpha = 1$.

Din încercarea experimentală fotoelastică rezultă, direct din tabloul izocromaticelor, numărul de ordine al izocromaticelor în punctele $r = 0$ şi $r = k$ pe muchia plăcii triunghiulare ($\varphi = +\beta$) şi deci rezultă direct valorile σ_1 şi σ_2.

a) *Cusătură de colţ cu cateta* k *egală cu grosimea tablei şi unghiul* $2\beta = 45°$

Din cercetarea experimentală, fotoelastică, a epruvetei cu dimensiunile şi încărcările arătate în fig. 5, rezultă tablourile izocromaticelor arătate în fig. 6 şi 7. În fotografia din fig. 6 este arătat tabloul izocromaticelor de ordin întreg obţinute cu polaroizi încrucişaţi, iar în fotografia din fig. 7 izocromaticele intermediare, obţinute cu polaroizi paraleli.

Modelele au fost executate din Dinox F 110, valoarea benzii materialului, determinată pe epruvete cu grosimea de 0,55 mm, supuse la întindere, a rezultat de 18 kg/cm².

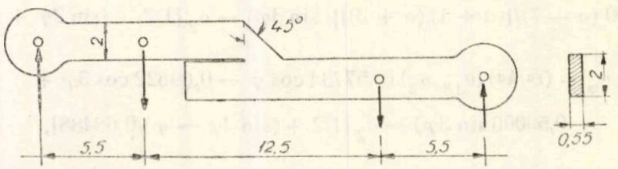


Fig. 5. — Model.

Din numărul de ordine al izocromaticelor în cele două puncte $r = k$ şi $r = 0$ pe muchia plăcii $\varphi = +\beta$, rezultă direct valoarea presiunilor σ_1 şi σ_2 în aceste puncte: $\sigma_1 = 11.18 = 198$ kg/cm², $\sigma_2 = 2.18 = 36$ kg/cm². Cu aceste valori se obţine: $\alpha = 198/36 = 5{,}5$, rezultînd următoarele expresii pentru cele trei eforturi unitare din relaţiile (5) ... (7):

$$\sigma_r = (r^{5,5}/k^{5,5})(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}07653\cos\varphi - 0{,}18476\sin\varphi + 0{,}00243\cos 3\varphi - \\ - 0{,}03431\sin 3\varphi) - \sigma_2[1/2 - (\sin 2\varphi + 1{,}41422\,\varphi)/0{,}30350], \tag{5a}$$

$$\sigma_\varphi = (r^{5,5}/k^{5,5})(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}57402\cos\varphi - 1{,}38576\sin\varphi - 0{,}07926\cos 3\varphi + \\ + 1{,}11516\sin 3\varphi) - \sigma_2[1/2 + (\sin 2\varphi - 1{,}41422\,\varphi)/0{,}30350], \tag{6a}$$

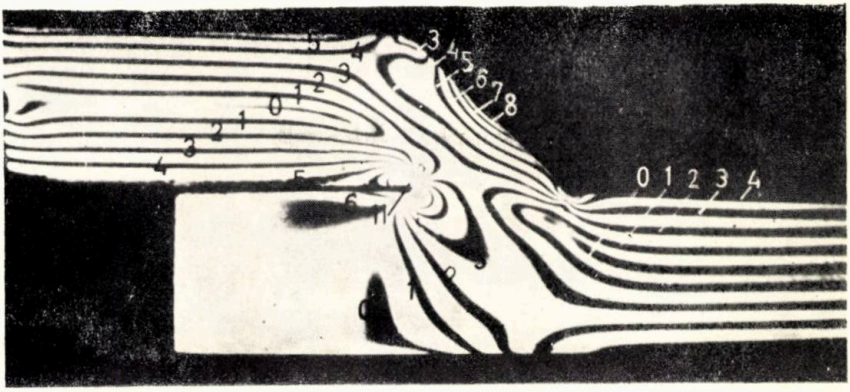


Fig. 6. — Tabloul izocromaticelor.

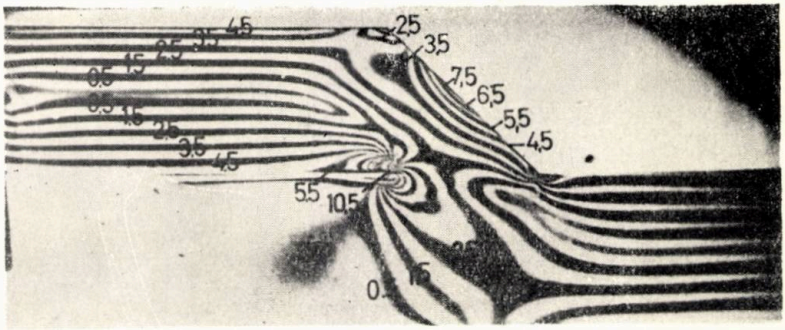


Fig. 7. — Tabloul izocromaticelor intermediare.

Tabelul 1

	22°30′	20°	15°	10°	5°	0°	— 5°	—10°	—15°	—20°	— 22°30′
					A						
0,0765 cos φ	0,0707	0,0719	0,0739	0,0754	0,0762	0,0765	0,0672	0,0754	0,0739	0,0719	0,0707
—0,1848 sin φ	— 0,0707	— 0,0632	— 0,0478	— 0,0321	— 0,0161	0	0,0161	0,0321	0,0478	0,0632	0,0707
0,0024 cos 3φ	0,0009	0,0012	0,0017	0,0021	0,0023	0,0024	0,0023	0,0021	0,0017	0,0012	0,0009
—0,0343 sin 3φ	— 0,0317	— 0,0297	— 0,0243	— 0,0172	— 0,0089	0,0000	0,0089	0,0172	0,0243	0,0297	0,0317
Σ	— 0,0308	— 0,0198	— 0,0036	0,0282	0,0536	0,0790	0,1037	0,1267	0,1477	0,1660	0,1740
					B						
0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
—3,2949 sin 2φ	— 2,3299	— 2,1179	— 1,6475	— 1,1269	— 0,5722	0	0,5722	1,1269	1,6475	2,1179	2,3299
—4,6579 φ	— 1,8299	1,6265	— 1,2199	— 0,8133	— 0,4065	0	0,4065	0,8133	1,2199	1,6265	1,8299
Σ	— 3,6596	— 3,2445	— 2,3674	— 1,4402	— 0,4786	0,5000	1,4786	2,4402	3,3674	4,2445	4,6596
					C						
0,5740 cos φ	0,5303	0,5394	0,5545	0,5653	0,5718	0,5740	0,5718	0,5653	0,5545	0,5394	0,5303
—1,3858 sin φ	— 0,5303	— 0,4740	— 0,3587	— 0,2406	— 0,1208	0	0,1208	0,2406	0,3587	0,4740	0,5303
—0,0793 cos 3φ	— 0,0303	— 0,0396	— 0,0560	— 0,0686	— 0,0766	— 0,0793	— 0,0766	— 0,0686	— 0,0560	— 0,0396	— 0,0303
1,1152 sin 3φ	1,0303	0,9658	0,7885	0,5576	0,2886	0	— 0,2886	— 0,5576	— 0,7885	— 0,9658	— 1,0303
Σ	1,0000	0,9916	0,9283	0,8136	0,6631	0,4948	0,3274	0,1797	0,0685	0,0080	0
					D						
0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
3,2940 sin 2φ	2,3299	2,1180	1,6475	1,1270	0,5722	0	— 0,5722	— 1,1270	— 1,6475	— 2,1180	— 2,3299
4,6597 φ	— 1,8299	— 1,6265	— 1,2199	— 0,8133	— 0,4065	0	0,4065	0,8133	1,2199	1,6265	1,8299
Σ	1,0000	0,9914	0,9275	0,8137	0,6657	0,5000	0,3343	0,1864	0,0725	0,0086	0
					E						
0,0765 sin φ	0,0293	0,0262	0,0198	0,0133	0,0067	0	— 0,0067	— 0,0133	— 0,0198	— 0,0262	— 0,0293
0,1848 cos φ	0,2707	0,1737	0,1785	0,1820	0,1841	0,1848	0,1841	0,1820	0,1785	0,1736	0,1707
—0,0317 sin 3φ	— 0,0293	— 0,0275	— 0,0224	— 0,0159	— 0,0082	0	0,0082	0,0159	0,0224	0,0275	0,0293
—0,4461 cos 3φ	— 0,1707	— 0,2230	— 0,3154	— 0,3863	— 0,4309	— 0,4461	— 0,4309	— 0,3863	— 0,3154	— 0,2230	— 0,1707
Σ	0	— 0,0507	— 0,1396	— 0,2069	— 0,2483	— 0,2613	— 0,2453	— 0,2018	— 0,1343	— 0,0482	0
					F						
3,2949 cos 2φ	2,3299	2,5240	2,8535	3,0962	3,2449	3,2949	3,2449	3,0962	2,8535	2,5240	— 2.3299
—2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299	— 2,3299
Σ	0	0,1942	0,5236	0,7663	0,9150	0,9651	0.9150	0,7663	0,5236	0,1942	0

(7 a)
$$\tau_{r\varphi} = (r^{5,5}/k^{5,5})(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}07653 \sin\varphi + 0{,}18476 \cos\varphi - 0{,}03170 \sin 3\varphi - 0{,}44606 \cos 3\varphi) + [(\cos 2\varphi - 0{,}70711)/0{,}30350]\sigma_2.$$

Tabelul 2

φ	σ_r	σ_φ	$\tau_{r\varphi}$	τ_{max}
+22°30′	+124,55	+198,00	0	36,73
+20°	+112,17	+196,34	—4,87	42,37
+15°	+86,05	+183,83	—13,80	50,80
+10°	+58,46	+161,09	—20,83	55,04
+5°	+29,77	+131,20	—25,17	56,62
0°	+0,48	+100,37	—26,40	56,50
—5°	—28,98	+ 64,59	—24,45	52,78
—10°	—58,20	+35,34	—19,63	50,00
—15°	—86,65	+13,43	—12,58	51,60
—20°	—113,95	+1,55	—4,27	57,90
—22°30′	—127,03	0	0	63,50

În tabelul 1 sînt calculate valorile cantităţilor din parantezele din relaţiile (5 a)... (7 a) pentru diferite valori ale unghiurilor φ cuprinse între + 22°30′ şi —22°30′; relaţiile (5 a)...(7 a), în formă prescurtată, devin de forma:

(5 b) $\sigma_r = (r^{5,5}/k^{5,5})(\sigma_1 + \sigma_2)A - \sigma_2 B,$

(6 b) $\sigma_\varphi = (r^{5,5}/k^{5,5})(\sigma_1 + \sigma_2)C - \sigma_2 D,$

(7 b) $\tau_{r\varphi} = (r^{5,5}/k^{5,5})(\sigma_1 + \sigma_2)E + \sigma_2 F.$

În tabelul 2 sînt calculate valorile celor trei eforturi unitare în secţiunea $r = k$ precum şi valorile efortului tangenţial maxim, iar în diagramele din fig. 8 sînt reprezentate variaţiile acestor eforturi unitare.

b) *Cusătură de colţ cu cateta* k *egală cu grosimea tablei şi unghiul* $2\beta = 60°$

În fig. 9 şi 10 sînt arătate tablourile izocromaticelor ridicate cu polaroizii încrucişaţi şi cu polaroizii paraleli, pe epruvete cu dimensiunile şi încărcările arătate în fig. 11.

Epruveta avînd grosimea de 0,49 cm, valoarea benzii materialului a rezultat de 21,2 kg/cm².

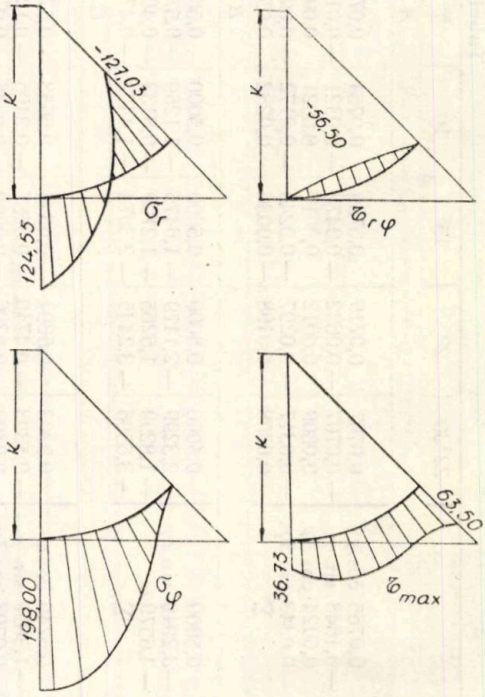


Fig. 8. — Diagramele eforturilor unitare.

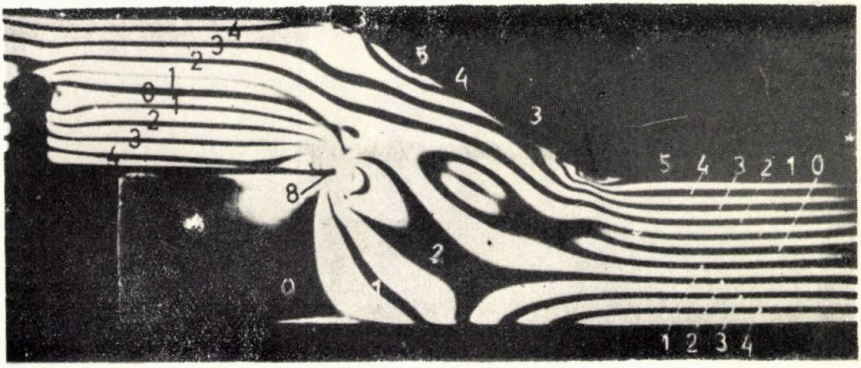


Fig. 9. — Tabloul izocromaticelor.

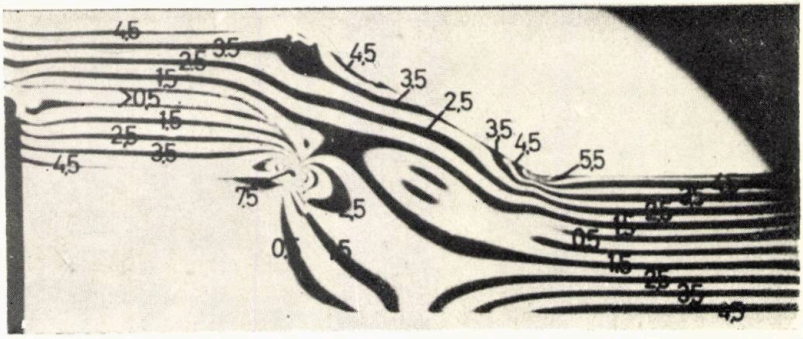


Fig. 10. — Tabloul izocromaticelor intermediare.

Tabelul 3

φ	30°	25°	20°	15°	10°	5°	0°	—5°	—10°	—15°	—20°	—25°	—30°
						A							
0,1237 cos φ	0,1072	0,1121	0,1163	0,1195	0,1218	0,1233	0,1237	0,1233	0,1218	0,1195	0,1163	0,1121	0,1072
0,0251 cos 3φ	0	0,0065	0,0151	0,0178	0,0218	0,0243	0,0521	0,0243	0,0218	0,0178	0,0151	0,0065	0
—0,1266 sin 3φ	— 0,1266	— 0,1223	— 0,1097	— 0,0895	— 0,0633	— 0,0328	0	0,0328	0,0633	0,0895	0,1097	0,1223	0,1266
Σ	— 0,0195	— 0,0037	0,0217	0,0477	0,0803	0,1148	0,1489	0,1803	0,2070	0,2268	0,2410	0,2409	0,2338
						B							
0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
—1,4601 sin 2φ	— 1,2645	— 1,1185	— 0,9385	— 0,7301	— 0,4994	— 0,2536	0	0,2536	0,4994	0,7301	0,9385	1,1185	1,2645
—1,4601 φ	— 0,7645	— 0,6371	— 0,5097	— 0,3822	— 0,2548	— 0,1274	0	0,1274	0,2548	0,3822	0,5097	0,6371	0,7645
Σ	— 1,5290	— 1,2556	— 0,9482	— 0,6123	— 0,2542	0,1190	0,5000	0,8810	1,2542	1,6123	1,9482	2,2556	2,5290
						C							
0,5773 cos φ	0,5000	0,5232	0,5425	0,5577	0,5686	0,5751	0,5773	0,5751	0,5686	0,5577	0,5425	0,5232	0,5000
—0,0962 cos 3φ	0	— 0,0249	— 0,0481	— 0,0680	— 0,0833	— 0,0929	— 0,0962	— 0,0929	— 0,0833	— 0,0680	— 0,0481	— 0,0249	0
0,5000 sin 3φ	0,5000	0,4830	0,4330	0,3536	0,2500	0,1294	0	— 0,1294	— 0,2500	— 0,3536	— 0,4330	— 0,4830	— 0,5000
Σ	1,0000	0,9813	0,9274	0,8432	0,7352	0,6116	0,4811	0,3528	0,2352	0,1361	0,0614	0,0154	0
						D							
0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
1,4601 sin 2φ	1,2645	1,1185	0,9385	0,7301	0,4994	0,2536	0	— 0,2536	— 0,4994	— 0,7301	— 0,9385	— 0,1185	— 1,2645
—1,4601 φ	— 0,7645	— 0,6371	— 0,5097	— 0,3824	— 0,2548	— 0,1274	0	0,1274	0,2548	0,3822	0,5097	0,6371	0,7645
Σ	1,0000	0,9814	0,9289	0,8478	0,7446	0,6261	0,5000	0,3739	0,2554	0,1522	0,0711	0,0186	0
						E							
0,1237 sin φ	0,0619	0,0523	0,0423	0,0320	0,0215	0,0108	0	— 0,0108	— 0,0215	— 0,0320	— 0,0423	— 0,0523	— 0,0619
—0,0619 sin 3φ	— 0,0619	— 0,0598	— 0,0536	— 0,0437	— 0,0309	— 0,0160	0	0,0160	0,0309	0,0437	0,0536	0,0598	0,0619
—0,3214 cos 3φ	0	— 0,0832	— 0,1607	— 0,2273	— 0,2784	— 0,3105	— 0,3214	— 0,3105	— 0,2784	— 0,2273	— 0,1607	— 0,0832	0
Σ	0	— 0,0907	— 0,1720	— 0,2390	— 0,2878	— 0,3157	— 0,3214	— 0,3053	— 0,2689	— 0,2156	— 0,1495	— 0,0757	0
						F							
1,4601 cos 2φ	0,7301	0,9385	1,1185	1,2645	1,3721	1,4379	1,4601	1,4379	1,3721	1,2645	1,1185	0,9386	0,7301
—0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7301	— 0,7031
Σ	0	0,2085	0,3885	0,5345	0,6420	0,7079	0,7301	0,7079	0,6420	0,5345	0,3885	0,2085	0

Din numărul de ordine 3 pentru izocromatice în punctul $r = 0$ şi 8 în punctul $r = k$ pe muchia plăcii $\varphi = \beta$, rezultă direct: $\sigma_1 = 8 . 20{,}2 = 161{,}6$ kg/cm², $\sigma_2 = 3 . 20{,}2 = 60{,}6$ kg/cm², rezultînd pentru acest caz $\alpha = \sigma_1/\sigma_2 = 161{,}6/60{,}6 = 2{,}67$; expresiile eforturilor unitare (8)... (10) devin:

$$\sigma_r = (r^{2{,}67}/k^{2{,}67})\,(\sigma_1 + \sigma_2)\,(0{,}12372\cos\varphi + 0{,}02513\cos 3\varphi - 0{,}12662\sin 3\varphi) - \tag{8 a}$$
$$- \sigma_2\,(1/2 - 1{,}46011\sin 2\varphi - 1{,}46011\,\varphi),$$

$$\sigma_\varphi = (r^{2{,}67}/k^{2{,}67})\,(\sigma_1 + \sigma_2)\,(0{,}57734\cos\varphi - 0{,}09622\cos 3\varphi + 0{,}50000\sin 3\varphi) - \tag{9 a}$$
$$- \sigma_2\,(1/2 + 1{,}46011\sin 2\varphi - 1{,}46011\,\varphi),$$

$$\tau_{r\varphi} = (r^{2{,}67}/k^{2{,}67})\,(\sigma_1 + \sigma_2)\,(0{,}12372\sin\varphi - 0{,}06186\sin 3\varphi - \tag{10 a}$$
$$- 0{,}32143\cos 3\varphi) + \sigma_2\,(1{,}46011\cos 2\varphi - 0{,}73005).$$

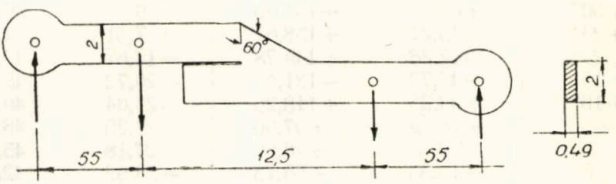


Fig. 11. — Model.

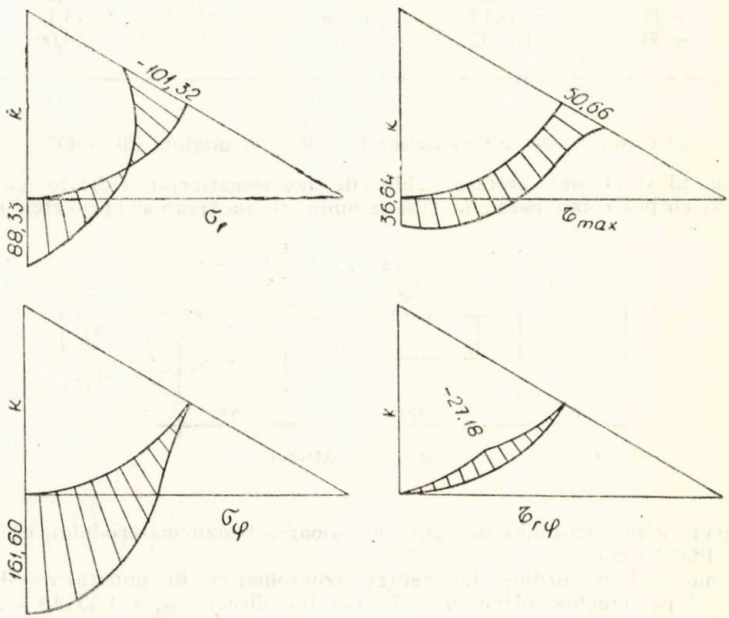


Fig. 12. — Diagramele eforturilor unitare.

În tabelul 3 sînt calculate valorile cantităţilor din parantezele din relaţiile (8 a)... (10 a) pentru diferite valori ale unghiului φ cuprinse între + 30° şi − 30°; relaţiile (8 a)...(10 a), în formă prescurtată, devin de forma:

(8 b) $$\sigma_r = (r^{2,67}/k^{2,67})(\sigma_1 + \sigma_2) A - \sigma_2 B,$$

(9 b) $$\sigma_\varphi = (r^{2,67}/k^{2,67})(\sigma_1 + \sigma_2) C - \sigma_2 D,$$

(10 b) $$\tau_{r\varphi} = (r^{2,67}/k^{2,67})(\sigma_1 + \sigma_2) E - \sigma_2 F.$$

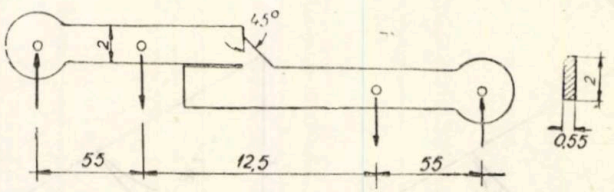
În tabelul 4 sînt calculate, pentru diferite unghiuri, aceste eforturi, iar în diagramele din fig. 12 este arătată variaţia eforturilor unitare în secţiunea $r = k$ precum şi variaţia eforturilor unitare tangenţiale maxime.

Tabelul 4

φ	σ_r	σ_φ	$\tau_{r\varphi}$	τ_{max}
+30°	+88,33	+161,60	0	36,64
+25°	+75,27	+158,61	−7,51	42,32
+20°	+62,28	+149,78	−14,67	46,19
+15°	+47,72	+131,53	−20,72	46,72
+10°	+33,25	+118,25	−25,04	49,33
+5°	+18,29	+97,96	−27,25	48,27
0°	+2,77	+76,60	−27,18	45,83
−5°	−13,33	+55,73	−24,92	42,63
−10°	−30,03	+36,79	−20,84	39,38
−15°	−47,32	+21,01	−15,51	37,76
−20°	−64,51	+9,33	−9,67	38,21
−25°	−83,15	+2,90	−4,19	43,11
−30°	−101,32	0	0	50,66

c) *Cusătură de colţ cu cateta* k = 3t/4 şi unghiul $2\beta = 45°$

În fig. 13 şi 14 sînt arătate tablourile izocromaticelor ridicate cu polaroizii încrucişaţi şi cu polaroizii paraleli. Dimensiunile şi încărcarea epruvetei sînt arătate în fig. 15.



Fig, 15. — Model.

Epruveta avînd grosimea de 0,55 cm, valoarea benzii materialului, ca şi în cazul a), este de 18,0 kg/cm².

Din numărul de ordine 4,5 pentru izocromatice în punctul $r = 0$ şi 13,5 în punctul $r = k$ pe muchia plăcii $\varphi = \beta$, rezultă direct: $\sigma_1 = 13{,}5 \cdot 18 = 243$ kg/cm², $\sigma_2 = 4{,}5 \cdot 18 = 81$ kg/cm², de unde $\alpha = \sigma_1/\sigma_2 = 3$.

Expresiile eforturilor unitare (5) ... (7) devin:

(5 c) $$\sigma_r = (r^3/k^3)(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}11480 \cos\varphi - 0{,}27715 \sin\varphi + 0{,}01585 \cos 3\varphi - 0{,}22303 \sin 3\varphi) - \sigma_2 [1/2 - (\sin 2\varphi + 1{,}41422\,\varphi)/0{,}30350],$$

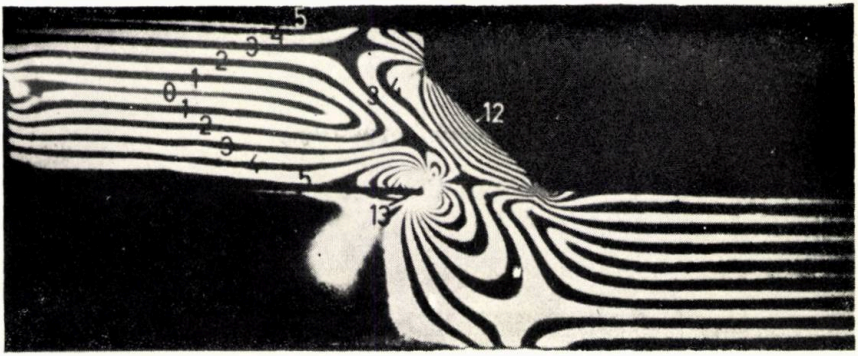


Fig. 13. — Tabloul izocromaticelor.

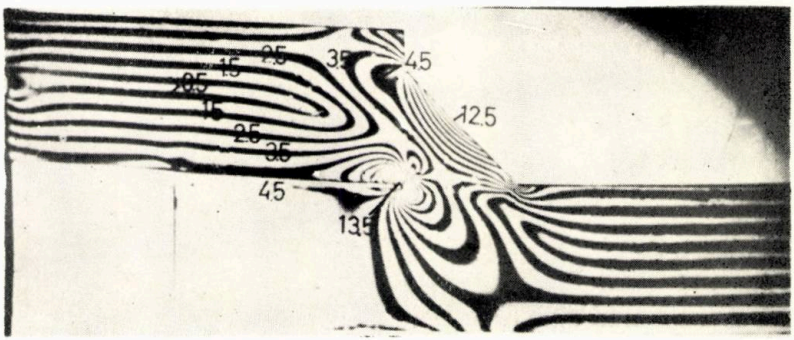


Fig. 14. — Tabloul izocromaticelor intermediare.

$$\sigma_\varphi = (r^3/k^3)(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}57402\cos\varphi - 1{,}38576\sin\varphi - 0{,}07926\cos 3\varphi + \tag{6 c}$$
$$+ 1{,}11516\sin 3\varphi) - \sigma_2[1/2 + (\sin 2\varphi - 1{,}41422\,\varphi)/0{,}30350],$$

$$\tau_{r\varphi} = (r^3/k^3)(\sigma_1 + \sigma_2)(0{,}11480\sin\varphi + 0{,}27715\cos\varphi - 0{,}04755\sin 3\varphi - \tag{7 c}$$
$$- 0{,}66909\cos 3\varphi) + [(\cos 2\varphi - 0{,}70711)/0{,}30350]\,\sigma_2.$$

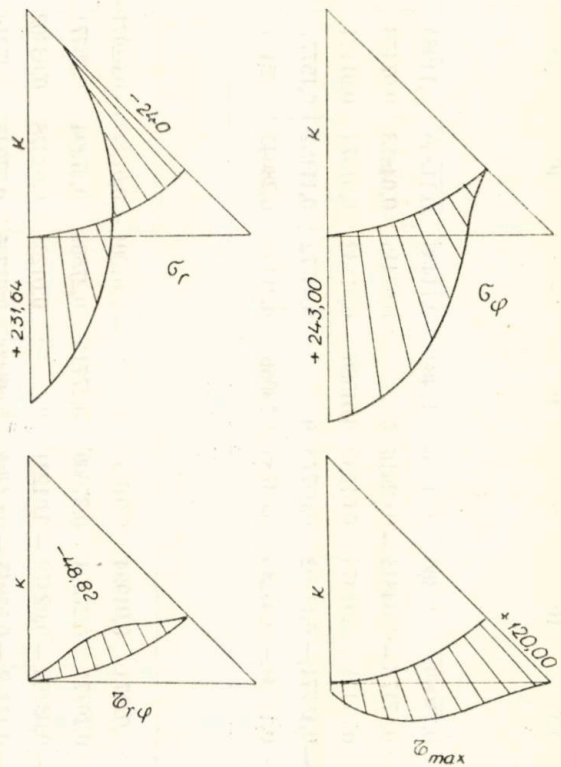


Fig. 16. — Diagramele eforturilor unitare.

În tabelul 5 sînt calculate valorile cantităţilor din parantezele din relaţiile (5 c)... (7 c) pentru diferite valori ale unghiurilor φ cuprinse între 22° 30′ şi −22° 30′; relaţiile (5 c)...(7 c), în formă prescurtată, devin de forma:

$$\sigma_r = (r^3/k^3)(\sigma_1 + \sigma_2)A' - \sigma_2 B, \tag{5 d}$$

$$\sigma_\varphi = (r^3/k^3)(\sigma_1 + \sigma_2)C - \sigma_2 D, \tag{6 d}$$

$$\tau_{r\varphi} = (r^3/k^3)(\sigma_1 + \sigma_2)E' + \sigma_2 F. \tag{7 d}$$

În tabelul 6 sînt calculate, pentru diferite unghiuri, valorile cantităţilor A' şi E', singurele care se modifică faţă de cele date în tabelul 1, iar în diagramele din fig. 16 este reprezentată variaţia eforturilor unitare în secţiunea $r = k$ precum şi variaţia efortului tangenţial maxim.

Tabelul 5

φ	22°30′	20°	15°	10°	5°	0°	—5°	—10°	—15°	—20°	—22°30′
					A'						
0,11480 cos φ	0,10606	0,10787	0,11089	0,11306	0,11436	0,11480	0,11436	0,11306	0,11089	0,10787	0,10606
—0,27715 sin φ	— 0,10606	— 0,09479	— 0,07173	— 0,04813	— 0,02416	0	0,02416	0,04813	0,07173	0,09479	0,10606
0,01586 cos 3φ	0,00607	0,00793	0,01121	0,01374	0,01532	0,01586	0,01532	0,01374	0,01121	0,00793	0,00607
—0,22303 cos 3φ	— 0,20605	— 0,19315	— 0,15771	— 0,11152	— 0,05772	0	0,05772	0,11152	0,15771	0,19315	0,20605
Σ	— 0,19998	— 0,17214	— 0,10734	— 0,03285	0,04780	0,13066	0,21156	0,28645	0,35154	0,40374	0,42424
					E'						
0,11480 sin φ	0,04393	0,03926	0,02971	0,01994	0,01001	0	— 0,01001	— 0,01994	— 0,02971	— 0,03926	— 0,04393
0,27715 cos φ	0,25605	0,26044	0,26771	0,27294	0,27609	0,27715	0,27609	0,27294	0,26771	0,26044	0,25605
—0,04755 sin 3φ	— 0,04393	— 0,04118	— 0,03362	— 0,02378	— 0,01231	0	0,01231	0,02378	0,03362	0,04118	0,04393
—0,66909 cos 3φ	— 0,25605	— 0,33455	— 0,47312	— 0,57945	— 0,63765	— 0,66909	— 0,63765	— 0,57945	— 0,47312	— 0,33455	— 0,25605
Σ	0	— 0,07603	— 0,20932	— 0,31035	— 0,36386	— 0,39194	— 0,35926	— 0,30267	— 0,20150	— 0,07219	0

Tabelul 6

φ	σ_r	σ_φ	$\tau_{r\varphi}$	τ_{max}
22°30′	+ 231,64	+ 243,00	0	6,36
20°	+ 201,03	+ 240,97	—8,90	21,87
15°	+ 157,00	+ 225,64	—25,41	42,69
10°	+ 106,02	+ 197,71	—38,48	59,85
5°	+ 54,26	+ 160,93	—43,78	69,00
0°	+ 1,83	+ 119,80	—48,82	76,58
—5°	— 51,42	+ 79,01	— 42,29	77,72
—10°	— 104,85	+ 43,14	— 36,00	82,29
—15°	— 158,86	+ 16,34	—22,88	90,54
—20°	— 213,00	+ 1,88	—7,66	107,70
— 22°30′	— 240,00	0	0	120

3. Verificarea experimentală

Verificarea rezultatelor teoretice s-a făcut experimental, pe cale fotoelastică. În fig. 17 este arătată epruveta montată în dispozitivul de încărcare.

Din tablourile izocromaticelor unele valori ale eforturilor unitare pot fi verificate direct.

Referindu-ne inițial la primul caz studiat (v. pct. a)), pentru care dimensiunile modelului au fost date în fig. 5, rezultă: $M = Pc = 6{,}5 \cdot 5{,}5 = 35{,}9$ kgcm. În placă rezultă efortul unitar normal: $\sigma = 6.35{,}9/(0{,}55 \cdot 2^2) = 98$ kg/cm^2.

Din tabloul izocromaticelor în această regiune a plăcii (fig. 7) apare la margine izocromatica de ordinul 5,5, rezultînd un efort unitar experimental $\sigma = 5{,}5 \cdot 18 = 99$ kg/cm^2.

Pe marginea înclinată, la distanța $r = k$ de vîrf, apare, așa cum se vede din fig. 6, izocromatica de ordinul 7, rezultînd în acest punct efortul unitar xperimental $\sigma_r = -7 \cdot 18 = -126$ kg/cm^2, efort foarte apropiat de valoarea teoretică găsită în acest punct ($\sigma_r = -127{,}03$ kg/cm^2), arătată în diagrama din fig. 8.

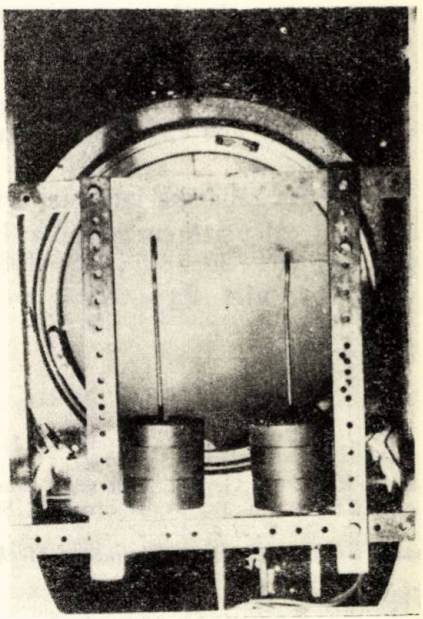


Fig. 17. — Dispozitivul de încărcare.

Pentru al doilea caz cercetat (v. pct. b)), rezultă de asemenea, din studiul experimental, valori foarte apropiate de cele teoretice. Astfel, pe muchia înclinată a plăcii, în punctul $r = k$, rezultă, așa cum se vede din fig. 10, izocromatica de ordinul 5 și deci efortul unitar experimental

în acest punct este $\sigma_r = -5.20{,}2 = -101$ kg/cm², care coincide cu efortul teoretic în acest punct, aşa cum rezultă din diagrama arătată în fig. 12.

Pentru al treilea caz (v. pct. c)), rezultă din studiul teoretic, în punctul $r = k$, pe muchia înclinată, un efort unitar $\sigma_r = -240$ kg/cm², iar din cercetarea experimentală, aşa cum se vede din fig. 14, în acest punct apare izocromatica de ordinul 12,5 şi rezultă deci efortul unitar $\sigma_r = -12{,}5.18 = -225$ kg/cm².

4. Concluzii

Din rezultatele teoretice şi verificările experimentale rezultă următoarele concluzii:

a) Funcţia Airy stabilită defineşte cu o bună exactitate starea de tensiune din placă pentru acest caz de încărcare.

b) Atît din studiul teoretic cît şi din cel experimental rezultă avantajele cusăturii executate cu un unghi $2\beta = 60°$, eforturile unitare fiind cu circa 30 % mai mici ca la cusătura cu unghiul $2\beta = 45°$.

c) Valorile eforturilor unitare σ_r pe muchia înclinată a cusăturii în secţiunea $r = k$, obţinute teoretic şi experimental, sînt mai mici ca eforturile unitare determinate în aceeaşi secţiune cu formula lui Navier. Astfel, pentru cusătura cu unghiul la vîrf $2\beta = 45°$ rezultă $\sigma_r = 6.35{,}9/(0{,}55.1{,}53^2) = 167$ kg/cm² > 127 kg/cm², iar pentru cusătura cu unghiul la vîrf $2\beta = 60°$ rezultă $\sigma_r = 6.35{,}9/(0{,}49.2^2) = 110$ kg/cm² > 101 kg/cm².

d) La rădăcina cusăturii eforturile unitare σ_φ depăşesc însă aceste eforturi calculate cu formula lui Navier, rezultînd la cusătura cu unghiul la vîrf $2\beta = 45°$, $\sigma_\varphi = 198$ kg/cm² > 167 kg/cm², iar la cusătura cu unghiul la vîrf $2\beta = 60°$, $\sigma_\varphi = 161$ kg/cm² > 110 kg/cm².

Institutul politehnic,
Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. Nikolaev G. A., *Construcţii sudate,* Ed. tehn., Buc., 1955, (trad. din l. rusă).
2. Mateescu D., St. şi cerc. şt., Şt. tehn., Acad. R. P. R., Baza Timişoara, 1958, V, *1 — 2.*
3. Kauderer H., *Nichtlineare Mechanik,* Springer Verlag, Berlin, 1958

ИССЛЕДОВАНИЕ СОЕДИНЕНИЯ ВНАХЛЕСТКУ СО СВАРНЫМ ОДНОФЛАНГОВЫМ ШВОМ, ПОДВЕРЖЕННЫМ ЧИСТОМУ ИЗГИБУ

(Резюме)

Для случая соединений внахлестку со сварным однофланговым швом определяются функции напряжения, рассматривая шов как треугольную пластинку и учитывая распределение нагрузки по кромке шва близким к реальному.

Определяются аналитические выражения унитарных усилий для различных видов швов и вычисляются величины этих усилий в возможных сечениях разрыва.

Теоретические результаты проверяются экспериментально, фотоэластически, и констатируется полное соответствие.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Диаграмма нагрузки.
Рис. 2. — Схема вычисления.
Рис. 3. — Диаграмма нагрузки.
Рис. 4. — Диаграмма унитарных усилий по кромке $\varphi = \beta$, в случае чистого изгиба.
Рис. 5. — Модель.
Рис. 6. — Изображение изохроматических кривых.
Рис. 7. — Изображение изохроматических промежуточных кривых с параллельными полароидами.
Рис. 8. — Диаграммы унитарных усилий.
Рис. 9. — Изображение изохроматических кривых.
Рис. 10. — Изображение изохроматических промежуточных кривых.
Рис. 11. — Модель.
Рис. 12. — Диаграммы унитарных усилий.
Рис. 13. — Изображение изохроматических кривых.
Рис. 14. — Изображение изохроматических промежуточных кривых.
Рис. 15. — Модель.
Рис. 16. — Диаграммы унитарных усилий.
Рис. 17. — Экеперименталъный прибор.

ÉTUDE D'UN JOINT PAR RECOUVREMENT RÉALISÉ PAR UNE SOUDURE UNILATÉRALE, SOUMIS À UN EFFORT DE FLEXION

(Résumé)

Pour le cas d'un joint par recouvrement réalisé par une soudure unilatérale, on détermine la fonction de tension en considérant le joint comme une plaque triangulaire et la répartition de la charge sur la tranche du joint, proche de celle réelle.

On détermine les expressions analytiques des efforts unitaires pour différentes formes du joints et on calcule les valeurs de ces efforts dans la section probable de rupture du joint.

Les résultats théoriques ont été vérifiés par voie expérimentale, en utilisant les procédés de la photoélasticité, en résultant une bonne correspondance.

Explications des figures

Fig. 1. – Diagramme des charges.
Fig. 2. – Schéma de calcul.
Fig. 3. — Diagramme des charges.
Fig. 4. — Diagramme des efforts unitaires sur la tranche $\varphi = \beta$ dans le cas de la flexion pure.
Fig. 5. — Modèle.
Fig. 6. — Tableau des isochromatiques.
Fig. 7. — Tableau des isochromatiques intermédiaires obtenues à l'aide des polaroïdes parallèles.

Fig. 8. — Diagrammes des efforts unitaires.
Fig. 9. — Tableau des isochromatiques.
Fig. 10. — Tableau des isochromatiques intermédiaires.
Fig. 11. — Modèle.
Fig. 12. — Diagrammes des efforts unitaires.
Fig. 13. — Tableau des isochromatiques.
Fig. 14. — Tableau des isochromatiques intermédiaires.
Fig. 15. — Modèle.
Fig. 16. — Diagrammes des efforts unitaires.
Fig. 17. — Dispositif expérimental.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 624 ; 620.193

РАСЧЕТ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НИХ КОРРОЗИИ

З. И. БРАУДЕ

1. Злейшим врагом стали является коррозия. Подсчеты показали, что около одной трети всей стали, вводимой ежегодно в эксплуатацию, теряется вследствие воздействия коррозии на всю находящуюся в эксплуатации сталь.

Ежегодно потери стали от пришедших в негодность конструкций исчисляются миллионами тонн.

Корродирование стальных конструкций приводит к тому, что отдельные узлы, а затем и вся конструкция теряет необходимые запасы прочности, а затем преждевременно выходит из строя.

Коррозийные разрушения стальных конструкций очень часто являются следствием недостотачной эффективности защитных покрытий, несвоевременного и неправильного их применения, плохого ухода за сохранностью защитных покрытий, а также неучета при проектировании конструкций, необходимости создания коррозиеустойчивой конструктивной формы как отдельных элементов (замкнутых, обтекаемых, обдуваемых и хорошо доступных для нанесения защитных покрытий), так и всей конструкции в целом. Все это в значительной степени сокращает срок службы стальных конструкций и часто является причиной их преждевременного выхода из строя.

2. В защите стальных конструкций от коррозии большое значение имеет нанесение на них покрытий, предохраняющих металл от коррозии. Важно иметь не только надлежащего качества покрытия, но и конструкции, хорошо доступные для нанесения этих покрытий.

Устойчивость стальных конструкций против коррозии в большой степени зависить от наличия неплотностей и щелей в элементах конструкций и жестких сопряжений, которые недоступны для окраски, осмотра и являются местом скопления пыли и грязи, задерживающих на конструкциях влагу.

При проектировании стальных конструкций необходимо думать об устранении этих явлений.

Бывшие в эксплуатации и подвергшиеся коррозии конструкции не всегда следует браковать, во многих случаях их следует использовать,

но использовать с открытыми глазами, внося соответствующие поправки, учитывающие влияние коррозии на несущую способность элементов конструкции.

Для расчета конструкций, подвергнувшихся коррозии, необходимо иметь данные о глубине проникания коррозии Δ. Глубина проникания коррозии зависит от условий, в которых находились конструкции, марка стали, из которой они изготовлены, и времени, на протяжении которого эти конструкции были подвержены коррозии.

В таблице 1 приводятся средние данные о скоростях потерь от коррозии за один год в различных средах для сталей марки Ст. 3 и 15 ХСНД (НЛ-2) [1].

Таблица 1

Наименование среды, в которой происходила коррозия	Скорость коррозии стали мм/год	
	Сталь Ст. 3	Сталь 15 ХСНД
Атмосфера промышленного города	0,068	0,062
Газо-паровая атмосфера химического завода	0,250	0,170
Грунт	0,034	0,023
Атмосфера морского воздуха	0,027	0,021
Морская вода — полное погружение	0,086	0,066
Морская вода — полупогружение	0,140	0,100
Водопроводная вода — полное погружение	0,028	0,021
Водопроводная вода — полупогружение	0,082	0,090

Потери от коррозии даны суммой на обе поверхности испытуемого образца.

Как видно из таблицы 1, скорость коррозии очень зависит от условий, в которых она происходит, так например, в условиях газопаровой атмосферы химического завода строительные стали имеют наибольшие потери, сталь марки Ст. 3 теряет в этой атмосфере свыше чем в 9 раз больше, чем в атмосфере морского воздуха. Следует отметить, что в условиях химического завода сталь 15 ХСНД сопротивляется коррозии значительно лучше, чем сталь Ст. 3 и потери ее по сравнению со сталью Ст. 3 составляют около 68%, в то время как устойчивость против коррозии в атмосфере промышленного города (наиболее характерной для промышленных предприятий) стали 15 ХСНД всего примерно на 10% больше, чем стали Ст. 3. Таким образом сталь 15 ХСНД экономически эффективно применять для конструкций, установок и агрегатов всякого рода химических производств.

Следует отметить, что на скорость коррозии влияет не только среда, но и географическое размещение объекта. Как пример влияния географических условий на скорость коррозии можно привести данные о скоростях коррозии малоуглеродистой конструкционной стали в тропическом климате зоны Панамского канала [5].

В таблице 2 приведены усредненные величины коррозионных потерь за 8 лет по материалам упомянутой статьи.

Таблица 2

Наименование, среды, в которой происходила коррозия	Скорость коррозии мм/год
	Конструкцион. малоуглеродистая сталь
Атмосфера тропического леса	0,041
Атмосфера морского воздуха	0,066
Морская вода — полное погружение	0,162
Морская вода полупогружение (выдержка в приливно-отливной зоне)	0,141
Пресная озерная вода — полное погружение	0,141

3. Особенно неблагоприятна для эксплуатации стальных конструкций неравномерная коррозия. Наблюдения над образцами показали, что наименее опасной является коррозия в атмосфере промышленного города, так как она имеет равномерное распределение по всей поверхности образца. Наиболее неблагоприятной — коррозия в газово-паровой атмосфере, поражающая отдельные участки изъединами большой глубины. Натурные обследования многих видов стальных конструкций подтверждают эти наблюдения.

Работы советских исследователей показывают, что наибольшая интенсивность потерь от коррозии приходится на первые 1...2 года, после чего потери от коррозии значительно уменьшаются и в дальнейшем они становятся примерно постоянными, пропорциональными времени. На основании этих работ можно сделать весьма важный вывод о том, что начиная примерно с 2...3 лет скорость коррозии постоянна по времени и при достаточно большом сроке эксплуатации стальных конструкций *глубину проникновения коррозии можно принимать равной произведению из скорости коррозии в год на число лет, в течение которых конструкция подвергалась влиянию коррозии.*

В работах зарубежных авторов [2] можно найти соответствие с Советскими данными по скоростям коррозии.

Правда, по работе К. Ларрэби, основанной на английских и американских экспериментальных данных, скорость коррозии в атмосфере промышленного города имеет несколько меньшую величину, чем по советским данным, по-видимому, на уменьшение скорости коррозии, полученной по английским и американским экспериментам, влияет близость моря, в какой-то мере приближающей атмосферу промышленного города к атмосфере морского воздуха.

На основании этого вывода, зная условия эксплуатации той или иной конструкции, можно по таблицам 1 или 2 определить скорость коррозии в год, а имея данные по сроку эксплуатации данной конструкции определить глубину проникания корозии Δ, что дает возможность учесть влияние коррозии на сечения элементов конструкций, а следовательно определить несущую способность конструкции с учетом влияния коррозии и соответственно использовать конструкцию на уменьшенные нагрузки или определить необходимые размеры усиления ее.

Если обозначить отношение площадей стальных элементов после и до воздействия коррозии $k = F_k/F$ и аналогично отношение момен-

тов сопротивления $k_1 = W_k/W$, то расчетные формулы при расчетах на прочность и устойчивость можно написать в следующем виде.

При расчете на прочность при центральном растяжении и сжати по предельному состоянию $N \leqslant mRF_{нт}K$ по допускаемым напряжениям $N/(F_{нт}k) \leqslant [\sigma]$.

При расчете на устойчивость при центральном сжатии по предельному состоянию $N \leqslant m\varphi R F_{бр} k$ по допускаемым напряжениям $N/(\varphi F_{бр} k) \leqslant [\sigma]$, где: N — расчетная продольная сила, m — коэффициент условий работы, R — расчетное сопротивление растяжению или сжатию, прокатной стали, $F_{бр}$ — площадь сечения брутто, $F_{нт}$ — площадь сечения нетто, φ — коэффициент продольного изгиба, при определении которого следует учитывать изменения радиуса инерции сечения вследствие утончения элементов сечения от влияния коррозии, k — коэффициент коррозиостойкости площади сечения элемента, $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение и сжатие.

Для изгибаемых элементов при расчете на прочность по предельному состоянию:

$$M \leqslant mRW_{нт}k_1 \quad \text{и} \quad Q \leqslant mR_{ср} I_{бр}(\delta - \Delta)/S_{бр}$$

по допускаемым напряжениям:

$$M/(k_1 W_{нт}) \leqslant [\sigma] \quad \text{и} \quad QS_{бр}/[I_{бр}(\delta - \Delta)] \leqslant [\tau].$$

При расчете на устойчивость по предельному состоянию:

$$M \leqslant m\varphi_б R W_{бр} k_1$$

до допускаемым напряжениям:

$$M/(\varphi_б W_{бр} k_1) \leqslant [\sigma],$$

где: M — расчетный изгибающий момент, Q — расчетная поперечная сила, $W_{бр}$ — момент сопротивления сечения брутто, $W_{нт}$ — момент сопротивления сечения нетто, $I_{бр}$ — момент инерции сечения брутто, относительно нейтральной оси, $S_{бр}$ — статический момент сдвигающей части сечения брутто относительно нейтральной оси, δ — толщина стенки, R — расчетное сопротивление изгибу прокатной стали, $R_{ср}$ — расчетное сопротивление срезу прокатной стали, $\varphi_б$ — коэффициент уменьшения несущей способности изгибаемых элементов при проверке общей устойчивости, $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на изгиб, $[\tau]$ — допускаемое напряжение на срез, Δ — глубина проникания коррозии.

Под глубиной коррозии понимается сумма проникания коррозии на обе параллельные плоскости испытуемого образца.

Так как в формулы для определения расчетной поперечной силы Q или напряжения на срез τ входят отношения $I_{бр}$ к $S_{бр}$ или $S_{бр}$ к $I_{бр}$, что почти исключает влияние утончения элементов сечения от коррозии, эти величины могут быть подсчитаны для первоначального сечения без учета влияния коррозии.

Таким образом для поверочных расчетов на прочность стальных элементов машин или сооружений, подвергнувшихся коррозии, необходимо знать коэффициенты k и k_1 небезинтересен также для определения коэффициента продольного изгиба φ, зависящего от радиуса инерции сечения, коэффициент $k_2 = r_k/r$, где r_k — радиус сечения элемента после воздействия коррозии и r — радиус инерции первоначального сечения.

Все эти коэффициенты зависят: а) от физической величины Δ, которая определяется в зависимости от времени, среды и марки стали

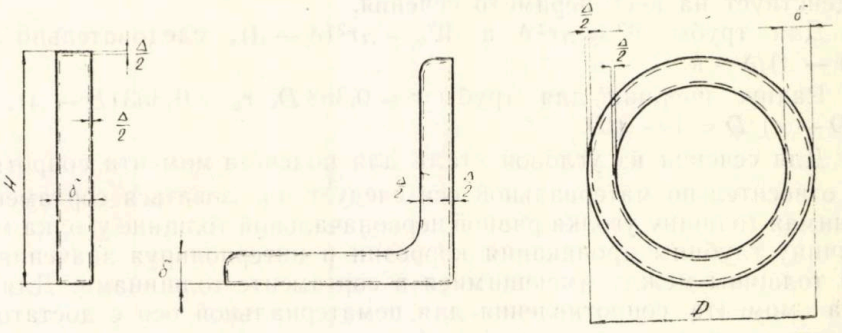


Рис. 1

и, следовательно, для определенной конструкции является постоянной величиной; б) от геометрического очертания сечения элемента.

4. Рассмотрим наиболее употребительные сечения элементов.

На рис. 1 а показан лист высотой H, толщиной δ, подвергнувшийся коррозии с глубиной проникания Δ. В этом случае с достаточной для практики точностью можно принять $F = \delta H$, а

$$F_k = (\delta - \Delta) H, \quad k = (\delta - \Delta) H/(\delta H) = 1 - \Delta/\delta, \quad W = \delta H^3/6,$$

$$W_k = (\delta - \Delta) H^3/6, \quad k_1 = (\delta - \Delta)/\delta = 1 - \Delta/\delta.$$

Таким образом для листа $k = k_1$, а радиус инерции для листа не зависит от его толщины, следовательно $k_2 = 1$.

В случае, если сечение скомпоновано из горизонтальных и вертикальных листов, то коэффициент k не зависит от их ширин, а только от толщины листов и глубины проникания коррозии. Если сечение элемента состоит из листов нескольких толщин, то при подсчете расчетной площади этого элемента после корродирования надо площадь для каждого листа одной толщины умножать на соответствующий коэффициент k. Если первоначальная площадь сечения элемента состоит из нескольких листов различной толщины $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, тогда площадь всего сечения после корродирования:

$$F_k = \sum_i F_i \frac{\delta_i - \Delta}{\delta_i}.$$

Зная площади каждого листа составного сечения после воздействия коррозии не трудно подсчитать расчетные моменты инерции и сопротивления для этого сечения.

С достаточной для практики точностью можно принять коэффициент $k = (\delta - \Delta)/\delta = 1 - \Delta/\delta$ для угловой стали (рис. 1 б) и для незамкнутых труб, в которых влияние атмосферы распространяется не только на наружную, но и на внутреннюю поверхности сечения (рис. 1 в).

Эта формула с достаточной степенью точности может быть принята для сечений, имеющих любое очертание, но одинаковую по всему периметру толщину, значительно меньшую длины, причем коррозия воздействует на весь периметр сечения.

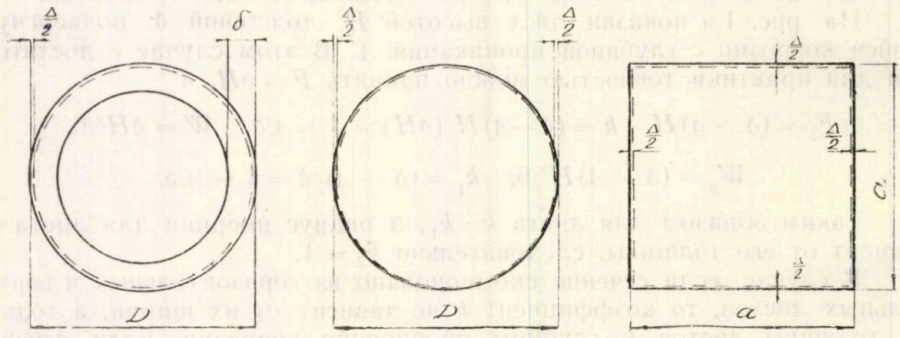
Для трубы $W = \pi r^2 \delta$ а $W_k = \pi r^2 (\delta - \Delta)$, следовательно $k_1 = (\delta - \Delta)/\delta = k$.

Радиус инерции для трубы $r = 0{,}353\, D$, $r_k = 0{,}353\,(D - \Delta)$, $k_2 = (D - \Delta)/D = 1 - \Delta/D$.

Для сечений из угловой стали для подсчета момента сопротивления относительно материальной оси следует пользоваться сортаментом, принимая толщину уголка равной первоначальной толщине уголка минус величину глубины проникания коррозии и интерполируя значения для этой толщины между имеющимися в сортаменте толщинами. Для подсчета момента сопротивления для нематериальной оси с достаточной точностью можно принимать $k_1 = k$.

Радиусы инерции для сечений из угловой стали можно подсчитывать аналногично моментам сопротивления.

5. Если труба замкнута и атмосфера влияет только на наружную поверхность сечения рис. 2 а, тогда с достаточной для практики точ-



а б в

Рис. 2

ностью можно принять $F = \pi D \delta$ и $F_k = F - \pi D \Delta/2$, где: D — наружный диаметр трубы, Δ — глубина проникания коррозии, δ — толщина трубы и $k = 1 - \Delta/(2\delta)$.

Таким образом, в случае замкнутой трубы коэффициент коррозиостойкости значительно больше, чем в трубе незамкнутой, так как потери от коррозии, в случае незамкнутой трубы равняются Δ/δ, а в

случае замкнутой трубы — $\Delta/(2\delta)$, т. е, во втором случае потери в два раза меньшие.

Для замкнутых труб также $k_1 = k$, а радиусы инерции подсчитываются с учетом уменьшения толщины стенки $k_2 = 1 - \Delta/(2D)$.

Для сплошного круглого сечения с диаметром D (рис. 2 б), $F = \pi D^2/4$, с достаточной для практики точностью можно принять $F_k = F - \pi D\Delta/2$, в этом случае:

$$k = 1 - 2\Delta/D, \quad W = \pi D^3/32, \quad W_k = \pi(D-\Delta)^3/32,$$

$$k_1 = (D^3 - 3D^2\Delta + 3D\Delta^2 - \Delta^3)/D^3.$$

Так как по сравнению с диаметром Δ очень невелико, пренебрегаем членами, имеющими множители Δ^2 и Δ^3 и тогда:

$$k_1 = (D^3 - 3D^2\Delta)/D^3 = 1 - 3\Delta/D = k - \Delta/D,$$

$$r = D/4, \quad r_k = (D-\Delta)/4, \quad k_2 = 1 - \Delta/D.$$

Для квадратного сечения со стороной равной a (рис. 2 в):

$$F = a^2, \quad F_k = (a-\Delta)^2 = a^2 - 2a\Delta + \Delta^2.$$

Пренебрегая Δ^2

$$k = (a^2 - 2a\Delta)/a^2 = 1 - 2\Delta/a,$$

$$W = a^3/6, \quad W_k = (a-\Delta)^3/6, \quad k_1 = (a^3 - 3a^2\Delta)/a^3 = 1 - 3\Delta/a = k - \Delta/a,$$

$$r = a/\sqrt{12}, \quad r_k = (a-\Delta)/\sqrt{12}, \quad k_2 = (a-\Delta)/a = 1 - \Delta/a.$$

6. Для прокатных профилей (двутавровых балок, швеллеров, рельсов) рис. 3 а, б, в и любого профиля произвольного очертания, расчетная площадь после воздействия коррозии $F_k = F - p\Delta/2$, где p — периметр поперечного сечения профиля. В этих случаях $k = 1 - p\Delta/(2F)$.

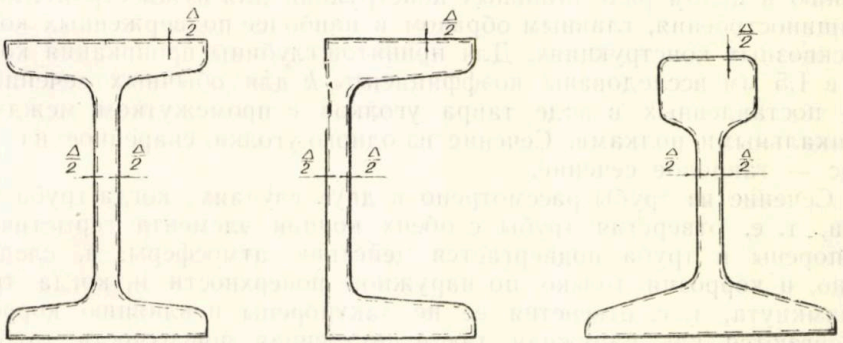


Рис. 3

Для двутавровых балок и швеллеров значительный интерес представляет k_1, особенно для момента сопротивления относительно горизонтальной оси:

$$W = 2I/H = 2r^2F/H = 2a^2HF, \text{ где } a = r/H.$$

С достаточной для практических целей степенью приближения можно считать a постоянным как для первоначального, так и для сечения, подвергшегося коррозии, и тогда:

$$W_k = 2a^2(H - \Delta)F_k = 2a^2(H - \Delta)kF,$$

$$k_1 = 2a^2(H - \Delta)kF/(2a^2HF) = k(1 - \Delta/H).$$

Таким образом k_1 всегда меньше k. Однако, если для примера взять довольно значительную глубину проникания $\Delta = 2$ мм и один из самых малых профилей, применяемых в стальных конструкциях № 10, то k_1 составит 98% от k, при профилях № 20 — 99% от k. Следовательно, без существенного ущерба для точности расчетов можно вводить в подсчет W_k не коэффициент k_1, а коэффициент k, т. е. считать $k_1 \cong k$ и тогда $W_k = kW$.

Принимая $k_1 = k$ определяем коэффициент k_2 для радиусов инерции относительно горизонтальной оси для двутавровых балок и швеллеров:

$$r = \sqrt{WH/(2F)}, \quad r_k = \sqrt{kWH/(2kF)} = \sqrt{WH/(2F)}.$$

Следовательно $k_2 = 1$.

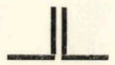
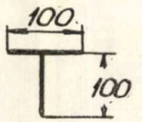
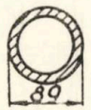
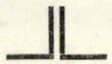
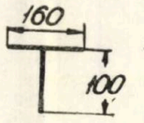
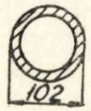
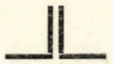
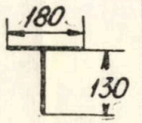
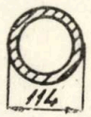
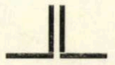
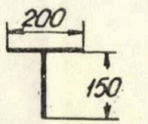
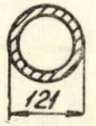
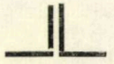
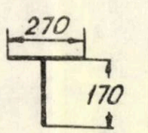
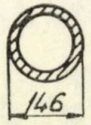
Коэффициенты коррозиостойкости для сечений, имеющих одинаковую толщину подсчитываются весьма просто. Сложнее подсчитывать коэффициенты для прокатных сечений с переменной толщиной, так как в этих случаях требуется подсчет периметра сечения, который не приводится в сортаментах.

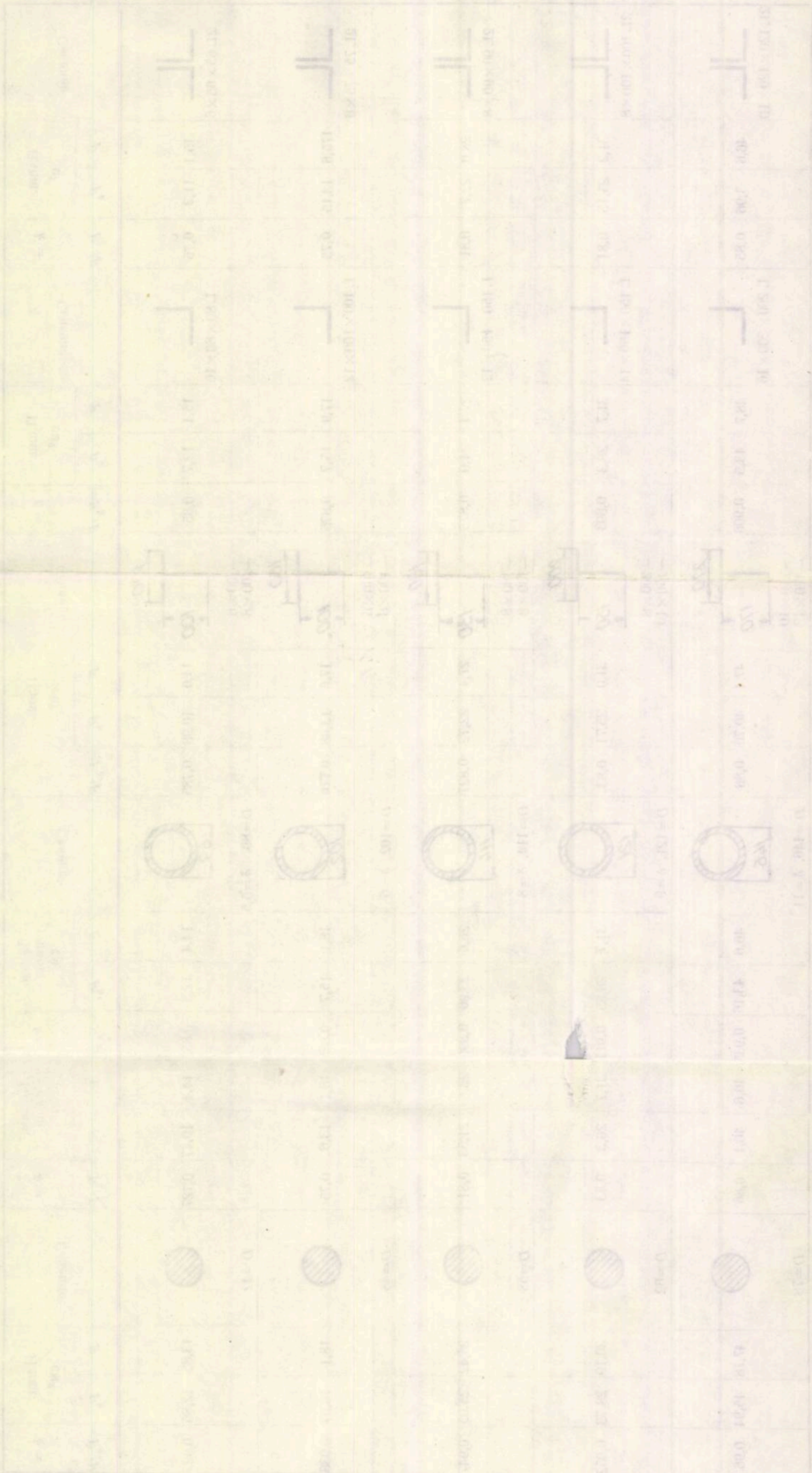
Известный интерес представляют приведенные в таблице 3 коэффициенты, подсчитанные для разных геометрических форм сечений, очень близких друг к другу по площади. Глубина проникания коррозии при этих подсчетах принята 1,5 мм. Все эти сечения возможны к применению в целом ряде стальных конструкций для нужд строительства и машиностроения, главным образом в наиболее подверженных коррозии сквозных конструкциях. Для принятой глубины проникания коррозии в 1,5 мм исследованы коэффициенты k для обычных сечений из двух поставленных в виде тавра уголков с промежутком между их вертикальными полками. Сечение из одного уголка, сваренное из двух полос — тавровое сечение.

Сечение из трубы рассмотрено в двух случаях: когда труба замкнута, т. е. отверстия трубы с обеих концов элемента герметически закупорены и труба подвергается действию атмосферы, а, следовательно, и коррозии только по наружной поверхности и, когда труба не замкнута, т. е. отверстия ее не закупорены и влиянию коррозии подвергаются как наружная, так и внутренняя поверхности трубы и последним рассмотренно сплошное круглое сечение.

Как видно из упомянутой выше таблицы коэффициенты k для сварного тавра и незамкнутой трубы по величине очень близки к коэффициенту k обычного сечения из двух уголков в виде тавра, по сравнению с этим сечением элементы конструкций из незамкнутой трубы и сварного тавра имеют преимущества только в том, что они значи-

Таблица 3

Сечение	Площ. см²		$k=$	Сечение	Площ. см²		$k=$	Сечение	Площ. см²		$k=$	Сечение	Замкн. площ. см²		$k=$	Не зам. площ. см²		$k=$	Сечение	Площ. см²		$k=$
	F	F_k	$=F_k/F$		F	F_k	$=F_k/F$		F	F_k	$=F_k/F$		F	F_k	$=F_k/F$	F	F_k	$=F_k/F$		F	F_k	$=F_k/F$
 2L 65×65×6	15,1	11,3	0,75	L 80×80×10	15,1	12,7	0,85	 —100×6 —100×8	14,0	10,98	0,785	 $D=89,\ \delta=5{,}5$	14,4	12,3	0,852	14,4	10,47	0,727	$D=42$	13,85	12,86	0,927
 2L 75×75×6	175,6	13,15	0,75	L 100×100×12	17,9	15,7	0,875	 —160×6 —100×8	17,6	13,68	0,776	 $D=102,\ \delta=6$	18,1	15,7	0,865	18,1	13,6	0,75	$D=48$	18,1	16,97	0,938
 2L 90×90×8	28,0	22,7	0,81	L 150×150×12	27,4	24,0	0,875	 —180×8 —130×8	27,4	22,72	0,827	 $D=114,\ \delta=8$	26,6	23,96	0,899	26,6	21,53	0,81	$D=58$	26,42	25,05	0,947
 2L 100×100×8	31,2	25,15	0,81	L 150×150×14	31,7	28,3	0,893	 —200×8 —150×10	31,0	25,71	0,83	 $D=121,\ \delta=9$	31,7	28,85	0,911	31,7	26,3	0,83	$D=62$	30,19	28,73	0,952
 2L 120×120×10	46,6	3,96	0,85	L 200×200×16	48,7	43,5	0,906	 —270×10 —170×12	47,4	40,70	0,86	 $D=146,\ \delta=11$	46,6	43,16	0,935	46,6	40,1	0,86	$D=78$	47,78	45,94	0,96



тельно более удобны для окраски как при изготовлении, так и в процессе эксплуатации, так как не имеют вдоль всего элемента узкой щели, которая имеется при сечении из парных уголков. Коэффициент k для замкнутой трубы примерно на 11...15% больше, чем для парных уголков, учитывая также преимущества окраски элементов из труб, следует признать это сечение наиболее применимым для конструкций, работающих в условиях повышенной коррозии.

Учитывая дефицитность труб, следует обратить внимание, что значительно большой коэффициент k имеет сечение из одного уголка с площадью равной сечению из двух уголков, причем сечение из одного уголка удобно для окраски. Сплошное круглое сечение обладает наилучшим коэффициентом k. Элементы из сплошного круглого сечения также удобны для окраски, как и элементы из трубы. Крупным недостатком этого сечения по сравнению с другими сечениями равной площади является значительно меньший радиус инерции, что практически исключает возможность применения круглого сечения для сжатых стержней, но для стержней подвергнувшихся только растяжению в конструкциях, работающих в условиях повышенной коррозии, сплошное круглое сечение является наиболее оптимальным.

Проведенный анализ различных сечений даст возможность при проектировании различных стальных конструкций и деталей, работающих в агрессивных средах выбирать наиболее устойчивые против коррозии конструктивные формы, а в случае воздействия на стальные элементы коррозии произвести поверочные расчеты на прочность и устойчивость этих элементов.

Актуальность проблемы создания устойчивости против коррозии конструктивной формы еще более увеличивается при широком внедрении в строительную практику размещения технологических агрегатов на открытых площадках. Для многих отраслей промышленности экономичность этого прогрессивного вида строительства уже доказана, тем не менее для успешной долговременной эксплуатации размещенных на открытых площадках технологических агрегатов и сооружений для их обслуживания, конструкции агрегатов и вспомогательных устройств должны быть спроектированы с учетом придания их формам наиболее устойчивых против коррозии свойств.

Борьба с коррозией является одной из актуальных проблем проектирования и эксплуатации стальных элементов и деталей в конструкциях, технологических установках и различных агрегатах. Успехи в этом деле сулят большую экономию стали в различных областях народного хозяйства.

Поступила 17 IV 1961 г.

Г. П. Н. Проектстальконструкция, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернашкин В. Н., Бабаева А. Е., *Коррозия сталей в естественных условиях*, Исследования — стальные конструкции, Госстройиздат, М., 1957 г.
2. Ларрэби К., *Железо и сталь, коррозия в атмосфере. Коррозия металлов*, т. I, кн. *1*, Госхимиздат, М., 1952 г., (пер. с англ.)

3. Брауде З. И., *Учет коррозии стали при проектировании новых и пересчете эксплуатируемых стальных конструкции*, в Сборник материалов по стальным конструкциям, *3*, М., 1958.
4. — Инж.-физ. ж., 1959, **II**, *5*.
5. Forgeson B. W,, Southwell C. R., Alexander A. L., Mundt H. W., Thompson L. I., Corrosion, 1958, *2*.

LE CALCUL DES CONSTRUCTION EN ACIER SOUMISES À LA CORROSION

(Résumé)

On expose les données obtenues quant aux vitesses annuelles de la corrosion des aciers de construction en diverses milieux, qui se produit lors de l'exploitation des constructions en acier.

En connaisant le milieu, la durée de la construction et la vitesse annuelle de corrosion pour le milieu donné, on peut déterminer la profondeur de corrodage.

On donne nombre de formules pour la vérification à la corrosion des sections soumises à la tension, à la compression centrique et à la flexion. Les formules sont données pour deux méthodes de calcul à savoir a) la méthode des états limites, b) la méthode des résistences admissibles.

Dans le cas des sections laminées les plus usuelles on déduit les formules nécessaires pour la détermination du coefficient de sûreté à la corrosion pour : la surface — $k=F_k/F$, le moment résistant — $k_2=W_1/W$ et le rayon de giration — $k_2 = r_k/r$. On montre que, pour les profils les plus usuels — poutres en double T et cornières — on peut considérer avec une précision suffisante pour la pratique, $k_1 \cong k$ et $k_2 \cong 1$.

On compare les coefficients k calculés à la même profondeur de pénétration de la corrosion $\Delta = 1{,}5$ mm pour différentes sections possibles des éléments des constructions en acier.

CALCULUL CONSTRUCŢIILOR DE OŢEL SUPUSE COROZIUNII

(Rezumat)

Se dau datele culese asupra vitezelor anuale ale coroziunii oţelurilor de construcţii în medii diferite, ce se ivesc în cazul exploatării construcţiilor de oţel.

Cunoscînd mediul şi durata construcţiei, precum şi viteza anuală a coroziunii pentru mediul dat, se poate determina adîncimea de corodare.

Se dau formule pentru verificarea la coroziune a secţiunilor supuse la întindere, compresiune centrică şi încovoiere. Formulele sînt date pentru două metode de calcul : a) după stările limită şi b) după rezistenţele admisibile.

În cazul secţiunilor laminate mai uzuale se deduc formule pentru determinarea coeficientului de siguranţă la coroziune pentru suprafaţă — $k=F_k/F$, pentru momentul rezistent — $k_1=W_1/W$ şi pentru raza de giraţie—$k_2=r_k/r$. Se demonstrează că pentru profilele cele mai uzuale — grinzi dublu T şi corniere — se poate considera, cu o precizie suficientă pentru practică, $k_1 \approx k$, iar $k_2=1$.

Se compară coeficienţii k calculaţi la aceleaşi adîncimi de pătrundere a coroziunii $\Delta=1{,}5$ mm pentru diferite secţiuni posibile ale elementelor construcţiilor de oţel.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 551.11 : 621.791

APRECIEREA MODULULUI DE ELASTICITATE AL PĂMÎNTULUI DIN PATUL DRUMURILOR PE BAZA MĂSURĂTORILOR DEFLECTOMETRICE

DE

VICTOR CIUBOTARU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Aplicabilitatea metodelor teoretice bazate pe analiza matematică a stării de tensiune în calculul de dimensionare a sistemelor rutiere nerigide este limitată în mare măsură, în prezent, de inexistenţa unor date suficient de sigure privind caracteristicile de rezistenţă şi deformabilitate a materialelor folosite. Importanţa evaluării cantitative a acestor caracteristici a determinat elaborarea mai multor procedee experimentale de laborator şi de teren. Printre acestea trebuie considerate în primul rînd acelea care folosesc măsurătorile deflectometrice, deoarece ele permit obţinerea, cu o aparatură simplă, a unui număr mare de valori, într-un timp relativ scurt.

Este cunoscut procedeul ing. A. Nau [1] care folosind măsurătorile privind grosimea straturilor rutiere şi a deflexiunilor suprafeţei îmbrăcăminţii în trei puncte, stabileşte modulii de elasticitate ai pămîntului din pat şi ai stratului superior cu aproximaţii de $\pm 20\%$ respectiv $\pm 15\%$.

În cele ce urmează se prezintă un nou procedeu aproximativ de evaluare a modulului de elasticitate al pămîntului din pat cunoscînd grosimea stratului superior şi deflexiunile suprafeţei îmbrăcăminţii în două puncte.

2. Teoretic şi experimental este stabilit faptul că sub acţiunea unei sarcini distribuite axial-simetric, suprafaţa deformată a sistemului bistrat are formă de clopot. Eforturile unitare σ_z care se dezvoltă în acest caz la interfaţa dintre straturi, se repartizează după o diagramă analogă, a cărei pleoştire depinde direct de rigiditatea stratului superior.

Se consideră că deformaţia verticală w la distanţa x de axul încărcării este dată de:

$$w = w_0 / (1 + \beta x^2), \tag{1}$$

unde: w_0 — deformaţia verticală maximă şi β — coeficient de rigiditate a stratului superior, a cărui valoare variază invers proporţional cu pleoştirea.

Admiţînd că diagrama eforturilor unitare σ_z la interfaţa dintre straturi este analogă suprafeţei deformate externe se calculează deformaţia verticală totală a stratului inferior aplicînd pe suprafaţa acestuia o încărcare:

$$q = q_0 / (1 + \beta x^2). \tag{1'}$$

În (1') q_0 şi q reprezintă valorile eforturilor unitare σ_z în axul clopotului şi la distanţa x de acesta.

Din ecuaţia de proiecţie verticală, considerînd că pentru $x \geqslant r$, $q=0$, se obţine:

$$q_0 = \beta P / [\pi \ln (1+\beta r^2)], \tag{2}$$

în care P — valoarea sarcinii exterioare transmisă de vehicul pe suprafaţa de contact.

În ipoteza semispaţiului omogen, izotrop şi elastic, deformaţia elementară la distanţa x, sub acţiunea unei forţe concentrate dP, se obţine cu ajutorul relaţiei:

$$dw = [(1-\mu)/(2\pi G_2)]\,(dP/x), \tag{3}$$

în care: $G_2 = E_2/[2(1+\mu)]$ — modulul de elasticitate transversal şi μ — coeficientul lui Poisson.

Deformaţia totală maximă datorită încărcării, exprimată prin (1'), se determină prin integrarea expresiei (3) în care: $dP = q\,dA = [q_0/(1+\beta x^2)] \times \times 2\pi x\,dx$. În acest caz:

$$w_t = \frac{q_0(1-\mu)}{G_2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+\beta x^2} = \frac{\pi q_0(1-\mu)}{2G_2\sqrt{B}}. \tag{4}$$

Folosind expresia (2) şi relaţia de legătură dintre G şi E, se capătă:

$$w_t = \sqrt{\beta}\,P(1-\mu^2)/[E_2 \ln (1+\beta r^2)]. \tag{5}$$

În raport cu deformaţia totală (w) măsurată cu deflectometrul, tasarea stratului inferior (w_t) reprezintă o fracţiune cu atît mai importantă cu cît raportul dintre grosimea stratului de deasupra şi raza cercului echivalent de contact (h/a) este mai mic şi cu cît rigiditatea stratului superior este mai redusă.

3. Folosind formulele aproximative stabilite de Barber [2], care permit evaluarea practic exactă a deformaţiilor menţionate adică:

$$w_t = 2(1-\mu^2)\,pa^2/\{E_2[a^2 + h^2(E_1/E_2)^{3/2}]^{1/2}\}$$

şi

$$w = [2(1-\mu^2)\,pa/E_2]\{a(1-E_2/E_1)/[a^2 + h^2(E_1/E_2)^{3/2}]^{1/2} + E_2/E_1\},$$

raportul acestor două deformaţii devine:

$$c_1 = w_t/w = (E_1/E_2)\,(1/\{[1+(h^2/a^2)(E_1/E_2)^{3/2}]^{1/2} + E_1/E_2 - 1\}). \tag{6}$$

În raportul E_1/E_2 din (6) E_1 reprezintă modulul de elasticitate al stratului superior, de grosime h, şi E_2 modulul de elasticitate al stratului de rezemare, de extindere infinită.

Înlocuind în (5) w_t cu $c_1 w$ şi explicitînd pe E_2 se obţine:

$$E_2 = \sqrt{\beta}\,P(1-\mu^2)/[c_1 w \ln (1+\beta r^2)], \tag{7}$$

care permite evaluarea modulului de elasticitate al pămîntului cînd se cunosc deflexiunile în cel puţin două puncte ale suprafeţei deformate a îmbrăcăminţii şi grosimea sistemului rutier.

Analiza grafică a expresiei (6) arată (fig. 1) că din punct de vedere practic multiplicatorul c_1 din (7) poate fi evaluat aproximativ ca o valoare medie în cadrul unui raport h/a cunoscut şi o variaţie a lui E_1/E_2 normală (de la 5 la 30). Folosind observaţiile de mai sus, la staţia pilot pentru cercetări rutiere din Iaşi se foloseşte relaţia (7) pentru aprecierea deformabilităţii terenului de fundaţie.

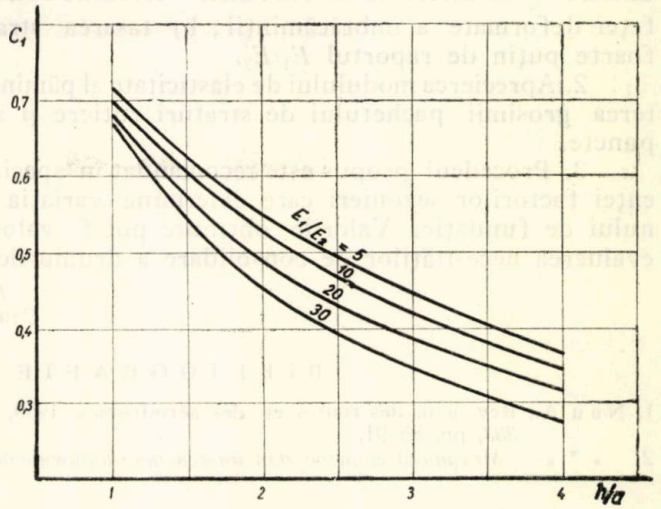


Fig. 1. — Variaţia raportului dintre tasarea terenului şi deflexiunea totală.

Aplicînd acest procedeu la măsurătorile efectuate de ing. A. Nau (*op. cit.*), s-au obţinut rezultatele comparative din tabelul 1.

Examinarea diferenţelor arată că valorile modulilor de elasticitate obţinute prin aplicarea ambelor procedee pot fi considerate comparabile.

Din măsurătorile efectuate la staţia pilot cu ajutorul unui deflectometru special construit s-a mai constatat că precizia determinării modulului de elasticitate cu ajutorul relaţiei (7) creşte atunci cînd raportul h/a este apropiat de unitate.

Tabelul 1

Nr. crt.	Valorile w la dist. x faţă de axul înc. 0 cm	40 cm	80 cm	Parametrul β cm^{-2}	E_2 relaţia (7) kg/cm^2	E_2 rel. A. Nau [1] kg/cm^2	Diferenţe %
1	0,078	0,029	0,009	$12{,}0 \cdot 10^{-4}$	621	550	+12,8
2	0,154	0,0425	0,012	$17{,}6 \cdot 10^{-4}$	350	400	−12,3
3	0,074	0,034	0,010	$8{,}7 \cdot 10^{-4}$	600	400	+50,0
4	0,102	0,0315	0,015	$11{,}7 \cdot 10^{-4}$	471	700	−32,7
5	0,236	0,047	0,014	$20{,}6 \cdot 10^{-4}$	238	350	−31,8
6	0,106	0,0345	0,008	$16{,}0 \cdot 10^{-4}$	496	450	+10,0
7	0,173	0,0395	0,0095	$48{,}0 \cdot 10^{-4}$	425	350	+21,3

Sarcina pe roată $P = 3\,650$ kg ; raza cercului echivalent de contact $a = 14{,}5$ cm ; grosimea sistemului rutier $h = 24$ cm ; coeficientul $c_1 = 0{,}53$ (conform fig. 1) ; coeficientul lui Poisson $\mu = 0{,}35$; raza de influenţă $r = 250$ cm.

Concluzii

1. Mărimea modulului de elasticitate (E_2) al pământului din patul drumurilor poate fi aproximată considerînd că: a) diagrama eforturilor unitare σ_z la interfaţa sistem rutier—teren de fundaţie este analogă suprafeţei deformate a îmbrăcăminţii; b) tasarea stratului superior depinde foarte puţin de raportul E_1/E_2.

2. Aprecierea modulului de elasticitate al pământului presupune cunoaşterea grosimii pachetului de straturi rutiere şi a deflexiunilor în două puncte.

3. Procedeul propus este recomandat în special pentru studiul influenţei factorilor sezonieri care determină variaţia deformabilităţii terenului de fundaţie. Valorile obţinute pot fi valorificate de asemenea la evaluarea necesităţilor de consolidare a drumurilor în circulaţie.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de drumuri şi geotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Nau A., Rev. gén. des routes et des aérodromes, 1959, *331*, pp. 49-63; Ibid., 1959, *333*, pp. 85-91.
2. * * * *Механика грунтов для инженеров-дорожников*, Автотрансиздат, М., 1957.

ОЦЕНКИ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ДОРОЖНЫХ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ НА ОСНОВЕ ИЗМЕНЕНИЙ ПРОГИБОВ ПОКРЫТИЯ

(Резюме)

Излагается приближенный способ для определения модуля упругости грунта из корыта дорог, на основе результатов измерений толщины дорожной одежды и прогибов покрытий в двух разных точках. Указанный способ предполагает аналогию между распределением напряжений σ_z на уровне грунтового основания и деформацией покрытий, а также пренебрегает влиянием отношения E_1/E_2 на осадку дорожных слоев. Способ рекомендуется для исследования погодных условий на изменение деформативности грунтовых оснований и для укрепления находящихся в эксплуатации дорог.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Изменение отношения между прогибом грунтового основания и общим прогибом.

APPRÉCIATION DU MODULE D'ÉLASTICITÉ DU SOL DE FONDATION DES ROUTES À L'AIDE DES MESURES DÉFLECTOMÉTRIQUES

(Résumé)

On présente une méthode d'évaluation aproximative du module d'élasticité du sol de fondation des systèmes routiers souples. On établit une relation qui comporte la connaissance de l'épaisseur des couches routières et des déflexions du revêtement, en deux points minimum La relation (7) a été établie dans les hypothèses ci-dessous: a) la répartition des tensions σ_z au sol de fondation est analogue à la surface déformée du revêtement; b) l'influence du raport E_1/E_2 sur le tassement des couches routiéres est négligeable. Le procédé peut-être appliqué pour la détermination des divers facteurs qui caractérisent la variation de la déformabilité du sol de fondation, ainsi que pour l'appréciation de la nécessité de consolidation éventuelle des chaussées en service.

Explication des figures

Fig. 1. — Variation du rapport entre le tassement du sol et la déflexion totale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 624

POSIBILITĂŢI DE APLICARE A PROGRAMĂRII LINIARE LA TRANSPORTURILE DE CĂRĂMIDĂ ŞI BETON ALE ÎNTREPRINDERII nr. 1 DE CONSTRUCŢII DIN IAŞI

DE

EUGEN FLOREA şi SIMION LAZĂR

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

În anii regimului democrat-popular industria construcţiilor a înregistrat progrese însemnate prin introducerea tehnicii noi, atît în proiectare cît şi în execuţie. Totodată crescînd nivelul organizării şi planificării producţiei, s-a ajuns la realizarea construcţiilor la un preţ de cost tot mai redus.

Un aport deosebit în ridicarea rentabilităţii întreprinderilor de construcţii îl poate aduce folosirea metodelor matematice de analiză şi comparaţie a variantelor de organizare şi planificare a producţiei. Dezvoltarea ciberneticii economice, a disciplinelor matematice cu caracter aplicativ (teoria jocurilor, programarea liniară şi dinamică, teoria cozilor de aşteptare etc.), producţiei în serie şi a unor tipuri speciale de calculatoare electronice, va conduce în viitorul apropiat la introducerea pe scară largă a matematicii şi electronicii în economie şi planificare.

În prezenta lucrare ne-am propus să examinăm posibilităţile actuale de folosire a programării liniare în problemele concrete ce se ivesc în activitatea unei întreprinderi de construcţii

În numeroase cazuri trebuie ca în îndeplinirea unei sarcini economice să se aleagă din mulţimea variantelor posibile pe cea mai eficientă. Deci fiind dată o sarcină (producerea de sortimente diferite, repartizarea muncitorilor de diferite categorii de calificare etc.), cunoscîndu-se resursele disponibile, corelaţiile între elementele componente şi condiţiile tehnico-organizatorice caracterizate prin coeficienţi numerici, se cere cea mai raţională repartizare a resurselor în scopul obţinerii unui efect economic maxim. La acest tip de probleme se aplică programarea liniară (propusă în 1939 de matematicianul sovietic L. V. Kantorovici) a cărei formulare este următoarea:

Să se determine soluţiile nenegative ale sistemului de inecuaţii:

$$(1)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ m < n),$$

astfel ca expresia:

(2) $$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad x_j \geqslant 0,$$

să aibă o valoare minimă (sau maximă).

În relaţiile de mai sus necunoscutele (x_j) se numesc variabile structurale, a_{ij} reprezintă coeficienţi tehnici (de exemplu consumuri specifice), b_i sînt resursele disponibile, c_j reprezintă deobicei beneficiul pe unitatea de produs creat prin procesul j.

Pentru rezolvarea problemelor de programare liniară se folosesc diverşi algoritmi, cel mai utilizat fiind cel cunoscut sub numele de metoda simplex, elaborată de G. B. Dantzig. Prima etapă constă în găsirea unei soluţii acceptabile (iniţiale) a sistemului de ecuaţii ce rezultă din (1) prin introducerea unor noi necunoscute $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$. În a doua etapă se caută soluţia optimă care extremizează forma liniară (2). Întrucît în spaţiul n-dimensional soluţiile nenegative ale sistemului de ecuaţii formează un poliedru convex (poliedrul soluţiilor), iar forma liniară (2) capătă valoarea maximă (sau minimă) într-un vîrf al poliedrului, a doua etapă în metoda simplex constă în determinarea vîrfului care dă soluţia optimă.

Problema transporturilor este un caz particular al programării liniare şi anume atunci cînd coeficienţii variabilelor structurale sînt egali cu unitatea sau cu zero şi cînd în (1) semnul $\leqslant$ este înlocuit cu $=$.

Conţinutul economic al problemei îl constituie repartizarea unui produs de la m furnizori la n consumatori, astfel ca să rezulte un cost total minim. Modelul matematic al problemei transporturilor se scrie în formă prescurtată:

(3) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$ (4) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

(5) $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i,$$ (6) $$x_{ij} \geqslant 0,$$

(7) $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} = \text{minimum},$$

unde: a_i — cantitatea ce trebuie transportată de la furnizorul i, b_j — cantitatea ce trebuie transportată la consumatorul j, x_{ij} — cantităţile ce se transportă de la furnizorul i la consumatorul j, d_{ij} — costul transportului pe unitatea de produs de la furnizorul i la consumatorul j.

S-au creat mai multe metode pentru rezolvarea problemelor de transport, calculele fiind conduse totdeauna în două etape: găsirea unei soluţii iniţiale şi îmbunătăţirea treptată a soluţiei. În etapa a doua, după un număr finit de paşi se obţine soluţia optimă.

Aplicarea metodelor matematice pentru rezolvarea problemelor ce intervin în activitatea economică a întreprinderilor de construcţii conduce la economii însemnate. În vederea trecerii la introducerea acestor metode am procedat la rezolvarea a două probleme cu date concrete, utilizînd la fiecare problemă altă metodă de calcul.

2. Exemplul 1

După proiectul anual de organizare, Întreprinderea Nr. 1 Construcţii — Iaşi, trebuie să aprovizioneze şantierele principale cu cantităţile de cărămizi ce rezultă din tabelul 1. În acelaşi tabel se arată fabricile de cărămizi furnizoare, precum şi costul transportului auto pentru 1 000 bucăţi de la diverse fabrici la diverse şantiere.

Tabelul 1

Consumatori / Furnizori	Cvartal mal drept Bahlui	Cvartal P. Unirii	Cvartal mal stîng Bahlui	Şcoala de 24 clase	Disponibil mii buc. cărămizi
Ciurea	40 x_{11}	48 x_{12}	45 x_{13}	54 x_{14}	125
Holboca	32 x_{21}	29 x_{22}	32 x_{23}	32 x_{24}	300
Bucium	20 x_{31}	32 x_{32}	23 x_{33}	36 x_{34}	305
Total necesar mii buc. cărămizi	150	80	50	450	730

Pentru a realiza transportul cărămizilor cu un minim de cheltuieli trebuie să se determine varianta optimă de repartiţie, adică să se afle cantităţile ce se vor transporta de la fiecare fabrică la fiecare şantier. Modelul matematic al problemei se poate scrie sub forma a 7 ecuaţii cu 12 necunoscute şi a unei funcţii de eficienţă care trebuie să capete valoarea minimă, anume :

$$(8)\quad \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=125, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=300, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=305, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=150 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=80, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=50, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=450, \end{cases}$$

$$(9)\quad 40x_{11}+48x_{12}+45x_{13}+54x_{14}+32x_{21}+29x_{22}+32x_{23}+32x_{24}+20x_{31}+$$
$$+32x_{32}+23x_{33}+36x_{34}=\text{minim}.$$

Soluţia se obţine în două etape :

E t a p a I. Găsirea unei soluţii iniţiale.

E t a p a II. Îmbunătăţirea treptată a soluţiei pînă la obţinerea variantei optime.

Pentru găsirea unei soluţii iniţiale se foloseşte metoda „diferenţei maxime“ [2]. În tabelul 2 se scrie în dreptul fiecărei linii diferenţa dintre cele mai mici costuri. Astfel se completează cele trei linii şi se procedează analog pe coloane. Aceste mărimi ocupă deci ultima coloană şi ultima linie din tabel Diferenţa cea mai mare apare în coloana 1 (12 lei) care indică primul consumator — şantierul 3. Orice altă repartiţie în coloană implică cheltuieli suplimentare de transport şi deci : $x_{31}=150$ mii bucăţi $x_{11}=0$, $x_{21}=0$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Tabelul 2

Consumatori / Furnizori	Cvartal mal drept Bahlui	Cvartal P. Unirii	Cvartal mal stîng Bahlui	Şcoala de 24 clase	Disponibil	Diferenţe
Ciurea	40 x_{11}	48 x_{12}	45 x_{13}	54 x_{14}	125	(5)
Holboca	32 x_{21}	29 x_{22}	32 x_{23}	32 x_{24}	300	(3)
Bucium	20 x_{31}	32 x_{32}	23 x_{33}	36 x_{34}	305	(3)
Necesar	150	80	50	45		
Diferenţe	(12)	(3)	(9)	(4)		

Pentru aflarea celorlalte necunoscute se procedează analog (tabelul 3) fără să se mai ţină seama de coloana 1, iar la coloana „disponibil" se scade cantitatea deja repartizată.

Tabelul 3

Consumatori / Furnizori	Cvartal mal drept Bahlui	Cvartal P. Unirii	Cvartal mal stîng Bahlui	Şcoala de 24 clase	Disponibil	Diferenţe
Ciurea	40 0	48 x_{12}	45 x_{13}	54 x_{14}	125	(3)
Holboca	32 0	29 x_{22}	32 x_{23}	32 x_{24}	30	(3)
Bucium	20 150	32 x_{32}	23 x_{33}	36 x_{34}	155	(9)
Necesar	—	80	50	450		
Diferenţe	—	(3)	(9)	(4)		

Diferenţa cea mai mare este în coloana 3 şi în linia 3; alege coloana 3 de unde rezultă: $x_{33} = 50$, $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$.

Procedînd în acelaşi mod se obţine prima soluţie care este dată în tabelul 4.

Tabelul 4

Consumatori / Furnizori	Cvartal mal drept Bahlui	Cvartal P. Unirii	Cvartal mal stîng Bahlui	Şcoala de 24 clase	Disponibil
Ciurea	0	80	0	45	125
Holboca	0	0	0	300	300
Bucium	150	0	50	105	305
Necesar	150	80	50	450	730

Se trece la etapa a doua pentru obţinerea soluţiei optime. Pentru a căpăta indicaţii cu privire la ruta ce ar urma să fie încărcată se întocmeşte tabelul 5, după tabelul 4, înlocuind pe $x_{ij} \neq 0$ cu costul aferent al transportului. Totodată se introduce linia v_j, $(j = 1, 2, 3, 4)$ şi coloana u_i, $(i = 1, 2, 3)$, şi se determină aceste necunoscute astfel ca $u_i + v_j = d_{ij}$.

Tabelul 5

Consumatori / Furnizori	Cvartal mal drept Bahlui	Cvartal P. Unirii	Cvartal mal stîng Bahlui	Şcoala de 24 clase	u
Ciurea	0	48	0	54	$u_1 = 0$
Holboca	0	0	0	32	$u_2 = -22$
Bucium	20	0	23	36	$u_3 = -18$
v	$v_1 = 38$	$v_2 = 48$	$v_3 = 41$	$v_4 = 54$	

Deoarece sînt 6 ecuaţii cu 7 necunoscute rezolvarea constă în anularea unei necunoscute (s-a ales $u_1 = 0$) şi rezultă (examinînd tabelul 5) că: $v_2 = 48$, $v_4 = 54$, $u_2 = -22$, $u_3 = -18$, $v_3 = 4$ şi $v_1 = 38$, care se introduc în tabel.

Se întocmeşte tabelul 6, introducînd la poziţia respectivă valorile $D_{ij} = d_{ij} - u_i - v_j$

Tabelul 6

Furnizori \ Consumatori	Cvartal mal drept Bahlui	Cvartal P. Unirii	Cvartal mal stîng Bahlui	Şcoala de 24 clase
Ciurea	2 | 0	0 | 80	4 | 0	0 | 45
Holboca	16 | 0	3 | 0	13 | 0	0 | 300
Bucium	0 | 150	2 | 0	0 | 50	0 | 105

Întrucît nu apare nici un $D_{ij} < 0$ soluţia este optimă. Orice $D_{ij} < 0$ ar fi indicat care x_{ij} trebuie majorat pentru a obţine un cost mai redus. În concluzie costul minim este: $20 \cdot 150 + 48 \cdot 80 + 50 \cdot 23 + 54 \cdot 45 + 32 \cdot 300 + 36 \cdot 105 = 23800$ lei.

3. Exemplul 2

În oraşul Iaşi TRC aprovizionează şantierele cu beton de la două staţii de preparare. Ne-am propus să găsim varianta optimă de repartiţie a betonului considerînd cererile pentru o zi din trimestrul II. Necesarul de beton rezultă din tabelul 7, unde se arată consumatorii, furnizorii şi costul transportului.

Tabelul 7

Centrala de beton \ Şantier	Cvartal zona Bahlui	Cvartal Tudor Vladimirescu	Cvartal Dimitrie Cantemir	Cvartal Piaţa Unirii	Disponibil m^3
Păcurari	21,10	21,10	32,20	18,90	160
Nicolina	11,60	16,70	27,80	21,10	60
Necesar (m^3)	59	19	22	120	220

Stabilim o primă distribuţie (soluţie admisibilă) prin metoda nord-vest [4] (tabelul 8), care dă un cost total de 4 741 lei.

Tabelul 8

Şantier / Centrala de beton	Cvartal zona Bahlui	Cvartal Tudor Vladimirescu	Cvartal Dimitrie Cantemir	Cvartal Piaţa Unirii	Disponibil m³
Păcurari	21,10 / 59	21,10 / 19	32,20 / 22	18,90 / 60	160
Nicolina	11,60	16,70	27,80	21,10 / 60	60
Necesar (m³)	59	19	22	120	220

$C = 59 \cdot 21{,}10 + 19 \cdot 21{,}10 + 22 \cdot 32{,}20 + 60 \cdot 18{,}90 + 60 \cdot 21{,}10 = 4\,751$ lei

Pentru îmbunătăţirea soluţiei se aplică metoda coeficienţilor, care constă în adăugarea unor numere pe coloane şi rînduri la tarife pentru a obţine cifra zero în rutele încărcate din varianta găsită. Astfel se obţin nişte tarife convenţionale de transport. Celulele în care apar tarife negative indică posibilitatea unei ameliorări a variantei prin încărcarea rutelor nefolosite şi anume a celei cu tariful negativ maxim. În tabelul 8 se scad pe coloane tarifele : 21,10 ; 21,10 ; 32,20 ; 18,90, iar pe linia 2 se scade 2,20 şi rezultă tabelul 9. În acelaşi tabel se stabileşte ciclul care îmbunătăţeşte soluţia.

Tabelul 9

Şantier / Centrale de beton	Cvartal Bahlui	Cvartal Tudor Vladimirescu	Cvartal Dimitrie Cantemir	Cvartal Piaţa Unirii
Păcurari	0 / 59	0 / 19	0 / 22	0 / 60
Nicolina	—11,70	—6,60	—6,60	0 / 60

În tabelul 10 se dă soluţia obţinută căreia îi corespunde un cost de 4 064 lei.

Tabelul 10

Şantier / Centrala de beton	Cvartal Bahlui	Cvartal Tudor Vladimirescu	Cvartal Dimitrie Cantemir	Cvartal Piaţa Unirii
Păcurari	0 | 0	19 | 0	22 | 0	119 | 0
Nicolina	59 | −11,70	| −6,60	| −6,60	1 | 0

$C_2 = 19 \cdot 21{,}10 + 22 \cdot 32{,}20 + 119 \cdot 18{,}90 + 59 \cdot 11{,}60 + 1 \cdot 21{,}10 = 4\,064$ lei.

Se aplică din nou acelaşi procedeu adăugînd la coloana 1 cifra 11,70 şi se obţine tabelul 11, în care se arată şi ciclul care îmbunătăţeşte soluţia.

Tabelul 11

Şantier / Centrala de beton	Cvartal Bahlui	Cvartal Tudor Vladimirescu	Cvartal Dimitrie Cantemir	Cvartal Piaţa Unirii
Păcurari	+ 11,70 | 0	19 | 0	22 | 0	119 | 0
Nicolina	59 | 0	| −6,60	| −6,60	1 | 0

Întrucît cifrele negative ce apar sînt egale, se alege cea cu tariful iniţial mai mic (2—2). Se ajunge astfel la tabelul 12 care reprezintă varianta optimă, deoarece nu apar cifre negative. Costul total s-a redus la 4059 lei, care, faţă de prima soluţie, reprezintă o ieftinire de circa 15 %.

Tabelul 12

Şantier / Centrala de beton	Cvartal Bahlui	Cvartal Tudor Vladimirescu	Cvartal Dimitrie Cantemir	Cvartal Piaţa Unirii	
Păcurari	+5,10 | 0	18 | 0	22 | 0	120 | 0	160
Nicolina	59 | 0	1 | 0	| 0	| +6,60	60
	59	19	22	120	220

$C = 18 \cdot 21{,}10 + 22 \cdot 32{,}10 + 120 \cdot 18{,}90 + 59 \cdot 11{,}60 + 1 \cdot 16{,}70 = 4\,059$ lei.

4. Concluzii

Din exemplele studiate rezultă posibilitatea aplicării eficiente a metodelor de programare la stabilirea variantelor optime de aprovizionare tehnico-materială a şantierelor de construcţii.

Sfera de aplicare a programării la nivelul unei întreprinderi de construcţii este destul de largă, cuprinzînd probleme de transport, de amplasare raţională a unităţilor de producţie auxiliară în diverse zone ale oraşului, de repartiţie optimă a forţelor de producţie şi, în general, rezolvarea problemelor de producţie, care se definesc printr-un criteriu al optimului şi prin condiţii limitative.

Metodele programării pot fi introduse imediat în practică, necesitînd doar măsuri organizatorice de instructaj a unor cadre de programatori, care nu au nevoie de o pregătire matematică superioară.

Necesităţile de programare a unei întreprinderi pot fi rezolvate operativ de 1...2 programatori, aducîndu-se economii importante.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de beton armat
şi
Trustul regional de construcţii, Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Aurian J., Micu Gh., Rev. constr. şi mat. de constr., 1961, 2.
2. Balaş E., Hammer L. P., Rev. statistică, 1960, 7.
3. Бирман И. И., *Транспортная задача линейного программирования*, Экономиздат, М., 1962.
4. Федорович М. М., *Математические методы и планирование производства*, Экономиздат, М., 1961.
5. Onicescu O., *Strategia jocurilor cu aplicaţii la programarea liniară*, Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1961.
6. Vazsonyi A., *Scientific Programming in Business and Industry*, John Wily & Sons, N. Y., 1958.
7. *** *Folosirea metodelor matematice în economie*, Culegere de material documentar, I. D. T., Buc., 1960.

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТРАНСПОРТЕ КИРПИЧА И БЕТОНА В ЯССКОМ СТРОИТЕЛЬНОМ ПРЕДПРИЯТИИ № 1

(Резюме)

Указываются возможности применения, в конкретных условиях строительного предприятия г. Яссе, математического метода линейного программирования для установления оптимального варианта плана перевозки материалов от различных источников к главным стройкам предприятия.

Исследуются также возможности применения линейного программирования и к другим работам предприятия.

POSSIBILITÉS D'APPLICATION DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE DANS LE TRANSPORT DES BRIQUES ET DU BÉTON DE L'ENTREPRISE Nr. 1 DE CONSTRUCTION DE JASSY

(Résumé)

On présente l'application, dans les conditions concrètes d'une entreprise de constructions de Jassy, de la méthode mathématique de programmation linéaire pour la détermination de la variante optima du plan de transport des matériaux de diverses sources aux principaux chantiers de l'entreprise.

On étudie simultanément les possibilités d'utilisation de la programmation linéaire dans les autres activités de l'entreprise.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 3—4, 1962

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 677.05 ; 621-32

К ВОПРОСУ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НАТЯЖЕНИЯ ОСНОВЫ НА ТКАЦКОМ СТАНКЕ

Д. МАНЖЕРОН и В. ХАНГАНУ

Частичное содержание доклада [10] представленного на юбилейной научной сессии Ясского политехнического института, 9—11 ноября 1962 г.

1. Для получения высококачественной ткани, одним из необходимых условий является поддерживание постоянства натяжения основных нитей ткацкого станка в процессе тканья. Существующие механизмы для поддерживания натяжения нити не удовлетворяют основным технологическим условиям, что снижает как производительность оборудования, так и качество вырабатываемой продукции.

В процессе тканья диаметр ткацкого навоя постоянно уменьшается. Поэтому нельзя его затормозить постоянным тормозным моментом. Для сохранения постоянства натяжения тормозной момент должет также меняться с изменением диаметра навоя. Несмотря на то, что ткацкое производство относится к производству, которое исчисляется тысячилетием своей истории, этот вопрос пока еще не решен. Имеющиеся тормоза регулируются или вручную или на основе некоторых допущений. В частности, допускается постоянство коэффициента трения или плотности наматывания ткацкого навоя. Как показывает практика, при использовании этих тормозов становится необходимым временами корректировать вручную величину тормозного момента, что является нежелательным.

В Советском Союзе широко известно устройство нового автоматического тормоза, разработанного под руководством профессора грузинского политехнического института им. „В. И. Ленина", доктора технических наук, академика АсхН Груз. ССР Д. С. Тавхелидзе. Схема и описание указанного автомата были помещены в [1], а также были выпущены отдельные бюллетени на русском и грузинском языках.

В настоящее время автоматическое торможение основы, созданное проф. Д. С. Тавхелидзе, с успехом применяется на шелкоткацком производстве совнархоза Грузии. Цикл совместных с проф. Д. С. Тавхелидзе работ, проведенных первым из авторов во время уже вторичного прошлогоднего пребывания в столице Грузии г. Тбилиси [2] ... [4], наряду с внимательным наблюдение за появившимися в последнее время зарубежными приспособлениями [5][1]), [6], привело авторов, на основе критического анализа рабо-

[1]) Так, например, чехословацкий пневматический бесчелночный ткацкий стонок „Elitex P 105" снабжен также основным нитенатяжителем, служащим для периодического ослабления и натяжения отдельных секций в зеве и способствующий тем самым возможности получения высокой плотности ткани по утку, а приспособление для автоматического регулирования натяжения нити при перемотке с бобин [5] предлагает заменить груз, воздействующий на тормозной фрикцион бобины, на плоскую пружину, натяжение которой можно регулировать. Здесь же предлагается установить пневматический амортизатор в системе рычажных передач от щупа нити к тормозному фрикциону бобины для снижения случайно возникающих толчков. Дальнейшее усовершенствование приспособления заключается в упрощении тормозного устройства путем введения промежуточной конической фрикционной муфточки.

ты существующих тормозных механизмов, к нижеследующему варианту уже проделанного Д. С. Тавхелидзе [1] анализа его нового автоматического устройства для регулирования натяжения нитей основы.

2. Работа вышеуказанного устройства происходит следующим образом: основные нити *2*, смотанные с ткацкого навоя *1*, огибая направляющее скало *3* и подвижное скало *4*, направляются в ремизный прибор.

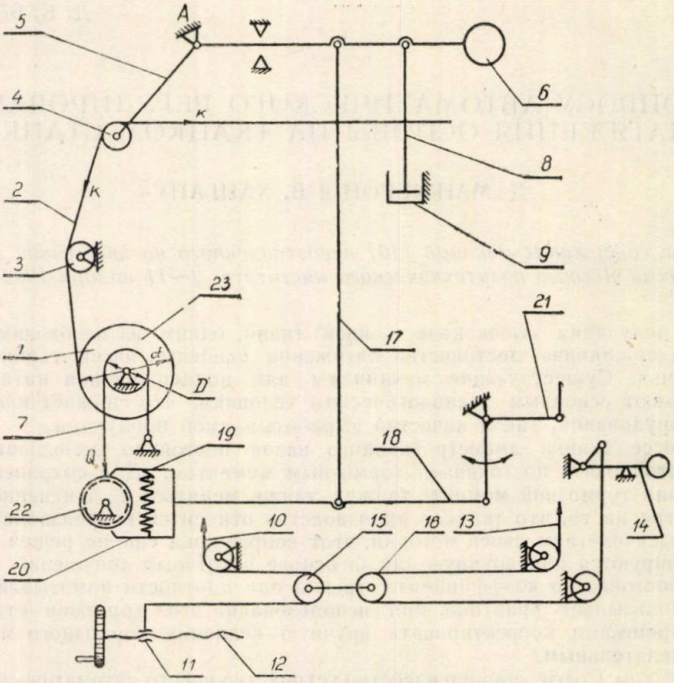


Рис. 1

Скало *4* помещается в двухплечном рычаге *5*. По отношению точки *A*, рычаг уравновешивается, с одной стороны, натяжением *K* основы, с другой — грузом *6*. Правое плечо рычага при помощи тяги *8* связано с демпфером *9*.

Тормозной диск навоя огибает ремень *7*, один конец которого укреплен на неподвижной части ткацкого станка, а другой присоединен к концу троса *10*, который соединяется с гайкой *11*, передвигающейся по резьбе *12*. Такой же ремень огибает второй тормозной диск навоя, конец которого соединен с тросом *13*. Второй конец троса соединяется с рукояткой *14*. Тросы *13*, *10* огибают связанные между собою ролики *15*, *16*.

При изменении натяжений основных нитей, скало *4* и рычаг *5* отклоняются на определенную величину. С тягой *17* связан рычаг *18*, на одном конце которого закреплены подающие собачки *19*, *20*. Другой конец рычага *18*, через рычаг *21*, связан с качающейся частью

ткацкого станка, который передает рычагу возвратно-поступательное движение. При этом, собачки *19*, *20* поворачивают храповик *25* и винт *12*. Гайка *11* перемещается по винту, в результате чего изменяется тормозное усилие, приложенное к тормозному диску *23*, при этом восстанавливается заправочное натяжение.

Демпфер *9* служит для гашения колебательных движений (скала *4*), получаемых при циклической деформации основы во время прибоя утка или зевообразования. Перемещением груза *6* относительно правого плеча рычага *5* можно подобрать соответствующую величину заправочного натяжения основных нитей.

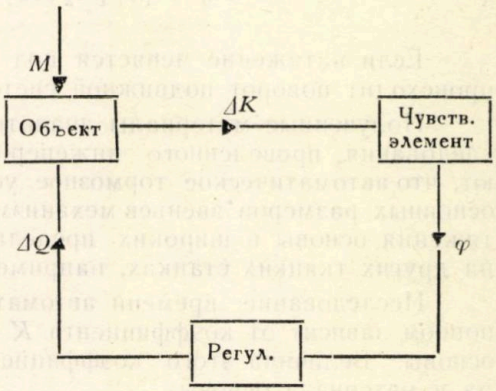


Рис. 2

Структурная схема замкнутого контура системы автоматического регулирования натяжения нитей основы дана на рис. 2.

Основным элементом системы автоматического регулирования является объект регулирования — основа ткацкого станка. Регулируемым параметром является натяжение нитей основы K, а регулирующим воздействием — тормозное усилие Q. Связь между этими величинами в равновесном состоянии выражается формулой:

$$K = Q(D/d)\,[1 - \exp(-f\alpha)], \tag{1}$$

где: D — диаметр тормозного диска, d — диаметр навивки основы на навой, f — коэффициент трения между связью и диском, α — угол обхвата связью тормозного диска или $\Delta K = \lambda(\alpha)\,\Delta Q$, где: ΔK и ΔQ — изменение соответствующих величин.

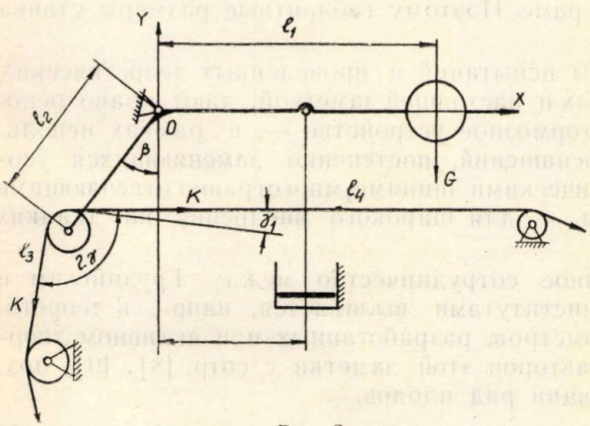


Рис. 3

Чувствительным элементом является подвижное скало (рис. 3).

Величины основных параметров механизма обозначим следующим образом: G — сила тяжести системы, l_1 — плечо силы G, l_3 — расстояние от подвижного скала до неподвижного, l_4 — расстояние от подвижного скала до опушки ткани, l_5 — плечо демпфера, β — угол между l_2 и осью OY, γ_1 — угол между осью OX и l_4, 2γ — угол между l_3 и l_4, l_2 — плечо скала.

При равновесии системы, когда натяжение K равно заданному K_0, получаем:

$$K_0 = l_1 G / [2 l_2 \cos\gamma \cos(\gamma - \beta - \gamma_1)]. \quad (2)$$

Если натяжение меняется под воздействием возмущающей силы, происходит поворот подвижной системы вокруг оси O.

Полученные материалы аналитического и экспериментального исследования, проведенного инженером Р. И. Саджая [1], показывают, что автоматическое тормозное устройство при правильном подборе основных размеров звеньев механизма может регулировать усилие натяжения основы в широких пределах. Оно может быть использовано на других ткацких станках, например, при ткачестве шерсти.

Исследование времени автоматического регулирования [1] в основном зависит от коэффициента K возможного отклонения натяжения основы. Величина этого коэффициента выбирается, исходя из номера и материала основы.

При испытании предложенного тормозного устройства на Тбилисской шелкоткацкой фабрике были взяты два станка системы „Рюти", вырабатывающие крепдешин арт. 1119.

На одном из станков был установлен новый тормоз, а на другом механический тормоз с грузовыми рычагами. Применение нового тормоза позволило в пять раз сократить обрывность основы и утка и в три с лишним раза — операцию разработки брака. Уменьшились угары по основе и утку.

При использовании нового тормозного устройства ткачихам не приходится поднимать и снимать груз. Новый тормоз позволяет снять со станка задние стойки, а навой с основой установить на двух кронштейнах, прикрепленных к раме. Поэтому габаритные размеры станка уменьшаются.

Полученные результаты испытаний и проведенных теоретических исследований, подтвержденных и настоящей заметкой, дают право рекомендовать предложенное тормозное устройство —, в рамках использования уже имеющихся оснащений, постепенно заменяющихся усовершенствованными автоматическими линиями, многогранно отвечающими технологическим процессам, — для широкого внедрения на ткацких фабриках.

Вышеотмеченное научное сотрудничество между Грузинским и Ясским политехническими институтами выливается, напр., в теоретическом исследовании фиброметров, разработанных при активном творческом участии второго из авторов этой заметки с сотр. [8], [9], позволяя намечать и последующий ряд плодов.

Ясский политехнический институт,
Кафедра теоретической механики
и
Кафедра механизмов и деталей машин

ЛИТЕРАТУРА

1. Тавхелидзе Д. С., Саджая Р. И., Текст. пром., 1958, *1*, стр. 27-29.
2. Тавхелидзе Д. С., Манжерон Д., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **7** (**11**), *3 — 4*, стр. 301 - 304.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **7** (**11**), *1 — 2*, стр. 253-256.
4. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **6** (**10**), *3—4*, стр. 297 -300.
5. * * * Dispositif auto-régleur de la tension du fil pendant le dévidage-bobinage (Soc. à responsabilité limitée: ALTIC). Франц. пат., кл. D 02 f, H 01 b, № 76 577, 2 X 1961.
6. * * * Реф. Ж. Лег. пром., *Ткацкое оборудование*, А 1962 и посл.
7. Svaty V., Ing. text., 1962, **29**, pp. 162, 389 - 391, 393 - 396.
8. Hanganu V., Ionescu - Muscel I., Vlad I., Vlad E., Coman B., Grindea M., Rădulescu S., Bul Inst. polit. Iaşi, 1956, **2** (**6**), *3 — 4*, pp. 432-438.
9. Ionescu - Muscel I., Hanganu V., Vlad I., Vlad E., Rădulescu S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **4** (**8**), *1 — 2*, pp 453-458.
10. Mangeron D., *Contribuţii la problema de existenţă a manivelelor*, доклад представленный на юбицейной научной сесии Ясского политехнического института, 9—11 ноября 1962.

SUR LE RÉGLAGE AUTOMATIQUE DE LA TENSION DES FIBRES DE LA CHAÎNE DANS UN MÉTIER À TISSER

(Résumé)

Les Auteurs exposent l'analyse du fonctionnement d'un dispositif de réglage automatique de la tension des fibres de la chaîne dans un métier à tisser, construit et expérimenté par les professeurs D.S. Tavkhélidzé et R. I. Sadjaïa [1].

Le schéma structurel du circuit fermé du système de réglage automatique de la tension de fibres de la chaîne dans un métier à tisser est donné dans la fig. 2. La dépendance fonctionnelle entre le paramètre à régler K (tension des fibres de la chaîne) et l'action régulatrice Q (effort de freinage) est exprimée, dans l'état de l'équilibre, par la relation (1), tandis que, par correspondance à une valeur donnée K_0 de la tension K, on obtient dans le cas de l'équilibre du système (fig. 3) la relation (3).

ASUPRA REGLĂRII AUTOMATE A TENSIUNII FIRELOR DE URZEALĂ LA UN RĂZBOI DE ŢESUT

(Rezumat)

Autorii prezintă o variantă a analizei de funcţionare a dispozitivului de reglare automată a firelor de urzeală la un război de ţesut, proiectat şi experimentat la o fabrică de produse textile din R.S.S. Gruzia de către prof. dr. D. S. Tavhelidze şi ing. R. I. Sadjaia [1].

Schema structurală a circuitului închis al sistemului de reglare automată a tensiunii firelor de urzeală la un război de ţesut este redată în fig. 2.

Legătura dintre parametrul de reglat K (tensiunea firelor de urzeală) şi acţiunea regulatoare Q (efortul de frînare) este exprimată în stare de echilibru prin relaţia (1), în care : D — diametrul discului de frînare, d — diametrul sulului de urzeală pentru

război, f — coeficientul de frecare al legăturii prin aderenţă şi discul sulului, α — unghiul de subîntindere de către legătură a discului de frînare.

Drept element sensibil se foloseşte traversa de spate mobilă (fig. 3).

În cazul de echilibru al sistemului, cînd tensiunea K este egală cu o valoare dată K_0, se obţine relaţia (2), în care: G — forţa de greutate a sistemului, l_1 — braţul forţei G, l_3 — distanţa dintre traversa de spate mobilă şi traversa de spate fixă, l_4 — distanţa dintre traversa de spate mobilă şi gura ţesăturii, l_5 — braţul amortizorului, β — unghiul dintre l_2 şi axa OY, γ_1 — unghiul dintre axa OX şi l_4, 2γ — unghiul dintre l_3 şi l_4 şi l_2 — braţul traversei de spate.

Rezultatele practice, confirmate şi prin deducţiile teoretice expuse în această Notă, pledează pentru introducerea dispozitivului analizat în cazurile în care nu se socoteşte necesară introducerea neîntîrziată a liniilor automate şi se consideră util a se păşi la revalorificarea instalaţiilor existente.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 677.05 ; 621-52 ; 628.8

INFLUENŢA TENSIUNII FIRELOR DE URZEALĂ DIN BUMBAC ÎN PROCESUL ÎNCLEIERII ASUPRA UNOR CARACTERISTICI FIZICO-MECANICE ALE ŢESĂTURII

DE

I. ŞTEFĂNESCU, AUREL MARCHIŞ, OLIMPIA MARCHIŞ, FILIP REICHER şi MARIA OANCEA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

În literatura de specialitate au apărut în ultimii ani numeroase lucrări relative la influenţa parametrilor procesului de încleiere asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale firelor. În practica industrială însă se ţine seama încă prea puţin, în prezent, de rezultatele unor astfel de lucrări. Adesea se foloseşte ca indice unic al procesului de încleiere modul în care se prelucrează în ţesătorie urzelile încleiate, mai precis, numărul de ruperi ale firelor de urzeală pe război.

Prezenta lucrare este rezultatul unor cercetări care au avut drept scop să demonstreze că procesul încleierii greşit condus are urmări dăunătoare nu numai asupra firelor de urzeală, ci şi asupra ţesăturii. Dacă, de exemplu, firele de urzeală sînt prea mult alungite, deci şi tensionate, în procesul încleierii, acest fapt are ca urmare o micşorare a capacităţii de exploatare a ţesăturii.

Pentru cercetarea capacităţii de exploatare a ţesăturii s-au luat în considerare două caracteristici ale ei, care pot fi puse în legătură cu măsura păstrării calităţilor substanţiale ale firelor de urzeală ce au trecut prin procesul încleierii anume: a) sarcina de rupere a ţesăturii şi b) alungirea la rupere a ţesăturii, ambele în direcţia urzelii.

Una din caracteristicile cele mai intim legate de capacitatea de exploatare a ţesăturii este lucrul mecanic necesar pentru ruperea unei fîşii din acea ţesătură. Lucrînd cu un dinamometru înregistrator la care se obţine o diagramă sarcină-alungire, lucrul mecanic de rupere al fîşiei de ţesătură este reprezentat de aria figurii cuprinse între diagramă, axa absciselor şi paralela la axa ordonatelor, dusă din punctul final al diagramei.

Pentru a putea lucra în mod curent în întreprindere, lucrul mecanic de rupere poate fi aproximat cu semiprodusul sarcinii de rupere prin alungirea la rupere. Mărimea acestui semiprodus este reprezentată de aria unui triunghi dreptunghic, cu laturile respectiv egale cu cei doi factori, pe diagramă; acest triunghi este destul de apropiat de figura menţionată mai sus. Astfel se obţine un indice uşor de calculat—„indicele de lucru", denumit „indice de travail" în literatura franceză şi „toughness index", în cea engleză [1].

2. Partea experimentală

Încercările noastre s-au desfăşurat asupra unei urzeli cu fir 34/1, 2090 fire, pentru articolul Făget 90. Operaţia de încleiere s-a întreprins pe o maşină de încleiat cu cameră de uscare cu aer cald şi haspele mari. În timpul încercărilor au fost verificate permanent: temperatura apretului în cadă, vîscozitatea acestuia, presiunea aburului în instalaţia de uscare, pentru a putea izola acţiunea acestor factori; într-adevăr, aceşti factori s-au păstrat în limitele obişnuite de lucru, astfel (v. tabelul 1): a) temperatura căzii, mai joasă la începutul partizii (66°C), creşte uşor (la 69,8°C), pentru ca la sfîrşit, prin adăugarea apretului din malaxor, mai rece, să se înregistreze din nou valoarea iniţială (66°C); b) variaţia vîscozităţii apretului pe bază de amidon de cartofi s-a considerat normală, descrescătoare pe măsura desfăşurări partizii, aspectul curbei fiind influenţat de agitare şi de variaţia temperaturii; valoric, vîscozitatea s-a plasat de asemenea în condiţiile normale [2]; c) temperatura în camera de uscare s-a menţinut de asemenea în limitele obişnuite de lucru, variind între 66°C şi 80°C.

Alungirea urzelii în zona de uscare este funcţie de raportul dintre vitezele periferice ale cilindrilor trăgători şi storcători, primul avînd turaţia constantă. Corespunzător alungirii, în procesul de încleiere firele suferă o tensionare, care este mai periculoasă pentru această zonă în cazul valorilor mari, deoarece firul trece din stare umedă în stare uscată, iar deformările rămîn fixate.

În cazul maşinii pe care s-au desfăşurat experimentările, în lanţul cinematic, de la cilindrul trăgător, care este element motor, către cilindrul storcător, este instalat un variator în trepte cu roţi dinţate, cu ajutorul căruia s-au putut obţine diferite viteze la cilindrii storcători, respectiv diferite trepte de alungire a urzelii.

Măsurarea alungirii s-a efectuat pe maşină cu ajutorul contorilor de rotaţii identici, instalaţi la cilindrul trăgător şi la cilindrul alimentator la cadă, cuplaţi simultan. După 100 de rotaţii ale cilindrului alimentator maşina se opreşte şi se citeşte indicaţia contorului de la cilindrul trăgător. Diferenţa celor două mărimi corespunde alungirii. În cazul nostru s-a lucrat cu diferite trepte de viteze astfel încît s-au obţinut pentru urzeală, la prelucrarea a patru suluri finale distincte, valorile din tabelul 1.

Se face precizarea că este indicată ca normală tensiunea pe această zonă corespunzînd solicitării de 6...7% din sarcina de rupere a firului,

în cazul nostru 16,8...19 g/fir. Pentru a se urmări consecințele acestor valori ale parametrilor de lucru asupra desfășurării procesului tehnologic, dar mai ales asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale firelor și țesăturilor, pentru fiecare treaptă s-a prelucrat un sul final.

Tabelul 1

Ora	Temp. cadă °C	Viscozitatea t. s.	Viscozitatea cp.	Temp. uscător °C	Varianta	Alung. %	Tensiune g/fir
8.00	62	115	788	74	I	1,5	15...18
8.30	68	70,6	473				
9	64	67,6	452				
9.20	71	50,3	333	66	II	2,0	18...20
9.40	74	44,5	291				
10 15	68	43	280				
10.35	72	40	259	80	III	2,8	30...35
11.00	70	45,2	294				
11.45	66	50	328	76	IV	3,5	38...44

În timpul încleierii ruperile nu au atins valori care să atragă atenția, chiar pentru tensiuni foarte mari. Asupra firelor, însă, consecințele acestor regimuri de lucru au fost evidente, constatate prin încercări efectuate în laborator, privind rezistența de rupere, alungirea la rupere și indicele de lucru (50 probe pentru fiecare caz). Cu valorile medii s-au alcătuit tabelul 2 și diagrama din fig. 1.

Tabelul 2

Caracteristici / Tipul firelor	Fir neîncleiat N	Fire încleiate (variante) I	II	III	IV
Rezistența la rupere (g/fir)	280	390	385	383	394
Alungirea la rupere (%)	5,73	5,42	4,58	4,52	4,10
Indice de lucru I_l (gcm)	401,10	528,45	440,82	432,79	403,85

Rezistența la rupere a firului încleiat a crescut față de valoarea inițială, menținîndu-se aproape constantă la cele patru trepte experimentale.

Alungirea la rupere, care reflectă capacitatea de deformare a firelor, scade foarte mult (de la 5,73%, corespunzător firului neîncleiat și 5,42% pentru prima treaptă, se ajunge la 4,1% pentru ultima treaptă). Ca urmare, indicele de lucru scade de asemenea.

Rezultă din fig. 1 că deşi rezistenţa la rupere este aproape constantă, iar procesul de încleiere decurge normal, în structura firului, sub acţiunea solicitării de întindere apar deformaţii care depăşesc zona elastică; capacitatea de deformare, exprimată prin indicele de lucru, scade continuu la cele patru trepte.

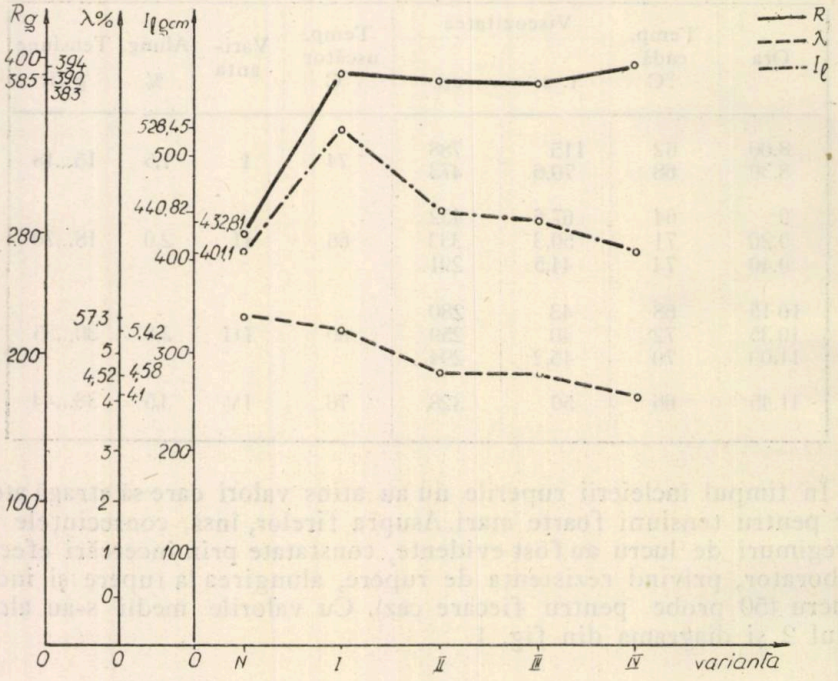


Fig. 1

În continuarea experimentării s-a urmărit comportarea celor patru urzeli în procesul de ţesere. S-a căutat ca instalarea lor să se facă pe războaie pe cît posibil uniforme ca reglare şi grad de uzură şi în condiţii de montare asemănătoare.

Procesul de ţesere a decurs normal, iar în urma cronometrării ruperilor timp de 24 ore s-au înregistrat ruperile reprezentate în diagrama din fig. 2 (ruperi pe ml ţesătură). Se observă din grafic creşterea numărului de ruperi în urzeală, trecînd de la varianta I către varianta IV, prin valorile: 0,08; 0,125; 0,25; 0,53.

Din ţesătura realizată la fiecare variantă s-au luat probe cercetate ulterior în laborator. S-au efectuat încercări de rezistenţă şi alungire la rupere pe direcţia urzelii, calculîndu-se apoi indicele de lucru. Cu valorile medii ale fiecăruia din aceşti indici, corespunzător treptelor de experimentare, s-au alcătuit tabelul 3 şi fig. 3.

Valorile rezistenţei marchează o scădere, dar în limite reduse, de la treapta I la treapta IV, doar cu 10,3%; pentru alungire însă, pe baza

aceluiași fenomen semnalat la fire, s-a înregistrat la ultima treaptă o scădere de 52,7%.

Indicele de lucru, parametru capabil să exprime în cel mai înalt grad, în comparație cu caracteristicile precedente, procesele din structura

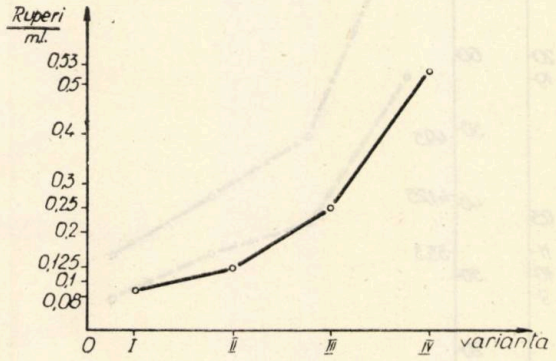


Fig. 2

firelor componente, înregistrează în aceleași cazuri o scădere de 53,9%. Acest fenomen este reprezentat și în fig. 4.

Probele de rupere a țesăturii au fost făcute pe dinamometrul KOVO, cu înregistrarea diagramei deformației pînă în momentul ruperii. În fig. 4 s-au adus în aceeași origine, curbele înregistrate pentru fiecare probă în cadrul aceleiași variante, s-au calculat valorile medii ale rezistenței și alungirii la cîte patru probe, cu care s-a trasat triunghiul a cărui arie reprezintă indicele de lucru. Compararea celor patru arii scoate în evidență de asemenea scăderea indicelui de lucru pentru țesăturile prelucrate din urzeli tensionate peste normal în procesul de încleiere.

Tabelul 3

Varianta	Rezistența R kg	Alungirea λ %	Alungirea Δ_l cm	Indicele de lucru I_l kgcm
I	41,2	19	3,8	78,28
II	39,2	12,5	2,5	49,5
III	37,5	11	2,2	41,25
IV	37	9	1,8	33,3

Muncitorul ce deservește mașina de încleiat este tentat să lucreze cu o întindere sporită a urzelii, pentru ca separarea în zona fusceilor să se facă net, fără ruperi de fire. În cazul tensiunilor mărite, din variantele II, III, IV, deși procesul de încleiere a decurs aparent normal, totuși în structura internă a firului s-au produs deformări, care consumînd

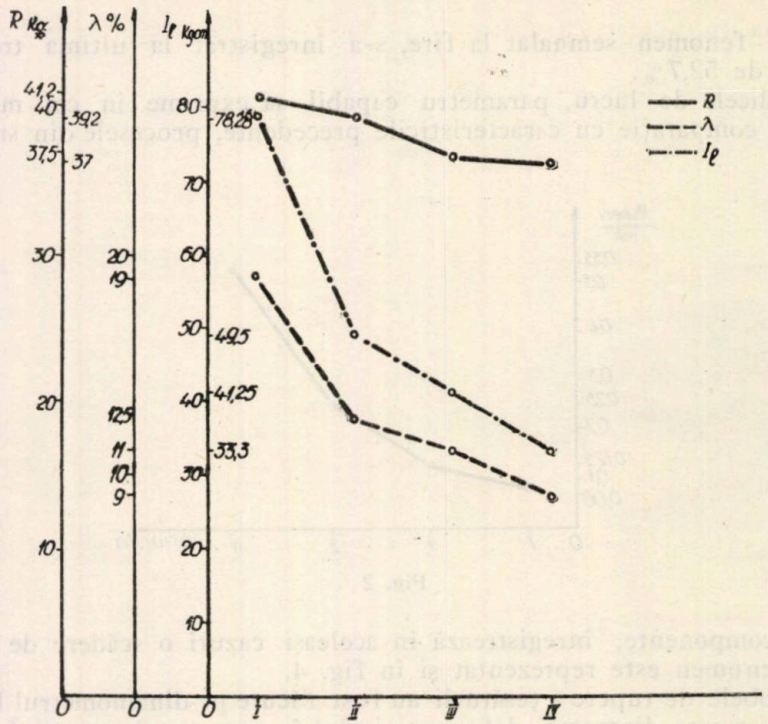

R Kg
λ %
lℓ Kgcm
41,2
40
39,2
37,5
37
30
20
19
20
12,5
11
10
9
10
80
78,28
70
60
50
49,5
40
41,25
33,3
30
20
10
0
0
0
I
II
III
IV
R
λ
lℓ

Fig. 3

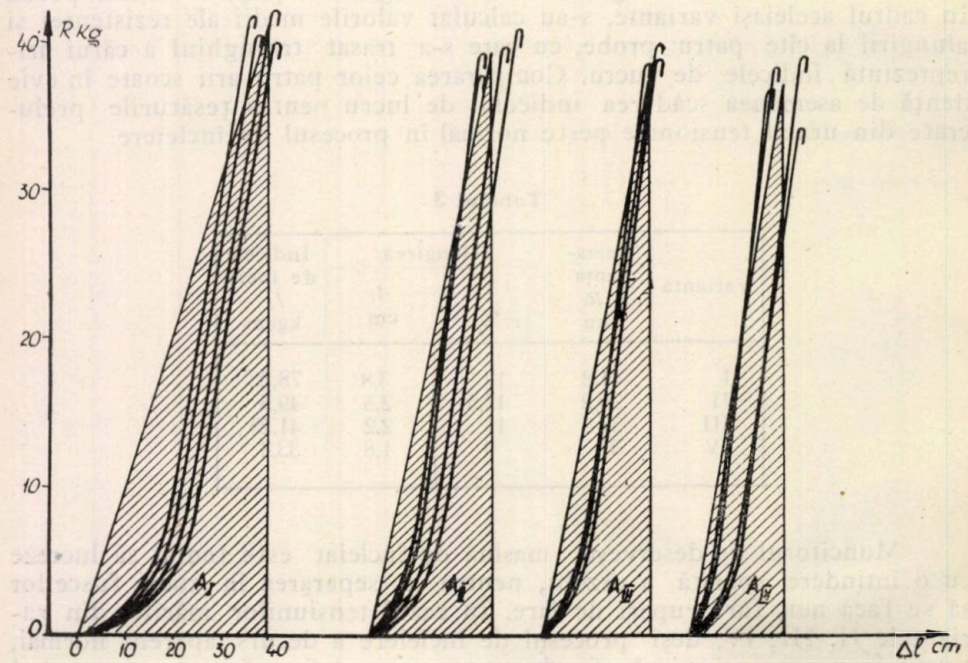

R Kg
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
Δℓ cm
A_I
A_II
A_III
A_IV

Fig. 4

din capacitatea elastică a firului, îi înrăutățesc caracteristicile fizico-mecanice.

Dacă se apreciază la țesere numărul de ruperi și ulterior sarcina la rupere a țesăturii realizate și se constată că acestea au valori normale, se consideră de obicei că țesătura realizată este normală. Dar deși corespunde atît ca număr de ruperi pe război cît și criteriului de rezistență, singurul prevăzut în STAS, țesătura prelucrată în condițiile variantei IV, de exemplu, va avea capacitatea de utilizare cu 53,9% mai mică decît în cazul variantei I.

3. Concluzii

În baza experimentării și interpretării rezultatelor obținute în fabrică și laborator se desprind următoarele concluzii:

a) Există o strînsă legătură între alungirea firelor în timpul încleierii și caracteristicile fizico-mecanice ale firelor și țesăturii din structura căreia fac parte.

b) Se constată că pe măsura creșterii alungirii urzelii la încleiat crește numărul ruperilor la țesut, dar pînă la un anumit grad, în limite admise.

c) Normele de recepționare pentru țesăturile de bumbac nu prevăd condiția de alungire la rupere pentru țesături. Din lucrare rezultă că singură, sarcina de rupere a fîșiei de țesătură nu este concludentă. Pentru aprecierea calităților de exploatare ale țesăturilor trebuie să se țină seama și de alungirea la rupere, respectiv de „indicele de lucru", care înglobează ambii parametri.

Din lucrare rezultă următoarele recomandări:

a) Să se mențină cu stricteță alungirea firelor de urzeală pe mașina de încleiat la maximum 1,5%.

b) Să se introducă în standarde condiția de recepționare a țesăturilor finite, ținîndu-se seama de „indicele de lucru".

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de țesătorie

BIBLIOGRAFIE

1. Meibeck J., Schutz R., Bull. I. T. F., 1959, **83**, p. 99.
2. Ștefănescu I. C., Marchiș A., Marchiș O., Oancea M., Bul. Inst. polit. Iași, 1962, **VIII (XII)**, *1—2*, pp. 419-434.

ВЛИЯНИЕ НАТЯЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ХЛОПЧАТОБУМАЖНЫХ НИТЕЙ В ПРОЦЕССЕ ШЛИХТОВАНИЯ, НА НЕКОТОРЫЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТКАНИ

(Резюме)

Даются исследования о влиянии натяжения в процессе шлихтования основ на некоторые физико-механические свойства хлопчатобумажных основных нитей, в мокром виде, на обрывы во время тканья и на эксплуатационные свойствами тканей.

Рекомендуется включение „рабочего индекса" в стандардах для хлопчатобумажных тканей.

DER EINFLUSS DER SPANNUNG DER BAUMWOLLKETFÄDEN BEIM SCHLICHTEN, AUF EINIGE PHYSICH-MECHANISCHE EIGENSCHAFTEN DER GEWEBE

(Zusammenfassung)

Die Arbeit enthält Untersuchungen über den Einfluss der Spannung der Baumwollketfäden beim Schlichten, auf die Reissfestigkeit der Fäden, auf die Anzahl der Brüche beim Weben, wie auch auf den Verwendungswert der Gewebe.

Es wird die Einführung des „Arbeitsindex" in das Normblatt vorgeschlagen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 677.05 : 621 – 52 ; 628.8

REGLAREA AUTOMATĂ A UMIDITĂŢII URZELILOR DE BUMBAC PE MAŞINILE DE ÎNCLEIAT

DE

I. ŞTEFĂNESCU, N. BĂDAN şi V. HANGANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

Tema de faţă urmăreşte ca prin reglarea automată a umidităţii urzelilor pe maşinile de încleiat, să se contribuie la automatizarea funcţionării maşinii, să-i mărească productivitatea, să îmbunătăţească calitatea urzelilor, să reducă preţul de cost a produsului finit.

Comportarea urzelilor pe războaiele de ţesut depinde printre altele de umiditatea urzelii.

Din cercetările lui Ia. Ia. Ipolitov, la încercările efectuate pentru o umiditate medie a firelor de 7 %, proporţia de rupere în timpul ţeserii a fost de 0,525 %, iar la umiditatea medie a firelor de 11 %, de 0,36 %, deci o scădere a frecvenţei ruperilor de 30,7 %.

Umiditatea relativă optimă a urzelilor de bumbac, la ieşirea din maşina de încleiat, s-a stabilit a fi în jurul de 8,5 %.

În multe întreprinderi dotate cu utilaje fără instalaţii automate, în prezent se lucrează cu o umiditate medie a urzelilor de 3...5%, ceea ce conduce la consecinţe negative.

La maşinile existente în ţara noastră, reglarea umidităţii se face manual, după aprecierea celui care deserveşte maşina.

Pe plan mondial se găsesc instalaţii pentru reglarea automată a umidităţii urzelilor ; acestea constituie însă patente a diferitelor firme şi nu au fost descrise în literatură.

Activitatea pentru rezolvarea acestei probleme a început în ianuarie 1959 la Institutul de cercetări textile din Bucureşti şi s-a încheiat în aprilie 1961, cînd s-a făcut omologarea dispozitivului realizat, hotărîndu-se extinderea automatizării la toate maşinile de încleiat din sector.

2. Principiul de funcţionare

Umiditatea firelor de urzeală, la ieşirea din camera de uscare a maşinii de încleiat, variază în timpul exploatării, fiind influenţată de o serie de factori perturbatori (mai importanţi fiind cei provocaţi de variaţia conţinutului de apă a firelor ce intră în camera de uscare) şi de variaţia temperaturii şi a debitului vaporilor de apă ce alimentează bateriile încălzitoare.

Pentru reglarea umidităţii firelor de urzeală, în sensul menţinerii sale între limite admisibile, se acţionează asupra vitezei de trecere a firelor prin maşină.

Schema sistemului de reglare a umidităţii firelor este dată în fig. 1.

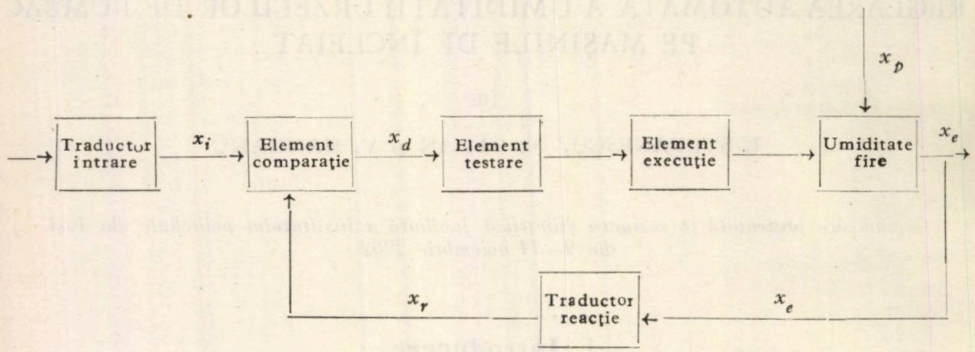


Fig. 1. — Sistem automat pentru reglarea umidităţii urzelilor.

Umiditatea firelor de urzeală la ieşirea din camera de uscare, reprezentînd mărimea de ieşire x_e, este detectată şi transformată de un traductor, în mărimea de reacţie x_r; aceasta este aplicată elementului de comparaţie unde se efectuează comparaţia cu mărimea de intrare x_i, furnizată de un traductor de intrare, proporţională cu umiditatea prescrisă pentru firele de urzeală.

Dacă mărimea de acţionare x_d depăşeşte limitele impuse, intervine periodic elementul de execuţie, care, cu ajutorul unui servomotor, modifică viteza de trecere a firelor de urzeală prin camera de uscare, mărind viteza cînd umiditatea este scăzută şi invers.

3. Descrierea şi funcţionarea regulatorului [1])

Regulatorul sistemului automat (fig. 1) este alcătuit din: traductorul de reacţie, elementul de comparaţie, elementul de testare şi ele-

[1]) Partea electronică a fost realizată de: ing. I. Mărcuţ, ing. H. Herşcovici şi ing. M. Suşelescu.

mentul de execuție. Sistemul automat este prevăzut și cu traductor de intrare.

a) *Traductorul de reacție* este destinat să măsoare umiditatea firelor de urzeală și să o transforme în mărimea de reacție sub formă de tensiune.

S-a adoptat un traductor care măsoară rezistența electrică a firelor de urzeală, deoarece aceasta variază în limite largi în domeniul de valori ale umidității care sînt importante pentru conducerea procesului de reglare (fig. 2); măsurarea umidității se poate efectua deci cu suficientă sensibilitate.

Traductorul este executat dintr-o rolă metalică, izolată de batiul mașinii, un cilindru metalic de ghidare a firelor situat la ieșirea din camera de uscare, și o rezistență fixă, legate în serie într-un circuit electric alimentat în curent continuu cu o tensiune stabilizată; firele de urzeală trec printre rolă și cilindrul de ghidare, fiind apăsate cu o forță constantă.

Căderea de tensiune de la bornele rezistenței fixe este amplificată cu ajutorul unei duble triode, montată în punte și introdusă în elementul de comparație, ca tensiune de reacție.

Traductorul este prevăzut cu reglajele necesare pentru a se putea lucra cu urzeli de diferite desimi și numere metrice.

b) *Elementul de comparație* are rolul de a sesiza abaterile de la umiditatea stabilită ca optimă și de a transmite comenzile necesare elementului de execuție. Se compune dintr-o dublă triodă și două relee contactoare, montate în circuitele anodice ale fiecărei jumătăți.

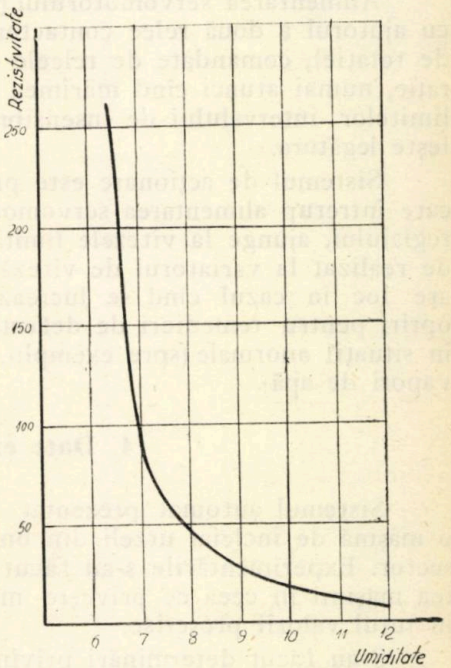


Fig. 2 Variația rezistivității urzelilor.

Avînd un montaj în punte, tensiunea de reacție și tensiunea de referință furnizată de traductorul de intrare fiind aplicate celor două grile, va apare o tensiune de dezechilibru de o polaritate sau alta, care amplificată acționează asupra releelor contactoare; la o anumită polaritate un releu este anclanșat, iar al doilea rămîne deschis, situația inversîndu-se la un dezechilibru de sens contrar.

În acest mod este pregătită comanda pentru elementul de execuție.

La elementul de comparație există posibilitatea de a regla limitele zonei de insensibilitate a regulatorului pînă la $\pm 0{,}25\%$ umiditate; în intervalul de insensibilitate elementul de comparație nu transmite comanda mai departe.

c) *Elementul de testare.* Mărimea de comandă pregătită de elementul de comparaţie nu se aplică direct servomotorului, pentru ca sistemul de reglaj să nu intre în oscilaţie.

Elementul de testare, introdus pentru a se evita neajunsul arătat, stabileşte o legătură periodică cu servomotorul, reglajul fiind în acest mod realizat prin impulsuri. Contactele unui releu se închid şi se deschid la anumite intervale de timp, folosind un circuit de temporizare, creindu-se posibilitatea ca servomotorul să fie rotit periodic într-un sens sau altul, în funcţie de polaritatea mărimii de acţionare x_d, numai atunci cînd elementul de comparaţie lansează comanda. Se poate regla atît timpul de acţionare cît şi cel de staţionare.

d) *Elementul de execuţie,* alcătuit din servomotor, reductor şi transmisie cu lanţ, modifică viteza de trecere a firelor de urzeală prin maşină, intervenind asupra variatorului de viteză a maşinei de încleiat (spre exemplu deplasează cureaua la maşinile prevăzute cu conoizi).

Alimentarea servomotorului (electromotor trifazat asincron) se face cu ajutorul a două relee contactoare de putere (pentru cele două sensuri de rotaţie), comandate de releele contactoare ale elementului de comparaţie, numai atunci cînd mărimea de comandă are valori situate în afara limitelor intervalului de insensibilitate şi cînd releul de testare stabileşte legătura.

Sistemul de acţionare este prevăzut cu opritori de sfîrşit de cursă care întrerup alimentarea servomotorului în cazul cînd maşina, în urma reglajului, ajunge la vitezele limită, fie inferioară fie superioară, posibile de realizat la variatorul de viteză al maşinii. Atingerea vitezelor limită are loc în cazul cînd se lucrează în regim tranzitoriu (spre exemplu, opriri pentru remedieri de defecte, schimbarea sulului de urzeală), sau în situaţii anormale (spre exemplu, întreruperea alimentării uscătorului cu vapori de apă).

4. Date experimentale

Sistemul automat prezentat mai sus a fost realizat şi încercat pe o maşină de încleiat urzeli din bumbac de la una din întreprinderile din sector. Experimentările s-au făcut cu scopul de a verifica funcţionarea maşinii în ceea ce priveşte menţinerea umidităţii firelor de urzeală în jurul valorii prescrise.

S-au făcut determinări privind variaţia umidităţii în timp, atît cu regulator cît şi fără regulator, pe suluri întregi cu urzeli identice; probele cu şi fără regulator au alternat de la un sul la altul, urmărindu-se astfel realizarea unor condiţii de lucru apropiate.

Parametrii de lucru au fost următorii: a) viteza medie a urzelii — 28 m pe minut, b) lungimea urzelii din camera de uscare — 60 m, c) intervalul de insensibilitate al regulatorului — $\pm$ 0,15% umiditate, d) elementul de testare reglat pentru 3 s durata impulsului, 12 s durata pauzei, d) variaţia vitezei urzelii pe durata unui impuls — $\pm$ 0,2 m/s.

Rezultatele încercărilor sînt prezentate în diagramele din fig. 3 şi 4 şi tabelele 1 şi 2.

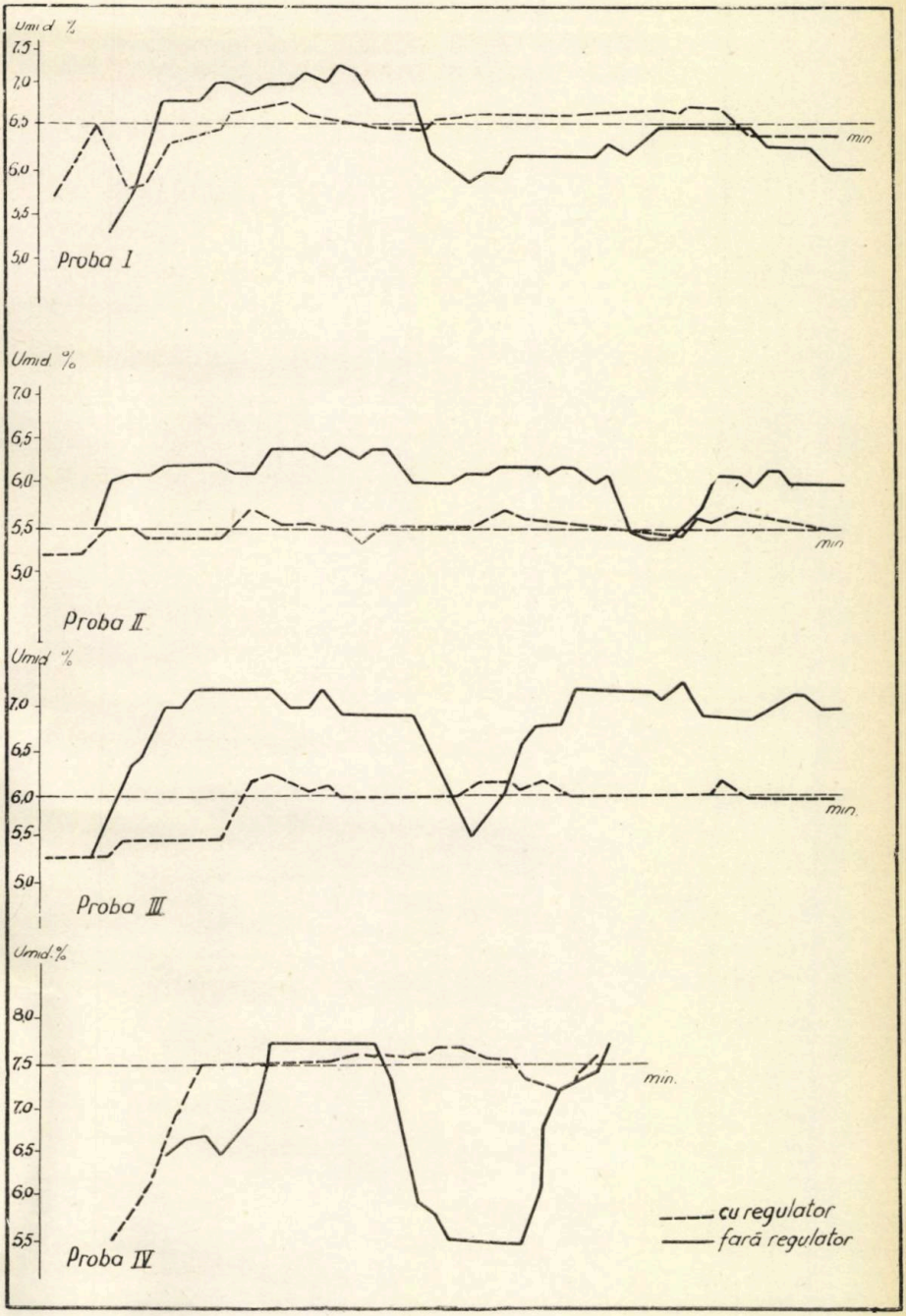
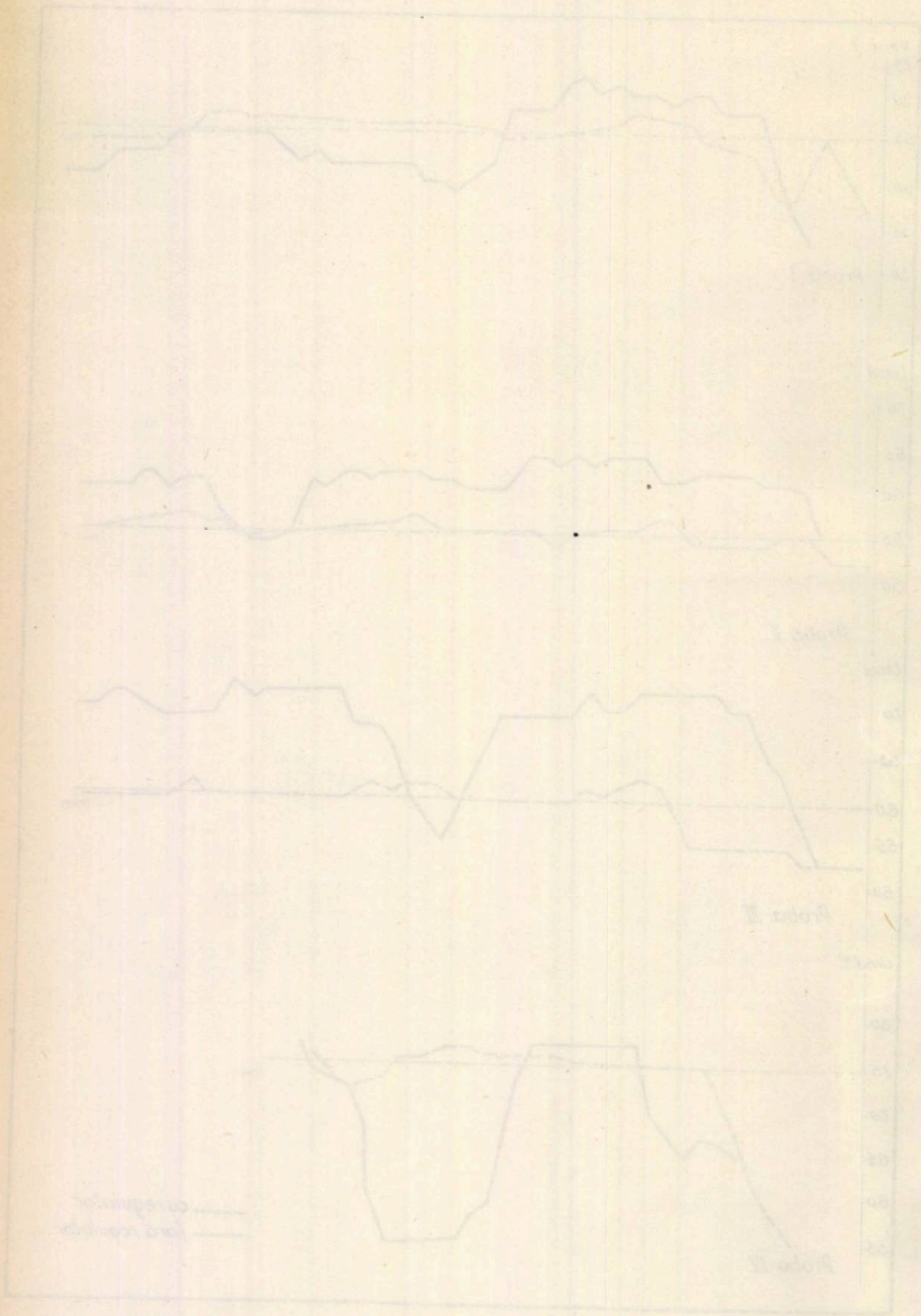


Fig. 3. — Probe comparative cu şi fără regulator.



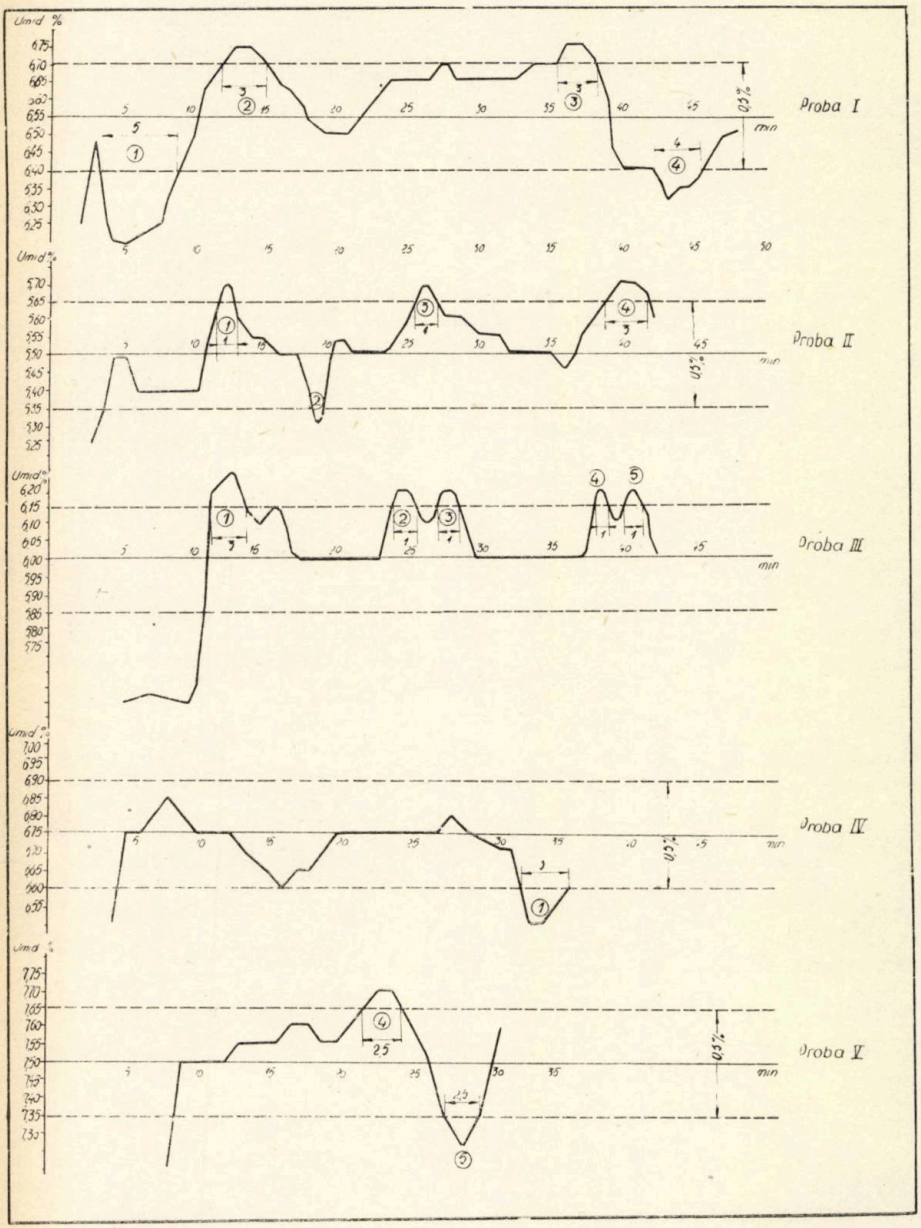
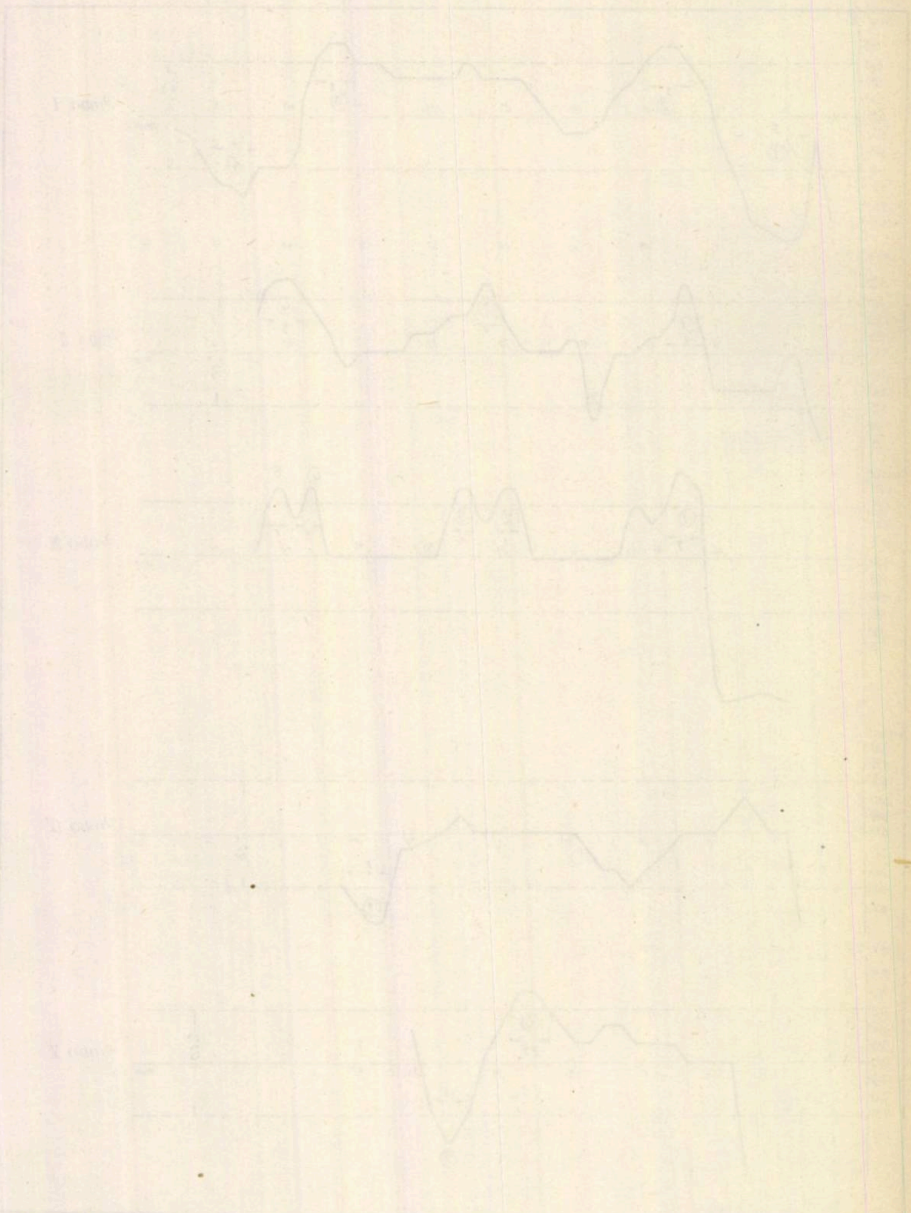


Fig 4. — Probe cu regulator.



Tabelul 1

Nr. probei	Intervalul de variație a umidității		$\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1}$	Durata totală în care umiditatea a depășit intervalul de 0,3%		$\frac{t_2}{t_1}$
	Cu regul. ΔU_1 %	Fără regul. ΔU_2 %		Cu regul. t_1 min.	Fără regul. t_2 min.	
1	0,55	1,9	3,40	15	37,5	2,50
2	0,40	0,9	2,25	8	24,0	3,00
3	0,40	1,9	4,75	7	23,8	3,40
4	0,45	1,27	2,80	5	21,5	4,30

Tabelul 2

Nr. probei	Nr. de intervenții	Durata unei intervenții min	Durata totală de intervenție t_3 min	Durata totală de uscare t_4 min	$\frac{t_4}{t_3}$
1	4	1...5	15	48	0,31
2	4	1...3	8	44	0,19
3	5	1...3	7	42	0,17
4	1	3	3	36	0,09
5	2	2,5	5	32	0,16

5. Concluzii

Datele experimentale obținute duc la următorele concluzii privind reglajul automat al umidității urzelilor la mașinile de încleiat:

a) sistemul automat este stabil;

b) se reduce apreciabil limita de variație a umidității (la probele efectuate, de 2,25 pînă la 4,75 ori);

c) revenirea la valorile umidității cuprinse în intervalul de insensibilitate se face în timp scurt (de la un minut pînă la cinci minute);

d) se reduce durata totală în care umiditatea depășește limitele zonei de insensibilitate de 0,3% umiditate, de 2,5 pînă la 4,3 ori (la probele efectuate);

e) depășirile zonei de insensibilitate sînt mici, aproximativ 0,1% umiditate, rezultînd o variație a umidității de aproximativ $\pm$ 0,25% în jurul valorii prescrise.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de țesătorie,
Catedra de filatură,
Catedra de mecanisme și organe de mașini
și
Institutul de cercetări textile, București

BIBLIOGRAFIE

1. Gasser A., Melliand Textilber., 1958, *6*, S. 627–630.
2. Kessler G, Melliand Textilber., 1960, *8*, S. 963–966; Ibid., 1960, *9*, S. 1069–1072.
3. Schneider I., Melliand Textilber, 1958, *9*, S. 967–972.
4. Mahlo H., Rayonne, Fibranne et Fibres Syntétiques, 1959, pp. 659–679.
5. Власков П., Текст. пром., 1957, 7, стр. 25–28.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ВЛАЖНОСТИ ОСНОВ НА МАШИНАХ ДЛЯ ПРОКЛЕИВАНИЯ

(Резюме)

Представлена автоматическая система регулирования влажности хлопчатобумажных основ на машинах для проклеивания. Представлены также и экспериментальные результаты. Детектирование влажности проводится датчиком сопротивления. Регулировка проводится толчками, ускоряя этим скорость перехода нитей через сушильную комнату.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Автоматическая система для регулирования влажности основы.
Рис. 2. — Изменения удельного сопротивления основ.
Рис. 3. — Сравнительные пробы, с регулятором и без него.
Рис. 4. — Пробы с регулятором.

LE RÉGLAGE AUTOMATIQUE DE L'HUMIDITÉ DES FILS SUR LES ENCOLLEUSES

(Résumé)

On présente un sytème automatique pour le réglage de l'humidité des fils sur les encolleuses et les résultats des essais. L'humidité est détectée par un traducteur à résistance, le réglage étant réalisé par la variation de la vitesse des fils qui traversent la chambre de séchage.

Explication des figures

Fig. 1. — Système automatique pour le réglage de l'humidité des fils sur les encolleuses.
Fig. 2. — Variation de la résistivité des fils.
Fig. 3. — Résultats des essais comparatives avec et sans régulateur.
Fig. 4. — Résultats des essais avec régulateur.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 668.7 ; 667

STABILITATEA COLORANŢILOR DIRECŢI LA TEMPERATURI DE PESTE 100°C

DE

RITA ZEIDMAN, C. CĂLIN, I. BAZAVAN, SIMONA BRENMAN
şi MIŞILIM GRINDEA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

În domeniul tehnicii de aplicare a coloranţilor organici pe fibrele textile se constată că, în ultimul timp, procedeele noi şi moderne au căpătat o importanţă din ce în ce mai mare. Condiţiile tehnice corespunzătoare proceselor tehnologice sînt mult diferite de parametrii aplicaţi în vopsirea clasică. Succesul noilor propuneri depinde însă într-o mare măsură de comportarea coloranţilor organici în condiţiile specifice. Faptul că în trecut cercetările în domeniul coloranţilor s-au îndreptat cu precădere către problemele legate de sinteze, se resimte astăzi, mai mult decît oricînd, ca o importantă lipsă. Cercetarea proprietăţilor caracteristice ale coloranţilor a început în mod sistematic abia după 1950.

Între procedeele noi de aplicare ale coloranţilor, folosirea temperaturilor de peste 100°C a căpătat o deosebită importanţă, mai ales la finisarea fibrelor noi sintetice. Sub influenţa condiţiilor de aplicare în deosebi a coloranţilor de dispersie pe fibrele poliesterice, s-au introdus şi la vopsirea fibrelor celulozice procedee de vopsire din soluţii apoase la temperaturi cuprinse între 120°C şi 130°C. Acest mod de aplicare a coloranţilor direcţi prezintă un interes deosebit la vopsirea bobinelor şi urzelilor din bumbac sau celuloză regenerată. El permite ridicarea productivităţii şi obţinerea în condiţii economice a unor vopsiri mai bine pătrunse şi mai egale. Procedeul poate fi de asemenea aplicat la vopsirea amestecurilor de fibre celulozice ; în acest caz coloranţii direcţi vopsesc împreună cu coloranţii de dispersie.

Stabilitatea coloranţilor direcţi la temperaturi de peste 100°C a constituit obiectul cercetărilor unora dintre noi [1]. Ca o concluzie a acestor cercetări s-a subliniat necesitatea unui studiu concret asupra fiecărui colorant direct fabricat industrial în R. P. R.

Prezenta lucrare a fost iniţiată de catedra de tehnologie chimică textilă a Institutului politehnic din Iaşi, în colaborare cu Laboratorul central coloristic, Bucureşti, în vederea efectuării primelor cercetări.

2. Încercări experimentale

Colectivul nostru a mers în paralel pe două căi şi anume :

1. S-au extins cercetările asupra soluţiilor coloranţilor, după încălzirea lor la diferite temperaturi. S-a lucrat conform metodicei stabilite

[1], determinînd modificările ce apar la caracteristicile spectrale cu ocazia încălzirii, în raport cu cele ale colorantului nesupus nici unui tratament. S-a stabilit ca un criteriu obiectiv al schimbărilor intervenite variaţia abaterii procentuale a coeficientului de trecere faţă de etalon, în funcţie de lungimea de undă.

2. S-a comparat comportarea vopsirilor executate la temperaturi ridicate (120°C) cu o vopsire normală. Vopsirile s-au executat într-un aparat de vopsit sub presiune, cu agitare mecanică, în pahare de oţel inoxidabil V2A. A fost folosit bumbac fire 40/2, fiert în prealabil în condiţii industriale, într-o autoclavă cu sodă caustică. Raportul de flotă a vopsirii a fost 1 : 40. Condiţiile vopsirii la temperaturi ridicate au fost variate după cum urmează : a) mediu neutru, timp 1/2 oră; b) mediu alcalin 4% carbonat, timp 1/2 oră; c) mediu neutru, timp 1 oră. Vopsirile au fost executate, în toate cazurile, în prezenţa de 10% sulfat de sodiu. Rezultatele încercărilor, comparate cu vopsirea normală, au fost exprimate cu ajutorul scării de gri STAS, pentru schimbările de culoare [2].

Dacă vopsirea la 120°C este mai intensă sau prezintă un contrast de minimum 4 în scara de gri, faţă de vopsirea normală, atunci s-a considerat că produsul respectiv este insensibil faţă de condiţiile vopsirii la temperaturi ridicate şi s-a notat cifric cu 5. Atunci cînd contrastul între vopsirea normală şi cea executată la temperatura de 120°C a fost cuprins între 2...3 şi 3...4 în scara de gri, atunci s-a notat pentru colorantul respectiv 3 şi s-a considerat că produsul este sensibil la vopsirea la temperaturi înalte. Cînd contrastul între vopsirea la 120°C şi o vopsire normală este sub 2 (inclusiv) în scara de gri, s-a notat 1 egal foarte sensibil. Rezultatele încercărilor noastre sînt prezentate în tabelul 1.

Dintre cele 22 încercări executate în paralel, exact jumătate au dat rezultate concordante, 8 coloranţi s-au dovedit mai rezistenţi la vopsirea la temperatura de 120°C, în prezenţa bumbacului, decît la încălzirea soluţiei singure. 3 dintre aceşti 8 coloranţi au fost notaţi ca nerezistenţi la încălzirea soluţiei, totuşi la vopsirea bumbacului sub presiune ei s-au dovedit insensibili (diferenţa de 4 puncte). Numai trei coloranţi s-au comportat în condiţiile vopsirii la temperaturi înalte în prezenţa bumbacului ceva mai slab decît la încălzirea soluţiei (diferenţa de 3 puncte). Nici un colorant nu s-a arătat mai nerezistent cu diferenţa de 4 puncte la vopsire la 120°C faţă de soluţia încălzită.

Notăm deci că, în general, coloranţii din seria de încercări executate s-au comportat la fel, atît în prezenţa cît şi în absenţa bumbacului. În unele cazuri s-a observat îmbunătăţirea rezistenţelor esenţiale atunci cînd s-a vopsit în prezenţa bumbacului. Se pare că bumbacul a avut o acţiune protectoare.

Pentru verificarea rezultatelor obţinute de noi, comparăm indicaţiile noastre cu cele comunicate de W. Szafnicki şi H. Golec [3] referitoare sortimentul de coloranţi direcţi fabricaţi în R.P.P., şi cu tabelele de rezistenţe comunicate de firma Sandoz [4].

Metodele de apreciere, ca şi testele efectuate, sînt asemănătoare cu ale noastre; W. Szafnicki şi H. Golec utilizează însă temperatura de 130°C. În ambele cazuri rezultatele obţinute sînt în general concordante, mai ales dacă se ia în consideraţie diferenţa de exprimare a efectului final.

Tabelul 1

Nr. crt.	Denumire R.P.R.	Conc. vops. %	c. i.	Rezistența la vopsire			Rezistența soluției la temperatură înaltă		
				Neutru	Alcalin		Insen-	Sen-	Nerez
				1/2 h	1 h	1/2 h	sibil	sibil	
1	Galben direct *G*	2	22 250	5	5	5			
2	Galben direct stilben	2	40 006	5	5	3			
3	Galben direct *2R* concentrat	0,3		3	3	3			
4	Crisofenina	2	24 895	5	5	5	+		
5	Portocaliu direct concentrat	2	30 110	5	5	3			
6	Portocaliu direct *RN*	2	22 130	5	5	5			
7	Portocaliu direct strălucitor	2	29 150	1	1	1			+
8	Portocaliu direct rezistent *L2G*	2	40 215	5	3	3			
9	Roşu direct *C*	2	22 120	5	3	3	+		
10	Roşu direct *MN*	2	22 310	5	5	3		0	
11	Roşu direct *I*	2		3	3	3			
12	Roşu direct *4A*	2	23 500	5	3	5			+
13	Roşu direct strălucitor *4A*	2	29 160	5	3	5			
14	Roşu direct strălucitor *8A*	2	29 190	3	3	1			+
15	Bordo direct *AN*	2	22 155	5	5	5	+		
16	Rubiniu direct rezistent *I2A*	2	29 225	1	1	1			
17	Violet direct *R*	2	22 570	5	5	5	+		
18	Albastru direct *A*	2	22 610	5	5	3	+		
19	Albastru direct *FF*	2	24 410	5	5	5	+		
20	Albastru direct retr. *A*	2	24 175	5	5	5	+		
21	Albastru direct *2A*	2	24 185	5	5	5			
22	Albastrudirect rezistent *LGL*	2	23 160	3	3	1	+		
23	Albastru direct rezistent *L2R*	2	34 140	5	5	5			+
24	Albastru direct *L5R*	2		5	5	1			
25	Albastru direct diazotabil *L*	2	34 085	5	5	3			
26	Albastru direct diazotabil *LM*	2	34 090	3	3	3	+		
27	Albastru direct diazotabil *LMN*	2		3	3	1			
28	Albastru direct rezistent *LE*	2		5	5	5			
29	Verde direct *A*	2	30 295	5	5	1			+
30	Verde direct închis *A*	2	30 280	5	5	3			
31	Verde direct *G*	2	30 315	3	3	1		0	
32	Directcatechin *G*	2	36 030	5	5	5			
33	Diamincatechin *R*	2	31 715	5	5	5			
34	Brun direct *MR*	2	22 311	5	5	3		0	
35	Brun direct *3G*	2	35 005	3	3	3		0	
36	Brun direct retr *A*	2	31 725	5	5	5			
37	Brun direct rezistent *LMR*	2	30 145	5	5	3			
38	Brun direct rezistent *MRL*	2	31 740	5	5	5			
39	Brun direct rezistent *LBBN*	2		5	5	3			
40	Brun direct *RL*	2		5	5	3			
41	Negru direct *A*	4	30 235	3	3	3	+		
42	Negru direct *R*	4	30 245	5	5	5	+		
43	Negru direct diazotabil *N*	4	22 590	5	5	3		0	
44	Negru direct diazotabil	4	22 590	5	5	3			
45	Negru direct diazotabil *G*	4	30 345	5	5	5			
46	Negru direct rezistent *L*	4	27 730	5	3	3			
47	Negru direct *RB*	4		5	5	5			
48	Gri direct rezistent *L*	4		3	3	1			

Totuşi, în unele cazuri, apar diferenţe nete, cînd un colorant este indicat de un autor ca rezistent şi în încercările noastre el se dovedeşte a fi nerezistent, sau invers, ceea ce reconfirmă utilitatea prezentului studiu asupra coloranţilor direcţi fabricaţi în R.P.R.

3. Interpretarea rezultatelor obţinute

Cercetînd condiţiile procesului tehnologic de vopsire şi rezultatele obţinute, se observă că rezistenţele vopsirilor la temperaturi ridicate în mediu alcalin sînt mai slabe decît cele ale vopsirilor executate în aceleaşi condiţii dar în mediu neutru. Această situaţie este oglindită de tabelul 2.

Tabelul 2

	Număr de coloranţi			Total încercări
	insensibili (5)	sensibili (3)	f. sensibili (1)	
După 1/2 oră, neutru	36	10	2	48
După 1 oră, neutru	31	15	2	48
După 1/2 oră, alcalin	22	18	8	48

Din acest tabel se deduce că la vopsirea în mediu neutru şi la temperatura de 120° C, coloranţii direcţi au o rezistenţă remarcabilă.

Numai 2 coloranţi (Portocaliu direct strălucitor şi Rubiniu direct rezistent *L2A*) sînt practic inutilizabili. Prelungind durata de vopsire, stabilitatea nu variază mult. Numărul coloranţilor inutilizabili nu se măreşte.

În mediu alcalin, chiar după 1/2 oră, vopsind la temperatura de 120°C stabilitatea coloranţilor direcţi se înrăutăţeşte, 18 coloranţi devin sensibili, iar 8 foarte sensibili.

În tabelul 3 este redată comportarea la vopsiri la temperatura de 120°C, pe grupe de coloranţi cu structură asemănătoare.

Deşi în lucrarea de faţă nu s-a urmărit mai aproape stabilirea unei relaţii între structura coloranţilor şi vopsirea lor la temperaturi peste 100°C, analizînd tabelul 3 se poate afirma că: a) coloranţii benzidinici disazoici şi coloranţii stilbenici arată o stabilitate remarcabilă în procesul de vopsire la temperaturi peste 100°C; b) coloranţii care derivă de la acidul carbonil *j* sînt mai puţin stabili la vopsirea la temperaturi ridicate.

Concluzii asemănătoare pot fi trase şi din lucrările comunicate de W. Szafnicki şi H. Golec. Sistematizînd rezultatele lor, se poate deduce, în concordanţă cu lucrarea noastră: a) instabilitatea mărită a coloranţilor în mediu alcalin; b) stabilitatea mărită a coloranţilor disazoici, derivînd de la benzidină şi a coloranţilor stilbenici; c) instabilitatea coloranţilor care derivă de la uree.

Această ultimă instabilitate a fost observată şi în Butterworth [5].

Caracterul proceselor chimice care au loc cu ocazia degradării culorii este complex. În literatura tehnică indicaţiile sînt contradictorii. În cele ce urmează ne vom referi, mai ales la coloranţii azoici din care se formează majoritatea coloranţilor direcţi. Cu ocazia încălzirii unei soluţii apoase de coloranţi azoici va trebui să ne aşteptăm la următoa-

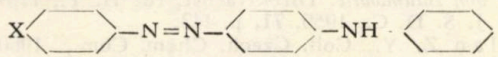
rele fenomene: dezagregarea moleculelor asociate, deplasarea echilibrului tautomer cis- trans- și ariloxiazoici—arilhidrazonă, reacția de hidroliză, oxidare și reducere.

Tabelul 3

Grupa de coloranți	După 1/2 oră, neutru			După 1 oră, neutru			După 1/2 oră, alcal.		
	insens. (5)	sens. (3)	f.sens. (1)	insens. (5)	sens. (3)	f.sens. (1)	insens. (5)	sens. (3)	f.sens. (1)
Coloranți *benzidinici disazoici* (de ex. Albastru direct *A*)	16	2	–	14	4	—	10	8	—
Coloranți *azoici complecși metalici* (de ex. Albastru direct rezistent *LGL*)	2	1	1	2	1	1	—	2	2
Coloranți *azoici cu carbonil—j* (de ex. Portocaliu direct strălucitor)	2	1	2	1	2	2	1	1	3
Coloranți *stilbenici* (de ex. Portocaliu direct rezistent *L2G*)	3	–	–	2	1	—	1	2	—

Ca o dificultate în interpretarea fenomenelor trebuie să semnalăm prezența unor reacții de disproporționare, de oxidare simultană și reducere.

Substituientul azoic ușurează o serie de procese de hidroliză. Chmàtal și Allan [6] au cercetat viteza reacției de hidroliză în funcție de pH,a unor coloranți *p*-anilină-azobenzen de tipul:



în *p*- oxiazobenzen. S-a verificat valabilitatea unei relații asemănătoare cu cea a lui Hamett. Comportarea la hidroliză a coloranților azoici este deci în funcție de substituienții prezenți în molecula colorantului. Fenomenul de degradare a culorii a fost în trecut explicat ca o reacție de reducere, reducătorul presupus fiind bumbacul sau substanțele însoțitoare.

Cercetările proprii au arătat clar însă că bumbacul are, în multe cazuri, rolul de protector. În [1] s-a demonstrat în mod convingător că substanțele însoțitoare ale bumbacului nu intensifică degradarea coloranților, la fierberea alcalină. De altfel Szafnicki și Golec *(op. cit.)* constată de asemenea acțiunea protectoare a bumbacului, în cazul vopsirii la presiuni înalte. Ei constată că, în încercările lor, reacțiile de reducere prin celuloză sau prin produsele însoțitoare ale celulozei au un rol în general neglijabil.

Se pare că rolul coloranților secundari este mult mai important. Numai prezența lor poate explica comportarea diferită a coloranților direcți, obținuți prin aceeași sinteză dar la producători diferiți. Astfel

s-ar putea explica şi comportarea la fierbere a soluţiei colorantului Verde direct *A*, menţionat în [1] . Acest colorant în puritate tehnică, a fost caracterizat de autori ca nerezistent la fierbere. Produsul purificat însă a rezistat mai bine la acţiunea de fierbere. Disproporţionările menţionate par să fie deci determinate în mare parte de coloranţi parazitari.

S-ar putea explica acţiunea protectoare a bumbacului la vopsire sub presiune prin faptul că colorantul legat de celuloză nu mai are posibilitatea de a migra în mediul de reacţie decît într-o măsură mai redusă. Pentru verificarea acestei afirmaţii ar trebui cunoscute epuizările colorantului în condiţiile temperaturii înalte. Posibilităţile unei astfel de tehnici de laborator au fost descrise de unii autori [7], [8].

4. Concluzii

Prin lucrarea prezentată au fost selecţionaţi din sortimentul de coloranţi direcţi fabricaţi în R. P. R., acei coloranţi care rezistă în condiţiile de vopsire la temperatura de 120°C. S-a scos în evidenţă rolul protector al fibrelor de bumbac în procesul de vopsire la temperaturi înalte. Sistematizînd rezultatele obţinute au fost găsite unele legături între structura coloranţilor şi comportarea lor în condiţiile de vopsire la 120°C. S-a arătat de asemenea rolul coloranţilor secundari la comportarea finală a produselor cercetate.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică textilă
şi
Laboratorul central coloristic,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Grindea M., Zeidman R., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *1—2*, p. 401.
2. * * * STAS 5658-57.
3. Szafnicki W., Golec H., Przeglad Wlokienniczy, 1962, **XVI**, *4*, p. 213.
4. Sandoz, *Farben von Baumwolle.* Direktfarbst. fur H. T., 11/8 april 1960
5. Butterworth, J. S. D. C., 1955, **71**, p. 443.
6. Châtal V., Allan Z. Y., Coll. Czech. Chem. Com., 1960, **25**, p. 210.
7. Millson H., Am. Dyest. Rep., 1958, **47**, *7*, p. 339.
8. Stanziola H., Forderwall T., Am. Dyest. Rep., 1956, **45**, *12*, p. 365.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ КРАСИТЕЛЕЙ К ТЕМПЕРАТУРАМ СВЕРХ 100°С

(Резюме)

Исследуется поведение прямых красителей румынского производства при температурах сверх 100°С. Систематизируются получаемые выводы и устанавливаются некоторые соотношения между строениями красителей и их поведением при температуре в 120°С. Доказывается защищающая роль хлопчатобумажных волокон, а также и роль побочных красителей.

STABILITÉ DES COLORANTS DIRECTS AUX TEMPÉRATURES DÉPASSANT 100 °C

(Résumé)

On étudie le comportement aux températures élevées des colorants directs produits en R.P.R. Les résultats obtenus sons sistématisés et on établit quelques relations entre la structure des colorants et leur comportement à 120 °C. On met en évidence le rôle protecteur des fibres cellulosiques et aussi le rôle des colorants secondaires.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

Д. К. 685.3

СИЛОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ГВОЗДЕВЫХ КРЕПЛЕНИЯХ НИЗА ОБУВИ

В. Н. ЦВЕТКОВ

Гвоздевые крепления широко применяются в тяжелой обуви, поэтому определение силовых соотношений в соединениях гвоздь-стелька представляет большой интерес.

Рассмотрим отдельно величины составляющих полной силы держания гвоздя с загнутым острием : определим осевую силу контактного трения (сцепления) P_m. В связи с конусностью острия гвоздя, находящегося в стельке, не представляется возможным для определения силы контактного трения использовать непосредственно уравнения, выведенные для вычисления цилиндрической образующей поверхности контакта охватывающей и охватываемой детали. Кроме того, при конической контактной поверхности во время выдергивания гвоздя из стельки, появляется осевая слагающая сил контактного давления, направленная против результирующей силы контактного трения (рис. 1). Следовательно :

$$P_m = P_1 - P_2, \tag{1}$$

где P_1 и P_2 — осевые слагающие силы контактного трения и давления.

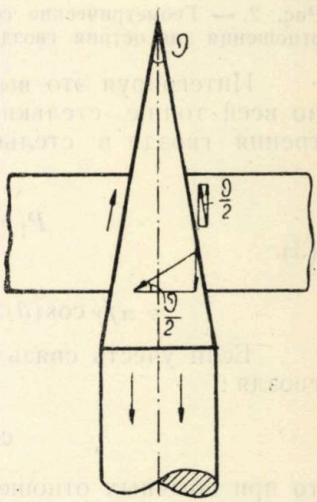


Рис. 1. — Схема силового взаимодействия незагнутого острия гвоздя со стелькой.

Основные геометрические соотношения для острия гвоздя, показаны на рис. 2, где : d_{cm} — диаметр стрежня гвоздя, d — переменный диаметр контактного конуса, d_3 — диаметр контактного конуса на выходе из стельки (т. е. диаметр загибаемого сечения острия гвоздя), S — толщина стельки, L_3 — длина загиба острия, L_0 — длина острия, l — координата переменного сечения контактного конуса (относительно конца острия до загибания), ϑ — угол заострения острия, r — переменный радиус контактного цилиндра.

Из геометрических соотношений (рис. 2) получим:

$$d_3 = (L_3/L_0)\,d_{cm} \text{ и } r = d/2 = [l/(2L_0)]\,d_{cm}. \quad (2)$$

Составим уравнение силы контактного трения для элементарного усеченного конуса высотой dl и радиусами круглых оснований r и $r + dr$.

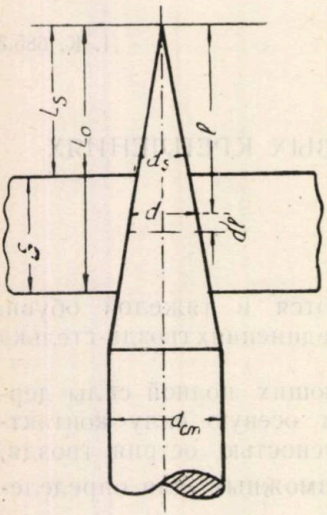


Рис. 2. — Геометрические соотношения для острия гвоздя.

При этом получим значение элементарной силы контактного трения по образующей поверхности указанного элементарного усеченного конуса:

$$dP_1' = 2\pi f\gamma D[(r + r + dr)/2]\,dl = 2\pi f\gamma Dr\,dl,$$

где: f — коэффициент контактного трения, γ — параметр соединения, который считаем постоянным по толщине стельки, $D = 1 - \psi(d_0/d) = 1 - \psi[d_0/(2r)]$ — геометрический параметр соединения, ψ — коэффициент, характеризующий усадку прокола в материале после удаления шила, d_0 — диаметра шила.

Проекция dP_1, на ось гвоздя, элементарной силы dP, направленной по образующим контактного конуса (рис. 1):

$$dP_1 = dP_1' \cos(\vartheta/2) = 2\pi f\gamma \cos(\vartheta/2)\,[r - (\psi d_0)/2]\,dl.$$

Интегрируя это выражение в пределах $l_3 = L_3$ и $l = L_3 + S$, т. е. по всей толще стельки, получим полную осевую силу контактного трения гвоздя в стельке (при учете указанного выше значения r):

$$P_1 = 2\pi f\gamma \cos\frac{\vartheta}{2} \int_{l=L_3}^{l=L_3+S} \left(r - \frac{\psi d_0}{2}\right) dl = \quad (3)$$

$$= \pi f\gamma \cos(\vartheta/2)\{[d_{cm}/(2L_0)]\,S^2 - [\psi d_0 - (L_3/L_0)\,d_{cm}]\,S\}.$$

Если учесть связь угла заострения с геометрическими размерами гвоздя:

$$\cos(\vartheta/2) = L_0/\sqrt{L_0^2 + d_{cm}^2/4},$$

то при обычных отношениях: $d_{cm} = 2$ мм, $L_0 = 4$ мм

$$\cos(\vartheta/2) \geqslant 0{,}97,$$

т. е. можно считать $\cos(\vartheta/2) \cong 1$.

При этом уравнение (3) примет вид:

$$P_1 \cong \pi f\gamma\{[d_{cm}/(2L_0)]\,S^2 - [\psi d_0 - (L_3/L_0)\,d_{cm}]\,S\}. \quad (4)$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

а) сила контактного трения гвоздя в стельке прямо пропорциональна коэффициенту трения (сцепления) и параметру γ;

б) с увеличением диаметра стержня гвоздя (при сохранении остальных параметров соединения постоянными) сила контактного трения возрастает;

в) увеличение диаметра шила (d_0) приводит к уменьшению силы P_1, так же как и повышение коэффициента ψ;

г) при постоянстве длины загиба острия (L_3) увеличение длины острия (L_0) должно привести к снижению силы P_1, и наоборот.

Если в стельке предварительно не сделан прокол шилом или прокол невелик ($d_0 \cong 0$), уравнение (4) примет вид:

$$P_{1_0} = \pi f \gamma [(d_{\text{см}}/L_0)(S^2/2 + L_3 S)]. \tag{4 а}$$

Наличие конической контактной поверхности пары гвоздь-стелька приводит к образованию осевой силы P_2, направленной в сторону выталкивания гвоздя из стельки. Найдем величину этой выталкивающей силы, спроектировав силы контактного давления стенок стельки на гвоздь (рис. 2):

$$P_2 = \pi\gamma \{[d_{\text{см}}/(2L_0)] S^2 - [(\psi d_0 - (L_3/L_0) d_{\text{см}})] S\} \sin(\vartheta/2). \tag{5}$$

При отсутствии предварительного прокола сила P_2 (5) увеличивается:

$$P_{2_0} = \pi\gamma \{[d_{\text{см}}/(2L_0)] (S^2/2 + L_2 S)\} \sin(\vartheta/2). \tag{5 а}$$

Таким образом, результирующая сила P_m взаимодействия стельки и гвоздя (без загнутого острия) при наличии прокола равна:

$$P_m = P_1 - P_2 = \pi\gamma \{[d_{\text{см}}/(2L_0)] S^2 - [\psi d_0 - (L_3/L_0) d_{\text{см}}] S\} [f - \operatorname{tg}(\vartheta/2)] \cos(\vartheta/2); \tag{6}$$

при отсутствии предварительного прокола равна:

$$P_{m_0} = \pi\gamma [(d_{\text{см}}/L_0)(S^2/2 + L_3 S)] [f - \operatorname{tg}(\vartheta/2)] \cos(\vartheta/2). \tag{6 а}$$

При незначительности угла ϑ можно с достаточным приближением считать:

$$\cos(\vartheta/2) \cong 1; \quad \operatorname{tg}(\vartheta/2) \cong d_{\text{см}}/(2L_0).$$

Тогда при наличии предварительного прокола уравнения (6) примут вид:

$$P_m = \pi\gamma \{[d_{\text{см}}/(2L_0)] S^2 - [\psi d_0 - (L_3/L_0) d_{\text{см}}] S\} [f - d_{\text{см}}/(2L_0)]; \tag{7}$$

при отсутствии предварительного прокола:

$$P_{m_0} = \pi\gamma [(d_{\text{см}}/L_0)(S^2/2 + L_3 S)] [f - d_{\text{см}}/(2L_0)]. \tag{7 а}$$

Исследуем зависимость силы P_m от различных факторов крепления. Возьмем производную силу P_m по толщине стельки:

$$dP_m/dS = \pi\gamma \{(d_{\text{см}}/L_0) S - [\psi d_0 - (L_3/L_0) d_{\text{см}}]\} [f - d_{\text{см}}/(2L_0)], \tag{8}$$

$$(8\,а)\qquad dP_{m_0}/dS = \pi\gamma\,(d_{cm}/L_0)\,(S + L_3 d_{cm})\,[f - d_{cm}/(2L_0)]\,.$$

Как видно, с увеличением толщины стельки сила P_m возрастает (при $f > d_{cm}/(2L_0)$). Интенсивность ее возрастания зависит от длины загиба острия; чем больше L_3, тем больше влияние толщины стельки на силу P_m. Образуем производную силы P_m по длине острия при наличии предварительного прокола:

$$(9)\qquad dP_m/dL_0 = \pi\gamma\,[d_{cm}/(2L_0^2)]\,\{d_{cm}/L_0 - f)\,S^2 + \\ + [(2L_3/L_0)\,d_{cm} - 2fL_3 - \varphi d_0]\,S\}\,.$$

При отсутствии прокола ($d_0 \cong 0$):

$$(9\,а)\qquad dP_{m_0}/dL_0 = \pi\gamma\,(d_{cm}/L_0^2)\,(S^2/2 + L_3 S)\,(d_{cm}/L_0 - f)\,.$$

Таким образом, зависимость силы контактного взаимодействия стельки и гвоздя от длины острия может быть прямой (при малых коэффициентах трения) и обратной (при больших коэффициентах трения).

В случае отсутствия предварительного прокола стельки шилом изменение знака производной dP_{m_0}/dL_0 происходит при $f = d_{cm}/L_0$. Например, при $d_{cm} = 2$ мм и $L_0 = 6$ мм значение коэффициента трения $f = 0{,}33$.

Определим производную P_m по L_3 при наличии прокола:

$$(10)\qquad dP_m/dL_3 = \pi\gamma\,[f - d_{cm}/(2L_0)]\,(d_{cm}/L_0)\,S.$$

При отсутствии прокола ($d_0 \cong 0$):

$$(10\,а)\qquad dP_{m_0}/dL_0 = \pi\gamma\,[f - (d_{cm}/2L_0)]\,(d_{cm}/L_0)\,S.$$

Следовательно, при $f > d_{cm}/(2L_0)$ с увеличением длины загиба острия сила P_m возрастает, а при $f < d_{cm}/(2L_0)$ снижается. При обычных параметрах гвоздевого соединения $d_{cm}/(2L_0) \leqslant 0{,}17$ и $f > d_{cm}/(2L_0)$; сила P_1 с увеличением длины загиба острия возрастает.

Сопоставляя выражения для сил контактного взаимодействия системы подошва-гвоздь и стелька-гвоздь, приходим к выводу что при прочих равных условиях удельная сила держания стержня гвоздя в подошве выше, чем в стельке. Это объясняется следующим: а) для подошвы контактная поверхность больше (цилиндрическая), чем для стельки; б) в стельке появляется реакция, выталкивающая гвоздь; в) направление сил трения в стельке не совпадает с осью гвоздя, и они проектируются на эту ось в уменьшенном размере.

Определим силу $P_д$ разгибания загнутого острия гвоздя. Реактивную силу со стороны стельки считаем приложенной плечом $a L_3$ (a — коэффициент, зависящий от формы загиба острия, упругих свойств материалов гвоздя и стельки и т. п.; $a > 1$).

Изгибающий момент, необходимый для разгибания острия:

$$M = a L_3 P_д = \sigma_т W,$$

где: W — момент пластического сопротивления разгибанию, $\sigma_т$ — предел текучести материала гвоздя. Следовательно

(11) $$P_д = (\sigma_г/a)\,(W/L_3).$$

Момент пластического сопротивления пропорционален третьей степени линейных размеров разгибаемого сечения гвоздя, а площадь этого сечения — квадрату линейных размеров.

Экспериментальными данными, указанная закономерность для площади сечения F гвоздя подтверждается достаточно точно. Согласно данным:

(12) $$F = K_F d_3^2, \quad W = K_W d_3^3 = (K_W/K_F)\,Fd_3,$$

где K — коэффициент, зависящий от схемы нагружения.

Из геометрических соотношений:

(13) $$F = K_F\,(L_3^2/L_0^2)\,d_{cm}^2 \text{ и } W = K_W\,(L_3^3/L_0^3)\,d_{cm}^3 = (K_W/K_F)\,Fd_{cm}\,(L_3/L_0).$$

При этом из выражения (11):

(14) $$P_д = (\sigma_г/a)\,(K_W/K_F)\,d_{cm}\,(F/L_0) = (\sigma_г/a)\,K_W\,d_{cm}^3\,(L_3^3/L_0^3).$$

Отсюда приходим к следующим выводам:

а) сопротивление гвоздя разгибанию прямо пропорционально площади разгибаемого сечения и обратно пропорционально длине острия (при постоянной длине разгиба);

б) при постоянной длине острия сопротивление разгибанию пропорционально квадрату длины загиба;

в) сопротивление разгибанию пропорционально квадрату отношения длины загиба к длине острия (при $L_0 = \text{const.}$);

г) при постоянной длине загиба сопротивление разгибанию обратно пропорционально кубу длины острия.

Все эти положения справедливы лишь при (const.) постоянных значениях K_F и $K_W\,\sigma_г$ и a.

Из имеющихся данных видно, что сила держания гвоздя в стельке при $L_3 = \text{const.}$ и увеличении длины острия уменьшается, а при $L_0 = \text{const.}$ и увеличении длины загиба острия возрастает.

Сопротивление стельки прорыву определяется одним из следующих возможных предельных вариантов: а) разрушением стельки за счет среза; б) разрушением стельки из-за смятия острием.

В первом случае сопротивление прорыву должно быть пропорционально площади среза, т. е. (рис. 2):

(15) $$P_д = 2K_1 L_3 S/\cos(\vartheta/2) \cong 2K_1 L_3^2 S.$$

Иначе говоря, сопротивление прорыву пропорционально длине загиба и толщине стельки.

Во втором случае сопротивление стельки смятию должно быть пропорциональным площади смятия:

(16) $$P_д = K_2 L_3^2 \operatorname{tg}(\vartheta/2) = (K_2 d_{cm}/2)\,(L_3^2/L_0),$$

т. е. сопротивление прорыву прямо пропорционально квадрату длины загиба и обратно пропорционально длине острия. При постоянном отношении L_3/L_0 сопротивление прорыву пропорционально длине загиба.

Таким образом, при постоянной длине острия ($L_0 = \text{const.}$) и увеличении длины загиба быстрее возрастает сопротивление стельки смятию, чем срезу.

Так как сопротивление стельки смятию не зависит от ее толщины (уравнение (16)), то естественно, с увеличением толщины стельки сопротивление прорыву острием гвоздя вначале возрастает (пока лимитирующим фактором является срез), а затем влияние толщины стельки на сопротивление прорыву снижается и полностью прекращается.

Из сопоставления уравнений (14) и (15) видно, что при сохранении всех параметров соединения постоянными и увеличении лишь длины загиба острия сопротивление разгибанию острия (оно пропорционально квадрату L_3) растет быстрее, чем сопротивление стельки сразу острием. Этим, возможно, и объясняется экспериментально установленный факт, что при длине острия 10 мм и загибе на 3 мм загнутое острие всегда разгибается, а при загибе свыше 3 мм в 50... 60% случаев разгибается острие, а в остальных (50...40%) прорывается стелька.

Поступила 24 I 1962 г.

Московский технологический институт легкой промышленности, СССР

FORCE RELATIONS IN NAILED BOTTONING OF FOOTWEAR

(Summary)

Force relations of nailing the insole arising in the process of wearing are examined. The equations and parameters which characterize the force of keeping a nail in the insole are given. The facts are done on the basis of analysis the elementary force of the contacted friction through the forming surface of the elementary frustum, the break resistance of the insole, the forces of unbending of the bended point.

Explanation of the Figures

Fig. 1. — Force relations between the unbended naile's point and the insole.
Fig. 2. — Geometrical relations corresponding to the naile's point.

INTERACŢIUNI ÎNTRE FORŢELE CE INTERVIN ÎN FIXAREA ÎN CUIE A TĂLPII

(Rezumat)

Se studiază interacţiunile forţelor ce intervin în procesul de fixare în cuie a tălpii în timpul roaderii acesteia. Se dau ecuaţiile şi parametrii care caracterizează forţele de reţinere în talpă a cuişoarelor de cizmărie. Rezultatele obţinute se bazează pe analiza forţelor elementare reflectînd frecarea de contact între conul sau piramida elementară a ţintelor, rezistenţa la rupere a tălpii şi forţele de prindere a vîrfurilor încovoiate a cuişoarelor de cizmărie

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Schema interacţiunilor între forţele ce intervin între branţ şi vîrful neîndoit al cuişoarelor de cizmărie.
Fig. 2. — Relaţii geometrice relative la vîrful cuişoarelor de cizmărie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 675.025

INFLUENŢA PROPRIETĂŢILOR BOXULUI CU FAŢA NATURALĂ ASUPRA PROCESULUI DE FORMARE

DE

LĂCRĂMIOARA DUMA şi VOINEA COCIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Introducere

În lucrări anterioare [5], [6] s-a studiat influenţa diferitelor regimuri de condiţionare (umezire — solicitare— uscare sub sarcină) asupra procesului de formare, urmărind mecanismul transformării alungirilor elastice în alungiri remanente.

Experimentările efectuate pe box cu faţa corectată au arătat că transformarea deformărilor elastice în deformări remanente, în procesul de condiţionare prin umezire—solicitare—uscare sub sarcină, sînt rezultatul manifestării fenomenului de relaxare şi a modificării dimensiunilor liniare ale pielii sub acţiunea pierderii umidităţii la uscare.

Din regimurile de condiţionare studiate s-a evidenţiat regimul *C* (tabelul 1) care prevede: umezirea pielii timp de 24 ore în atmosferă saturată cu vapori, solicitarea pînă la sarcina de 1 kgf/mm² de secţiune, păstrarea în sarcină timp de 12 ore în atmosferă saturată cu vapori, păstrarea în sarcină timp de 12 ore în aer liber, readucerea pînă la sarcina de 1 kgf/mm², scoaterea din sarcină şi păstrarea timp de 12 ore a epruvetelor în aer liber. Pentru acest regim s-a obţinut cea mai mare deformare remanentă, în aceleaşi condiţii de solicitare mecanică.

În lucrarea prezentă se cuprind rezultatele experimentărilor efectuate în ace-

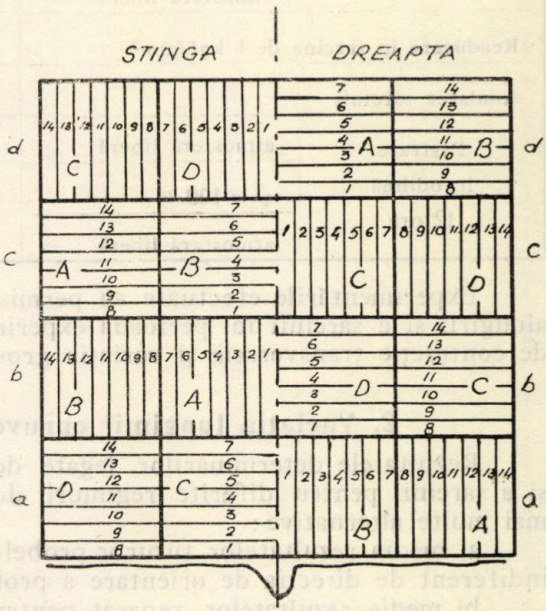


Fig. 1

leaşi condiţii: umezire—solicitare sub sarcină—uscare sub sarcină, pentru boxul cu faţa naturală.

Concomitent cu modificarea semifabricatului s-a urmărit să se stabilească influenţa direcţiei de solicitare asupra comportării epruvetelor în perioada încercărilor.

În acest scop s-au folosit epruvete dreptunghiulare, cu dimensiunile de 170/25 mm, luate de pe piele de box de viţel, în ordinea arătată în fig. 1. Epruvetele au fost fixate în aparatul de tracţiune asfel, încît distanţa liberă între cleme să fie de 100 mm.

Regimurile la care au fost supuse epruvetele sînt cele indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Regimurile de încercare a epruvetelor

Tratamentul de condiţionare-solicitare		Regimul de condiţionare			
		A	*B*	*C*	*D*
Păstrare în atmosferă liberă		×	×	×	×
Umezire 24 ore în atmosferă saturată cu vapori		—	×	×	×
Solicitare la 1 kgf/mm²		×	×	×	×
Păstrare în sarcină 12 ore	atmosferă liberă	×	—	—	×
	$\varphi = 100\ \%$	—	×	×	—
	atmosferă liberă	—	—	×	—
Readucere în sarcina de 1 kgf/mm²		×	×	×	×
Anularea sarcinii		×	×	×	×
Păstrare în odihnă 12 ore	atmosferă liberă	×	—	×	×
	$\varphi = 100\ \%$	—	×	—	—
	atmosferă liberă	—	×	—	—

Experimentările efectuate au permis să se urmărească modificarea alungirii şi a sarcinii în perioada experimentării, variaţia coeficientului de contracţie transversală şi variaţia grosimii.

2. Variaţia lungimii epruvetelor şi a sarcinii

Rezultatele determinărilor, legate de variaţia lungimii epruvetelor şi a sarcinii pentru diferite regimuri de solicitare, s-au centralizat în mai multe alternative:

a) media rezultatelor tuturor probelor pe regimuri de condiţionare, indiferent de direcţia de orientare a probelor (tabelul 2);

b) media rezultatelor, separat pentru probele paralele cu linia şirei spinării şi pentru cele perpendiculare pe linia şirei spinării (tabelul 3).

Rezultatele parțiale ale fiecărei grupe de determinări sînt următoarele :

a) *Rezultatele medii ale tuturor determinărilor*

Urmărind rezultatele din tabelul 2 și fig. 2 se desprind următoarele concluzii :

1° Alungirea remanentă cea mai mare se întîlnește la epruvetele condiționate după regimul *C* ; valoarea alungirii remanente pentru aceste epruvete reprezintă 67,6 % din alungirea inițială. La aceste probe fenomenul de relaxare s-a manifestat pe epruvetele umede, după care uscarea a fixat structura țesutului.

2° Alungirea remanentă cea mai mică se întîlnește în cazul epruvetelor supuse regimului *B*, la care solicitările și odihna s-au făcut în condiții de umiditate mărită. La aceste probe efectul uscării nu s-a suprapus peste fenomenul de relaxare. La păstrarea în atmosferă umedă a probelor scoase din sarcină, efectul revenirii, ca urmare a existenței tensiunilor interioare, a fost posibil datorită prezenței umidității care joacă rol de lubrifiant.

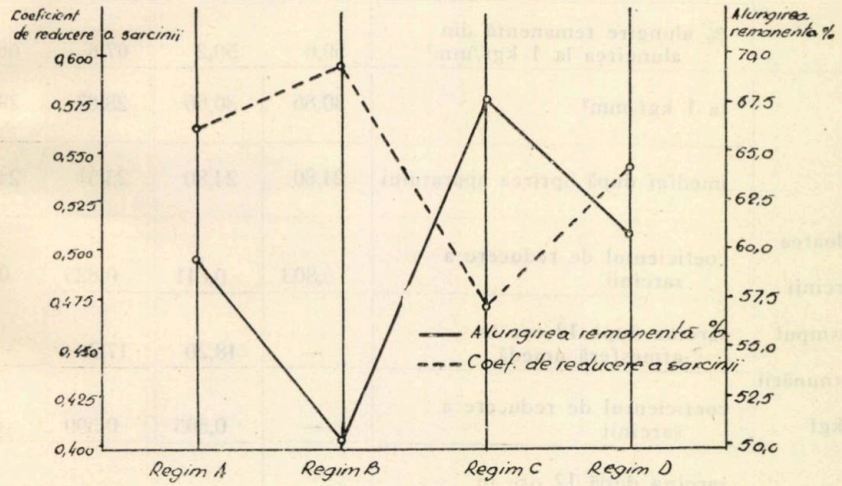


Fig. 2

3° La regimul *D*, unde fenomenul de relaxare s-a produs concomitent cu fenomenul de uscare iar readucerea în sarcină s-a făcut pe probe uscate, efectul transformării alungirii elastice în alungire remanentă este mai mic, reprezentînd numai 60,7 % din alungirea inițială.

4° Cea mai mică sarcină remanentă față de sarcina inițială se întîlnește la regimul *C*, unde se întîlnește și cea mai mare alungire remanentă.

Tabelul 2

Alungirea sub sarcină şi valoarea sarcinii în timpul determinării

Determinări efectuate		Regimul de condiţionare			
		A	*B*	*C*	*D*
Alungirea sub sarcină %	la 1 kgf/mm²	41,4	45,00	38,66	39,21
	după 12 ore de păstrare în atmosferă umedă	—	45,00	38,66	—
	după 12 ore de păstrare în atmosferă liberă	41,4	—	38,66	39,21
	epruveta readusă în sarcină de 1 kgf/mm²	43,4	47,7	41,45	41,10
	epruveta scoasă din sarcină	27,6	25,9	28,27	26,36
	odihnă 12 ore în atmosferă umedă	—	23,6	—	—
	odihnă 12 ore în atmosferă liberă	24,7	22,6	26,2	23,62
	% alungire remanentă din alungirea la 1 kgf/mm²	59,6	50,2	67,6	60,7
Valoarea sarcinii în timpul determinării kgf	la 1 kgf/mm²	30,86	30,66	28,87	29,77
	imediat după oprirea aparatului	24,80	24,80	23,51	24,20
	coeficientul de reducere a sarcinii	0,803	0,811	0,825	0,813
	sarcina după 12 ore în atmosferă umedă	—	18,20	17,30	—
	coeficientul de reducere a sarcinii	—	0,595	0,599	—
	sarcina după 12 ore în atmosferă liberă	17,38	—	13,30	16,19
	coeficientul de reducere a sarcinii	0,563	—	0,471	0,542

b) *Rezultatele medii ale probelor paralele şi ale celor perpendiculare pe linia şirei spinării*

Urmărind datele din tabelul 3 se desprind următoarele concluzii:

1° La toate regimurile de lucru alungirea maximă se întîlneşte în direcţia paralelă cu linia şirei spinării.

Tabelul 3

Comparație între probele paralele și perpendiculare pe linia șirei spinării

	Regimul de condiționare							
	A		*B*		*C*		*D*	
	par.	perp.	par.	perp.	par.	perp.	par.	perp.
Alungirea sub sarcină								
la 1 kgf/mm²	47,60	36,10	47,10	42,90	41,82	35,50	47,07	36,36
după 12 ore păstrare atm. umedă	—	—	47,10	42,90	41,82	35,50	—	—
după 12 ore păstrare atm. liberă	47,60	36,10	—	—	41,82	35,50	47,07	36,36
readus în sarcină	49,60	38,10	50,30	45,20	44,10	38,80	43,85	38,36
scos din sarcină	33,20	22,90	28,30	23,50	32,35	24,20	30,36	22,36
odihnă 12 ore atm. umedă	—	—	25,80	21,40	—	—	—	—
odihnă 12 ore atm. uscată	29,90	20,30	24,70	20,50	30,65	21,75	27,25	19,89
% alungire remanentă din alungirea la 1 kgf/mm²	60,70	56,2	52,4	47,7	73,2	61,2	64,7	54,6
Sarcina								
la 1 kgf/mm²	30,62	31,08	31,05	30,27	29,24	28,51	28,65	30,89
după oprirea aparatului	24,44	25,10	25,22	24,50	23,68	23,35	23,46	24,95
coef. reducere sarcină	0,798	0,807	0,812	0,811	0,829	0,820	0,820	20,807
după 12 ore păstrare atm. umedă	—	—	18,60	17,90	17,33	17,30	—	—
coef. reducere sarcină	—	—	0,596	0,594	0,591	0,607	—	—
după 12 ore păstrare atm. liberă	17,55	17,25	—	—	13,30	13,48	15,21	17,17
coef. reducere sarcină	0,573	0,555	—	—	0,469	0,474	0,529	0,556

2° La scoaterea probelor din sarcină cele mai mari valori ale alungirii remanente se întîlnesc în cazul regimului *C* de condiționare.

3° Reducerea sarcinii ca efect al manifestării fenomenului de relaxare se prezintă aproximativ la fel în cele două direcții.

4° Cea mai mare reducere a sarcinii se întîlnește la probele supuse regimului *C*, la care fenomenul de relaxare s-a manifestat într-o măsură mai însemnată și la care țesutul s-a fixat prin uscare.

3. Variația grosimii epruvetelor

Alungirea sub sarcină a epruvetelor se face atît în domeniul deformărilor elastice cît și în domeniul deformărilor plastice. Modificările efectuate în domeniul plastic afectează în special aranjamentul țesutului; paralel cu reducerea lățimii epruvetei în porțiunea de mijloc, evidențiată în tabelul 5, are loc creșterea grosimii epruvetelor, pusă în evidență în tabelul 4.

Rezultatele arată, pentru toate regimurile de condiționare, creșterea grosimii epruvetelor după odihnă; creșterea are valori minime în cazul probelor necondiționate (regimul *A*) și valori maxime în cazul regimurilor *B* și *C*; în cazul regimului *D* creșterea grosimii are o valoare intermediară.

Tabelul 4

Variaţia grosimii epruvetelor în perioada încercării

Etapele de încercare	Regimul de condiţionare											
	A			*B*			*C*			*D*		
	δ	$\Delta\delta$		δ	$\Delta\delta$		δ	$\Delta\delta$		δ	$\Delta\delta$	
	mm	mm	%	mm	mm	%	mm	mm	%	mm	mm	%
Valori iniţiale	1,22	—	—	1,21	—	—	1,15	—	—	1,18	—	—
la 1 kgf/mm²	1,34	0,12	9,9	1,39	0,18	14,8	1,29	0,14	12,1	1,31	0,13	11,0
după 12 ore sarcină atm. umedă	—	—	—	1,41	0,20	16,5	1,31	0,16	13,9	—	—	—
după 12 ore sarcină atm. liberă	1,34	0,12	9,9	—	—	—	1,25	0,10	8,7	1,27	0,09	7,6
după scoaterea din sarcină	—	—	—	—	—	—	1,35	0,20	17,3	1,37	0,19	16,1
după 12 ore odihnă atm. umedă	—	—	—	1,53	0,32	26,4	—	—	—	—	—	—
după 12 ore odihnă atm. liberă	1,41	0,19	15,5	1,50	0,29	23,9	1,37	0,27	23,4	1,40	0,22	18,6

δ — grosimea epruvetei, $\Delta\delta$ — variaţia grosimii epruvetei.

Această comportare trebuie pusă pe seama valorii îngustării epruvetei în porţiunea de mijloc; această valoare creşte cu cît creşterea grosimii este mai mare.

Valorile apropiate în cazul regimurilor *B* şi *C*, deşi alungirea remanentă este diferită, ar putea fi explicată prin faptul că în cazul regimului *B* uscarea se face pe epruvetele scoase din sarcină, fapt care permite fenomenului de contracţie sub efectul uscării să se manifeste în voie.

4. Variaţia coeficientului de contracţie transversală remanentă

Coeficientul de contracţie transversală remanentă arată modificări esenţiale prin variaţia parametrilor de condiţionare, solicitare şi odihnă; aceste aspecte se pot urmări în tabelul 5 şi fig. 3, în care coeficientul de contracţie transversală remanentă variază între 0,876 şi 1,568.

Se constată că cel mai mare coeficient de contracţie transversală remanentă se întîlneşte la epruvetele condiţionate după regimul *C*. Acest rezultat este în conformitate cu rezultatele anterioare.

Coeficientul de contracţie mare la epruvetele condiţionate după regimul *B* se explică prin faptul că toate transformările din ţesut au loc la un conţinut ridicat de umiditate, ceea ce a permis să se obţină o îngustare mare a epruvetei, comparativ cu alungirea ei.

Îngustarea mare a epruvetei concordă cu îngroşarea sa, care a fost redată în tabelul 4.

Creşterea coeficientului de contracţie transversală de la valoarea avută în cazul solicitării la 1 kgf/mm², pînă la valoarea pe care o are în cazul contracţiei transversale remanente, prezintă cele mai mari dife-

Tabelul 5

Valoarea coeficientului de contracție transversală

	Regimul de condiționare	Valori inițiale	la 1 kgf/mm²	12 ore 100%	atm. liberă	readucere în sarcină	scos din sarcină	12 ore 100%	odihnă atm. liberă
A	L (mm)	100	141,4	—	141,4	143,4	127,6	—	124,7
	ΔL (mm)	—	41,4	—	41,4	43,4	27,6	—	24,7
	ε_L (%)	—	41,4	—	41,4	43,4	27,6	—	24,7
	B (mm)	25	16,43	—	16,27	15,84	18,84	—	19,57
	ΔB (mm)	—	8,67	—	8,73	9,16	6,16	—	5,43
	ε_B (%)	—	34,68	—	34,92	36,64	24,64	—	21,72
	$\varepsilon_B/\varepsilon_L$	—	0,836	—	0,840	0,844	0,876	—	0,876
B	L (mm)	100	145,0	145,0	—	147,7	125,9	123,6	122,6
	ΔL (mm)	—	45,0	45,0	—	47,7	25,9	23,6	22,6
	ε_L (%)	—	45,0	45,0	—	47,7	25,9	23,6	22,6
	B (mm)	25	14,57	14,24	—	13,9	17,5	18,0	17,7
	ΔB (mm)	—	10,43	10,76	—	11,1	7,5	7,0	7,3
	ε_B (%)	—	41,72	43,04	—	44,4	30,0	28,0	29,2
	$\varepsilon_B/\varepsilon_L$	—	0,924	0,956	—	0,928	1,156	1,184	1,292
C	L (mm)	100	138,66	138,66	138,66	141,45	128,27	—	126,2
	ΔL (mm)	—	38,66	38,66	38,66	41,45	28,27	—	26,2
	ε_L (%)	—	38,66	38,66	38,66	41,45	28,27	—	26,2
	B (mm)	25	16,02	15,75	14,64	14,40	13,87	—	14,71
	ΔB (mm)	—	8,92	9,25	10,36	10,60	11,30	—	10,29
	ε_B (%)	—	35,68	37,00	41,44	42,40	45,2	—	41,16
	$\varepsilon_B/\varepsilon_L$	—	0,920	0,956	1,068	1,020	1,572	—	1,568
D	L (mm)	100	139,21	—	139,21	141,1	126,36	—	123,82
	ΔL (mm)	—	39,21	—	39,21	41,1	26,36	—	23,82
	ε_L (%)	—	39,21	—	39,21	41,1	26,36	—	23,82
	B (mm)	25	13,37	—	15,01	14,80	17,42	—	17,87
	ΔB (mm)	—	11,63	—	9,99	10,20	7,58	—	7,13
	ε_B (%)	—	46,52	—	39,96	40,80	30,32	—	28,52
	$\varepsilon_B/\varepsilon_L$	—	1,184	—	1,056	0,992	1,132	—	1,196

renţe în cazul regimului *C*, urmat de regimul *B*; în cazul regimurilor *A* şi *D* creşterile au valori mici. Această comportare este în legătură cu mobilitatea ţesutului în perioada în care se fac solicitările.

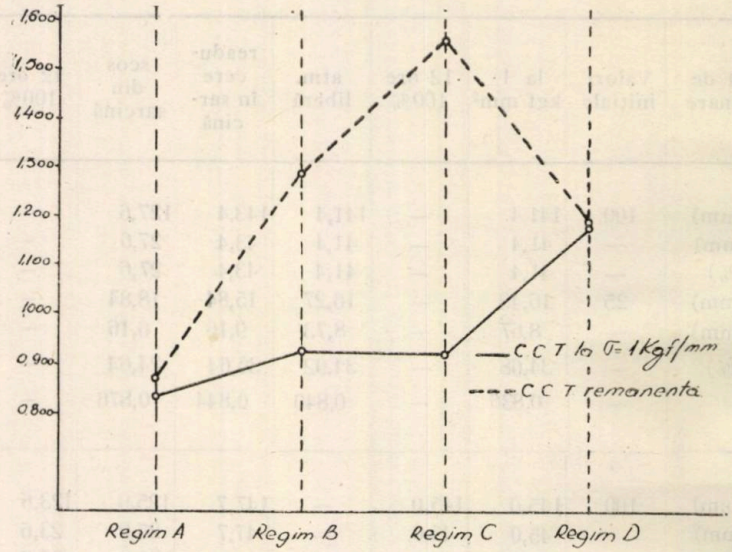


Fig. 3

5. Variaţia rezistenţei la rupere

Această caracteristică arată aceeaşi dependenţă faţă de regimul de condiţionare ca şi celelalte caracteristici.

Astfel, cea mai mare rezistenţă la rupere (tabelul 6 şi fig. 4) se întîlneşte în cazul regimului *C*.

În tabelul 6 se dă şi valoarea efortului unitar de rupere raportat la secţiunea iniţială. Rezultatele prezintă variaţii relativ mici. Raportînd

Tabelul 6

Variaţia rezistenţei la rupere

	A	*B*	*C*	*D*
Lăţimea iniţială (mm)	25	25	25	25
Grosimea iniţială (mm)	1,22	1,21	1,15	1,18
Aria secţiunii epruvetei (mm^2)	30,5	30,25	28,75	29,5
Lăţimea după odihnă îndelungată (14 zile) (mm)	19,57	17,7	14,71	17,87
Grosimea după odihnă îndelungată (14 zile) (mm)	1,41	1,50	1,37	1,40
Secţiunea epruvetei după odihnă îndelungată (14 zile) (mm^2)	27,59	26,55	20,15	25,01
Sarcina de rupere (kgf)	88,4	80,80	82,28	81,23
Efortul unitar la rupere raportat la secţiunea iniţială (kgf/mm^2)	2,89	2,63	2,85	2,75
Efortul unitar la rupere raportat la secţiunea finală (kgf/mm^2)	3,20	3,04	4,07	3,25

efortul de rupere la secțiunea finală, epruvetele supuse regimului *C* prezintă o creștere considerabilă a efortului unitar de rupere, ca efect al orientării țesutului prin condiționare.

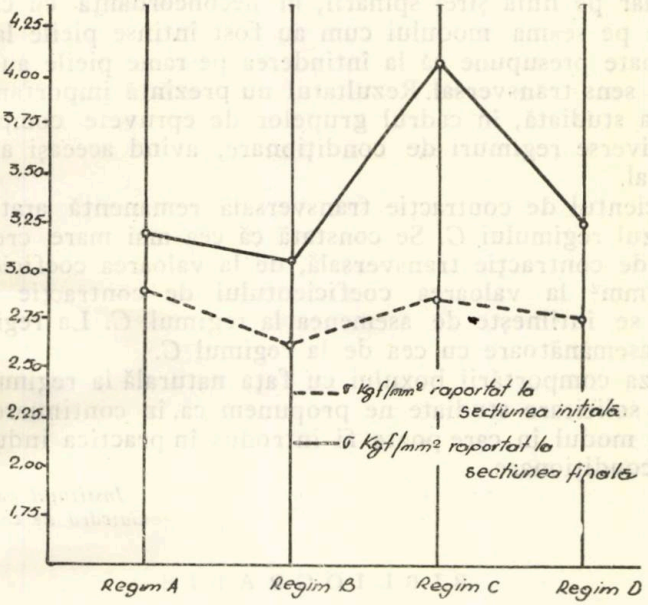


Fig. 4

6. Concluzii

Rezultatele studiului efectuat confirmă rezultatele și concluziile studiilor anterioare în privința rolului jucat de uscare și relaxare în procesul de transformare în deformări remanente a transformărilor ce se produc în domeniul la care au fost solicitate epruvetele.

Luînd drept bază rezultatele medii, fenomenul de relaxare manifestat singur afectează cea mai mare parte a alungirilor remanente (regimul *C* — 50,2 % din alungirea totală); în cazul cînd peste relaxare se suprapune uscarea, efectul transformării alungirii elastice în alungire remanentă este mai mare, alungirile remanente atingînd 60,7 % din alungirea totală. Aceasta se datorește readucerii epruvetelor în sarcină sub efectul uscării, fapt care permite fenomenului de relaxare să se manifeste încă.

Uscarea pielii în sarcină fixează țesutul, final alungirea remanentă fiind mai mare.

În cazul regimului *C*, la care fenomenul transformării deformărilor elastice în deformări remanente a fost împărțit în două etape — prima etapă în care s-a manifestat numai relaxarea și a doua etapă în care au avut loc concomitent atît uscarea cît și relaxarea — alungirea remanentă arată 67,6 %. Aceasta se explică în parte prin mobilitatea ridicată a țesutului umed în prima etapă a determinării și prin însumarea efectului uscării și relaxării în cea de a doua etapă.

Aceste comportări pledează pentru alegerea regimului *C* de condiţionare şi solicitare.

Rezultatele comportării la deformare a probelor tăiate paralel sau perpendicular pe linia şirei spinării, în neconcordanţă cu cazul general, pot fi puse pe seama modului cum au fost întinse pieile la uscarea pe rame; se poate presupune că la întinderea pe rame pieile au fost întinse exagerat în sens transversal. Rezultatul nu prezintă importanţă deosebită în problema studiată, în cadrul grupelor de epruvete comportarea probelor, la diverse regimuri de condiţionare, avînd aceeaşi alură ca şi în cazul general.

Coeficientul de contracţie transversală remanentă arată valori maxime în cazul regimului *C*. Se constată că cea mai mare creştere a coeficientului de contracţie transversală, de la valoarea coeficientului pentru 1 kgf/mm^2 la valoarea coeficientului de contracţie transversală remanentă, se întîlneşte de asemenea la regimul *C*. La regimul *B* creşterea este asemănătoare cu cea de la regimul *C*.

Pe baza comportării boxului cu faţa naturală la regimurile de condiţionare — solicitare studiate ne propunem ca, în continuarea cercetării, să urmărim modul în care poate fi introdus în practica industrială regimul *C* de condiţionare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de confecţii din piele

BIBLIOGRAFIE

1. Cernov V. N. şi colab., *Tehnologia pielii*, Ed. Tehn. Buc., 1956, (trad. din l. rusă)
2. Lîkov A. V., *Teoria uscării*, ESAC, Buc., 1954, (trad. din l. rusă).
3. Кавказов Ю. Л., *Взаимодействие кожи с влагой*, Гизлегпром, М., 1952.
4. Зыбин Ю. П., *Технология обуви*, ч. **II**, Гизлегпром, М., 1955.
5. Cociu V., Duma L., Fica A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII** (**XI**), *3—4*, pp. 386—398.
6. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII** (**XI**), *3—4*, pp. 407—420.

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ХРОМОВОЙ КОЖИ С ЕСТЕСТВЕННЫМ ЛИЦОМ НА ПРОЦЕСС ФОРМОВАНИЯ

(Резюме)

Даются результаты экспериментов над образцами хромовой кожи с естественным лицом, в целях установления условий при которых имеет место превращение упругих деформаций в остаточные.

С этой целью образцы подвергаются разнообразным режимам увлажнения, испытания, сушки и исследуются изменения главных механических характеристик.

INFLUENCE DES PROPRIÉTÉS DU BOX-CALF À SURFACE NATURELLE SUR LE PROCESSUS DE FORMATION

(Résumé)

On présente les résultats des expériences effectuées sur des éprouvettes de box-calf à surface naturelle dans le but d'établir les conditions dans lesquelles se produit la transformation des déformations élastiques en déformations permanentes.

Dans ce but les éprouvettes ont été soumises à différents régimes, tels que: humidification — solicitation — séchage, en analysant le mode de la variation des principales caractéristiques mécaniques.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Ştiinţe economice

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том VIII (XII), вып. 3—4, 1962

Экономические науки

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. VIII (XII), fasc. 3—4, 1962

Economics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C Z. 338 ; 677

EFICIENŢA ECONOMICĂ A MODERNIZĂRII ŞI ÎNLOCUIRII UTILAJULUI LA FABRICA „ŢESĂTURA" — IAŞI

DE

EUGEN POPA, I. C. ŞTEFĂNESCU, N. BĂDAN, EUGEN FLOREA,
V. COPILU şi COSTACHE RUSU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

Documentele Congresului al III-lea al P. M. R. au trasat un plan grandios de dezvoltare a tuturor ramurilor economiei naţionale, pe baza progresului tehnic neîntrerupt şi a creşterii continue a productivităţii muncii. O cale principală a progresului tehnic o constituie modernizarea şi înlocuirea utilajului, acolo unde se justifică din punct de vedere economic. Ţinînd seama de această sarcină, cu ajutorul căreia se vor asigura însemnate capacităţi de producţie, ne-am propus în prezenta lucrare să studiem eficienţa economică a modernizării şi înlocuirii utilajului la fabrica „Ţesătura" - Iaşi, bazaţi şi pe prevederile documentelor Congresului al III-lea, care subliniază necesitatea înlocuirii utilajelor din industria textilă cu uzură fizică şi morală avansată şi dotarea acesteia cu războaie automate de ţesut.

Utilajul cu care este înzestrată fabrica „Ţesătura" are un nivel tehnic diferit de cel atins la utilajele actuale.

Modernizarea utilajului are ca scop eliminarea uzurii morale şi are ca efect mărirea volumului producţiei, creşterea productivităţii muncii sociale, reducerea cheltuielilor de investiţii şi scăderea preţului de cost al producţiei.

Faţă de modernizarea actuală a utilajului există de obicei următoarele două cerinţe contradictorii, în legătură, pe de-o parte cu aducerea tehnicii învechite, aflate în exploatare, la nivelul actual cel mai înalt, iar pe de altă parte, cu adoptarea unor soluţii constructive simple a căror realizare să nu fie prea costisitoare. Pentru satisfacerea acestor două cerinţe contradictorii este necesară calcularea eficienţei economice a modernizării utilajului în funcţiune.

Modernizarea de obicei se face o dată cu reparaţia capitală a maşinii. În acest caz apare, de regulă, necesitatea comparării cheltuielilor după trei variante şi anume: a) repararea maşinii vechi, b) modernizarea maşinii vechi, c) înlocuirea maşinii vechi cu alta nouă. Pentru compararea acestor trei variante vom utiliza tabelul 1.

În multe cazuri au loc următoarele relaţii între indicatorii variantelor examinate:

$$R_c < I_m < I_n, \quad C_r > C_m > C_n, \quad q_r < q_m < q_n.$$

În cazul în care $R_c/q_r > I_m/q_m$ şi $C_r > C_m$ apare evident că modernizarea este mai indicată decît repararea maşinii. Cînd însă $R_c/q_r < I_m/q_m$ şi $C_r > C_m$, pentru aprecierea eficienţei economice a modernizării utilajului se adoptă drept criteriu timpul de recuperare a investiţiilor suplimentare care se calculează după formula:

$$\tau = (I_m/q_m - R_c/q_r)/(C_r - C_m) \quad \text{[ani]}. \tag{1}$$

Tabelul 1

Indicatorii pe variante comparate

Denumirea indicatorilor	U/M	Variantele		
		Repararea maşinii vechi	Modernizarea maşinii vechi	Înlocuirea maşinii vechi cu alta nouă
Investiţii	lei	R_c	I_m	I_n
Productivitatea anuală a maşinii	buc./an	q_r	q_m	q_n
Preţul de cost pe unitatea de produs	lei/buc.	C_r	C_m	C_n

Rezolvarea problemei înlocuirii tehnicii vechi cu alta nouă depinde, în primul rînd, de măsura în care tehnica cea mai nouă este mai bună în exploatare, deci cu cît reduce mai mult preţul de cost al unităţii de produs, în ce măsură uşurează munca etc. Însă rezolvarea problemei momentului celui mai raţional al înlocuirii tehnicii vechi cu alta nouă este legată de starea tehnică a acestuia. De obicei problema înlocuirii utilajului trebuie să se rezolve în ajunul reparaţiei capitale a acestuia. În acest caz trebuie să se verifice în prealabil ce este mai economic: cheltuiala de fonduri pentru repararea utilajului vechi sau cheltuiala pentru înlocuirea utilajului vechi cu utilaj nou.

În cazul în care costul reparaţiei depăşeşte valoarea utilajelor noi este evident mai economică înlocuirea tehnicii vechi cu una nouă, care are şi indicatori de exploatare mai buni. Dacă însă costul reparaţiei capitale este mai mic decît valoarea utilajului nou s-ar părea că reparaţia capitală este mai indicată.

În cazul cînd preţul de cost unitar al producţiei realizate cu maşina nouă este mai mic, adică dacă există relaţiile: $R_c/q_r < I_n/q_n$ şi $C_n < C_r$, se alege drept criteriu de eficienţă economică timpul de recuperare a investiţiilor suplimentare cu ajutorul economiilor de exploatare:

$$\tau = (I_n/q_n - R_c/q_r)/(C_r - C_n) \quad \text{[ani]}. \tag{2}$$

În anumite cazuri poate apare necesitatea rezolvării problemei înlocuirii tehnicii vechi, independent de cheltuielile pentru reparaţia capitală ce urmează a se efectua. În acest caz timpul de recuperare se calculează cu formula:

$$\tau = (I_n/q_n)/(C_r - C_n) \quad \text{[ani]}. \tag{3}$$

Varianta modernizării sau înlocuirii, care necesită investiţii mai mari decît reparaţiile capitale, va fi totuşi mai eficientă în cazul în care timpul de recuperare τ, calculat cu ajutorul formulei (3), este mai mic decît cel fixat prin instrucţiuni. Astfel timpul de recuperare normat în U.R.S.S. este de 6 ani; de asemenea în R.P.P. acest timp este de 6 ani, stabilit prin instrucţiuni. Aceasta înseamnă că după 6 ani cheltuiala de muncă socială, reprezentată în cheltuielile de investiţii, trebuie restituită societăţii.

La noi în ţară nu există deocamdată o astfel de normă a termenului de recuperare, care trebuie să constituie criteriul în stabilirea eficienţei economice a investiţiilor necesare pentru modernizări sau înlocuiri de utilaje. În cele ce urmează vom considera, ţinînd seama de experienţa U.R.S.S. şi a unor ţări de democraţie populară, în acest domeniu, ca durată pentru timpul de recuperare tot valoarea de 6 ani.

La cercetarea eficienţei modernizării şi înlocuirii utilajului la Fabrica „Ţesătura" — Iaşi am folosit principiile şi metodica de calcul enunţate mai sus. În acest scop au fost studiate următoarele utilaje de bază:

I. *La filatură.*

a) Modernizarea a 80 carde prin adaptarea dispozitivului de precardare.

b) Modernizarea a 16 laminoare, a 4 livrări la fiecare din cele trei treceri, prin creşterea vitezei cilindrilor debitori, de la 30 m/min la 60 m/min.

c) Adaptarea trenului de laminat I.C.T. la 52 maşini cu inele.

II. *La ţesătorie.*

a) Înlocuirea maşinilor de bobinat cu maşini moderne „Metalurgica" — Sibiu.
b) Înlocuirea maşinilor de canetat cu maşini automate de mare productivitate.
c) Înlocuirea a 50% (550 buc.) din războaiele actuale cu războaie automate.

I. a) *Modernizarea cardei pentru obţinerea unei productivităţi mărite*

Carda Platt de la întreprinderea „Ţesătura" are următoarele caracteristici:

Turaţia tamburului principal	170 ... 180 rot/min.
Turaţia cilindrului perietor	4 ... 10 rot/min.
Diametrul cilindrului perietor	0,690 m,
Lungimea debitată	25 ... 36 m/min.

Producţia teoretică calculată cu formula:

(a) $$P_t = (l/Nm)\,(60/1\,000)\ \text{[kg/h]}$$

poate fi pentru număr metric ($Nm = 0{,}20 \ldots 0{,}30$) de 4 ... 6 kg/h. Producţia practică pentru CTU = 0,85 este $P_r = P_t$ CTU = 3,5 ... 5 kg/h.

Modificările aduse constau în: a) montarea unui dispozitiv de precardare compus dintr-un cilindru lucrător cu garnitură rigidă cu diametru de 0,88 mm şi turaţia de 4 ... 12 rot/min şi a unui cilindru curăţitor (întorcător) cu diametrul de 0,57 m şi turaţia de 940 rot/min; b) mărirea turaţiei cilindrului rupător la 600 ... 650 rot/min; c) mărirea turaţiei tamburului principal la 210 rot/min; d) reducerea vitezei linialelor capacului la 60 ... 65 mm/min.

Se obţine o creştere a productivităţii cardei de 15 ... 20% şi o îmbunătăţire a calităţii cardării de 30% (IVNITI) sau se reduce numărul de carde cu 15% din cel existent.

I. b) *Transformarea laminorului clasic în laminor de înaltă productivitate*

Laminorul clasic „Platt" de la întreprinderea „Ţesătura", are următoarele caracteristici tehnice:

Diametrul cilindrilor debitori	30 mm,
Turaţia cilindrilor debitori	250 ... 350 rot/min,
Lungimea debitată	25 ... 35 m/min.

Pentru bandă debitată cu $Nm = 0{,}20 \ldots 0{,}30$ producţia teoretică pe oră va fi de 5...10 kg/oră, calculată cu formula (a), iar producţia practică poate fi pentru CTU = 0,85, cuprinsă între 4,25 ... 9 kg/oră.

Prin introducerea unor modificări simple se poate mări viteza de lucru a maşinii cu 100 ... 120% şi în consecinţă şi productivitatea maşinii. Aceste modificări au fost încercate cu foarte bune rezultate la Institutul de cercetări textile din Bucureşti. Ele constau din: a) înlocuirea lagărelor cu alunecare ale cilindrilor debitori, prin lagăre cu rulmenţi; turaţia maximă a acestora atinge 1/5 din turaţia maximă admisibilă pentru o durată de funcţionare de 1,5 ani în trei schimburi; b) introducerea cilindrilor de presiune cu piele, rezemaţi în bucşe cu rulmenţi; c) modificarea instalaţiei electrice de oprire automată în cazul ruperii unei benzi, astfel ca ea să funcţioneze rapid; d) montarea în zona neutră a unui condensator de voal din carton; e) montarea capului de antrenare al arborelui cilindrilor debitori pe un lagăr de rostogolire: f) montarea transmisiei la căni pe lagăre cu rostogolire pentru reducerra sgomotului; g) trenul de laminat va fi transformat în tren de laminat cu două zone pentru asigurarea unei uniformităţi bune a benzii.

Aceasta se realizează prin transformarea rapoartelor de transmisie la cilindrii alimentatori şi intermediari. Prin creşterea vitezei de lucru cu 120% producţia practică creşte şi ea la dublu dat fiind reducerea coeficientului CTU la 0,80. Prin aceasta capacitatea creşte la dublu, ceea ce permite reducerea spaţiului cu 50%.

I. c) *Adaptarea la maşinile de filat cu inele a unui tren de laminat tip ICT.*

Cu trenurile actuale de laminat, cu o cureluşe tip „Le Blan" şi „Roth", se lucrează practic cu laminaje cuprinse între 12 şi 18.

Prin adaptarea unui tren de laminat *ICT* tip 1, capabil de laminaje practice cuprinse între 25 şi 35, se pot obţine din semitorturi mai groase aceleaşi fire şi în acest caz se poate reduce numărul de flyere, sau din acelaşi semitort se pot fila fire mai fine.

Întrucît producţia este mai mică pe fus/oră în ipoteza a doua, este necesar a se mai monta maşini cu inele.

Calculul economic

Calculele economice s-au efectuat pentru fiecare utilaj din cele enumerate mai sus după cum urmează:

Tabelul 2
Carde

Denumirea indicatorilor	Situaţia veche	Situaţia după modernizare
Investiţii (lei)		$80 \times 10\,000 = 800\,000$
Producţia anuală pentru 80 carde (kg/an)	$80 \times 38\,000 = 3\,045\,000$	$80 \times 46\,000 = 3\,680\,000$
Preţul de cost (lei/kg)	0,880	0,705

$$\tau = (I_m/q_m)/(C_r - C_m) = 1{,}28 \text{ ani}$$

Tabelul 3
Laminor

Denumirea indicatorilor	Situaţia veche	Situaţia după modernizare
Investiţii (lei/maşină)	—	288 000
Producţia anuală (kg/an maşină)	3 050 000	6 100 000
Preţul de cost unitar (lei/kg)	0,42	0,32

$$\tau = (I_m/q_m)/(C_t - C_m) = 0{,}49 \text{ ani}, \quad \tau < \tau \text{ normat}, \quad C_r > C_m,$$

Tabelul 4
Maşina cu inele

Denumirea indicatorilor	Situaţia veche	Situaţia după modernizare
Investiţii (lei)	—	—
Producţia anuală (kg/an)	2 700 000	2 700 000
Preţ de cost unitar (lei/kg)	2,5	2,5

Observaţie. Prin introducerea acestei modernizări se eliberează însemnate suprafeţe de producţie la maşinile anterioare (flyere, laminoare, carde) care nu pot fi estimate cu uşurinţă în calcule.

Tabelul 5
Înlocuirea maşinilor de bobinat cu maşini „Metalurgica"-Sibiu

Denumirea indicatorilor	Variante	
	Situaţia veche	Situaţia în cazul înlocuirii cu maşini „Metalurgica"-Sibiu
Investiţii pe maşină a 80 fuse (lei)	—	108 000
Producţia anuală pe maşină (kg *Nm* 34/1)	245 000	585 600
Preţul de cost unitar (lei)	0,917	0,237

$$\tau = (I_n/q_n)/(C_r - C_n) = 0{,}30 \text{ ani}, \quad \tau < \tau_{\text{normat}}, \quad C_r > C_n.$$

Tabelul 6

Mașini de canetat

Denumirea indicatorilor	Variante	
	Situația veche	Situația în cazul înlocuirii cu mașini „Hacoba"
Investiții pe mașină a 16 fuse (lei)	—	52 000
Producția anuală a unei mașini (kg ptr. *Nm* 34/1)	47 200	58 600
Prețul unitar (lei)	1,898	0,320

$$\tau = (I_n/q_n)/(C_r - C_n) = 0{,}332 \text{ ani}, \quad \tau < \tau_{\text{normat}}, \quad C_r > C_n .$$

Tabelul 7

Înlocuirea războaielor de țesut cu războaie automate românești

Denumirea indicatorilor	Variante	
	Situația veche	Situația în cazul înlocuirii cu mașini automate românești
Investiții pe război (lei)	—	45 000
Producția anuală a mașinii (m/an)	26 500	39 324
Prețul de cost unitar (lei/m)	1,036	0,726

$$\tau = (I_n/q_n)/(C_r - C_n) = 3{,}72 \text{ ani}, \quad \tau < \tau_{\text{normat}}, \quad C_r > C_n .$$

Concluzii

Din examinarea tabelelor de mai sus se pot trage mai multe concluzii:

În primul rînd linia modernizării utilajului tehnologic în filatura de bumbac este eficientă, atît la carde cît și la laminoare, în cazul de față recuperarea investiției făcîndu-se într-un termen sub 2 ani (sau chiar un an).

În cazul mașinii cu inele formula nu se poate aplica, deci nici criteriul termenului de recuperare, producția rămînînd aceeași ca și prețul de cost. Apar însă alte avantaje care permit a aprecia ca indicată modernizarea mașinii cu inele. Se permite prelucrarea unui semitort de *Nm* mai mic ceea ce face posibilă reducerea numărului de flyere, laminoare și deci a suprafețelor de producție, care nu pot fi luate în calcule cu ușurință, dar prezintă o importanță deosebită. Se oferă posibilitatea montării de fuse noi în spațiile existente, ce devin disponibile ca urmare a modernizării O dată cu reducerea numărului de utilaje în preparație, în afară de eliberarea de suprafețe de producție se fac economii de muncă.

Înlocuirea utilajului în țesătorie este eficientă, după cum se constată, termenul de recuperare a investițiilor suplimentare fiind sub 4 ani (chiar sub un an).

Modernizarea și înlocuirea utilajului trebuie examinată nu numai sub aspectul termenului cît mai scurt de recuperare a investițiilor suplimentare, ci și sub aspectul micșorării prețului de cost al producției fabricate cu aceste mașini; în cele ce urmează ne-am preocupat și de această problemă. Astfel, din tabelele examinate se constată că prețul de cost scade: a) la carde de la 0,88 lei/kg la 0,70 lei/kg, deci cu 20%; b) la laminor de la 0,42 lei/kg la 0,32 lei/kg, deci cu 25%: c) la mașinile de bobinat de la 0,92 lei/kg la 0,24 lei/kg, deci cu 75%; d) la mașinile de canetat de la 0,90 lei/kg la

0,32 lei/kg, deci cu 70% ; e) la războaiele de ţeşut de la 1,04 lei/kg la 0,726 lei/kg, deci cu 25%; f) la maşina cu inele se obţine creşterea *Nm* mediu al filaturii. Rămîn libere unele suprafeţe de producţie prin reducerea numărului de carde cu 15% şi de laminoare cu 50%.

În sectorul ţesătorie, prin înlocuirea utilajelor existente cu altele noi, în afara reducerii preţului de cost mai apar următoarele avantaje: a) se eliberează unele suprafeţe; b) productivitatea muncii creşte prin repartizarea unui număr mai mare de agregate aceluiaşi muncitor; c) cheltuielile de întreţinere a utilajelor scad; d) calitatea semifabricatelor şi produselor creşte dat fiind posibilitatea de reglare a parametrilor tehnologici; e) consumul de materiale auxiliare scade prin posibilitatea de reglare ştiinţifică a utilajelor moderne.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de organizare şi planificare,
Catedra de ţesătorie,
Catedra de filatură

BIBLIOGRAFIE

1. *** *Documentele Congresului al III-lea al P. M R.*, Ed. Polit., Buc., 1960, pp. 30 — 33.
2. *** *Hotărîrea C. C. al P. M. R. şi a Consiliului de Miniştri al R. P. R. cu privire la ridicarea nivelului tehnic al producţiei*, Ed. Polit., Buc., 1960, p. 17.
3. Жданов А. И., *Экономическая эффективность модернизации оборудования*, Госпланиздат, М., 1960, стр. 1—26.
4. Konsch A. I., *Eficacitatea economică a tehnicii noi*, Ed. şt., Buc., 1960, p. 403.
5. Kasiewiez H. M., Planif. într. şi efic. econ. a tehn. noi, 1961, *7*, Caiet selectiv, pp. 335 — 339, (trad. din l. polonă).
6. Baraţ I., Loghovinschi M., Planif. într. şi efic. econ. a tehn. noi, 1961, *10*, Caiet selectiv, pp. 491 — 496, (trad. din l. rusă).
7. *** *Culegere de lucrări*, I. C. T., Buc., pp. 26 — 49.

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МОДЕРНИЗАЦИИ И ЗАМЕНЫ ОБОРУДОВАНИА НА ФАБРИКЕ „ЦЕСЭТУРА" — г. ЯСС

(Резюме)

Исследуется экономическая эффективность модернизации и замены прядильного и ткацкого оборудования на фабрике „Цесэтура"-г. Яес. Производятся расчеты себястоимости продукции до и иосле модернизации и замены. На этом основании расчитаны условия годовой экономии и ерок окупаемости расходов.

L'EFFICACITÉ ÉCONOMIQUE DE LA MODERNISATION ET SUBSTITUTION DE L'OUTILLAGE CHEZ LA FABRIQUE „ŢESĂTURA" DE JASSY

(Résumé)

On étudie l'efficacité économique de la modernisation de l'outillage dans la filature et de la substitution de l'outillage dans la section de tissage chez la fabrique „Ţesătura" de Jassy, par le calcul du prix de revient des produits avant et après la modernisation, respectivement la substitution. Sur cette base on a calculé l'économie annuelle conventionnelle et le terme de récupération des dépenses.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

C. Z. 338.07

UN PRINCIPIU FUNDAMENTAL ÎN TEORIA CONTABILITĂŢII

DE

D. RUSU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 6–8 februarie 1960

Ori de cîte ori se pun în acţiune mijloace economice în cadrul unităţilor economiei naţionale, asupra lor se pot institui calcule precise în măsură să le urmărească transformările succesive—cantitativ şi valoric—să înfăţişeze periodic poziţia valorilor aflate în mişcare şi rezultatele obţinute.

Modificările succesive ale mijloacelor de lucru sînt reprezentate cifric în conturi. Contabilitatea ca disciplină ştiinţifică are ca punct de plecare a cunoaşterii ei bilanţul iniţial. Egalitatea de bilanţ Activ=Pasiv ($A=P$), este un principiu în teoria contabilităţii. „Principiul este cel mai bun punct de plecare pentru fiecare lucru, de exemplu chiar în ştiinţă nu trebuie să începi întotdeauna prin început şi prin noţiunea primă a obiectului, dar prin ce poate mai bine să uşureze studiul... Principiul se spune şi despre cauza primitivă şi neimanentă a producerii, despre punctul ei de plecare natural al mişcării sau al schimbării“ [1].

Relaţia $A=P$ este în măsură să furnizeze o explicaţie cauzală fenomenelor pe care le observă şi le studiază contabilitatea.

Activ[1]) înseamnă însăşi totalitatea mijloacelor economice aflate la dispoziţia unei întreprinderi, instituţii sau organizaţii economice, exprimate în bani, aşa cum sînt ele constituite şi utilizate în procesul îndeplinirii planului. Ca substanţă de activ mijloacele economice au valoare

---

[1]) Unii au identificat în activ „avere“; alţii cuprind în această noţiune „obiecte de drepturi şi de obligaţiuni“. Unii autori văd în activ „realităţi“, „mijloace economice“ şi „elemente de altă natură care nu sînt, pentru că nu pot fi avere“ etc.

Unii autori au văzut sau văd în pasiv „avere curată“ şi „avere negativă“ sau „capital propriu“ şi „capital străin“ sau „patrimoniu net“ şi „datorii“ sau „drepturi pecuniare nete“ şi „obligaţiuni ale subiectului de patrimoniu“ sau „valoarea totală a averii în reprezentarea ei abstractă“ sau „resurse proprii“ şi „resurse străine“ sau „surse“ etc. [2]... [5].

de schimb, structura lor se modifică necontenit în funcţie de tehnologia procesului de producţie. Exemplare noi, de aceeaşi natură, iau locul celor dintîi; şi după un număr de ani, mijloacele iniţiale se preschimbă sau se reînnoiesc în totalitatea lor.

Ceea ce rămîne în această masă cu compoziţie schimbătoare este o substanţă de natură deosebită, reflectată de pasiv, şi pe care o numim *resurse* [6].

Pasivul cuprinde totalitatea resurselor, exprimate în bani, în ordinea lor de formare şi după destinaţia lor în procesul de reproducţie. Definiţia pasivului ca indicator al formării mijloacelor se completează cu adausuri că în pasiv se reflectă structura economic - organizatorică şi regimul de drept al resurselor întreprinderii.

Astfel pasivul arată mai întîi care este structura de organizare, ordinea de formare şi regimul de drept al resurselor şi în al doilea rînd ce destinaţie au ele în procesul de reproducţie socialistă.

Egalitatea Activ = Pasiv oglindeşte şi raporturile economico-juridice ale întreprinderii. Raporturi economico-juridice nu se nasc numai între întreprindere şi stat ci şi între întreprindere şi terţi. Din punct de vedere economic juridic, pasivul caracterizează gradul de răspundere al întreprinderii faţă de stat, pentru partea din avutul întregului popor cît şi pentru angajamentele întreprinderii faţă de terţi [7]. Raza de acţiune a contabilităţii se întinde nu numai asupra proprietăţii de stat şi asupra proprietăţii cooperatist-colectiviste. Sub raport cauzal egalitatea Activ = Pasiv înfăţişează deci două aspecte: unul de natură economică şi altul de natură juridică.

Activ	=	Pasiv
1. Mijloace economice, concepute ca realităţi în compunerea şi utilizarea lor în producţie.		1. Resurse, în ordinea lor de formare şi după destinaţia lor în procesul de reproducţie.
2. Existenţa materială a bunurilor cu valoare de schimb.		2. Provenienţa bunurilor.
3. Valoarea totală a bunurilor.		3. Puterea abstractă de dispunere asupra acestor bunuri.
Suma	=	Suma

Supuse metodei de cunoştere a contabilităţii, mijloacele economice devin elemente de activ şi resursele — elemente de pasiv. Metoda cantitativă stabileşte:

Activ	Bilanţ iniţial	Pasiv
Mijloace economice exprimate în etalon bănesc.		Resurse exprimate în etalon bănesc.

$$M = R$$

Dacă Activ = Pasiv este o relație cauzală, egalitatea Mijloace = Resurse apare ca o axiomă, ca un adevăr prin sine însuși. Inițial activul cuprinde mijloace economice exprimate în bani, pasivul reflectă resursele exprimate valoric. Mijloacele economice și resursele se află într-o continuă mișcare și transformare. Ele acționează sub voința rațională a conducerii în direcția îndeplinirii ritmice a planului economic. Are loc un proces continuu de eliminare, înlocuire, transformare ori preschimbare treptată a fiecărui element component al masei de mijloace aflate în posesia întreprinderii. Modificările și transformările succesive sînt provocate de operații economice și de relații cu caracter juridic-economic.

Mișcările de valori dau naștere la trei categorii de modificări în structura elementelor de activ și de pasiv.

Se pot produce modificări numai în cadrul activului sau numai în cadrul pasivului. Se pot produce concomitent modificări și în cadrul activului și în cadrul pasivului; activul și pasivul pot suferi modificări și în sensul că înregistrează sporiri sau reduceri prin apariția rezultatelor negative ori pozitive.

În concluzie, la o mărime invariabilă a activului sau a pasivului se pot modifica sau unele posturi din activ, unul pe socoteala altuia, sau unele posturi din pasiv, unul pe socoteala altuia. Și apoi dacă sporește sau se reduce activul — cu aceeași mărime — în aceeași măsură sporește sau se reduce și pasivul. Egalitatea de bilanț valoric se menține.

Contabilitatea observă mișcările de valori în următoarele manifestări: a) mișcări ale mijloacelor economice în componența și utilizarea lor; b) mișcări ale resurselor în ordinea lor de formare și după destinația lor în procesul de reproducție; c) ca sporire sau apariție a unor noi mijloace prin sporirea sau apariția unor resurse; d) ca reducere sau dispariție a unor mijloace existente prin reducerea sau dispariția unor resurse.

Afirmații certe controlate în maximă măsură posibilă pe baza principiului Activ = Pasiv

Conceptul economic juridic cuprins în egalitatea $A = P$, lasă raționamentului posibilitatea de a formula reguli, judecăți noi în legătură cu transformările continue ce se produc în structura activului și în cadrul pasivului. O definiție științifică, o regulă, o lege, este un raport constant regăsit întotdeauna identic cu el însuși, în infinita diversitate a împrejurărilor în care se produc fenomenele. „Statornicia în sînul variației, iată formula generală a legilor".

Pornind de la relația cauzală cunoscută observăm că mișcările de valori provocate de fenomenele economice și de raporturile juridice dau naștere la relații constante care în desfășurarea lor formează logica înregistrărilor după sistemul de calcul digrafic.

a) *Dacă un element de activ sporește și pasivul rămîne neschimbat, un alt element de activ se reduce.*

b) *Dacă un element de pasiv se reduce și activul rămîne neschimbat, un alt element de pasiv sporește.*

c) *Dacă un element de pasiv sporește și nu se reduce alt element de pasiv, activul sporește.*

d) *Dacă un element de activ se reduce şi nu sporeşte alt element de activ, pasivul se reduce.*

Însemnînd activul cu A, pasivul cu P, şi cu x — variabila cu care se reduc sau se sporesc elementele de activ şi de pasiv, obţinem următoarele egalităţi :

(1) $A + x - x = P$, (2) $A = P + x - x$,

(3) $A + x = P + x$, (4) $A - x = P - x$.

Raţionamentul logic ne conduce mai departe să observăm armonia în care se balansează părţile componente ale construcţiei sistemului de calcul contabil digrafic.

a) *Dacă un element de activ sporeşte şi un alt element de activ se reduce cu mai puţin, pasivul sporeşte.*

b) *Dacă un element de activ se reduce şi un alt element de activ sporeşte cu mai puţin, pasivul se reduce.*

c) *Dacă un element de pasiv se reduce şi un alt element de pasiv sporeşte cu mai puţin,* (adică sporirea este mai mică decît reducerea), *activul se reduce.*

d) *Dacă un element de pasiv sporeşte şi un alt element de pasiv se reduce cu mai puţin,* (adică cu o valoare mai mică decît aceea înregistrată de sporirea celuilalt element), *activul sporeşte.*

Vom însemna iarăşi activul cu A, pasivul cu P, cu x' — sporirile de activ sau de pasiv, cu x'' — reducerile de activ sau de pasiv, cu X — modificarea totală ($X = x' + x''$). Se obţin următoarele egalităţi :

(5) $A + X - x'' = P + x'$, (6) $A - X + x' = P - x''$,

(7) $A - x'' = P - X + x'$, (8) $A + x' = P + X - x''$.

Concluziile acestor silogisme sînt reguli cu valoare de aplicare generală şi permanentă. Urmărind astfel, logic, modificările activului şi ale pasivului, aflăm o explicaţie cauzală pentru egalitatea $D = C$ (debit = credit).

Sporirile de activ se înregistrează la debitul conturilor de activ, reducerile de activ se înregistrează la creditul conturilor de activ. Reducerile de pasiv se înregistrează la debitul conturilor de pasiv, sporirile de pasiv se înregistrează la creditul conturilor de pasiv.

Prin urmare, sporirile de activ şi reducerile de pasiv se înregistrează în debitul conturilor, iar reducerile de activ şi sporirile de pasiv, la creditul conturilor.

Principiul $A = P$ deschide şi calea altor judecăţi de valoare, spre pildă cele privitoare la mişcările de valori generatoare de rezultate [9]. Iată două exemplificări :

a) *Sporirea unui element de activ cu mai mult decît valoarea cu care se reduce un alt element de activ produce un rezultat pozitiv.*

b) *Reducerea unui element de activ cu mai mult decît valoarea cu care sporeşte un alt element de activ produce un rezultat negativ.*

Acest principiu oferă raţiune suficientă pentru punerea în funcţiune a conturilor rectificative şi delimitative.

Se deschide mai departe şi calea raţionamentului prin analogie în teoria contabilităţii.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de economie de ramură

BIBLIOGRAFIE

1. Aristotel, *Met.* A, I, 1013.
2. Kresse-Geissler, *Das Rechnungswesen der Industriebetriebe,* V. u. W. V. V., Berlin, 1957.
3. Voina D., *Poziţia contabilităţii faţă de studiul exploatărilor economice,* tip. Tribuna, Braşov, 1946.
4. Rusu D., *Este sau nu ştiinţă contabilitatea?,* Braşov, 1948.
5. *** *Bazele evidenţei contabile,* Ed. Şt., Buc., 1962.
6. Rusu D., Evid. contab., 1958, *3.*
7. Afanasiev A. A., *Bazele întocmirii bilanţului,* E.F.S., Buc., 1954, (trad. din limba rusă).
8. Гальперин И. М., *Теория балансового учета,* Госпланиздат, М., 1938.
9. Voina D., *Contabilitate generală,* Braşov, 1947.

ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП В ТЕОРИИ БУХГАЛТЕРИИ

(Резюме)

Исходя из причинного соотношения — актив равен пассиву — автор замечает, что движение ценностей, вызванное экономическими явлениями и юридическими отношениями, порождаем постоянные соотношения созданные логикой регистрирования по системе диграфического расчета :

а) Если один из элементов актива растет, а пассив остается неизменным, другой элемент актива сокращается.

б) Если один из элементов пассива сокращается, а актив остается неизменным, другой элемент пассива возрастает.

в) Если один из элементов пассива растет и другой элемент пассива не сокращается, яктив возрастает.

г) Если один из элементов актива сокращается и не растет другой елемент актива, пассив сокращается.

д) Если один из элементов актива растет и другой элемент актива сокращается соответственно меньше, пассив возрастает.

е) Если один из элементов актива сокращается и другой элемент актива возрастает соответственно меньше, пассив сокращается.

ж) Если один из элементов пассива сокращается и другой элемент пассива возрастает соответственно меньше, пассив сокращается.

з) Если один из элементов пассива растет и другой элемент пассива сокращается соответственно меньше, актив возрастает.

и) Возрастание одного из элементов актива на величину большую, чем сокращение другого элемента актива, вызывает позитивный результат.

к) Сокращение одного из элементов актива на величину большую, чем возрастание другого элемента актива вызывает негативный результат.

UN PRINCIPE FONDAMENTAL DANS LA THÉORIE DE LA COMPTABILITÉ

(Résumé)

Compte tenu de la relation causale Actif = Passif, l'Auteur constate que les mouvements de valeurs produites par les phénomènes économiques et par les rapports juridiques sont la source d'un nombre de relations constantes, en constituant la logique des enregistrements d'après le système digraphique, à savoir :

a) Si un élément de l'actif augmente et le passif reste inchangé, un autre élément de l'actif diminue.

b) Si un élément du passif diminue et l'actif reste inchangé, un autre élément du passif augmente.

c) Si un élément du passif augmente et ne diminue pas un autre élément du passif, l'actif augmente.

d) Si un élément de l'actif diminue et n'augmente pas un autre élément de l'actif, le passif diminue.

e) Si un élément de l'actif augmente et un autre élément de l'actif diminue moindre que l'augmentation du premier élément, le passif augmente.

f) Si un élément de l'actif diminue et un autre élément de l'actif augmente moindre que la diminution du premier élément, le passif augmente.

g) Si un élément du passif diminue et un autre élément du passif augmente moindre que la diminution du premier élément, l'actif diminue.

h) Si un élément du passif augmente et un autre élément du passif diminue moindre que l'augmentation du premier élément, l'actif augmente.

i) L'augmentation d'un élément de l'actif d'une quantité plus grande que la diminution d'un autre élément de l'actif produit un résultat positif.

j) La diminution d'un élément de l'actif d'une quantité plus grande que l'augmentation d'un autre élément de l'actif produit un résultat négatif.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul VIII (XII), Fasc. 3–4, 1962

ELENA COCEA

1913—1962

La 30 noiembrie 1962, după 13 zile de la părăsirea locului de muncă, a încetat din viaţă profesorul dr. Elena Cocea, un distins cadru didactic al facultăţii de chimie industrială de la Institutul politehnic din Iaşi şi un valoros cercetător al Institutului de chimie „Petru Poni" al Academiei R.P.R., filiala Iaşi.

Elena Cocea s-a născut la 16 martie 1913 în comuna Negri, reg. Bacău, dintr-o familie de învăţători, cu numeroşi copii. A urmat şcoala primară în satul natal împreună cu copiii de ţărani. Acolo, eleva de atunci a cunoscut, în contrast cu măreţia holdelor bogate, toată gama de suferinţe a celor din jur. Dragostea faţă de cei obijduiţi s-a transformat în impulsul de ajutorare şi îndrumare a studenţilor şi colaboratorilor săi, fiii poporului muncitor.

După absolvirea cursurilor de liceu din oraşul Roman, a urmat cursurile superioare, secţia chimie, la facultatea de ştiinţe a Universităţii din Iaşi, unde cu toate lipsurile materiale s-a relevat ca o studentă eminentă, conştiincioasă şi plină de simţul datoriei, luîndu-şi diploma de licenţă în chimie în octombrie 1936, cu menţiunea maximă.

Din anul 1937 a lucrat oncrific şi apoi ca chimist salariat în laboratorul de chimie al Institutului de igienă din Iaşi. In acest laborator, Elena Cocea, pe lîngă obligaţiile ser-

viciului, a elaborat cu rîvnă lucrarea de doctorat privind *Studiul oxidanților, clorului, bromului, iodului, hipocloritului, hipobromitului și hipoioditului de sodiu asupra acțiunii hidrolitice a pepsinei* și în urma susținerii tezei de doctorat, în iunie 1941, comisia de examinatori i-a acordat mențiunea „foarte bine, cu distincție".

Între anii 1939—1942 a funcționat ca asistent onorific la disciplina chimie generală la facultatea de electrotehnică a Politehnicii „Gh. Asachi", Iași.

La 1 octombrie 1942, în urma susținerii concursului, a fost numită șef de lucrări la laboratorul de chimie organică a Politehnicii „Gh. Asachi". În această calitate a depus eforturi deosebite pentru organizarea laboratorului de chimie organică a politehnicii — care se despărțea de Universitate — cît și pentru inițierea, conducerea și îndrumarea lucrărilor de laborator cu studenții anilor III și IV.

Concomitent cu îndeplinirea funcției de șef de lucrări în anii 1945—1948, dr. Elena Cocea, în calitate de conferențiar cu delegație, a ținut cursuri de chimie generală la facultățile de electrotehnică și construcții, cursuri caracterizate prin precizie și conținut legat de specificul facultăților respective.

În 1948 a fost numită conferențiar, în 1953 — profesor și apoi în 1961 — profesor șef de catedră la facultatea de chimie industrială, unde și-a dezvoltat activitatea în domeniul compușilor macromoleculari de sinteză, plastice, fibre și cauciuc, domeniu de specializare în care se făceau primii pași la institutele noastre politehnice.

Cursurile de chimia și tehnologia maselor plastice și a cauciucurilor și cel de chimia compușilor macromoleculari, predate de dr. Elena Cocea în calitate de conferențiar și apoi de profesor, se caracterizau prin precizie, expunere clară și atrăgătoare, documentare la nivel înalt, cu achizițiile cele mai recente ale științei. Stimula munca de creație la cercurile studențești de cercetare, cercuri distinse cu diplome de onoare și premii la diferite sesiuni studențești pe țară și seminarii naționale.

În perioada 1946—1949, dr. Elena Cocea a lucrat și ca asistent la Institutul național de cercetări tehnologice al Ministerului Minelor și Petrolului, filiala Iași, iar din 1950 a activat în calitate de colaborator științific și apoi de șef de sector la Institutul de chimie „Petru Poni" al Academiei R.P.R., filiala Iași.

Din anul 1957 a onorat cu competență funcția de secretar științific al Consiliului științific al facultății de chimie industrială.

Prof. dr. Elena Cocea a fost un membru devotat al Partidului Muncitoresc Romîn.

De la susținerea tezei de doctor în chimie pînă la sfîrșitul vieții, prof. dr. Elena Cocea a dus o muncă științifică continuă, comunicînd și publicînd peste 40 de lucrări științifice efectuate în calitate de cadru didactic și de cercetător la Institutul de chimie „Petru Poni" al Academiei R.P.R., filiala Iași.

În cercetarea științifică, prof. dr. Elena Cocea depunea un deosebit interes, o serioasă exigență și mult simț critic.

În lucrarea de doctorat a rezolvat și o problemă importantă referitoare la metabolismul substanțelor în organisme, cînd în apa potabilă se introduc substanțe oxidante pentru combaterea microorganismelor patogene.

Lucrările ce au urmat conțin direcții noi și interesante de cercetare.

În domeniul organic, lucrările referitoare la studiul combinațiilor carbonilice, derivații de condensare ai acenaftenchinonei și benzoinei cu nitrofenoli și aminofenoli, au condus la sinteze de coloranți, noi derivați de fenantren și derivați cumaronici.

Cercetările asupra transformărilor și regrupărilor structurale ale derivaților nitrici relevă probleme interesante de structură și de aplicații ale coloranților obținuți.

Studiile asupra uleiurilor eterice din frunze de conifere au fost folosite de industrie.

Cercetările în domeniul fenoplastelor rezolvă probleme de structură, iar fenoplastele de turnare, realizate în cercetările sale, au intrat în experimentare industrială la Combinatul chimic din Făgăraș.

Studiile întreprinse în domeniul cauciucurilor poliuretanice, referitoare la sinteza și cinetica reacțiilor de poliadiție, se transpun în practică în stație pilot la Borzești.

Cercetările asupra polimerilor analogi, prin grefarea catenelor, alcătuiesc un model de interpretare și de lucru, care a condus la sintetizarea de materiale plastice colorate prin structura lor chimică, materiale colorante în același timp pentru alte plastice și fibre sintetice.

Lucrările în domeniul folosirii materiilor prime și în domeniul materialelor plastice cu bor, conturează alte direcții de cercetare.

Valoarea lucrărilor prof. dr. Elena Cocea rezultă din aprecierea remarcabilă pe plan mondial, de care se bucură acestea.

În alegerea lucrărilor ce se efectuau în catedră, la cercurile de studii studențești și la Institutul de chimie „Petru Poni", prof. dr. Elena Cocea considera în mod permanent atît scopul științific cît și posibilitățile de aplicație practică

Prof. dr. Elena Cocea a contribuit în nelimitată măsură la ridicarea de cadre. Asocia la lucrările sale șefii de lucrări și asistenții de catedră, care găseau la dînsa un larg simț de înțelegere, ce se manifesta în sfaturi și îndrumări în muncă.

Era mobilul personalului din cele două catedre, organică și industrii organice. Era tot timpul în școală, depășind cu mult orele unei norme didactice. Avea o deosebită atenție față de studenții de la cercurile de studii, cărora le recomanda prin vorbe calde și atitudine hotărîtă dragostea pentru meseria aleasă. Îi iniția în experimentarea de laborator, dezvoltîndu-le aptitudini de cercetare și apoi îi trimitea în fabrică pentru a valorifica industrial rezultatele obținute. Cu cercetările întreprinse în laborator și fabrică, studenții își expuneau cu mîndrie rezultatele obținute, în diferitele sesiuni ale cercurilor științifice studențești.

În cursurile ținute studenților, în discuțiile asupra proiectelor de diplomă, releva acțiunile mărețe de industrializare a țării noastre. Le recomanda munca de pregătire temeinică pentru ca să devină constructorii vieții noi, constructori de nădejde ai socialismului.

Generațiile de ingineri din industrie, pregătiți în ambianța călduroasă dirijată cu mult simț de răspundere de prof. dr. Elena Cocea, își amintesc cu mult drag și nețărmurită admirație de învățătura temeinică căpătată în școală.

Prof. dr. Elena Cocea aducea la îndeplinire cu promptitudine și simț de răspundere toate sarcinile trasate pe linie de decanat sau de partid.

Ca îndrumătoare a studenților din anii IV și V, participa la întrunirile lor, ridicînd prin cuvîntul său nivelul discuțiilor și fructificînd prin propunerile sale comportarea în muncă a studenților.

Prof. dr. Elena Cocea s-a identificat în gradul cel mai înalt cu menirea școalei superioare, cu îndatoririle didactice, educative și științifice, oferind din plin calitățile sale și munca nelimitată pentru pregătirea multor serii de ingineri și cercetători, într-un spirit de înalt patriotism, pentru construcția socialismului în țara noastră.

Pentru merite didactice și științifice, prof. dr. Elena Cocea a fost distinsă în două rînduri cu Medalia Muncii.

Prof. dr. Elena Cocea a murit în floarea vîrstei, în plină activitate de creație. Dispariția sa este o pierdere grea pentru facultatea de chimie industrială a Institutului politehnic din Iași și pentru Institutul de chimie „Petru Poni" al Academiei R.P.R., filiala Iași.

Prof. dr. ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei R.P.R.

LISTA LUCRĂRILOR ORIGINALE

1. *L'influence du chlore, de l'hypochlorite de sodium et de l'iode sur l'action hydrolytique de la pepsine,* (în colaborare cu I. Matei), Ann. sci. Univ. Jassy, 1940, **26**, *1*, p. 41.
2. *L'influence du chlore, du brome, de l'iode, de l'hypochlorite, de l'hipobromite et de l'hypoiodite de sodium sur l'action hydrolytique de la pepsine,* (în colab. cu I. Matei), Ann. sci. Univ., Jassy, 1941, **27**, *2*, p. 471.
3. *Kondensation von Acenaphthenchinon mit* o- *und* p- *Nitrophenol,* (în colab. cu I. Matei), B., 1945, **77**, S. 714.
4. *Condensarea acenaftenchinonei cu* o- *și* p- *nitrofenol,* (în colab. cu I. Matei), Rev. „V. Adamachi", 1944, **XXX**, *2—3*.
5. *Étude des huiles extraites des feuilles des conifères,* (în colab. cu I. Matei), Bul. Inst. polit. Iași, 1948, **3**, *1*, p. 416.
6. *Uleiuri eterice din frunze de pin din R.P.R.,* (în colab. cu I. Matei), Lucr. ses. gen. șt. Acad. R.P.R., iunie 1950, p. 1740.
7. *Uleiuri eterice din frunze de pin din Republica Populară Romînă,* (în colab. cu I. Matei), Rev. de Chimie, ASIT, 1950, *2—3*, p. 111.
8. *Uleiuri eterice din frunze de pin și întrebuințări,* (în colab. cu I. Matei), Comunicare prezentată în ședința din 11 iunie 1951, secția de Chimie, Acad. R.P.R.

9. *Contribuţii la prepararea răşinilor fenolice de turnare*, (în colab. cu I. Matei şi M. Grigoraş), Rev. de Chimie, ASIT, 1951, *10—11*, p. 19.
10. *Acţiunea catalitică a clorurii de sodiu în formarea aminoplastelor*, (în colab. cu I. Matei şi Cr. Mărculescu), St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1952, **III**, *1—4*, p. 204.
11. *Posibilităţi de valorificare a reziduurilor de la rafinarea cu furfurol a uleiurilor lubrefiante. Extract Fracţia V. Produse intermediare şi coloranţi*, (în colab. cu I. Matei şi Cr. Mărculescu), St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1953, **IV**, *1—2*, p. 267.
12. *Contribuţii la studiul răşinilor fenolice de turnare*, (în colab. cu I. Matei şi M. Grigoraş), St. şi cerc. Chimie, Acad. R.P.R , Buc., 1953, **I**, p. 89.
13. *Posibilităţi de valorificare a reziduurilor de la rafinarea cu furfurol a uleiurilor lubrefiante. Coloranţi. (II)*, (în colab. cu I. Matei, Cr. Mărculescu şi Gh. Lupuşor), St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1954, **IV**, *1—2*, p. 119.
14. *Condensarea benzoinei cu* o- *şi* p-*nitrofenol*, (în colab. cu I. Matei şi M. Tutoveanu), Rev. Univ. „Al. I. Cuza" şi a Inst. polit. Iaşi, 1954, **I**, *1—2*, p. 85
15. *Condensarea benzoinei cu* m-*nitrofenol*, (în colab. cu I. Matei şi T. Lixandru), Rev. Univ. „Alex. I. Cuza" şi a Inst. polit. Iaşi, 1955, **II**, *1—2*, p. 185.
16. *Un nou colorant pe bază de* m-*aminofenol*, (în colab. cu I. Matei), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **I (V)**, *1—2*, p. 191.
17. *Condensarea benzoinei cu* m- *şi* p-*aminofenol*, (în colab. cu I. Matei şi T. Lixandru), Bul. Inst. polit, Iaşi, 1955, **I (V)**, *1—2*, p. 89.
18. *Contribuţii la prepararea maselor plastice presate pe bază de fenol-furfurol*, (în colab. cu M. Grigoraş), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3—4*, p. 157.
19. *Contribuţii la studiul transformărilor şi regrupărilor structurale ale derivaţilor nitrici. Coloranţi din* o- *şi* p-*nitrofenol*, (în colab. cu I. Matei şi M. Tutoveanu), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1956, **VII**, *1*, p. 215.
20. *Răşini pentru lacuri pe bază de benzoină şi* m-*aminofenol*, Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3—4*, p. 147.
21. *Transformări şi regrupări structurale ale derivaţilor nitrici. Produse intermediare la transformarea* o-*nitrofenolului. Coloranţi. (II)*, (în colab. cu I. Matei), St. şi cerc. Chimie, Acad. R.P.R., Buc. 1957, V, *2*, p. 241.
22. *Răşini pentru plastice şi lacuri pe bază de fenoli din gudroane de lemn de fag*, (în colab. cu I. Matei, M. Grigoraş, S. Vasiliu şi E. Comaniţă), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *1—2*, p. 67.
23. *Transformări şi regrupări structurale ale derivaţilor nitrici. Coloranţi din nitrobenzen (III)*, (în colab. cu I. Matei), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P R., filiala Iaşi, 1957, **VIII**, *1*, p. 171.
24. *Polymères analogues. (I)*, (în colab. cu Cr. Mărculescu şi M. Grigoraş), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, p 159
25. *Polymères analogues. (II)*, (în colab. cu Cr. Mărculescu şi M. Grigoraş), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, p. 167.
26. *Polymères analogues. (III)*, (în colab. cu Cr. Mărculescu şi M. Grigoraş), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, p. 171.
27. *Poliesteri borici*, Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, p. 191.
28. *Un nou produs de condensare a benzoinei cu* p-*aminofenol. Reactiv pentru dozarea cuprului*, (în colab. cu I. Matei), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, p. 175.
29. *Contribuţii la mecanismul de oxidare a* p-*nitrotoluenului*, (în colab. cu I. Matei, Cr. Mărculescu, A. Petruş şi A. Caraculacu), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1958, **X**, *2*, p. 247.
30. *Sinteza 4,4'—diizocianatului de dibenzil*, (în colab. cu I. Matei, Cr. Mărculescu, A. Petruş şi A. Caraculacu), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1959, **X**, *2*, p. 261.
31. *Cauciuc poliuretanic pe bază de 4 4' - diizocianat de dibenzil*, (în colab, cu I. Matei, A. Petruş şi A. Caraculacu), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. R. R., filiala Iaşi, 1960, **XI**, *2*, p. 379.
32. *Copolicondensate fenolice de turnare*, (în colab. cu M. Grigoraş şi S. Vasiliu), Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII (XI)**, *1—2*, p. 129.
33. *Contribuţii la chimizarea acenaftenchinonei*, Comunicare prezentată la simpozionul aniversării a 100 ani a structurii chimice a lui A. M. Butlerov, Leningrad, 12—15 dec. 1961.
34. *Consideraţii teoretice asupra sintezei cauciucului poliuretanic pe bază de dibenzil—diizocianat*, (în colab. cu I. Matei, A. Caraculacu şi A. Petruş), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1962, **XIII**, *1*, p, 109.

35. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, produşi de plecare şi intermediari. (V)*, (în colab. cu I. Matei şi A. Petruş), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1962, **XIII**, *2*, p. 231.
36. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, de produşi de plecare şi intermediari. (VI)*, (în colab. cu I. Matei şi A. Petruş), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1962, **XIII**, *2*, p. 241.
37. *Sinteze de elastomeri poliuretanici, de produşi de plecare şi intermediari. (VII)*, (în colab. cu I. Matei şi A. Petruş), St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi, 1963, **XIV**, *1*, (sub tipar).
38. *Polimeri analogi. Coloranţi copolimeri trifenil metanici, derivaţi din copolimerul stiren—anhidridă maleică*, (în colab. cu M. Grigoraş şi M. Tutoveanu), Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962.
39. *Transformări analoge ale copolimerilor stiren—anhidridă maleică prin aplicarea reacţiei Perkin—lactone copolimere*, (în colab. cu M. Grigoraş şi M. Tutoveanu), Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962.
40. *Acizi polihidroxamici şi coloranţi copolimeri derivaţi din copolimerul stiren—anhidridă maleică*, (în colab. cu M. Grigoraş şi M. Tutoveanu), Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962.
41. *Bloc copolicondensate fenolice*. Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962.